ROČNÍK 66. SEŠIT 4.

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ

MATEMATIKY A FYSIKY

Redaktoři:

VOJTĚCH JARNÍK a FRANTIŠEK ZÁVIŠKA

VYDÁVÁ VLASTNÍM NÁKLADEM

JEDNOTA ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

za podpory ministerstva školství a národní osvěty.

JČMF

PRAHA 1937.

Ročně 4 sešity. **Předplatné (pro nečleny) 120 Kč.**

Journal Tchécoslovaque de Mathématiques et de Physique.
Éditeur: Jednota čsl. matematiků a fysiků, Praha II-609, Tchécoslovaquie.
Abonnement pour un an 120 Kč. Chèques postaux: Praha 13103.

Année 66 **Fascicule 4** **1936/37**

Obsah — Sommaire

ČÁST VĚDECKÁ

Část matematická — Travaux mathématiques

Část fysikální. — Travaux de physique.

Tento sešit vyšel 15. června 1937.

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY A FYSIKY

ČÁST MATEMATICKÁ

Faisceaux de Darboux et questions connexes dans l'espace affine courbe.

V. Hlavatý, Praha.

(Conférences tenues à l'Université de Bucarest.)

(Reçu le 7 décembre 1936.)

Introduction.

Étant donnée une surface dans l'espace plan à trois dimensions, on peut construire en chaque point régulier de la surface le faisceau de quadriques de Darboux. Parmi ces quadriques, il y en a une (d'ordre 4) privilégiée, à savoir celle de Lie, généralisée par M. Čech pour le cas à plusieurs dimensions. Dans le cas général d'une hypersurface (non)holonome, plongée dans un espace à n dimensions à connexion linéaire générale (symétrique ou non), le problème analogue n'a pas été jusqu'alors étudié. (Dans le travail cité à la page 233 les auteurs ont étudié un cas particulier d'une hypersurface holonome, plongée dans l'espace projectif à la connexion symétrique.) La première partie de ce Mémoire est consacré à l'étude de ce cas général. Nous trouverons deux faisceaux de tenseurs[1]) quadratiques d'ordre 3 (2 dans le cas non holonome) dont chacun présente une certaine analogie au faisceau de quadriques de Darboux. Dans chacun de ces faisceaux on peut privilégier un tenseur quadratique moyennant des conditions géométriques d'ordre 4 (3 dans le cas non holonome). Nous appellerons ce tenseur „tenseur de M. Čech".

Dans la seconde partie de ce Mémoire nous étudions en détail le problème de la normale affine de l'hypersurface (non) holonome en jeu.[2]) En particulier nous construirons un faisceau linéaire de normales affines d'ordre 3 (2) dont l'une est intimement liée au second des faisceaux de tenseurs, mentionnés plut haut. Chaque

[1]) Nous appellerons „tenseur" chaque grandeur symétrique ou non symétrique.

[2]) Cfr. le travail de l'auteur cité à la page 243 et de plus la Note dans Kon. Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, *38*, 738—743 (1935).

normale d'ordre 3 (2) induit dans l'hypersurface une connexion d'ordre 3 (2), dont quelques unes constituent un système, dont des éléments sont définis moyennant un nombre réel z. La valeur $z = 0$ nous mène aux équations bien connues de Mainardi-Codazzi.

On sait bien que si l'espace ambiant est un espace métrique (conforme), on peut construire une direction orthogonale à l'hypersurface en jeu, quelle qu'elle soit la connexion métrique de l'espace ambiant, pourvu qu'elle soit déduite d'une métrique quadratique qui conserve l'orthogonalité à l'hyperplan tangent de l'hypersurface. Dans le cas général affine que nous étudions dans ce Mémoire, une telle construction, indépendante de la connexion de l'espace ambiant, est impossible. En effet, nous démontrons à la fin de ce travail que l'on peut transformer — moyennant une transformation affine d'ordre 3 (2) de la connexion correspondante — n'importe quelle normale d'ordre 3 (2) en n'importe quelle autre normale d'ordre 3 (2) donnée d'avance. Autrement dit, toutes les normales d'ordre 3 (2) sont équivalentes du point de vue affine.

Le Mémoire présent nous servira comme base à l'étude — déjà rédigée, mais pas encore publiée — du cas plus général d'une hypersurface (non)holonome, plongée dans l'espace projectif à n dimensions, à connexion projective générale (symétrique ou non symétrique).[3])

(1) Notions fondamentales.

Désignons par x^ν [4]) des coordonnées curvilignes d'un espace L_n à n dimensions, doué d'une connexion aux coefficients $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}$. Imaginons donnée, dans L_n, une hypersurface X_{n-1} moyennant les équations paramétriques

$$x^\nu = x^\nu(y^{n+1}, \ldots, y^{2n-1}). \qquad (1, 1)$$

Ici et dans la suite nous n'envisagerons que des points de X_{n-1}, où la matrice

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial y^{n+1}}, & \ldots, & \dfrac{\partial x^n}{\partial y^{n+1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial x^1}{\partial y^{2n-1}}, & \ldots, & \dfrac{\partial x^n}{\partial y^{2n-1}} \end{matrix} \right\| \qquad (1, 2)$$

[3]) Cfr. Bortolotti-Hlavatý: „Contributi alla teoria delle connessioni I.“ (Annali di Matematica pura ed applicata, Ser. 4, Tomo *15*, 1—71, 1936—37.)

[4]) Des indices grecs parcourent les symboles 1, 2, . . ., n. Des indices latins (à l'exception de x, y, z) parcourent les symboles $n + 1, \ldots, 2n - 1$.

est du rang $n - 1$. Il s'ensuit que les $n - 1$ vecteurs contrevariants de L_n

$$\underset{a}{U^\nu}(y) = \frac{\partial x^\nu}{\partial y^a} \qquad (1, 3a)$$

sont linéairement indépendants. D'autre part, il est bien connu que si l'on envisage non seulement des transformations des coordonnées x^ν, mais en même temps aussi des transformations des coordonnées y^a, les $\frac{\partial x^\nu}{\partial y^a}$ constituent, par rapport à ces deux familles de transformations, un tenseur mixte, dit tenseur-unité de X_{n-1}. C'est par cette raison que nous écrirons aussi, à côté de (1, 3a),

$$U_a{}^\nu(y) = \frac{\partial y^\nu}{\partial y^a}. \qquad (1, 3b)$$

Il est bien connu qu'une hypersurface non holonome X_{n-1}^n peut être définie moyennant $n - 1$ champs vectoriels contrevariants, linéairement indépendants que nous voulons désigner par $\underset{a}{U^\nu}(x)$. Pour ne pas restreindre la généralité du problème, nous sommes forcés d'admettre, à côté des vecteurs $\underset{a}{U^\nu}(x)$, des vecteurs

$$\underset{a'}{U^\nu}(x) = A_{a'}{}^b(x)\, \underset{b}{U^\nu}(x) \qquad (1, 4)$$

comme équivalents. Ici $A_{a'}{}^b(x)$ est n'importe quel système de fonctions scalaires des x^ν, au déterminant $\neq 0$. Ces équations mêmes nous font voir que l'ensemble des fonctions $U(x)$ constitue un tenseur mixte, dit tenseur-unité de l'hypersurface non holonome en jeu. Nous le désignerons par $U_a{}^\nu(x)$.

Afin que nous puissions traiter le problème concernant l'hypersurface holonome en même temps que celui de l'hypersurface non holonome, nous ferons des conventions suivantes:

a) $X_{n-1}^{(n)}$ désignera ou bien X_{n-1}, ou bien X_{n-1}^n.

b) $\underset{a}{U^\nu} = \begin{Bmatrix} \underset{a}{U^\nu}(x) \\ \underset{a}{U^\nu}(y) \end{Bmatrix}$ pour une $\begin{matrix} X_{n-1}^n \\ X_{n-1} \end{matrix}$,

$U_a{}^\nu = \begin{Bmatrix} U_a{}^\nu(x) \\ U_a{}^\nu(y) \end{Bmatrix}$ pour une $\begin{matrix} X_{n-1}^n \\ X_{n-1} \end{matrix}$,

c) $A_b{}^{a'} = \frac{\partial y^{a'}}{\partial y^b}$, $A_{b'}{}^a = \frac{\partial y^a}{\partial y^{b'}}$ pour une X_{n-1},

tandis que les mêmes symboles désignerons n'importe quel système des fonctions scalaires des x^ν pour une X_{n-1}^n. Mais en tout cas nous supposerons

$$\Delta_i = \text{Dét}\mid A_b^{a'} \mid \neq 0. \text{[6]}$$

$$\Delta_e = \text{Dét}\left|\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\lambda}\right| \neq 0,$$

Par les mots „changement du repère" de $X_{n-1}^{(n)}$ nous entendrons une transformation des coordonnées y^a pour une X_{n-1}, ou bien une transformation (1, 4) pour une X_{n-1}^n.

d) $$\partial_a = \left\{\begin{matrix} U_a{}^\lambda \dfrac{\partial}{\partial x^\lambda} \\ \dfrac{\partial}{\partial y^a} \end{matrix}\right\} \text{pour une} \begin{matrix} X_{n-1}^n \\ X_{n-1} \end{matrix}.$$

Si ∇_μ est le symbole de la dérivée covariante par rapport à la connexion de l'espace ambiant L_n, nous écrirons ∇_a pour $U_a{}^\lambda\nabla_\lambda$

$$\nabla_a \equiv U_a{}^\lambda\nabla_\lambda.$$

Remarque. Partout, où nous voudrons accentuer que les U sont à envisager comme vecteurs de L_n (ce qui sera parfois nécessaire dans l'analyse) nous écrirons $\underset{a}{U^\lambda}$ en réservant les symboles $U_a{}^\lambda$ au cas où les U sont à regarder comme constituant le tenseur unité.

(2) Grandeurs fondamentales.

Si le vecteur e_λ désigne n'importe quelle solution du système

$$U_a{}^\lambda e_\lambda = 0, \tag{2, 1}$$

la solution la plus générale de ce système est manifestement

$$'e_\lambda = f e_\lambda, \tag{2, 2}$$

f étant n'importe quelle fonction de position. Cette équation sera dite dans la suite „le changement du facteur". Si une expression Φ change à cause de (2, 2) en

$$'\Phi = f^z\Phi, \tag{2, 3}$$

nous dirons quelle est du dégré $d = z$. Ainsi par exemple le tenseur

$$P_{ab} = U_b{}^\lambda\partial_a e_\lambda - \Gamma_{\lambda\mu}{}^\nu U_a{}^\mu U_b{}^\lambda e_\nu \equiv U_b{}^\lambda\nabla_a e_\lambda \tag{2, 4a}$$

est du dégré $d = 1$

$$'P_{ab} = f P_{ab}. \tag{2, 4b}$$

Si en particulier $d = 0$, nous dirons que l'expression en jeu est intrinsèque. En voici un exemple, dont nous aurons besoin plus tard: Soit T_λ le déterminant, multiplié par $(-1)^{\lambda+1}$, que l'on obtient de la matrice (1, 2)[5]) en y supprimant la colonne

$$\begin{matrix} U^{\lambda}_{n+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ U^{\lambda}_{2n-1} \end{matrix}$$

Cela étant, désignons par $'T_\lambda$ ce que devient T_λ dans un système nouveau de coordonnées $x^{\nu'}$, si l'on change en même temps et le repère et le facteur:

$$'T_{\lambda'} = \Delta_e \Delta_i^{-1} T_\nu \cdot \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\lambda'}}, \qquad \left(\Delta_e = \text{Dét.} \left\| \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\lambda} \right\| \right). \tag{2, 5}$$

T_λ est donc intrinsèque. Son poids extérieur (c'est-à-dire l'exposant de Δ_e) est $p_e = 1$.[6]) Son poids intérieur (c'est-à-dire l'exposant de Δ_i) est $p_i = -1$. Les nombres d, p_e, p_i constituent ce que nous appellerons ,,la caractéristique" de la grandeur en jeu, et désignerons par (d, p_e, p_i). Donc, T_λ est à la caractéristique $(0, 1, -1)$. Un autre exemple d'une grandeur intrinsèque est livré par le tenseur

$$H_{ab} = U_b{}^\lambda \partial_a T_\lambda - \Gamma_{\lambda\mu}{}^\nu U_a{}^\mu U_b{}^\lambda T_\nu \tag{2, 6}$$

à la caractéristique $(0, 1, -1)$. Ici et partout dans la suite nous supposerons que le rang de H_{ab} soit $n-1$. Il s'ensuit que P_{ab} est de même rang et de plus que l'on peut construire les grandeurs inverses P^{ab}, H^{ab} suivant la loi

$$\begin{aligned} P^{ab} P_{ac} &= P^{ba} P_{ca} = \delta_c{}^b, \\ H^{ab} H_{ac} &= H^{ba} H_{ca} = \delta_c{}^b, \end{aligned} \tag{2, 7}$$

où $\delta_c{}^b$ est le symbole bien connu de Kronecker. La caractéristique de P^{ab} est $(-1, 0, 0)$, tandis que H^{ab} est à la caractéristique $(0, -1, 1)$. Le déterminant H de H_{ab} est à la caractéristique $[0, n-1, -(n+1)]$ et par conséquent

$$t_\lambda = T_\lambda H^{-\frac{1}{n+1}} \text{ est à la caractéristique } \left(0, \frac{2}{n+1}, 0\right),$$

---

[5]) Si l'on a affaire à une X^n_{n-1}, on a à remplacer les $\dfrac{\partial x^\nu}{\partial y^a}$ dans (1, 2) par $U_a{}^\nu$. La grandeur T_λ est analogue à celle, (désignée aussi par T_λ) employée par MM. Schouten et Haantjes dans leur Mémoire ,,Zur allgemeinen projektiven Differentialgeometrie". [Compositio Mathematica, **3**, 1—51 (1936).]

[6]) Pour éviter tout malentendu, nous remarquons expressément que les indices e et i dans p_e, Δ_e et p_i, Δ_i ne sont pas des indices de covariance et ne signifient que l'abréviation pour ,,extérieur" resp. ,,intérieur".

$$h_{ab} = H_{ab} H^{-\frac{1}{n+1}} \text{ est à la caractéristique } \left(0, \frac{2}{n+1}, 0\right),$$

$$h^{ab} = H^{ab} H^{\frac{1}{n+1}} \qquad \text{,,} \qquad \left(0, \frac{-2}{n+1}, 0\right), \tag{2, 8}$$

$$h = \text{Dét}\, h_{ab} = H^{\frac{2}{n+1}} \qquad \text{,,} \qquad \left(0, \frac{2(n-1)}{n+1}, -2\right).$$

Remarquons en passant que grâce à l'équation

$$U_a{}^\lambda T_\lambda = 0 \tag{2, 9}$$

qui est la conséquence de la définition de T_λ on a non seulement

$$U_a{}^\lambda t_\lambda = 0, \tag{2, 10}$$

mais en même temps aussi

$$h_{ab} = U_b{}^\lambda \nabla_a T_\lambda H^{-\frac{1}{n+1}} = \\ = H^{-\frac{1}{n+1}} (U_b{}^\lambda \partial_a T_\lambda - \Gamma_{\lambda\mu}{}^\nu U_a{}^\mu U_b{}^\lambda T_\nu) = U_b{}^\lambda \nabla_a t_\lambda, \tag{2, 11}$$

	ordre (cas hol.)	ordre (cas non hol.)	d	p_e	p_i
$U_a{}^\nu$	1	0	0	0	0
e_λ	1	0	1	0	0
P_{ab}	2	1	1	0	0
P^{ab}	2	1	-1	0	0
T_λ	1	0	0	1	-1
H_{ab}	2	1	0	1	-1
H^{ab}	2	1	0	-1	1
t_λ	2	1	0	$\frac{2}{n+1}$	0
h_{ab}	2	1	0	$\frac{2}{n+1}$	0
h^{ab}	2	1	0	$-\frac{2}{n+1}$	0
h	2	1	0	$\frac{2(n-1)}{n+1}$	-2
t	2	1	-1	$\frac{2}{n+1}$	0

et que si l'on tient compte de (2, 7) et (2, 8) on en déduit

$$h^{ab}h_{ac} = h^{ba}h_{ca} = \delta_c{}^b. \tag{2, 12}$$

La dernière notion, dont nous aurons besoin plus tard et que par conséquent nous introduirons en ce lieu et celle de l'ordre: Si la construction d'une expression exige effectivement l'emploi du symbole $\partial_{a_1} \ldots \partial_{a_p}$ $\left(\text{ou bien } \dfrac{\partial^p}{\partial x^{\mu_1} \ldots \partial x^{\mu_p}}\right)$, mais si les symboles $\partial_{a_1} \ldots \partial_{a_q}$ $\left(\text{ou bien } \dfrac{\partial^q}{\partial x^{\mu_1} \ldots \partial x^{\mu_q}}\right)$ pour $q > p$ n'y interviennent pas, nous dirons que cette expression est d'ordre p.

Dans la figure (p. 234), le lecteur trouvera non seulement l'ordre des grandeurs jusqu'alors déduites, mais en même temps aussi les nombres qui constituent leurs caractéristiques. (La fonction t, qui figure dans la dernière ligne, est définie par l'équation (9, 1a).)

(3) Cas non holonome.

Dans ce §, nous ne traiterons que le cas d'une hypersurface non holonome, en cherchant un faisceau de tenseurs quadratiques du rang n que l'on peut adjoindre au point examiné de l'hypersurface, de manière que sa projection dans t_λ nous conduise aux directions asymptotiques. Le rang de h étant $n - 1$, on déduit facilement de (2, 11) que le rang du tenseur $\nabla_\mu t_\lambda$ est ou bien n, ou bien $n - 1$. Dans le premier cas, le tenseur du rang n et d'ordre 2

$$a_{\mu\lambda} = \nabla_\mu t_\lambda \tag{3, 1}$$

est à la caractéristique $\left(0, \dfrac{2}{n+1}, 0\right)$ et sa projection dans t_λ, à savoir

$$a_{\mu\lambda} U_a{}^\mu U_b{}^\lambda = h_{ab}$$

nous mène aux directions asymptotiques. Or si w est n'importe quelle fonction à la caractéristique $\left(0, \dfrac{-2}{n+1}, 0\right)$, le faisceau de tenseurs

$$*a_{\mu\lambda} = a_{\mu\lambda} + w\, t_\mu t_\lambda \tag{3, 2}$$

jouit des mêmes propriétés que le tenseur $a_{\mu\lambda}$ lui-même, pourvu que w ne soit une des racines de l'équation

$$\text{Dét.}\; | a_{\mu\lambda} + w\, t_\mu t_\lambda | = 0.$$

Examinons maintenant le second cas, où le rang du tenseur (3, 1) est $n - 1$. Le cas échéant il n'y a qu'une seule solution n^ν du système

$$n^\lambda \nabla_\mu t_\lambda = 0,\ n^\lambda t_\lambda = 1 \tag{3, 3a}$$

et cette solution est d'ordre 2, ayant la caractéristique $\left(0, \frac{-2}{n+1}\, 0\right)$.

Nous nous en servirons pour démontrer que le rang du tenseur (3, 2) est n pour $w \neq 0$. Introduisons à cet effet les grandeurs

$$\underset{x}{e^\nu} = \begin{cases} \underset{x}{U^\nu} & \text{pour } x = a \\ n^\nu & \text{pour } x = 2n \end{cases}$$
$$(x = n+1, \ldots, 2n)$$

et les expressions

$$A_{xy} = \underset{x}{e^\mu}\, \underset{y}{e^\lambda}\, {}^*a_{\mu\lambda}, \quad (x, y = n+1, \ldots, 2n).$$

On a en particulier

$$A_{ab} = h_{ab},\ A_{x\,2n} = \delta_x^{2n} w$$

et par conséquent le déterminant de A_{xy} peut être écrit

$$\text{Dét}\, |\, A_{xy}\, | = \begin{vmatrix} h_{ab} & 0 \\ A_{2n\,c} & w \end{vmatrix} = wh.$$

Parce que le rang des déterminants de ${}^*a_{\mu\lambda}$ et de A_{xy} est manifestement le même, la dernière équation prouve notre assertion.

Pour privilégier un des tenseurs (3, 2), introduisons avant tout le tenseur de courbure $R_{\omega\mu\lambda}{}^\nu$ et celui de torsion $S_{\omega\mu}{}^\nu$ de l'espace ambiant L_n

$$R_{\omega\mu\lambda}{}^\nu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Gamma_{\lambda\omega}{}^\nu - \frac{\partial}{\partial x^\omega} \Gamma_{\lambda\mu}{}^\nu + \Gamma_{\alpha\mu}{}^\nu \Gamma_{\lambda\omega}{}^\alpha - \Gamma_{\alpha\omega}{}^\nu \Gamma_{\lambda\mu}{}^\alpha$$
$$S_{\omega\mu}{}^\nu = \Gamma_{[\omega\mu]}{}^\nu = \frac{1}{2}\left(\Gamma_{\omega\mu}{}^\nu - \Gamma_{\mu\omega}{}^\nu\right)$$

et de plus, le tenseur dans L_n

$$h^{\lambda\nu} = h^{ab} U_a{}^\lambda\, U_b{}^\nu. \tag{3, 3b}$$

Cela étant, remarquons que l'identité bien connue de Padova-Bianchi nous donne

$$2h^{\omega\lambda} \nabla_{[\omega} \nabla_{\mu]} t_\lambda = h^{\omega\lambda}(R_{\omega\mu\lambda}{}^\nu t_\nu + 2S_{\omega\mu}{}^\alpha \nabla_\alpha t_\lambda), \tag{3, 4a}$$

d'où il suit

$$\begin{aligned} h^{\omega\lambda} \nabla_\omega \nabla_\mu t_\lambda &= h^{\omega\lambda} \nabla_\mu \nabla_\omega t_\lambda + 2h^{\omega\lambda} \nabla_{[\omega} \nabla_{\mu]} t_\lambda = \\ &= h^{\omega\lambda}(\nabla_\mu \nabla_\omega t_\lambda + R_{\omega\mu\lambda}{}^\nu t_\nu + 2S_{\omega\mu}{}^\alpha \nabla_\alpha t_\lambda). \end{aligned} \tag{3, 4b}$$

D'autre part, en tenant compte de (2, 11) et (3, 3b), on trouve

$$h^{\omega\lambda} \nabla_\omega t_\lambda = h^{ab} h_{ab} = n - 1. \tag{3, 4c}$$

Or, les équations (3, 4) et l'équation du faisceau en jeu

$${}^*a_{\mu\lambda} = \nabla_\mu t_\lambda + w\, t_\mu t_\lambda \tag{3, 5}$$

nous autorisent à écrire

$$h^{\omega\lambda}\nabla_\omega{}^*a_{\mu\lambda} = h^{\omega\lambda}(\nabla_\omega\nabla_\mu t_\lambda + w t_\mu \nabla_\omega t_\lambda) = \\ = h^{\omega\lambda}\nabla_\mu \nabla_\omega t_\lambda + (n-1)\, w t_\mu + \\ + h^{\omega\lambda}(R_{\omega\mu\lambda}{}^\nu t_\nu + 2S_{\omega\mu}{}^\alpha \nabla_\alpha t_\lambda). \tag{3, 6}$$

Cette équation peut être simplifiée à cause de (3, 4c), d'où l'on déduit

$$h^{\omega\lambda}\nabla_\mu\nabla_\omega t_\lambda = -(\nabla_\mu h^{\omega\lambda})\,\nabla_\omega t_\lambda.$$

Nous pouvons donc écrire, grâce à (3, 6)

$$n^\mu h^{\omega\lambda}\nabla_\omega{}^*a_{\mu\lambda} = -n^\mu(\nabla_\mu h^{\omega\lambda})\,\nabla_\omega t_\lambda + (n-1)\, w + \\ + n^\mu h^{\omega\lambda}(R_{\omega\mu\lambda}{}^\nu t_\nu + 2S_{\omega\mu}{}^\alpha\nabla_\alpha t_\lambda). \tag{3, 7}$$

Parmi des tenseurs du faisceau (3, 5) il y en a un privilégié, pour lequel le vecteur $h^{\omega\lambda}\nabla_\omega{}^*a_{\mu\lambda}$ dans l'espace affine plan ($R_{\omega\mu\lambda}{}^\nu = 0$) et sans torsion ($S_{\omega\mu}{}^\nu = 0$) soit incident avec n^ν. C'est le tenseur défini moyennant (3, 5), où

$$w = \frac{1}{n-1}\, n^\mu(\nabla_\mu h^{\omega\lambda})\,\nabla_\omega t_\lambda. \tag{3, 8}$$

En effet, si l'on substitue cette valeur dans (3, 7), on obtient

$$n^\mu h^{\omega\lambda}\nabla_\omega{}^*a_{\mu\lambda} = n^\mu h^{\omega\lambda}(R_{\omega\mu\lambda}{}^\nu t_\nu + 2S_{\omega\mu}{}^\alpha\nabla_\alpha t_\lambda), \tag{3, 9a}$$

d'où il suit pour l'espace plan et sans torsion

$$n^\mu h^{\omega\lambda}\nabla_\omega{}^*a_{\mu\lambda} = 0. \tag{3, 9b}$$

Le tenseur $h^{\omega\lambda}$ étant d'ordre 1 pour une X^n_{n-1}, la fonction w, définie par (3, 8), et par conséquent aussi le tenseur privilégié sont d'ordre deux:

A chaque point d'une X^n_{n-1}, où le rang du tenseur $\nabla_\mu t_\lambda$ est $n-1$, on peut adjoindre un faisceau de tenseurs quadratiques (3, 5) d'ordre deux, du rang n (pour $w \neq 0$). Parmi ces tenseurs, il n'y en a qu'un d'ordre deux, pour lequel résulte valable l'équation (3, 9a). C'est le tenseur qui correspond à la valeur (3, 8).

En suivant l'analogie du cas classique (d'une surface holonome dans l'espace plan à trois dimensions) on pourrait appeler „faisceau de Darboux" le faisceau (3, 5) et le tenseur privilégié „tenseur de M. Čech". Mais remarquons expressément que dans le cas classique le faisceau de quadriques de Darboux est constitué par des quadriques d'ordre trois et la quadrique de Lie (généralisée pour $n > 3$ par M. Čech) est d'ordre quatre. C'est par cette raison que nous n'adopterons pas ces dénominations dans ce cas, en les réservant pour d'autres faisceaux, étudiés dans des §§ suivants. (L'abaissement de l'ordre dans notre cas est dû au fait qu'une hypersurface non holonome nous permet de construire l'hyperplan tangent, dans n'importe quel point de l'espace ambiant, tandis que des hyperplans tangents d'une hypersurface holonome n'existent que le long de l'hypersurface en jen.)

(4) Cas général. Premier faisceau de Darboux.

Dans ce § nous reprenons le cas général d'une $X_{n-1}^{(n)}$ dans L_n, en cherchant un faisceau de tenseurs symétriques, quadratiques, du rang n, adjoint au point de l'hypersurface en jeu de manière que sa projection dans t_λ nous conduise aux directions asymptotiques. Cherchons à cet effet la solution $a_{\mu\lambda} = a_{\lambda\mu}$ du système

$$a_{\mu\lambda} U_a{}^\mu U_b{}^\lambda = h_{(ab)} = \frac{1}{2}(h_{ab} + h_{ba}). \tag{4, 1}$$

En désignant par ${}^0a_{\mu\lambda} = {}^0a_{\lambda\mu}$ n'importe quelle solution de (4, 1), la solution la plus générale peut être écrite

$$a_{\mu\lambda} = {}^0a_{\mu\lambda} + p_\mu t_\lambda + p_\lambda t_\mu + w t_\mu t_\lambda, \tag{4,2}$$

p_μ étant n'importe quel vecteur à la caractéristique (0, 0, 0) et w n'importe quelle fonction de position à la caractéristique $\left(0, \frac{-2}{n+1}, 0\right)$. Pour fixer le vecteur p_μ d'une manière convenable, nous introduirons les tenseurs

$$a_{abc} = U_a{}^\omega U_b{}^\mu U_c{}^\lambda \nabla_\omega a_{\mu\lambda}, \quad {}^0a_{abc} = U_a{}^\omega U_b{}^\mu U_c{}^\lambda \nabla_\omega {}^0a_{\mu\lambda}, \tag{4, 3}$$

liés par l'équation, déduite de (4, 2) et (2, 11)

$$a_{abc} = {}^0a_{abc} + h_{ac} p_b + h_{ab} p_c \tag{4, 4}$$

$$(p_b = U_b{}^\lambda p_\lambda),$$

d'où il suit

$$h^{ab} a_{abc} = {}^0a_{abc} h^{ab} + n p_c. \tag{4, 5}$$

La condition nécessaire et suffisante pour avoir

$$h^{ab} a_{abc} = 0 \tag{4, 6}$$

est donc

$$p_c = -\frac{1}{n} {}^0a_{abc} h^{ab}. \tag{4, 7a}$$

Désignons maintenant par ${}^0p_\mu$ n'importe quelle solution du système

$$-\frac{1}{n} {}^0a_{abc} h^{ab} = U_c{}^\mu p_\mu \tag{4, 7b}$$

et par (*) n'importe quelle fonction de position à la caractéristique $\left(0, \frac{-2}{n+1}, 0\right)$. Or, la solution la plus générale de (4, 7b) est manifestement

$$p_\mu = {}^0p_\mu + (*)\, t_\mu. \tag{4, 7c}$$

Si nous convenons d'écrire (*) pour chaque fonction de position à la caractéristique $\left(0, \frac{-2}{n+1}, 0\right)$ nous obtenons de (4, 7c) et (4, 2)

$$a_{\mu\lambda} = {}^0a_{\mu\lambda} + {}^0p_\mu t_\lambda + {}^0p_\lambda t_\mu + (*)\, t_\mu t_\lambda. \tag{4, 8}$$

En partant de la solution ${}^0a_{\mu\lambda}$ de (4, 1), nous sommes parvenus au tenseur (4, 8). Examinons maintenant l'influence exercée au résultat (4, 8) par le choix particulier de la solution ${}^0a_{\mu\lambda}$. Partons à cet effet d'une autre solution particulière ${}^0a_{\mu\lambda}{}^* = {}^0a_{\lambda\mu}{}^*$ de (4, 1). Les tenseurs ${}^0a_{\mu\lambda}$ et ${}^0a_{\mu\lambda}{}^*$ sont liés par l'équation

$${}^0a_{\mu\lambda}{}^* = {}^0a_{\mu\lambda} + X_\mu t_\lambda + X_\lambda t_\mu + (*)\, t_\mu t_\lambda, \tag{4, 9}$$

X_μ étant un vecteur à la caractéristique (0, 0, 0). Il s'ensuit en premier lieu

$${}^0a_{abc}{}^* = U_a{}^\omega U_b{}^\mu U_c{}^\lambda \nabla_\omega {}^0a_{\mu\lambda}{}^* = {}^0a_{abc} + h_{ac}X_b + h_{ab}X_c$$
$$(X_c = U_c{}^\mu X_\mu),$$

et par conséquent

$$p_c{}^* = -\frac{1}{n}\, {}^0a_{abc}{}^* h^{ab} = p_c - X_c. \tag{4, 10}$$

Si l'on désigne par ${}^0p_\mu{}^*$ n'importe quelle solution du système

$$-\frac{1}{n}\, {}^0a_{abc}{}^*\, h^{ab} = U_c{}^\mu p_\mu{}^* \tag{4, 11}$$

la solution la plus générale peut être écrite, grâce à (4, 10),

$$p_\mu{}^* = {}^0p_\mu{}^* + (*)t_\mu = {}^0p_\mu - X_\mu + (*)t_\mu. \tag{4, 12}$$

En substituant cette valeur dans

$$a_{\mu\lambda}{}^* = {}^0a_{\mu\lambda}{}^* + p_\mu{}^* t_\lambda + p_\lambda{}^* t_\mu + (*)t_\mu t_\lambda \tag{4, 13}$$

on obtient

$$h^{ab} a_{abc}{}^* = 0, \quad (a_{abc}{}^* = U_a{}^\omega U_b{}^\mu U_c{}^\lambda \nabla_\omega a_{\mu\lambda}{}^*).$$

D'autre part, si l'on tient compte de (4, 8), (4, 9), (4, 12) et (4, 13) on peut écrire

$$a_{\mu\lambda}{}^* =$$
$$= {}^0a_{\mu\lambda} + X_\mu t_\lambda + X_\lambda t_\mu + ({}^0p_\mu - X_\mu)t_\lambda + ({}^0p_\lambda - X_\lambda)t_\mu + (*)t_\mu t_\lambda =$$
$$= a_{\mu\lambda} + (*)t_\mu t_\lambda. \tag{4, 14}$$

Or, quelle qu'elle soit la solution particulière de (4, 1), dont on se sert pour construire le tenseur correspondant, on parvient toujours à un des tenseurs du faisceau (4, 14). Cette solution particulière, dont on est parti, est manifestement d'ordre 2 dans le cas holonome (d'ordre 1 dans le cas non holonome) et par conséquent, le vecteur p_μ, défini par (4, 7) est d'ordre 3 (d'ordre 2). Or le faisceau en jeu de tenseurs (4, 14) est d'ordre 3 (d'ordre 2). Nous voulons examiner le rang de ses éléments au point de l'hypersurface, où le cône de directions asymptotiques

$$h_{ab}\,\mathrm{d}y^a\,\mathrm{d}y^b = 0$$

n'est pas dégénéré. Cela revient manifestement à la supposition que le rang du déterminant aux éléments $h_{(ab)}$ soit $n-1$. Cela posé, introduisons les grandeurs

$$\underset{x}{e^\nu} = \begin{cases} \underset{a}{U^\nu} \text{ pour } x = a \\ M^\nu \text{ pour } x = 2n \end{cases}$$

$$(x = n+1, n+2, \ldots, 2n)$$

M^ν étant n'importe quelle grandeur à la caractéristique $\left(0, \dfrac{-2}{n+1}, 0\right)$, qui satisfait à $M^\nu t_\nu = 1$. Les grandeurs $\underset{x}{e^\nu}$, linéairement indépendantes, donnent naissance aux expressions

$$A_{xy} = \underset{x}{e^\mu}\underset{y}{e^\lambda} a_{\mu\lambda}, \qquad A_{xy}{}^* = \underset{x}{e^\mu}\underset{y}{e^\lambda} a_{\mu\lambda}{}^*$$

$$(x, y = n+1, \ldots, 2n)$$

telles que

$$A_{ab}{}^* = A_{ab} = h_{(ab)}, \; A_{x\,2n}{}^* = A_{x\,2n} + \delta_{2n}{}^x(*) = A_{2n\,x}{}^*.$$

On en déduit que

$$\text{Dét} \mid A_{xy}{}^* \mid = \text{Dét} \mid A_{xy} \mid + (*)\, \text{Dét} \mid h_{(ab)} \mid.$$

Grâce à la supposition faite sur le déterminant aux éléments $h_{(ab)}$, nous voyons que le rang du déterminant aux éléments $A_{xy}{}^*$ (ou bien, ce qui revient au même, le rang du déterminant aux éléments $a_{\mu\lambda}{}^*$) est égal à n, si (*) n'est pas la racine de l'équation.

$$\text{Dét} \mid A_{xy} \mid + (*)\, \text{Dét} \mid h_{(ab)} \mid = 0.$$

A chaque point d'une $X_{n-1}^{(n)}$, où le cône de directions asymptotiques n'est pas dégénéré, est adjoint un faisceau de tenseurs quadratiques d'ordre 3 (2 dans le cas non holonome) du rang n en général, constitué par des tenseurs symétriques, satisfaisant aux équations

$$\begin{aligned} a_{\mu\lambda} U_a{}^\mu U_b{}^\lambda &= h_{(ab)} \\ a_{abc} h^{ab} &= 0, \qquad (a_{abc} = U_a{}^\omega U_b{}^\mu U_c{}^\lambda \nabla_\omega a_{\mu\lambda}), \end{aligned} \tag{4, 15}$$

Nous appellerons ce faisceau en question „premier faisceau de Darboux“.

Remarque: Les tenseurs du premier faisceau de Darboux étant symétriques même dans le cas non holonome, les faisceaux (4, 14) et (3, 2) ne sont pas en général identiques.

(5) Suite.

Nous voulons maintenant privilégier, moyennant des conditions convenables, un des tenseurs du faisceau (4, 14). Introduisons à cet effet les grandeurs mixtes

$$h_{a\lambda} = \nabla_a t_\lambda; \qquad {}^0a_{ab\lambda} = U_a{}^\omega U_b{}^\mu \nabla_\omega {}^0a_{\mu\lambda} \tag{5, 1}$$

et examinons le vecteur w_λ qui figure dans

$$w_\lambda h_{ab} = {}^0a_{ab\lambda} + p_b h_{a\lambda} + {}^0p_\lambda h_{ab}, \tag{5, 2}$$

le vecteur ${}^0p_\lambda$ étant défini par (4, 7b). En posant $w_c = U_c{}^\lambda w_\lambda$, on déduit de (5, 2) à cause de (4, 7a)

$$w_c = 0$$

et cette équation nous fait voir que w_λ est de la forme $w_\lambda = (*) t_\lambda$, la fonction (*) étant fixée par le choix particulier du vecteur ${}^0p_\mu$. Ce choix étant arbitraire (pourvu que soit satisfaite l'équation (4, 7b) par ${}^0p_\mu$) on peut fixer ${}^0p_\mu$ de manière que soit $w_\lambda = 0$. Pour cela il est nécessaire et suffisant que ${}^0p_\mu$ soit la solution de

$${}^0p_\lambda h_{ab} = - {}^0a_{ab\lambda} - p_b h_{a\lambda}, \tag{5, 3a}$$

p_b étant défini par (4, 7a). Or, cette équation nous donne

$${}^0p_\lambda = - \frac{1}{n-1} ({}^0a_{ab\lambda} + p_b h_{a\lambda}) h^{ab}. \tag{5, 3b}$$

Le vecteur ${}^0p_\lambda$ ainsi fixé, nous choisirons pour (*) dans (4, 8) une fonction arbitraire, mais fixe que nous désignerons par w

$$a_{\mu\lambda} = {}^0a_{\mu\lambda} + {}^0p_\mu t_\lambda + {}^0p_\lambda t_\mu + w t_\mu t_\lambda. \tag{5, 4}$$

En introduisant la grandeur

$$a_{ab\lambda} = U_a{}^\omega U_b{}^\mu \nabla_\omega a_{\mu\lambda},$$

nous déduirons de (5, 4)

$$a_{ab\lambda} = {}^0a_{ab\lambda} + p_b h_{a\lambda} + {}^0p_\lambda h_{ab} + t_\lambda U_b{}^\mu \nabla_a {}^0p_\mu + w t_\lambda h_{ab} \tag{5, 5a}$$

et cette équation se simplifie, grâce à (5, 3a):

$$a_{ab\lambda} = (U_b{}^\mu \nabla_a {}^0p_\mu + w h_{ab}) t_\lambda. \tag{5, 5b}$$

D'autre part, si l'on pose

$$a_{ab\lambda}{}^* = U_a{}^\omega U_b{}^\mu \nabla_\omega a_{\mu\lambda}{}^*$$

les équations (4, 14) et (5, 5b) nous donnent

$$a_{ab\lambda}{}^* = [U_b{}^\mu \nabla_a {}^0p_\mu + (w + (*)) h_{ab}] t_\lambda. \tag{5, 6}$$

Si, en particulier, on pose

$$(*) = -\frac{1}{n-1} h^{ab} U_b{}^{\mu} \nabla_a {}^0p_\mu - w \tag{5, 7a}$$

on obtient

$$h^{ab} a_{ab\lambda}{}^* = 0. \tag{5, 7b}$$

En partant du tenseur $a_{\mu\lambda}$, défini (moyennant la fonction w) par (5, 4), nous sommes parvenus au tenseur $a_{\mu\lambda}{}^*$, défini moyennant (5, 7a) et (4, 14), pour lequel (5, 7b) est valable. Examinons maintenant l'influence du choix de la fonction arbitraire w à ce résultat. Partons à cet effet d'une autre fonction arbitraire $\underset{1}{w}$ et désignons par l'indice 1, affecté en bas des symboles respectifs, les grandeurs, construites à l'aide de $\underset{1}{w}$. On a en premier lieu, en tenant compte de ce que le vecteur ${}^0p_\mu$, défini par (5, 3b), est indépendant de la fonction w

$$\underset{1}{{}^0p_\mu} = {}^0p_\mu \tag{5, 8a}$$

et en conséquence

$$\underset{1}{a_{\mu\lambda}} = a_{\mu\lambda} + (\underset{1}{w} - w)\, t_\mu t_\lambda. \tag{5, 8b}$$

D'autre part, la fonction $\underset{1}{(*)}$ résulte de l'équation, analogue à (5, 7a),

$$\underset{1}{(*)} = -\frac{1}{n-1} h^{ab} U_b{}^{\mu} \nabla_a {}^0p_\mu - \underset{1}{w}, \tag{5, 8c}$$

c'est-à-dire, grâce à (5, 7a) elle-même,

$$\underset{1}{(*)} = (*) + w - \underset{1}{w}. \tag{5, 8d}$$

En substituant cette valeur dans

$$\underset{1}{a_{\mu\lambda}{}^*} = \underset{1}{a_{\mu\lambda}} + \underset{1}{(*)}\, t_\mu t_\lambda, \tag{5, 9}$$

on obtient de nouveau

$$h^{ab} \underset{1}{a_{ab\lambda}{}^*} = 0 \quad (\underset{1}{a_{ab\lambda}{}^*} = U_a{}^{\omega} U_b{}^{\mu} \nabla_\omega \underset{1}{a_{\mu\lambda}{}^*}).$$

Les tenseurs $\underset{1}{a_{\mu\lambda}{}^*}$ et $a_{\mu\lambda}{}^*$ sont liés par l'équation, déduite de (5, 8b, d) et (5, 9)

$$\underset{1}{a_{\mu\lambda}{}^*} = a_{\mu\lambda} + (\underset{1}{w} - w + (*) + w - \underset{1}{w})\, t_\mu t_\lambda = a_{\mu\lambda}{}^*.$$

Or, quel qu'il soit le tenseur de départ, on parvient toujours au même tenseur $a_{\mu\lambda}{}^*$, satisfaisant à (5, 7b). Le vecteur ${}^0p_\mu$ étant d'ordre 3 (d'ordre 2 dans le cas non holonome) la fonction (5, 7a), qui nous conduit à ce tenseur privilégié est manifestement d'ordre 4 (d'ordre 3 dans le cas non holonome). Nous pouvons donc dire:

P a r m i d e s t e n s e u r s d u p r e m i e r f a i s c e a u d e D a r b o u x

(4, 14), il y en a un seul privilégié, satisfaisant à l'équation (5, 7b). Il est d'ordre 4 (d'ordre 3 dans le cas non holonome).

Nous appellerons ce tenseur „premier tenseur de M. Čech".

Le premier faisceau de Darboux n'est constitué que par des tenseurs symétriques. (Il s'ensuit que même le premier tenseur de M. Čech est symétrique.) Dans les lignes qui suivent, nous trouverons un autre faisceau de tenseurs quadratiques, dont les éléments ne sont symétriques que dans des cas particuliers d'une hypersurface holonome dans l'espace ambiant à connexion (semi)-symétrique.

(6) Deuxième faisceau de Darboux.

Le point de départ sera maintenant l'équation

$$g_{\mu\lambda} U_a^{\mu} U_b^{\lambda} = h_{ab}. \tag{6, 1}$$

Si $h_{[ab]} \neq 0$, le tenseur $g_{\mu\lambda}$ n'est pas symétrique. Pour déduire quelques conséquences de (6, 1), nous nous servirons des notions, dont l'étude sera détaillée plus tard: Supposons connue une normale affine N^{ν} à la caractéristique $(0, \frac{-2}{n+1}, 0)$, normalisée par l'équation

$$N^{\lambda} t_{\lambda} = 1 \tag{6, 2}$$

et désignons par $\Gamma_{ba}{}^{c}$ les coefficients de la connexion induite dans $X_{n-1}^{(n)}$ par cette normale. Remarquons expressément que les résultats, obtenus dans ce § et dans le § suivant ne dépendent ni de la normale N^{ν}, ni de la connexion induite par cette normale. La notion auxiliaire de la connexion induite nous permet d'introduire le symbole D_a de la dérivée covariante mixte des grandeurs (mixtes).[7] L'application du symbole D_a est bien connue et d'ailleurs peut être déduite de la formule pour $D_a U_b^{\nu}$ que nous citons ici à titre d'exemple:

$$D_a U_b^{\nu} = \partial_a U_b^{\nu} + \Gamma_{\lambda\mu}{}^{\nu} U_b^{\lambda} U_a^{\mu} - \Gamma_{ba}{}^{c} U_c^{\nu} = \underset{b}{\nabla_a U^{\nu}} - \Gamma_{ba}{}^{c} U_c^{\nu}. \tag{6, 3}$$

D'autre part, on sait bien que[8])

$$-h_{ab} N^{\nu} = D_a U_b^{\nu}. \tag{6, 4}$$

Les formules (6, 3) et (6, 4) nous autorisent à poser

$$-h_{[ab]} N^{\nu} = S_{\lambda\mu}{}^{\nu} U_b^{\lambda} U_a^{\mu} - T_{ba}{}^{\nu} \tag{6,5}$$

où

$$-T_{ba}{}^{\nu} = \partial_{[a} U_{b]}^{\nu} - \Gamma_{[ba]}{}^{c} U_c^{\nu}. \tag{6, 6}$$

---

[7]) Cette notion est due au fond à M. v. d. Waerden et M. Bortolotti. Voir (aussi pour le renvoi littéraire): J. A. Schouten-D. J. Struik „Einführung in die neuren Methoden der Differentialgeometrie I, (1935, Groningen), p. 93.

[8]) Cfr. Hlavatý: „Induzierte und eingeborene Konnexion in den (nicht) holonomen Räumen". (Math. Ztschr. 38, 283—300, (1934)).

(Remarquons expressément que dans le cas holonome on a $\partial_{[a}U_{b]}^{\nu} = 0$ et par conséquent $T_{ba}{}^{\nu}$ est dans X_{n-1} aussi par son indice ν.) Un autre exemple d'application du symbole D_a, dont nous aurons besoin plus tard est livré par la formule

$$D_a t_\lambda = \nabla_a t_\lambda = h_{a\lambda}. \tag{6, 7}$$

Il s'ensuit en particulier

$$2U_c{}^\lambda D_{[a}D_{b]}t_\lambda = (R_{\omega\mu\lambda}{}^\nu U_a{}^\omega U_b{}^\mu t_\nu + 2T_{ab}{}^\alpha \nabla_\alpha t_\lambda)\, U_c{}^\lambda. \tag{6, 8}$$

Cela posé, désignons par ${}^0g_{\mu\lambda}$ n'importe quelle solution du système (6, 1). Le cas échéant, la solution la plus générale peut être écrite de la manière suivante

$$g_{\mu\lambda} = {}^0g_{\mu\lambda} + X_\mu t_\lambda + Y_\lambda t_\mu + (*)t_\mu t_\lambda, \tag{6, 9}$$

X_μ et Y_μ étant deux vecteurs (à la même caractéristique (0, 0, 0)) pour le moment arbitraires, et (*) n'importe quelle fonction de position, à la caractéristique $\left(0, \dfrac{-2}{n+1}, 0\right)$. En introduisant les grandeurs

$$\begin{aligned}{}^0g_{abc} &= U_a{}^\omega U_b{}^\mu U_c{}^\lambda \nabla_\omega {}^0g_{\mu\lambda} = U_b{}^\mu U_c{}^\lambda D_a {}^0g_{\mu\lambda},\\ g_{abc} &= U_a{}^\omega U_b{}^\mu U_c{}^\lambda \nabla_\omega\, g_{\mu\lambda} = U_b{}^\mu U_c{}^\lambda D_a\, g_{\mu\lambda},\end{aligned}$$

on peut déduire de (6, 9) en premier lieu

$$\begin{aligned} g_{abc} &= {}^0g_{abc} + X_b h_{ac} + Y_c h_{ab}, \\ (X_b &= U_b{}^\mu X_\mu,\ \ Y_c = U_c{}^\mu Y_\mu).\end{aligned} \tag{6, 10}$$

Calculons maintenant ${}^0g_{[ab]c}$, dont nous aurons besoin plus tard. En partant de (6, 1) (pour ${}^0g_{\mu\lambda}$) on en déduit à cause de (6, 4)

$$\begin{aligned} D_{[a}h_{b]c} &= D_{[a}U_{b]}{}^\mu U_c{}^\lambda\, {}^0g_{\mu\lambda} = \\ &= -h_{[ab]}N^\mu U_c{}^\lambda {}^0g_{\mu\lambda} - U_{[b}{}^\mu h_{a]c}N^\lambda {}^0g_{\mu\lambda} + {}^0g_{[ab]c}.\end{aligned} \tag{6, 11a}$$

D'autre part, si l'on tient compte de (2, 11), on en peut tirer

$$D_{[a}h_{b]c} = D_{[a}(D_{b]}t_\lambda)U_c{}^\lambda = -h_{[a|c|}N^\lambda h_{b]\lambda} + U_c{}^\lambda D_{[a}D_{b]}t_\lambda,$$

et cette équation devient, grâce à (6, 8)

$$\begin{aligned} D_{[a}h_{b]c} &= -h_{[a|c|}N^\lambda h_{b]\lambda} + \\ &+ (\tfrac{1}{2} R_{\omega\mu\lambda}{}^\nu U_a{}^\omega U_b{}^\mu t_\nu + T_{ab}{}^\alpha \nabla_\alpha t_\lambda)U_c{}^\lambda.\end{aligned} \tag{6, 11b}$$

Or, le rapprochement de (6, 11a, b) nous donne

$$\begin{aligned} {}^0g_{[ab]c} &= N^\lambda[h_{[ab]}U_c{}^\mu\, {}^0g_{\lambda\mu} + h_{[a|c|}(U_{b]}{}^\mu\, {}^0g_{\mu\lambda} - h_{b]\lambda})] + \\ &+ (\tfrac{1}{2} R_{\omega\mu\lambda}{}^\nu U_a{}^\omega U_b{}^\mu t_\nu + T_{ab}{}^\alpha \nabla_\alpha t_\lambda)\, U_c{}^\lambda.\end{aligned} \tag{6, 12}$$

Pour donner une forme plus symétrique à cette équation, nous introduirons la grandeur $h_{\lambda a}$ définie, dans le cas holonome, comme suit: $h_{\lambda a} = h_{a\lambda}$ si $h_{[ab]} = 0$, tandis que si $h_{[ab]} \neq 0$, $h_{\lambda a}$ est n'importe quelle solution du système

$$h_{ba} = U_b{}^\lambda h_{\lambda a}.\text{[9]} \tag{6, 13a}$$

Parce que, d'autre part

$$h_{ba} = U_b{}^\lambda(U_a{}^\mu \nabla_\lambda t_\mu) \tag{6, 13b}$$

nous nous servirons de $h_{\lambda a}$ pour définir le tenseur mixte $U_a{}^\mu \nabla_\lambda t_\mu$ qui n'existe pas dans le cas holonome, en posant

$$h_{\lambda a} \equiv U_a{}^\mu \nabla_\lambda t_\mu. \tag{6, 13c}$$

Cette équation nous servira aussi comme définition pour $h_{\lambda a}$ dans le cas non holonome, où $U_a{}^\mu \nabla_\lambda t_\mu$ existe et est bien défini. Cela posé nous pouvons écrire, grâce à (6, 5) et (6, 13)

$$- T_{ba}{}^\alpha U_c{}^\lambda \nabla_\alpha t_\lambda = - h_{[ab]} N^\lambda h_{\lambda c} - S_{\lambda\mu}{}^\nu U_b{}^\lambda U_a{}^\mu h_{\nu c}. \tag{6, 14}$$

En substituant cette valeur dans (6, 12) on obtient

$$\begin{aligned} {}^0g_{[ab]c} = N^\lambda[h_{[ab]}(U_c{}^\mu {}^0g_{\lambda\mu} - h_{\lambda c}) + h_{[a|c|}(U_{b]}{}^\mu {}^0g_{\mu\lambda} - h_{b]\lambda})] + \\ + (\tfrac{1}{2} R_{\omega\mu\lambda}{}^\nu U_c{}^\lambda t_\nu + S_{\omega\mu}{}^\nu h_{\nu c}) U_a{}^\omega U_b{}^\mu. \end{aligned} \tag{6, 15}$$

Cette formule, jointe à (6, 10), nous permet de calculer $g_{[ab]c}$

$$\begin{aligned} g_{[ab]c} = N^\lambda[h_{[ab]}(U_c{}^\mu {}^0g_{\lambda\mu} - h_{\lambda c} + Y_c t_\lambda) + \\ + h_{[a|c|}(U_{b]}{}^\mu {}^0g_{\mu\lambda} - h_{b]\lambda} + X_{b]} t_\lambda)] + (\tfrac{1}{2} R_{\omega\mu\lambda}{}^\nu U_c{}^\lambda t_\nu + S_{\omega\mu}{}^\nu h_{\nu c}) U_a{}^\omega U_b{}^\mu. \end{aligned} \tag{6, 16}$$

Parce que le tenseur

$$g_{[ab]c} - (\tfrac{1}{2} R_{\omega\mu\lambda}{}^\nu U_c{}^\lambda t_\nu + S_{\omega\mu}{}^\nu h_{\nu c}) U_a{}^\omega U_b{}^\mu$$

ne dépend ni de la normale N^ν, ni de la connexion induite par cette normale, il en est de même avec

$$\begin{aligned} N^\lambda[h_{[ab]}(U_c{}^\mu {}^0g_{\lambda\mu} - h_{\lambda c} + Y_c t_\lambda) + \\ + h_{[a|c|}(U_{b]}{}^\mu {}^0g_{\mu\lambda} - h_{b]\lambda} + X_{b]} t_\lambda)]. \end{aligned} \tag{6, 17}$$

Autrement dit, le tenseur (6, 17) reste toujours le même, quelle qu'elle soit la normale N^ν, pourvu qu'elle soit normalisée par $N^\nu t_\nu = 1$. Pour que ce fait ait lieu il est nécessaire et suffisant que soit

$$\begin{aligned} h_{[ab]}(U_c{}^\mu {}^0g_{\lambda\mu} - h_{\lambda c} + Y_c t_\lambda) &= p_{abc} t_\lambda + r_{abc\lambda}, \\ h_{[a|c|}(U_{b]}{}^\mu {}^0g_{\mu\lambda} - h_{b]\lambda} + X_{b]} t_\lambda) &= q_{abc} t_\lambda - r_{abc\lambda}, \end{aligned} \tag{6, 18}$$

avec les tenseurs p_{abc}, q_{abc} et $r_{abc\lambda}$ convenablement choisis. Compte tenu de (6, 1) (pour ${}^0g_{\mu\lambda}$) et de (6, 13a), on déduit de (6, 18)

$$\begin{aligned} h_{[ab]}(U_c{}^{\mu 0} g_{\lambda\mu} - h_{\lambda c} + Y_c t_\lambda) U_d{}^\lambda &= 0 = r_{abc\lambda} U_d{}^\lambda, \\ h_{[a|c|}(U_{b]}{}^\mu {}^0g_{\mu\lambda} - h_{b]\lambda} + X_{b]} t_\lambda) U_d{}^\lambda &= 0 = - r_{abc\lambda} U_d{}^\lambda, \end{aligned}$$

et par conséquent $r_{abc\lambda}$ est de la forme $r_{abc} t_\lambda$. Il s'ensuit que l'on peut poser

$$\begin{aligned} U_c{}^\mu {}^0g_{\lambda\mu} - h_{\lambda c} + Y_c t_\lambda &= P_c t_\lambda \\ U_c{}^\mu {}^0g_{\mu\lambda} - h_{c\lambda} + X_c t_\lambda &= Q_c t_\lambda, \end{aligned} \tag{6, 19a}$$

[9]) Nous nous servirons plus tard de l'indétermination de $h_{\lambda a}$ qui résulte de cette définition (Cfr § 10). Pour le moment nous prendrons pour $h_{\lambda a}$ n'importe quelle solution arbitrairement fixée.

où les vecteurs P_c, Q_c dépendent du choix particulier de X_c et Y_c. Nous choisirons ces derniers vecteurs de manière que résulte

$$P_c = Q_c = 0, \tag{6, 19b}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} U_c^{\mu}\,{}^0g_{\lambda\mu} - h_{\lambda c} &= - Y_c\, t_\lambda, \\ U_c^{\mu}\,{}^0g_{\mu\lambda} - h_{c\lambda} &= - X_c\, t_\lambda. \end{aligned} \tag{6, 19c}$$

Ces équations qui définissent complètement X_c et Y_c nous autorisent à poser, grâce â (6, 16)

$$g_{[ab]c} = (\tfrac{1}{2} R_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu} U_c{}^{\lambda} t_\nu + S_{\omega\mu}{}^{\nu} h_{\nu c})\, U_a{}^{\omega} U_b{}^{\mu} \tag{6, 20}$$

et de plus, si l'on désigne par ${}^0X_\mu$, ${}^0Y_\mu$ n'importe quelle solution du système

$$X_c = U_c^{\mu} X_\mu, \qquad Y_c = U_c^{\mu} Y_\mu,$$

les valeurs de X_c et Y_c étant tirées de (6, 19c), le tenseur $g_{\mu\lambda}$ qui satisfait à (6, 20) est défini par

$$g_{\mu\lambda} = {}^0g_{\mu\lambda} + {}^0X_\mu t_\lambda + {}^0Y_\lambda t_\mu + (*) t_\mu t_\lambda. \tag{6, 21}$$

Avant que nous abordions la question concernant l'influence du choix particulier de ${}^0g_{\mu\lambda}$ à ce résultat, remarquons ceci: Si l'on a affaire à une hypersurface holonome dans l'espace ambiant à connexion (semi)symétrique ($h_{[ab]} = 0$), on choisit naturellement pour ${}^0g_{\mu\lambda}$ un tenseur symétrique, ${}^0g_{\mu\lambda} = {}^0g_{\lambda\mu}$, et par conséquent les équations (6, 19) nous autorisent à poser $X_c = Y_c$. Il s'ensuit que dans ce cas particulier le tenseur $g_{\mu\lambda}$, défini par (6, 21), est symétrique.

Le tenseur $g_{\mu\lambda}$ en jeu, étant construit en partant de la solution particulière ${}^0g_{\mu\lambda}$ de (6, 1), nous voulons construire maintenant le tenseur analogue $g_{\mu\lambda}{}^*$, en partant d'une autre solution particulière

$${}^0g_{\mu\lambda}{}^* = {}^0g_{\mu\lambda} + p_\mu t_\lambda + q_\lambda t_\mu + (*) t_\mu t_\lambda \tag{6, 22a}$$

où les vecteurs p_μ, q_μ (à la même caractéristique (0, 0, 0)) sont complètement arbitraires.[11]) Le tenseur cherché sera

$$\begin{aligned} g_{\mu\lambda}{}^* &= {}^0g_{\mu\lambda}{}^* + {}^0X_\mu{}^*\, t_\lambda + {}^0Y_\lambda{}^*\, t_\mu + (*) t_\mu t_\lambda = \\ &= {}^0g_{\mu\lambda} + ({}^0X_\mu{}^* + p_\mu) t_\lambda + ({}^0Y_\lambda{}^* + q_\lambda) t_\mu + (*) t_\mu t_\lambda, \end{aligned} \tag{6, 22b}$$

où les vecteurs $X_c{}^*$, $Y_c{}^*$ sont définis par les équations, analogues à (6, 19c), à savoir

$$\begin{aligned} - Y_c{}^*\, t_\lambda &= U_c^{\mu}\,{}^0g_{\lambda\mu}{}^* - h_{\lambda c} = (- Y_c + q_c) t_\lambda, \\ - X_c{}^*\, t_\lambda &= U_c^{\mu}\,{}^0g_{\mu\lambda}{}^* - h_{c\lambda} = (- X_c + p_c) t_\lambda. \end{aligned} \tag{6, 23}$$

Or, si l'on désigne par ${}^0X_\mu{}^*$ et ${}^0Y_\mu{}^*$ des solutions particulières du système

$$X_c{}^* = U_c^{\mu} X_\mu{}^*, \qquad Y_c{}^* = U_c^{\mu} Y_\mu{}^*,$$

---

[11]) Dans le cas symétrique nous supposerons $p_\mu = q_\mu$, d'où résulte ${}^0g_{\mu\lambda}{}^* = {}^0g_{\lambda\mu}{}^*$.

on a

$$
\begin{aligned}
{}^0X_\mu{}^* &= {}^0X_\mu - p_\mu + (*)t_\mu, \\
{}^0Y_\mu{}^* &= {}^0Y_\mu - q_\mu + (*)t_\mu
\end{aligned}
\tag{6, 24}
$$

et par conséquent, l'équation (6, 22b) nous donne à cause de (6, 21)

$$
\begin{aligned}
g_{\mu\lambda}{}^* = {}^0g_{\mu\lambda} + ({}^0X_\mu + p_\mu - p_\mu)t_\lambda + ({}^0Y_\lambda + q_\lambda - q_\lambda)t_\mu + (*)t_\mu t_\lambda = \\
= g_{\mu\lambda} + (*)t_\mu t_\lambda.
\end{aligned}
\tag{6, 25}
$$

Quel qu'il soit le choix de la solution particulière ${}^0g_{\mu\lambda}$, on retombe donc toujours à un tenseur de ce faisceau dont chaque élément satisfait à l'équation analogue à (6, 20). La méthode analogue à celle, appliquée aux cas précédents nous fait voir que les tenseurs du faisceau construit (6, 25) sont en général du rang n et d'ordre 3 (d'ordre 2 dans le cas non holonome). Nous pouvons donc dire:

Á chaque point d'une $X_{n-1}^{(n)}$ est adjoint un faisceau de tenseurs quadratiques d'ordre 3 (2 dans le cas non holonome) du rang n en général, constitué par des tenseurs satisfaisant aux équations

$$
\begin{aligned}
&\text{a)} \quad g_{\mu\lambda}U_a{}^\mu U_b{}^\lambda = h_{ab} \\
&\text{b)} \quad g_{[ab]c} = (\tfrac{1}{2} R_{\omega\mu\lambda}{}^\nu U_c{}^\lambda t_\nu + S_{\omega\mu}{}^\nu h_{\nu c})U_a{}^\omega U_b{}^\mu \\
&\qquad (g_{abc} = U_a{}^\omega U_b{}^\mu U_c{}^\lambda \nabla_\omega g_{\mu\lambda}).
\end{aligned}
\tag{6, 26}
$$

Nous appellerons ce faisceau en jeu ,,deuxième faisceau de Darboux''[12]).

Il est intéressant à remarquer que grâce à (6, 19c) l'équation (6, 21) nous donne

$$
\begin{aligned}
U_c{}^\mu g_{\lambda\mu} - h_{\lambda c} &= - Y_c t_\lambda + Y_c t_\lambda = 0, \\
U_c{}^\mu g_{\mu\lambda} - h_{c\lambda} &= - X_c t_\lambda + X_c t_\lambda = 0.
\end{aligned}
\tag{6, 27}
$$

Ces équations nous serons très utiles plus tard.

(7) Les trois faisceaux.

Nous voulons maintenant étudier les relations qui lient les trois faisceaux (3, 2), (4, 14) et (6, 25). Commençons tout d'abord par le cas non holonome. Nous l'avons déjà remarqué que les deux premiers faisceaux ne peuvent pas être en général identiques car les éléments du faisceau (3, 2) ne sont pas en général symétriques. Il en est de même avec (4, 14) et (6, 25) car même les éléments de ce dernier ne sont pas symétriques. Il nous reste donc à examiner le rapport des faisceaux (3, 2) et (6, 25). Parce que le faisceau

[12]) Nous aurons encore l'occasion de faire voir qu'à chaque choix particulier de $h_{\nu c}$ (dans le cas holonome non symétrique) correspond un faisceau de ce type et nous en privilégierons un par des conditions convenablement choisies.

(6, 25) ne dépend pas du choix particulier de ${}^0g_{\mu\lambda}$, nous prendrons pour ce tenseur le tenseur $a_{\mu\lambda}$, défini par (3, 1), c'est-à-dire

$$ {}^0g_{\mu\lambda} = \nabla_\mu t_\lambda. \qquad (7, 1)$$

Cela étant, on trouve à cause de (6, 19c), (6, 13c) et (5, 1)

$$\begin{aligned} U_c^{\mu}\nabla_\lambda t_\mu - h_{\lambda c} &= - Y_c t_\lambda = 0, \\ U_c^{\mu}\nabla_\mu t_\lambda - h_{c\lambda} &= - X_c t_\lambda = 0. \end{aligned}$$

Or, le faisceau (6, 25) peut donc être écrit

$$g_{\mu\lambda}^* = \nabla_\mu t_\lambda + (^*) t_\mu t_\lambda$$

et par conséquent les deux faisceaux (3, 2) et (6, 25) sont identiques dans le cas non holonome.

Abordons maintenant le cas d'une hypersurface holonome dans l'espace ambiant L_n à connexion non (semi)symétrique ($h_{[ab]} \neq \neq 0$). Le cas échéant (4, 14) et (6, 25) ne peuvent pas se confondre en général, car les éléments du second faisceau de Darboux ne sont pas symétriques en général.

Il ne nous reste donc qu'à envisager le cas d'une hypersurface holonome dans l'espace à connexion (semi)symétrique ($h_{[ab]} = = 0$, $S_{\lambda\mu}{}^{\nu} = S_{[\lambda}\,\delta_{\mu]}^{\nu}$), où les éléments des faisceaux (4, 14) et (6, 25) sont symétriques. Prenons à cet effet pour ${}^0g_{\mu\lambda}$ le tenseur $a_{\mu\lambda}$, défini par (4, 8)

$$a_{\mu\lambda} = {}^0g_{\mu\lambda} = {}^0a_{\mu\lambda} + {}^0p_\mu t_\lambda + {}^0p_\lambda t_\mu + (^*) t_\mu t_\lambda.$$

Le cas échéant le faisceau (6, 25) peut être écrit

$$g_{\mu\lambda}^* = a_{\mu\lambda} + {}^0X_\mu t_\lambda + {}^0X_\lambda t_\mu + (^*) t_\mu t_\lambda. \qquad (7, 2)$$

La condition nécessaire et suffisante pour que les deux faisceaux en question se confondent est donc $X_b = 0$, où bien, ce qui revient au même, grâce à (6, 19c)

$$h_{b\lambda} = U_b^{\mu} a_{\mu\lambda}.$$

Cette équation peut être écrite aussi

$$U_b^{\mu} a_{\mu\lambda} = D_b t_\lambda$$

et les conditions d'intégrabilité illimitée de ce système se déduisent de l'équation

$$D_{[a} U_{b]}^{\mu} a_{\mu\lambda} = D_{[a} D_{b]} t_\lambda$$

qui est équivalente à

$$\begin{aligned} U_{[a}^{\omega} U_{b]}^{\mu} \nabla_\omega a_{\mu\lambda} &= a_{[ab]\lambda} = \\ &= \frac{1}{2}\left(R_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu} - \frac{2}{n+1} R_{\omega\mu\alpha}{}^{\alpha}\delta_\lambda^{\nu}\right) U_a^{\omega} U_b^{\mu} t_\nu. + S_\omega U_{[a}^{\omega} h_{b]\lambda} \qquad (7, 3) \end{aligned}$$

Compte tenu de (5, 5b), cette équation peut être réduite à

$$t_\lambda D_{[a} p_{b]} = \frac{1}{2}\left(R_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu} - \frac{2}{n+1} R_{\omega\mu\alpha}{}^{\alpha}\delta_\lambda^{\nu}\right) U_a^{\omega} U_b^{\mu} t_\nu, + S_\omega U_{[a}^{\omega} h_{b]\lambda} \; (7, 4)$$

où dans ce cas particulier

$$D_{[a}p_{b]} = U_{[b}{}^{\mu} \nabla_{a]}{}^{0} p_{\mu}$$

ne dépend pas de la connexion induite et p_b est défini moyennant (4, 7a):

La condition nécessaire et suffisante pour que les deux faisceaux (4, 14) et (6, 25) se confondent dans ce cas particulier est que le vecteur p_c défini par (4, 7a) satisfait à (7, 4).

Remarque. Une des conditions nécessaires pour que ce fait ait lieu est manifestement aussi

$$g_{[ab]c}{}^{*} = a_{[ab]c}{}^{*}. \tag{7, 5}$$

Mais parce que

$$a_{[ab]c}{}^{*} = a_{[ab]c} = 0$$

et d'autre part, parce que

$$g_{[ab]c}{}^{*} = g_{[ab]c} = \tfrac{1}{2} R_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu} t_{\nu} U_a{}^{\omega} U_b{}^{\mu} U_c{}^{\lambda} + S_{\omega} U_{[a}^{\omega} h_{b]c}$$

la condition (7, 5) se réduit à l'équation

$$R_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu} t_{\nu} U_a{}^{\omega} U_b{}^{\mu} U_c{}^{\lambda} + S_{\omega} U_{[a}^{\omega} h_{b]c} = 0,$$

que l'on peut déduire aussi de (7, 4).

(8) Deuxième tenseur de M. Čech.

Retournons maintenant au cas général (6, 25) de tenseurs quadratiques pour une $X_{n-1}^{(n)}$ et tâchons d'en privilégier un moyennant des conditions convenablement choisies. Introduisons à cet effet un tenseur nouveau symétrique $k^{ab} = k^{ba}$, à la caractéristique $\left(0, \frac{-2}{n+1}, 0\right)$, solution du système

$$\begin{aligned} g_{cab} k^{ab} &= g_{cab} h^{ab}, \\ h_{ab} k^{ab} &= 0. \end{aligned} \tag{8, 1}$$

Ce tenseur existe toujours (et peut se réduire aussi à $k^{ab} = 0$).[13]

Or, le tenseur

$$G^{ab} = h^{ab} - k^{ab} \tag{8, 2}$$

à la caractéristique $\left(0, \frac{-2}{n+1}, 0\right)$ satisfait aux équations

[13]) Il n'y a qu'une seule solution pour $n = 3$, $g_{cab} h^{ab} \neq 0$, si la matrice

$$\begin{vmatrix} g_{444}, & g_{445} + g_{454}, & g_{455} \\ g_{544}, & g_{545} + g_{554}, & g_{555} \\ h_{44}, & h_{45} + h_{54}, & h_{55} \end{vmatrix}$$

est du rang 3. En général, le nombre des solutions particulières linéairement indépendantes du système (8, 1) qui composent la solution générale et > 1. Son calcul n'exige que des considérations algébriques élémentaires.

$$g_{cab}G^{ab} = 0, \quad h_{ab}G^{ab} = n - 1. \tag{8, 3}$$

Cela étant, remarquons que grâce à la première des équations (8, 3) on peut écrire

$$g_{acb}G^{ac} = (g_{abc} + 2g_{a[cb]})\, G^{ac} = (2g_{a[cb]} + 2g_{[ab]c})\, G^{ac}.^{14)} \tag{8, 4a}$$

Si l'on introduit le vecteur

$$2G^{ac}U_c{}^\mu \nabla_a g_{[\mu\lambda]} = g_\lambda, \quad g_b = U_b{}^\mu g_\mu = 2g_{a[cb]}G^{ac}$$

et si l'on tient compte de (6, 20), on peut écrire pour (8, 4a)

$$g_{acb}G^{ac} = G^{ac}U_a{}^\omega U_b{}^\mu (R_{\omega\mu\lambda}{}^\nu U_c{}^\lambda t_\nu + 2S_{\omega\mu}{}^\nu h_{\nu c}) + g_b. \tag{8, 4b}$$

Cette équation nous fait voir que l'on peut poser

$$G^{ac}U_c{}^\mu \nabla_a g_{\mu\lambda} - G^{ac}U_a{}^\omega (R_{\omega\lambda\alpha}{}^\nu U_c{}^\alpha t_\nu + 2S_{\omega\lambda}{}^\nu h_{\nu c}) - g_\lambda = Wt_\lambda, \tag{8, 5}$$

où, bien entendu, la fonction W, à la caractéristique $\left(0, \dfrac{-2}{n+1}, 0\right)$ est bien déterminée. En écrivant

$$U_c{}^\mu \nabla_a g_{\mu\lambda} = g_{ac\lambda},$$

on a donc

$$G^{ac}g_{ac\lambda} = G^{ac}U_a{}^\omega (R_{\omega\lambda\alpha}{}^\nu U_c{}^\alpha t_\nu + 2S_{\omega\lambda}{}^\nu h_{\nu c}) + g_\lambda + Wt_\lambda. \tag{8, 6}$$

Parce que d'autre part, à cause de (6, 25)

$$g_{ac\lambda}{}^* = U_c{}^\mu \nabla_a g_{\mu\lambda}{}^* = g_{ac\lambda} + (*)h_{ac}t_\lambda,^{15)} \tag{8, 7}$$

le rapprochement des équations (8, 6) et (8, 7) nous donne

$$g_{ac\lambda}{}^*\, G^{ac} = G^{ac}U_a{}^\omega (R_{\omega\lambda\alpha}{}^\nu U_c{}^\alpha t_\nu + 2S_{\omega\lambda}{}^\nu h_{\nu c}) + g_\lambda + [(n-1)(*) + W]t_\lambda. \tag{8, 8}$$

Or, pour

$$(*) = -\frac{W}{n-1} \tag{8, 9}$$

cette équation se simplifie à

$$g_{ac\lambda}{}^*\, G^{ac} = G^{ac}U_a{}^\omega (R_{\omega\lambda\alpha}{}^\nu U_c{}^\alpha t_\nu + 2S_{\omega\lambda}{}^\nu h_{\nu c}) + g_\lambda.^{16)} \tag{8, 10}$$

Examinons maintenant l'influence du choix particulier du tenseur $g_{\mu\lambda}$ à ce résultat! Partons à cet effet d'un autre tenseur $\underset{1}{g}_{\mu\lambda}$ du faisceau (6, 25)

$$\underset{1}{g}_{\mu\lambda} = g_{\mu\lambda} + wt_\mu t_\lambda \tag{8, 11a}$$

et désignons par l'indice 1, affecté en bas, les notions déduites

[14]) Au fond, je dois cette tournure qui mène à (8, 10) au Mémoire cité à la page 233. L'équation (8, 10) correspond à (2, 66) de ce Mémoire.

[15]) Cette équation nous fait voir aussi que $g_{cab}{}^*\, k^{ab} = g_{cab}k^{ab}$. Or, le tenseur k^{ab} et par conséquent aussi G^{ab} ne dépend pas de la transformation (6, 25).

[16]) Si L_n est un espace plan et sans torsion, cette équation se simplifie à

$$g_{ac\lambda}{}^*G^{ac} = 0. \tag{8, 10a}$$

moyennant $\underset{1}{g}_{\mu\lambda}$. On a avant tout une équation analogue à (8, 7)

$$\underset{1}{g}_{ac\lambda} = g_{ac\lambda} + wh_{ac}t_{\lambda}, \tag{8, 11b}$$

d'où il suit à cause de (8, 6) et (8, 3)

$$G^{ac}\underset{1}{g}_{ac\lambda} = G^{ac}U_a{}^{\omega}(R_{\omega\lambda\alpha}{}^{\nu}U_c{}^{\alpha}t_{\nu} + 2S_{\omega\lambda}{}^{\nu}h_{\nu c}) + g_{\lambda} + (W + (n-1)\,w)t_{\lambda}, \tag{8, 11c}$$

c'est à-dire

$$\underset{1}{W} = W + (n-1)w, \tag{8, 11d}$$

et par conséquent le tenseur $\underset{1}{g}_{\mu\lambda}{}^{*}$ définit par

$$\underset{1}{g}_{\mu\lambda}{}^{*} = \underset{1}{g}_{\mu\lambda} + \underset{1}{(*)}t_{\mu}t_{\lambda} \tag{8, 12}$$

où

$$\underset{1}{(*)} = -\frac{\underset{1}{W}}{n-1} = (*) - w \tag{8, 11e}$$

jouit de la propriété

$$G^{ac}\underset{1}{g}_{ac\lambda}{}^{*} = G^{ac}U_a{}^{\omega}(R_{\omega\lambda\alpha}{}^{\nu}U_c{}^{\alpha}t_{\nu} + 2S_{\omega\lambda}{}^{\nu}h_{\nu c}) + g_{\lambda}. \tag{8, 13}$$

D'autre part, les équations (8, 11a, e) et (8, 12) nous autorisent à poser

$$\underset{1}{g}_{\mu\lambda}{}^{*} = \underset{1}{g}_{\mu\lambda} + \underset{1}{(*)}t_{\mu}t_{\lambda} = g_{\mu\lambda} + (w + (*) - w)\,t_{\mu}t_{\lambda} = g_{\mu\lambda}{}^{*}.$$

Quel qu'il soit donc le choix du tenseur de départ, on parvient toujours au même tenseur, qui satisfait à (8, 10). Sa construction nous fait voir qu'il est en général d'ordre 4 (d'ordre 3 dans le cas non holonome). Donc:

Parmi des tenseurs du deuxième faisceau de Darboux (6, 25), il y en a un seul privilégié, adjoint au tenseur G^{ab}, satisfaisant à l'équation (8, 10). Il est d'ordre 4 (d'ordre 3 dans le cas non holonome).

(9) Normale affine, connexion induite.

Jusqu'alors, aucune supposition restrictive, concernante la connexion de l'espace ambiant n'a pas été adoptée. Dès à présent, nous restreindrons la généralité du problème étudié, en supposant—sauf l'avis contraire—que la fonction t, définie par

$$t^2 = \frac{(\text{Dét}\mid R_{\alpha\mu\lambda}{}^{\alpha}\mid)^{\frac{1}{n+1}}}{R_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu}R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta}\,e_{\nu}\,e_{\delta}\,U_a{}^{\omega}\,U_b{}^{\alpha}\,U_c{}^{\mu}\,U_d{}^{\beta}\,U_e{}^{\lambda}\,U_f{}^{\gamma}\,h^{ab}\,h^{cd}\,h^{ef}} \tag{9,1a}$$

soit finie, différente de zéro et non indéterminée. De plus, nous conviendrons d'écrire, même dans le cas, où t est indéterminée, (ce qui advient par ex. pour $R_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu} = 0$)

$$t^{\circ} = 1. \tag{9,1b}$$

Cela posé, remarquons avant tout que l'expression

$$Q = t^{n-1} P h^{-1} \quad (P = \text{Dét} \mid P_{ab} \mid) \tag{9, 1c}$$

est à la caractéristique (0, 0, 0). Parce qu'elle est différente de zéro, elle nous autorise à construire les tenseurs

$$_{z}h_{ab} = Q^{z} h_{ab}, \; _{z}h^{ab} = Q^{-z} h^{ab} \tag{9, 2a}$$

qui satisfont à

$$_{z}h^{ab}{}_{z}h_{ac} = {}_{z}h^{ba}{}_{z}h_{ca} = \delta_{c}{}^{b}, \tag{9, 2b}$$

et de plus la grandeur

$$_{z}t_{\lambda} = Q^{z} t_{\lambda} \tag{9, 2c}$$

où z est n'importe quel nombre réel. Remarquons que la caractéristique, de même que l'ordre des grandeurs $_{z}h_{ab}$, $_{z}h^{ab}$, $_{z}t_{\lambda}$ sont les mêmes que pour h_{ab}, h^{ab}, t_{λ}. De plus, on a aussi

$$_{z}h_{ab} = U_{a}{}^{\mu} U_{b}{}^{\lambda} \nabla_{\mu}\, {}_{z}t_{\lambda} = U_{b}{}^{\lambda} \nabla_{a}\, {}_{z}t_{\lambda}. \tag{9, 2d}$$

Cela étant, désignons par N^{ν} n'importe quelle grandeur à la caractéristique $\left(0, \dfrac{-2}{n+1}, 0\right)$, normalisée par

$$N^{\nu} t_{\nu} = 1 \tag{9, 3}$$

et par $\Psi_{ab}{}^{c}$ les coefficients de la connexion induite par N^{ν}. Ces deux notions sont liées par l'équation

$$-{}_{z}h_{ab} N^{\nu} = \partial_{a} U_{b}{}^{\nu} + \Gamma_{\lambda\mu}{}^{\nu} U_{a}{}^{\mu} U_{b}{}^{\lambda} - \Psi_{ba}{}^{c} U_{c}{}^{\nu} \tag{9, 4}$$

(voir (6, 3) et (6, 4)). Cette équation peut être résolue par rapport à $\Psi_{ba}{}^{c}$. Multiplions la à cet effet par $_{z}h_{d\nu} = \nabla_{d}\, {}_{z}t_{\nu}$

$$-{}_{z}h_{ab} N^{\nu}{}_{z}h_{d\nu} = {}_{z}h_{d\nu} \nabla_{a} \underset{b}{U^{\nu}} - \Psi_{ba}{}^{c}\, {}_{z}h_{dc}. \tag{9, 5a}$$

On en déduit

$$\Psi_{ba}{}^{e} = {}_{z}h^{de}\, {}_{z}h_{d\nu} \nabla_{a} \underset{b}{U^{\nu}} + {}_{z}h_{ab} N^{\nu}\, {}_{z}h_{d\nu}\, {}_{z}h^{de}. \tag{9, 6}$$

Cette équation nous fait voir que même les coefficients

$$_{z}\Gamma_{ba}{}^{c} = {}_{z}h^{dc}\, {}_{z}h_{d\lambda} \nabla_{a} \underset{b}{U^{\lambda}} \tag{9, 7}$$

constituent une connexion. La normale $_{z}N^{\nu}$ qui induit cette connexion peut être calculée de la formule analogue à (9, 4)

$$-{}_{z}h_{ab}\, {}_{z}N^{\nu} = {}_{z}D_{a} \underset{b}{U^{\nu}} = \partial_{a} U_{b}{}^{\nu} + \Gamma_{\lambda\mu}{}^{\nu} U_{a}{}^{\mu} U_{b}{}^{\lambda} - {}_{z}\Gamma_{ba}{}^{c} U_{c}{}^{\nu}, \tag{9, 8a}$$

c'est-à-dire, grâce à (9, 7)

$$ {}_zN^\nu = -\frac{{}_zh^{ab}}{n-1}\, {}_zD_a\, U_b^\nu = -\frac{{}_zh^{ab}}{n-1}(\nabla_a \underset{b}{U^\nu} - {}_z\Gamma^c_{ba}\, U_c^\nu) = $$

$$ = -\frac{{}_zh^{ab}}{n-1}(\nabla_a \underset{b}{U^\nu} - {}_zh^{dc}\, {}_zh_{d\lambda}\, \underset{b}{U_c^\nu}\, \nabla_a \underset{b}{U^\lambda}), $$

ou bien, ce qui revient au même

$$ {}_zN^\nu = -\frac{{}_zh^{ab}}{n-1}(\nabla_a \underset{b}{U^\lambda})(\delta_\lambda^\nu - {}_zh^{dc}\, {}_zh_{d\lambda}\, U_c^\nu)^{17}). \tag{9, 8b} $$

Cette normale est d'ordre 3 (d'ordre 2 dans le cas non holonome). Elle satisfait à deux équations importantes. La première est

$$ {}_zN^\nu\, {}_zt_\nu = -\frac{{}_zh^{ab}}{n-1}\, {}_zt_\nu\, \nabla_a \underset{b}{U^\nu} = \frac{{}_zh^{ab}}{n-1}\, U_b^\nu\, \nabla_a\, {}_zt_\nu = 1, \tag{9, 9a} $$

la deuxième a la forme

$$ \begin{aligned} {}_zN^\nu\, {}_zh_{e\nu} &= -\frac{{}_zh^{ab}}{n-1}(\nabla_a \underset{b}{U^\lambda})({}_zh_{e\lambda} - {}_zh^{dc}\, {}_zh_{d\lambda}\, {}_zh_{ec}) = \\ &= -\frac{{}_zh^{ab}}{n-1}(\nabla_a \underset{b}{U^\lambda})({}_zh_{e\lambda} - {}_zh_{e\lambda}) = 0. \end{aligned} \tag{9, 9b} $$

Une considération facile nous montre qu'il n'y a qu'une seule solution ${}_zN^\nu$ qui satisfait aux équations (9, 9).[18])

Parce que, pour $Q_d = \partial_d \log Q$,[19])

$$ {}_zh_{d\lambda} = \nabla_d\, {}_zt_\lambda = Q^z(\nabla_d\, t_\lambda + zQ_d\, t_\lambda) = Q^z({}_0h_{d\lambda} + zQ_d\, t_\lambda), \tag{9, 10} $$

l'équation (9, 8b) nous donne

$$ {}_zN^\nu = -\frac{Q^{-z}\, {}_0h^{ab}}{n-1}(\nabla_a \underset{b}{U^\lambda})\,[\delta_\lambda^\nu - {}_0h^{dc}\, U_c^\nu({}_0h_{d\lambda} + zQ_d\, t_\lambda)], $$

c'est-à-dire

$$ {}_zN^\nu = Q^{-z}({}_0N^\nu - zU_c^\nu\, Q_d\, {}_0h^{dc}). \tag{9, 11} $$

Or, les normales ${}_zN^\nu$ constituent un faisceau, déterminé par ${}_0N^\nu$ et $U_c^\nu\, Q_d\, {}_0h^{dc}$, la dernière grandeur étant dans $X^{(n)}_{n-1}$. Chaque élément de ce faisceau est défini uniquement par la valeur du nombre réel z. D'autre part, l'équation (9, 7) nous autorise à poser, grâce à (9, 10)

---

[17]) Grâce à la supposition concernante l'équation (9,1b), toutes les notions à l'indice z existent même dans le cas, où t est indéterminée, pour $z=0$.

[18]) La démonstration se trouve déjà (pour un cas plus simple) dans le Mémoire de l'auteur, cité à la page 243. On pourrait l'appliquer ici à peu près sans changement.

[19]) Ici et dans la suite nous supposerons $Q_d \neq 0$ (on peut toujours trouver des exemples, où cette condition est satisfaite). Dans (9, 10) on a, bien entendu, ${}_0h_{d\lambda} = h_{d\lambda}$, et plus tard aussi ${}_0h_{ab} = h_{ab}$, ${}_0h^{ab} = h^{ab}$.

$$ {}_z\Gamma_{ba}{}^c = Q^{-z}\, {}_0h^{dc}({}_0h_{d\lambda} + zQ_d\, t_\lambda)(\underset{b}{\nabla_a}\, U^\lambda)Q^z, $$

c'est-à-dire

$$ {}_z\Gamma_{ba}{}^c = {}_0\Gamma_{ba}{}^c - z\, h_{ab}\, h^{dc}\, Q_d. \qquad (9,\ 12a) $$

Les connexions aux coefficients ${}_z\Gamma_{ba}{}^c$ constituent donc un système définit par le vecteur Q_d et la connexion

$$ {}_0\Gamma_{ba}{}^c = h^{dc}\, h_{d\lambda}\, \underset{b}{\nabla_a}\, U^\lambda. \qquad (9,\ 12b) $$

En ne partant que des données du problème, on peut construire un système de connexions intrinsèques (9, 12a), d'ordre 3 (2 dans le cas non holonome), induit par le faisceau (9, 11) de normales affines, à la caractéristique $\left(0, \dfrac{-2}{n+1}, 0\right)$, d'ordre 3 (2 dans le cas non holonome).

(10) Normale privilégiée, questions connexes.

On pourrait se demander, si à côté du faisceau (9, 11) il n'y a pas d'autres normales d'ordre 3 (2 dans le cas non holonome). Nous répondrons affirmativement à cette question dans le dernier §. Or, il n'y a pas des normales privilégiées au sens propre du mot, c'est-à-dire privilégiées par la nature même du problème (que dans le cas métrique p. ex.). Mais d'autre part, on peut se servir des dates données de la question pour en choisir quelques prescriptions géométriques, qui caractérisent telle ou telle normale. C'est ce que nous ferons dans ce §: Introduisons à cet effet la notion des „directions conjuguées". Nous dirons que le vecteur w^ν est conjugué au vecteur v^ν par rapport au tenseur $T_{\mu\lambda}$, si $T_{\mu\lambda}v^\mu w^\lambda = 0$. Nous dirons même que les vecteurs w^ν et v^ν sont mutuellement conjugués, si à côté de l'équation que nous venons d'introduire est valable encore $T_{\mu\lambda}w^\mu v^\lambda = 0$. Cela posé, nous voulons chercher dans le faisceau (9, 11) une telle normale qui serait conjuguée — par rapport à n'importe quel tenseur du deuxième faisceau de Darboux — à n'importe quel vecteur tangent de l'hypersurface en jeu. Pour que ce fait ait lieu il est nécessaire et suffisant que soit satisfaite la relation

$$ U_c{}^\mu g_{\mu\lambda}{}^*{}_zN^\lambda = U_c{}^\mu g_{\mu\lambda}\, {}_zN^\lambda = 0 \text{ [20]} \qquad (10,\ 1a) $$

(et bien entendu, aussi (9, 9)) pour la normale cherchée ${}_zN^\nu$. Compte tenu de la deuxième des équations (6, 27), on peut écrire, au lieu de (10, 1a),

$$ h_{c\lambda}\, {}_zN^\lambda = 0. \qquad (10,\ 1b) $$

[20]) La première des équations (10, 1a) est toujours satisfaite, grâce à l'équation (6, 25). Or, il nous suffit de ne considérer que la deuxième des équations (10, 1a).

Le rapprochement des formules (10, 1b) et (9, 9b) nous fait voir, qu'il n'y a qu'une seule normale qui jouisse de la propriété prescrite, à savoir la normale ${}_0N^\nu$. On a donc

$$U_c^\mu\, g_{\mu\lambda}{}^*\, {}_0N^\lambda = U_c^\mu\, g_{\mu\lambda}\, {}_0N^\lambda = 0. \tag{10, 2a}$$

La normale ${}_0N^\nu$ est donc conjuguée à n'importe quel vecteur tangent par rapport à n'importe quel tenseur du deuxième faisceau de Darboux. De plus, si l'on a affaire à une hypersurface holonome dans l'espace ambiant à connexion (semi)symétrique, on a (par définition) $h_{c\lambda} = h_{\lambda c}$, d'où il suit à cause de (10, 1b)

$$ {}_0N^\lambda\, h_{\lambda c} = 0. \tag{10, 1c}$$

Compte tenu de la première des équations (6, 27), nous pouvons écrire dans ce cas particulier, au lieu de (10, 1c)

$$ {}_0N^\lambda\, g_{\lambda\mu}{}^*\, U_c^\mu = {}_0N^\lambda\, g_{\lambda\mu}\, U_c^\mu = 0. \tag{10, 2b}$$

Le cas échéant n'importe quel vecteur tangent et ${}_0N^\nu$ sont mutuellement conjugués par rapport à n'importe quel tenseur du deuxième faisceau de Darboux.[21]) Examinons maintenant le cas d'une hypersurface holonome, plongée dans l'espace à connexion générale non (semi)symétrique. Dans ce cas $h_{\lambda a}$ est défini moyennant (6, 13a). Or, si l'on désigne par $h_{\lambda a}{}^0$ n'importe quelle solution de (6, 13a) et par Z_μ ($Z_c = U_c^\mu Z_\mu$) n'importe quel vecteur à la caractéristique (0, 0, 0), la solution la plus générale peut être écrite

$$h_{\lambda a} = h_{\lambda a}{}^0 + Z_a\, t_\lambda. \tag{10, 3}$$

Or, si l'on désigne par l'indice ${}_0$, affecté en haut à droite les notions, déduites à l'aide de $h_{\lambda a}{}^0$, on tire de la première des équation (6, 19c)

$$Y_c = Y_c{}^0 + Z_c \tag{10, 4a}$$

et par conséquent, grâce à (6, 21).

$$g_{\mu\lambda} = g_{\mu\lambda}{}^0 + Z_\lambda\, t_\mu. \tag{10, 4b}$$

Nous chosirons le vecteur Z_c, jusqu'alors arbitraire, de manière que soit satisfaite l'équation (10, 2b) même dans ce cas non (semi)symétrique. Pour cela il est nécessaire et suffisant que soit

$$Z_c = -\, g_{\mu\lambda}{}^0\, U_c^\lambda\, {}_0N^\mu, \tag{10, 5a}$$

ou bien, ce qui revient au même, grâce à l'équation analogue à (6, 27)

$$Z_c = -\, h_{\lambda c}{}^0\, {}_0N^\lambda. \tag{10, 5b}$$

Ce choix du vecteur Z_c a donc pour conséquence que même dans le cas non (semi)symétrique n'importe quel vecteur tangent et ${}_0N^\nu$ sont mutuellement conjugués. Examinons maintenant l'influence

[21]) Ce résultat peut être déduit aussitôt de (10, 1a), si l'on tient compte de ce que dans ce cas spécial $g_{\mu\lambda} = g_{\lambda\mu}$.

du choix du tenseur $h_{\lambda c}{}^0$ à la solution générale (10, 3)! Partons à ce but d'un autre tenseur $\underset{1}{h}_{\lambda c}{}^0$

$$\underset{1}{h}_{\lambda c}{}^0 = h_{\lambda c}{}^0 + P_c\, t_\lambda \tag{10, 6}$$

qui est à son tour une solution particulière de (6, 13a), P_μ étant n'importe quel vecteur à la caractéristique (0, 0, 0) et $P_c = U_c{}^\mu P_\mu$. Désignons par l'indice 1, affecté en bas, les notions, déduites moyennant $\underset{1}{h}_{\lambda c}{}^0$! On a en premier lieu

$$\underset{1}{Z}_c = -\underset{1}{h}_{\lambda c}{}^0\, {}_0N^\lambda = Z_c - P_c, \tag{10, 7a}$$

et par conséquent

$$\underset{1}{h}_{\lambda c} = \underset{1}{h}_{\lambda c}{}^0 + \underset{1}{Z}_c\, t_\lambda = h_{\lambda c}{}^0 + (P_c + \underset{1}{Z}_c) t_\lambda = h_{\lambda c}{}^0 + Z_c\, t_\lambda = h_{\lambda c}. \tag{10, 7b}$$

Or le choix particulier du $h_{\lambda c}{}^0$ n'exerce aucune influence sur le tenseur $h_{\lambda c}$, lequel maintenant, grâce à la prescription (10, 2b) est complètement défini:

Parmi des normales du faisceau (9, 11), d'ordre 3 (2 dans le cas non holonome) il n' y a qu'une, ${}_0N^\nu$, qui est conjuguée — par rapport à n'importe quel tenseur du deuxième faisceau de Darboux — à n'importe quel vecteur tangent à $X_{n-1}^{(n)}$. Dans le cas holonome, les directions mentionnées sont mutuellement conjuguées, à condition que l'on ait fait un choix convenable (10, 3) et (10, 5b), unique possible, de $h_{\lambda c}$ dans le cas non (semi) symétrique.

Remarque. En fixant le tenseur $h_{\lambda c}$ de cette façon (ce que nous voulons supposer dans la suite), et le faisceau (6, 25) et le tenseur, caractérisé par (8, 10), sont bien déterminés même dans ce cas non (semi) symétrique holonome.

Nous finirons ce § en déduisant quelques conséquences du théorème mentionné pour le cas holonome. En tenant compte de (10, 1) et (10, 2), on déduit de (6, 1) et (9, 8a) (pour $z = 0$)

$${}_0D_a\, h_{ab} = U_b{}^\mu\, U_c{}^\lambda\, {}_0D_a\, g_{\mu\lambda} = U_b{}^\mu\, U_c{}^\lambda\, \nabla_a\, g_{\mu\lambda} = g_{abc}, \tag{10, 8a}$$

d'où il suit à cause de (6, 26b)

$${}_0D_{[a}\, h_{b]c} = \tfrac{1}{2}\, U_a{}^\omega\, U_b{}^\mu (R_{\omega\mu\lambda}{}^\nu\, U_c{}^\lambda\, t_\nu + 2S_{\omega\mu}{}^\nu\, h_{\nu c}). \tag{10, 8b}$$

Cette équation peut être simplifiée, si l'on tient compte de (6, 5)

$${}_0D_{[a}\, h_{b]c} = \tfrac{1}{2}\, (U_a{}^\omega\, U_b{}^\mu\, U_c{}^\lambda\, R_{\omega\mu\lambda}{}^\nu\, t_\nu + 2\, {}_0T_{ab}{}^d\, h_{dc}) \tag{10, 8c}$$

$$({}_0T_{ab}{}^d = {}_0\Gamma_{[ab]}{}^d).$$

On est retombé ainsi à l'équation de Mainardi-Codazzi.

(11) Normales équivalentes.

Dans ce §, nous aurons à considérer des grandeurs à l'indice z, en supposant partout $z = 0$ et en supprimant partout l'indice 0.

Si l'espace ambiant était à connexion métrique, on pourrait construire la direction orthogonale à l'hypersurface en jeu sans ayant égard à la connexion de l'espace ambiant. (Cette direction est d'ordre 1 dans le cas holonome, d'ordre 0 dans le cas contraire). Cette direction reste invariante par rapport à toutes les connexions équivalentes du point de vue métrique (c'est-à-dire par rapport à toutes les connexions qui se déduisent des métriques quadratiques qui conservent — le long de l'hypersurface en jeu — l'orthogonalité au plan tangent de $X_{n-1}^{(n)}$). Dans notre cas général, où l'espace ambiant est à connexion affine générale, le problème analogue peut être formulé de la manière suivante: 1. En premier lieu, on doit trouver des connexions équivalentes du point de vue affine et de plus 2. on a à examiner des éléments d'ordre 3 (d'ordre 2 dans le cas non holonome) par rapport aux connexions équivalentes, mentionnées sub 1).

Le premier problème peut être résolu immédiatement: Les connexions équivalentes du point de vue affine doivent conserver le parallélisme (et des autoparallèles). La transformation la plus générale de la connexion donnée, aux coefficients $\Gamma_{\lambda\mu}{}^{\nu}$, est manifestement

$$^{*}\Gamma_{\lambda\mu}{}^{\nu} = \Gamma_{\lambda\mu}{}^{\nu} + V_{\lambda\mu}{}^{\nu}, \tag{11, 1}$$

où $V_{\lambda\lambda}{}^{\nu}$ est n'importe quel tenseur (avec $p_e = p_i = 0$). La condition nécessaire et suffisante pour que cette transformation conserve le parallélisme d'un champ vectoriel v^{ν} le long d'une direction définie par $\mathrm{d}x^{\nu}$ est manifestement

$$v^{\lambda}\, v^{[\alpha}\, V_{\lambda\mu}{}^{\nu]}\, \mathrm{d}x^{\mu} = 0.$$ [22])

Cette équation doit être satisfaite pour n'importe quel v^{ν} et n'importe quelle direction $\mathrm{d}x^{\nu}$ et par conséquent on a nécessairement

$$\delta^{[\alpha}_{(\beta}\, V_{\lambda)\mu}{}^{\nu]} = 0.$$

Il s'ensuit

$$n V_{\lambda\mu}{}^{\nu} = \delta_{\lambda}^{\nu}\, V_{\alpha\mu}{}^{\alpha}.$$

On obtient ainsi la transformation la plus générale qui conserve le parallélisme (et des autoparallèles) sous la forme

$$^{1}\Gamma_{\lambda\mu}{}^{\nu} = \Gamma_{\lambda\mu}{}^{\nu} + \delta_{\lambda}^{\nu}\, q_{\mu} \tag{11, 2}$$

q_{μ} étant un vecteur arbitraire (avec $p_e = p_i = 0$). (Cette transfor-

[22]) Nous suivons ici la démonstration de M. L. P. Eisenhart (Non-riemannian geometry, Amer. Math. Society Colloquium Publ. VIII, p. 29).

mation ne conserve pas en général la symétrie de la connexion.) Chaque transformation de cette forme sera dite „transformation affine (d'ordre r, si le vecteur q_μ est d'ordre r)". Des connexions, liées par une transformation affine seront dites „équivalentes du point de vue affine.

La première partie du problème résolue, nous voulons examiner le reste du problème énoncé. En désignant par l'indice 1, affecté en haut à gauche, des expressions, calculées moyennant ${}^1\Gamma_{\lambda\mu}{}^\nu$, nous obtenons en premier lieu

$$
{}^1t_\lambda = t_\lambda, \quad {}^1h_{ab} = h_{ab}, \quad {}^1h^{ab} = h^{ab}. \tag{11, 3a}
$$

D'autre part, si l'on tient compte de la définition de $h_{a\lambda}$

$$
h_{a\lambda} = \nabla_a t_\lambda = \partial_a t_\lambda + U_a{}^\mu \left(\frac{2}{n+1} \Gamma_{\alpha\mu}{}^\alpha t_\lambda - \Gamma_{\lambda\mu}{}^\nu t_\nu \right)
$$

on en déduit, grâce à (11, 2)

$$
{}^1h_{a\lambda} = h_{a\lambda} + \frac{n-1}{n+1} q_a\, t_\lambda, \quad (q_a = q_\mu U_a{}^\mu). \tag{11, 3b}
$$

Cela étant, cherchons à exprimer explicitement la solution ${}^1N^\nu$ du système

$$
{}^1h_{a\lambda}\, {}^1N^\lambda = 0, \quad {}^1N^\lambda\, t_\lambda = 1. \tag{11, 4a}
$$

Une méthode analogue à celle, employée au § 9 nous donne

$$
{}^1N^\nu = -\frac{h^{ab}}{n-1} ({}^1\nabla_a \underset{b}{U}{}^\lambda)\, (\delta_\lambda^\nu - h^{dc}\, {}^1h_{d\lambda}\, U_c{}^\nu).^{23)} \tag{11, 4b}
$$

On peut trouver même que (11, 4b) est l'unique solution possible de (11, 4a). ${}^1N^\nu$ est à la caractéristique $\left(0, \frac{-2}{n+1}, 0\right)$. Dorénavant, nous appellerons „normale affine" chaque grandeur M^ν, ayant cette caractéristique et normalisée par $M^\nu t_\nu = 1$. Les normales ${}^1N^\nu$ et N^ν (celle-ci étant définie par (9, 8b) pour $z = 0$) sont liées par l'équation que l'on peut déduire facilement de (11, 4) (a, ou b)

$$
{}^1N^\nu = N^\nu - \frac{n-1}{n+1} U_c{}^\nu h^{dc} q_d. \tag{11, 5}
$$

En partant de la connexion ${}^1\Gamma_{\lambda\mu}{}^\nu$, équivalente à la connexion $\Gamma_{\lambda\mu}{}^\nu$ du point de vue affine, nous avons construit une seule normale ${}^1N^\nu$, satisfaisant à (11, 4). Elle est liée à N^ν par (11, 5). Partons maintenant d'une normale ${}^1N^\nu$, donnée à priori, et cherchons une telle connexion ${}^1\Gamma_{\lambda\mu}{}^\nu$, équivalente à $\Gamma_{\lambda\mu}{}^\nu$ du point de vue affine, que

[23]) ${}^1\nabla_a = U_a{}^\mu\, {}^1\nabla_\mu$ et ${}^1\nabla_\mu$ est le symbole de la dérivée covariante par rapport à la connexion ${}^1\Gamma_{\lambda\mu}{}^\nu$.

cette normale ${}^1N^\nu$, donnée d'avance, résulte aussi comme solution unique du système (11, 4a), où, bien entendu, ${}^1h_{a\lambda}$ n'est pas encore connue! Les normales ${}^1N^\nu$, N^ν étant connues, telle est aussi leur différence

$$P^\nu = {}^1N^\nu - N^\nu \tag{11, 6a}$$

qui, grâce à la condition normalisante, est situé dans $X^{(n)}_{n-1}$:

$$P^\nu = P^c U_c^{\ \nu}. \tag{11, 6b}$$

Le rapprochement des formules (11, 5) et (11, 6) nous donne

$$P^\nu = -\frac{n-1}{n+1} U_c^{\ \nu} h^{dc} q_d, \tag{11, 7a}$$

ou bien

$$P^a = -\frac{n-1}{n+1} h^{da} q_d. \tag{11, 7b}$$

Or, si l'on porte dans (11, 2) n'importe quelle solution q_μ du système

$$q_\mu U_a^{\ \mu} = -\frac{n+1}{n-1} P^b h_{ab}, \tag{11, 8}$$

la connexion ${}^1\Gamma_{\lambda\mu}^{\ \ \nu}$ jouit des propriétés énoncées plus haut. De plus, si la normale ${}^1N^\nu$, donnée d'avance est d'ordre 3 (2 dans le cas non holonome), P^ν et par conséquent aussi q_μ, défini par (11, 8), ont le même ordre 3 (2) au plus:

Étant donnée une normale affine ${}^1N^\nu$ d'ordre 3 (2), une transformation affine d'ordre 3 (2) au plus nous mène aux connexions[24]) correspondantes, equivalentes du point de vue affine à $\Gamma_{\lambda\mu}^{\ \ \nu}$, qui satisfont à (11, 4).

Cela étant, imaginons données deux normales ${}^1N^\nu$ et ${}^2N^\nu$ d'ordre 3 (2) et désignons par

$$R^c U_c^{\ \nu} = R^\nu = {}^2N^\nu - {}^1N^\nu$$

leur différence dans $X^{(n)}_{n-1}$, qui est connue et d'ordre 3 (2) au plus. Un calcul analogue à celui que nous venons d'employer nous fait voir que la transformation

$$ {}^2\Gamma^\nu_{\ \lambda\mu} = {}^1\Gamma_{\lambda\mu}^{\ \ \nu} + \delta_\lambda^\nu r_\mu \tag{11, 9a}$$

nous mène de ${}^1N^\nu$ à ${}^2N^\nu$ à condition que r_μ soit n'importe quelle solution du système

$$r_\mu U_a^{\ \mu} = -\frac{n+1}{n-1} R^b h_{ab}. \tag{11, 9b}$$

${}^1\Gamma_{\lambda\mu}^{\ \ \nu}$ et ${}^2\Gamma_{\lambda\mu}^{\ \ \nu}$ sont donc deux connexions équivalentes du point de vue affine et la transformation (11, 9a) est d'ordre 3 (2) au plus.

---

[24]) A côté de ${}^1\Gamma_{\lambda\mu}^{\ \ \nu}$ toutes les connexions ${}^1\Gamma_{\lambda\mu}^{\ \ \nu} + (*)\, \delta_\lambda^\nu t_\mu$ jouissent des propriétés énoncées en haut.

Deux normales ainsi liées seront dites ,,équivalentes du point de vue affine". Les normales ${}^1N^\nu$ et ${}^2N^\nu$ étant arbitrairement choisies, on peut énoncer le théorème suivant:

N'importe quelles deux normales d'ordre 3 (2 dans le cas non holonome) sont équivalentes du point de vue affine. Il y a toujours une transformation affine (d'ordre 3 (2) au plus) des connexions correspondantes qui fait porter l'une des normales à l'autre.

Or contrairement au cas métrique, dans le cas affine il n'y a aucune normale (d'ordre 3 (2)) dont la direction serait indépendante de la connexion de l'espace ambiant. En changeant convenablement cette connexion, on parvient à n'importe quelle normale d'ordre 3 (2) donnée d'avance.[25]) Nous nous réservons pour une autre occasion l'étude des normales intrinsèques d'ordre 4, invariantes par rapport aux transformations affines de la connexion.

Prague, novembre 1936.

*

Darbouxovy svazky a problémy příbuzné v afinním zakřiveném prostoru.

(Obsah předešlého článku.)

Buď dána (ne)holonomní nadplocha v n-rozměrném afinním zakřiveném prostoru. V prvé části práce sestrojeny jsou v obecném bodě nadplochy dva svazky kvadratických tensorů (druhého) třetího řádu, hodnosti n. Každý z těchto svazků jest určitou analogií ke svazku Darboux-ových kvadrik v klasickém případě nadplochy v nezakřiveném afinním prostoru. V každém svazku lze privilegovati jeden tensor (třetího) čtvrtého řádu, analogický ke kvadratice Lie-Čechově. — Ve druhé části práce sestrojen lineární svazek afinních normál v bodě nadplochy, z nichž každá je (druhého) třetího řádu. Vedle toho sestrojena normála (druhého) třetího řádu, která nepatří tomuto svazku. Všechny afinní normály (druhého) třetího řádu jsou vzájemně ekvivalentní vzhledem k afinní transformaci konnexe prostoru.

---

[25]) Si $\Gamma_{[\lambda\mu]}{}^\nu \neq 0$, la connexion aux coefficients ${}^*\Gamma_{\lambda\mu}{}^\nu = \Gamma_{\lambda\mu}{}^\nu + \frac{2}{n-1}\,\delta_\lambda^\nu \Gamma_{[\mu\alpha]}{}^\alpha$ est invariante par rapport aux transformations (11, 2). Elle donne naissance à une normale d'ordre 3 (2), invariante par rapport à ces transformations. Mais cette normale n'est pas invariante par rapport à la transformation affine de la connexion ${}^*\Gamma_{\lambda\mu}{}^\nu$ elle-même. La connexion aux coefficients ${}^*\Gamma_{\lambda\mu}{}^\nu$ a été étudiée par M. Bortolotti (Cfr. Annali di Mat. Ser. IV, Tomo 8 (1930—31), pp. 53—101 et Annals of Mathematics, Vol. 32 (1931), pp. 361—377).

Sur la décomposition d'un groupe en produit direct des sousgroupes.[1])

Vladimír Kořínek, Praha.

(Reçu le 27 mars 1937.)

Liste bibliographique.

Reinhold **Baer:** 1. The decomposition of enumerable, primary, Abelian groups into direct summands. Quaterly J. of Math., Oxford Series **6** (1935), 217—221.

2. The decomposition of Abelian groups into direct summands. Quaterly J. of Math., Oxford Series **6** (1935), 222—232.

Hans **Fitting:** 1. Die Theorie der Automorphismenringe Abelscher Gruppen und ihr Analogon bei nicht kommutativen Gruppen. Math. Annalen **107** (1932), 514—542.

2. Berichtigung zu der Arbeit von Hans Fitting: Theorie der Automorphismenringe Abelscher Gruppen und ihr Analogon bei nicht kommutativen Gruppen. Math. Annalen **109** (1933), 616.

3. Über die direkten Produktzerlegungen einer Gruppe in direkt unzerlegbare Faktoren. Math. Zeitschrift **39** (1934), 16—30.

4. Über die Existenz gemeinsamer Verfeinerungen bei direkten Produktzerlegungen einer Gruppe. Math. Zeitschrift **41** (1936), 380—395.

Alexander **Kurosch:** 1. Zur Zerlegung unendlicher Gruppen. Math. Annalen **106** (1932), 107—113.

Heinz **Prüfer:** 1. Untersuchungen über die Zerlegbarkeit der abzählbaren primären Abelschen Gruppe. Math. Zeitschrift **17** (1923), 35—61.

Robert **Remak:** 1. Über die Zerlegung der endlichen Gruppen in direkte unzerlegbare Faktoren. J. für reine u. angewandte Math. **139** (1911), 293—308.

Otto **Schmidt:** 1. Über unendliche Gruppen mit endlicher Kette. Math. Zeitschrift **29** (1929), 34—41.

---

[1]) Les principaux résultats de ce travail ont été l'objet d'une communication que l'auteur a faite le 17 juillet 1936 au Congrès international des mathématiciens à Oslo. Cette communication contenait en plus des théorèmes concernant l'existence d'un élargissement commun de deux décompositions d'un groupe. Mais presque en même temps a apparu dans le 3e cahier du tome 41 de Mathematische Zeitschrift un travail de M. Fitting (voir Fitting [4]), datant du 3 février 1936, que je ne connaissais pas au moment, quand je faisais ma communication. Le 3e cahier du tome 41 porte la mention: Abgeschlossen am 26. Juni 1936. Le travail de M. Fitting traite le problème de l'existence d'un élargissement commun de deux décompositions données et en donne une solution très complète. Par conséquent j'ai exclu du présent travail ce problème.

§ 1. Notations et définitions.

Dans ce qui suit les majuscules allemandes désignent toujours les groupes et les sousgroupes, les majuscules latines désignent les éléments du groupe et les lettres grecques désignent les automorphismes d'un groupe ou sousgroupe.

Soit $\mathfrak{G}$ un groupe ayant un champ d'opérateurs Ω. Excepté le § 2, nous allons entendre par un sousgroupe ou un facteur direct d'une décomposition un sousgroupe ou un facteur direct qui est invariant par rapport aux opérateurs de Ω. De même par un sousgroupe (facteur) irréductible nous allons entendre un sousgroupe (facteur) $\mathfrak{H}$ de $\mathfrak{G}$ qui ne se laisse pas décomposer en produit direct de deux facteurs, invariants par rapport à Ω et tous deux distincts de $\mathfrak{H}$ et du sousgroupe-unité $\mathfrak{E}$. Un tel sousgroupe peut être réductible au sens absolu du mot, ayant des facteurs directs qui ne sont pas invariants par rapport à Ω. Nous allons écrire la décomposition d'un groupe donné $\mathfrak{G}$ en produit direct[2]) de ses sousgroupes de la manière suivante

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2 \times \ldots \times \mathfrak{G}_r. \tag{1}$$

Sauf la mention contraire les produits directs envisagés contiendront toujours un nombre fini des facteurs. Chaque élément G de $\mathfrak{G}$ peut être exprimé d'une seule manière comme produit $G = G_1 G_2 \ldots G_r$ avec G_i dans $\mathfrak{G}_i$. L'élément G_i sera appelé le *composant* de G dans $\mathfrak{G}_i$. La *décomposition* (1) est dite *irréductible*, si tous les facteurs qui y figurent sont irréductibles.

J'appelle une *chaîne descendante* des sousgroupes dans $\mathfrak{G}$ une suite des sousgroupes de $\mathfrak{G}$ telle que[3])

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}^{(0)} \supseteqq \mathfrak{G}^{(1)} \supseteqq \mathfrak{G}^{(2)} \supseteqq \ldots \tag{2}$$

De même une *chaîne montante* des sousgroupes dans $\mathfrak{G}$ est une suite de sousgroupes telle que

$$\mathfrak{E} \subseteqq \mathfrak{G}^{(1)} \subseteqq \mathfrak{G}^{(2)} \subseteqq \ldots \tag{3}$$

Une chaîne (2) est dite *chaîne normale descendante*, si pour chaque $i \geqq 1$, $\mathfrak{G}^{(i)}$ est un sousgroupe normal[4]) de $\mathfrak{G}^{(i-1)}$. De même une

[2]) Quant à la définition d'un produit direct, voir: L. B. van der Waerden, Moderne Algebra I., § 42, p. 141.

[3]) $\mathfrak{M} \subseteqq \mathfrak{N}$ signifie que l'ensemble $\mathfrak{N}$ contient l'ensemble $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$ signifie la même relation, quand on a $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{N}$. Nous ferons encore usage des notations suivantes, provenant de la théorie des ensembles: $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}$ pour la partie commune de ces deux ensembles, $M \in \mathfrak{M}$, quand l'élément M appartient à $\mathfrak{M}$. Par $\{\mathfrak{H}^{(1)}, \mathfrak{H}^{(2)}\}$ nous allons désigner le sousgroupe de $\mathfrak{G}$ engendré par les sousgroupes $\mathfrak{H}^{(1)}$ et $\mathfrak{H}^{(2)}$, par $(G_1, G_2, \ldots, G_n)$ le sousgroupe engendré par les éléments $G_1, G_2, \ldots, G_n$.

[4]) „Normalteiler" ou „ausgezeichnete Untergruppe" est habituellement désigné dans les livres français par l'expression „sousgroupe in-

chaîne normale montante est une chaîne (3), dans laquelle, pour chaque i, $\mathfrak{G}^{(i)}$ est un sousgroupe normal de $\mathfrak{G}^{(i+1)}$. Une chaîne (2) ou (3) est dite *chaîne principale*, si dans (2) ou (3) chaque $\mathfrak{G}^{(i)}$ est un sousgroupe normal de $\mathfrak{G}$. Nous appelons une *chaîne descendante ou montante finie* une chaîne (2) ou (3) dans laquelle on a, à partir d'un certain indice k, $\mathfrak{G}^{(i)} = \mathfrak{G}^{(i+1)}$ pour chaque $i \geqq k$. Nous dirons que le groupe $\mathfrak{G}$ satisfait à la *supposition des chaînes descendantes* (*montantes*) *finies*,[5]) si chaque chaîne descendante (montante) de $\mathfrak{G}$ est finie.

Si l'on étudie les décompositions irréductibles d'un groupe, deux problèmes se posent immédiatement: le problème d'existence et le problème d'unicité. Quant au premier problème, on peut donner immédiatement la condition nécessaire et suffisante sous laquelle au moins une décomposition irréductible de $\mathfrak{G}$ existe. Pour cela il faut et il suffit que chaque chaîne descendante des facteurs directs de $\mathfrak{G}$ soit finie. Si l'on envisage des décompositions de $\mathfrak{G}$ ayant un nombre infini des facteurs, la question, ainsi posée par M. Kurosch [1], p. 108, devient plus difficile. Récemment M. F. Levi a donné l'exemple d'un groupe dénombrable, ne possédant aucun facteur irréductible. Voir Fitting [4], p. 392.

Le problème d'unicité est formé par la question, sous quelles conditions un groupe $\mathfrak{G}$ possède une décomposition irréductible unique. On sait déjà longtemps, en se bornant même aux groupes finis, qu'il y a des groupes qui possèdent plusieurs décompositions irréductibles distinctes. Alors, pour arriver aux résultats assez généraux, il faut généraliser la notion d'unicité. On appelle le sousgroupe $\mathfrak{G}^{(1)}$ de $\mathfrak{G}$ *centralement isomorphe* au sousgroupe $\mathfrak{G}^{(2)}$ de $\mathfrak{G}$, si $\mathfrak{G}^{(1)}$ est isomorphe à $\mathfrak{G}^{(2)}$, et si pour chaque élément G_1 de $\mathfrak{G}^{(1)}$, $G_1G_2^{-1}$ est un élément du centre de $\mathfrak{G}$, G_2 étant l'élément de $\mathfrak{G}^{(2)}$ correspondant à G_1 par l'isomorphisme en question. Un tel *isomorphisme* est appelé *central*. D'une manière analogue nous parlerons d'un *homomorphisme* et d'un *automorphisme central*. Je dis que la *décomposition* (1) de $\mathfrak{G}$ et la *décomposition*

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2 \times \ldots \times \mathfrak{H}_s \tag{4}$$

sont *centralement isomorphes*, si l'on a $r = s$, et si l'on peut établir une correspondance biunivoque entre les facteurs $\mathfrak{G}_i$ et $\mathfrak{H}_i$ telle que les facteurs correspondants sont centralement isomorphes. M. Remak [1] a trouvé déjà en 1911 que, pour un groupe fini, deux décompositions irréductibles quelconques sont toujours centralement isomorphes. Depuis ce temps-là, la question était

variant". J'emploie ici l'expression *sousgroupe normal* et je reserve l'expression *sousgroupe invariant* aux sousgroupes qui sont invariants par rapport à un champ d'opérateurs.

[5]) En allemand „Untergruppensatz" et „Obergruppensatz".

l'objet de plusieurs travaux. Les résultats les plus généraux, jusqu'à présent obtenus, sont dûs à M. Fitting et à M. Kurosch.

M. Fitting [3] a démontré le théorème suivant: *Si le groupe* $\mathfrak{G}$ *satisfait aux suppositions des chaînes principales descendantes finies et des chaînes principales montantes finies, deux décompositions irréductibles quelconques de* $\mathfrak{G}$, *sont toujours centralement isomorphes.* M. Kurosch [1], en poursuivant des recherches commencées par M. Schmidt [1], a démontré le théorème suivant; *Si le groupe* $\mathfrak{G}$ *satisfait à la supposition des chaînes normales descendantes finies, deux décompositions irréductibles quelconques de* $\mathfrak{G}$ *sont toujours centralement isomorphes.* M. Kurosch n'envisage que les groupes ordinaires sans un champ d'opérateurs. Pour le cas abélien le théorème de M. Kurosch est plus général, parce que, dans ce cas, chaîne normale et chaîne principale sont deux notions identiques. Dans le cas non-abélien les deux théorèmes ne peuvent pas être comparés. D'un côté les suppositions de M. Kurosch, faites sur les chaînes normales, exigent plus. D'autre côté elles exigent moins, aucune supposition sur les chaînes montantes n'étant faite. Cet état de chose nous a conduit à attendre que un théorème d'unicité plus général existe qui contiendrait les théorèmes de M. Fitting et de M. Kurosch comme conséquences. En effet, on conclut aisément du théorème 4,2 le théorème suivant:

Si $\mathfrak{G}$ *est un groupe qui possède des décompositions irréductibles et dont le centre satisfait à la supposition des chaînes descendantes finies, deux décompositions irréductibles quelconques de* $\mathfrak{G}$ *sont centralement isomorphes.*

Nous allons envisager dans le présent travail toute la question d'un point de vue encore un peu plus général. Supposons que, dans la décomposition (1) du groupe $\mathfrak{G}$, chaque facteur $\mathfrak{G}_i$ se laisse de nouveau décomposer en produit direct:

$$\mathfrak{G}_i = \mathfrak{G}_{i1} \times \mathfrak{G}_{i2} \times \ldots \times \mathfrak{G}_{it_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, r. \tag{5}$$

Si l'on substitue (5) dans la décomposition (1), on obtient la décomposition

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_{11} \times \mathfrak{G}_{12} \times \ldots \times \mathfrak{G}_{1t_1} \times \mathfrak{G}_{21} \times \mathfrak{G}_{22} \times \ldots \times \mathfrak{G}_{rt_r}. \tag{6}$$

La décomposition (6) sera appelée *l'élargissement de la décomposition* (1). Nous allons voir que, sous certaines suppositions, deux décompositions quelconques du groupe $\mathfrak{G}$ telles que (1) et (4) possèdent toujours des élargissements qui sont centralement isomorphes. (Théorème 4,1.) Les suppositions que nous y aurons à faire ne concernent que le centre du groupe $\mathfrak{G}$. (Suppositions 3,1 ou 6,1.) Il n'est pas même nécessaire que le groupe $\mathfrak{G}$ possède des décompositions irréductibles. Les supposition mentionnées sont toujours satisfaites, si le centre de $\mathfrak{G}$ satisfait à la supposition des chaînes descendantes finies. Je signale encore le fait que, récemment, M. Baer [1], p. 221, § 8 et [2], a fourni l'exemple d'un groupe abélien qui possède des décompositions qui ne peuvent pas être élargies en décompositions centralement isomorphes. Le présent travail fait clairement ressortir le fait que les seules difficultés qu'on rencontre, en étudiant l'unicité des décompositions de $\mathfrak{G}$ en produit direct, reposent dans le centre de $\mathfrak{G}$. Ce ne sont que les groupes abéliens, où l'on trouve à cet égard un état de choses compliqué. On peut tirer la même conclusion des résultats récents de M. Fitting [4].

§ 2. Les automorphismes d'un groupe.

Dans les alinéas 2,1—2,6 de ce paragraphe j'entend par un sousgroupe ou un facteur direct de $\mathfrak{G}$ un sousgroupe ou un facteur direct au sens absolu du mot, abstention faite du champ d'opérateurs Ω. Un *automorphisme* ϑ de $\mathfrak{G}$ est un homomorphisme qui fait correspondre à chaque élément G de $\mathfrak{G}$ un autre élément $G\vartheta$ de $\mathfrak{G}$. L'ensemble d'éléments $G\vartheta$ forme un sousgroupe de $\mathfrak{G}$ que nous allons désigner par $\mathfrak{G}\vartheta$. Tous les opérateurs du champ Ω sont des automorphismes du $\mathfrak{G}$ et inversement, un ensemble quelconque d'automorphismes de $\mathfrak{G}$ peut être pris pour un champ d'opérateurs de $\mathfrak{G}$. La correspondance $G \rightarrow G$ pour chaque G est aussi un automorphisme de $\mathfrak{G}$ que nous allons appeler *automorphisme-unité* et désigner par ε. De même E étant l'unité du groupe, la correspondance $G \rightarrow E$ pour chaque G, est un automorphisme de $\mathfrak{G}$, *l'automorphisme-zéro* ϱ. L'automorphisme de $\mathfrak{G}$ fait correspondre à chaque sousgroupe $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{G}$ un sousgroupe $\mathfrak{H}\vartheta$ de $\mathfrak{G}\vartheta$. Si l'on a $\mathfrak{H} \supseteqq \mathfrak{H}\vartheta$, l'automorphisme ϑ peut être considéré même comme l'automorphisme de $\mathfrak{H}$. Tel est le cas pour le sousgroupe $\mathfrak{G}\vartheta$, car de $\mathfrak{G} \supseteqq \mathfrak{G}\vartheta$ on obtient $\mathfrak{G}\vartheta \supseteqq (\mathfrak{G}\vartheta)\,\vartheta$. Soient η, ϑ deux automorphismes de $\mathfrak{G}$. On considère ces deux automorphismes comme égaux $\eta = \vartheta$, si l'on a $G\eta = G\vartheta$ pour chaque élément G de $\mathfrak{G}$. Comme on sait bien, le produit $\eta\vartheta$ de ces deux automorphismes est l'automorphisme qui fait correspondre à chaque élément G de $\mathfrak{G}$ l'élément $(G\eta)\,\vartheta$. La multiplication des automorphismes ainsi définie est associative: $\zeta(\eta\vartheta) = (\zeta\eta)\,\vartheta$. Si chaque élément de $\mathfrak{G}\eta$ est commutatif avec chaque élément de $\mathfrak{G}\vartheta$, la correspondance $G \rightarrow (G\eta)\,(G\vartheta)$ est aussi un automorphisme de $\mathfrak{G}$. En ce cas nous allons appeler d'après M. Fitting [1], p. 524 et [2] (voir aussi [3], p. 19, remarque 5), les deux *automorphismes* η et ϑ *sommables* et nous allons désigner l'automorphisme, engendré par la correspondance $G \rightarrow (G\eta)\,(G\vartheta)$, par $\eta + \vartheta$. La somme de n automorphismes $\vartheta_1 + \vartheta_2 + \ldots + \vartheta_n$ ne sera définie que dans le cas, où les automorphismes ϑ_i, ϑ_k pour chaque couple d'indices $i, k, i \neq k$, seront sommables. Elle nous représentera l'automorphisme engendré par la correspondance $G \to (G\vartheta_1)(G\vartheta_2)\ldots(G\vartheta_n)$. On voit aisément que l'addition des automorphismes, ainsi définie, est commutative et associative. Entre l'addition et la multiplication d'automorphismes il y a une relation distributive: L'existence de la somme $\vartheta_1 + \vartheta_2 + \ldots + \vartheta_n$ entraîne celle des sommes

$$\eta\vartheta_1 + \eta\vartheta_2 + \ldots + \eta\vartheta_n \text{ et } \vartheta_1\eta + \vartheta_2\eta + \ldots + \vartheta_n\eta$$

et on a[6])

$$\eta(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \ldots + \vartheta_n) = \eta\vartheta_1 + \eta\vartheta_2 + \ldots + \eta\vartheta_n \tag{1}$$

$$(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \ldots + \vartheta_n)\,\eta = \vartheta_1\eta + \vartheta_2\eta + \ldots + \vartheta_n\eta. \tag{2}$$

Si, pour ϑ, $\mathfrak{G}\vartheta$ est un groupe abélien, la correspondance $G \to (G\vartheta)^{-1} = G^{-1}\vartheta$ est un automorphisme de $\mathfrak{G}$ que nous allons désigner par $(-\vartheta)$. ϑ et $(-\vartheta)$ sont sommables et on a $\vartheta + (-\vartheta) = \varrho$.

M. Fitting [1], § 3, p. 518, et [3], p. 19, remarque 3, appelle un *automorphisme* ϑ de $\mathfrak{G}$ *normal*, si l'on a pour deux éléments quelconques A et B de $\mathfrak{G}$:

$$(B^{-1}AB)\,\vartheta = (B^{-1}\vartheta)(A\vartheta)(B\vartheta) = B^{-1}(A\vartheta)\,B.$$

Un automorphisme normal fait correspondre à chaque sousgroupe normal de $\mathfrak{G}$ de même un sousgroupe normal. On trouve aisément que la somme et le produit d'un nombre fini d'automorphismes normaux est un automorphisme normal.

Soit $\mathfrak{H}$ un sousgroupe de $\mathfrak{G}$. Si l'on a $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}\vartheta$ et si la correspondance $H \to H\vartheta$ est biunivoque, c'est-à-dire un isomorphisme, nous allons dire que l'automorphisme ϑ est un *automorphisme propre pour* $\mathfrak{H}$[7]) et que $\mathfrak{H}$ est un *sousgroupe reproduit par* ϑ. Un automorphisme ϑ propre pour $\mathfrak{G}$ ou un automorphisme propre tout court est un automorphisme au sens habituel du mot, c'est-à-dire une correspondance biunivoque entre les éléments de $\mathfrak{G}$, qui conserve l'opération du groupe. En ce cas et en ce cas seulement, il existe un *automorphisme inverse* ϑ^{-1} tel qu'on a $\vartheta\vartheta^{-1} = \vartheta^{-1}\vartheta = \varepsilon$. Si le sousgroupe $\mathfrak{H}$ est reproduit par η et ϑ, il est reproduit aussi par $\eta\vartheta$. Chaque automorphisme ϑ de $\mathfrak{G}$ est propre au moins pour un sousgroupe de $\mathfrak{G}$: pour le sousgroupe unité $\mathfrak{E}$. Nous allons démontrer le lemme suivant:

2,1. Lemme. *Pour chaque automorphisme ϑ de $\mathfrak{G}$ il y a dans $\mathfrak{G}$ des sousgroupes maximum reproduits par ϑ, c'est à dire des sous-*

---

[6]) Inversement, si, par exemple, la somme $\eta\vartheta_1 + \eta\vartheta_2 + \ldots + \eta\vartheta_n$ existe, il faut supposer de plus l'existence de $\vartheta_1 + \vartheta_2 + \ldots \vartheta_n$ pour pouvoir en conclure l'existence de $\eta(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \ldots + \vartheta_n)$ et l'égalité (1).

[7]) Cette expression est dûe aussi à M. Fitting. Voir [1], § 2, p. 518, [3], § 1, p. 18, remarque 2.

groupes reproduits par ϑ qui ne sont pas contenus dans d'autres sousgroupes reproduits par ϑ.

Démonstration. Soit $\mathfrak{H}^{(1)} \subset \mathfrak{H}^{(2)} \subset \mathfrak{H}^{(3)} \subset \ldots$ une chaîne montante infinie des sousgroupes reproduits par ϑ. (Si, dans $\mathfrak{G}$, une telle chaîne n'existe pas, le lemme est vrai.) Soit $\mathfrak{H}^{(\omega)}$ l'ensemble de tous les éléments de $\mathfrak{G}$ qui sont contenus au moins dans un des sousgroupes $\mathfrak{H}^{(i)}$. $\mathfrak{H}^{(\omega)}$ est un sousgroupe de $\mathfrak{G}$ qui est reproduit par ϑ ce qui prouve notre lemme.[8])

2,2. Lemme. *Soit ϑ un automorphisme de $\mathfrak{G}$. Supposons que parmi les sousgroupes maximum reproduits par ϑ, il y ait un sousgroupe normal $\mathfrak{H} \subseteqq \mathfrak{G}$. En ce cas $\mathfrak{H}$ est le sousgroupe maximum unique reproduit par ϑ.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{F}$ un sousgroupe quelconque reproduit par ϑ. La partie commune $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{F}'$ des ensembles $\mathfrak{H}$ et $\mathfrak{F}$ est aussi un sousgroupe reproduit par ϑ, car on a $\mathfrak{F}'\vartheta = (\mathfrak{H}\vartheta) \cap \cap (\mathfrak{F}\vartheta) = \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{F}'$ et la correspondance $F' \rightarrow F'\vartheta$ est évidemment un isomorphisme. Soit $\mathfrak{H}' = (\mathfrak{H}, \mathfrak{F})$ le sousgroupe engendré par $\mathfrak{H}$ et $\mathfrak{F}$. $\mathfrak{H}$ étant un sousgroupe normal de $\mathfrak{G}$, chaque élément $H' \in \mathfrak{H}'$ peut être mis sous la forme $H' = HF$ avec un $H \in \mathfrak{H}$ et un $F \in \mathfrak{F}$. On a $H'\vartheta = (H\vartheta)\,(F\vartheta)$, c'est-à-dire $\mathfrak{H}'\vartheta \subseteqq \mathfrak{H}'$. Inversement, il existe un élément $H_0 \in \mathfrak{H}$ tel que $H_0\vartheta = H$ et un élément $F_0 \in \mathfrak{F}$ tel que $F_0\vartheta = F$. On a alors $(H_0F_0)\,\vartheta = HF$ et par conséquent $\mathfrak{H}'\vartheta = \mathfrak{H}'$. Soit maintenant $(HF)\,\vartheta = E$, c'est-à-dire $H\vartheta = F^{-1}\vartheta \in \mathfrak{F}' = \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}$. Parce que $\mathfrak{F}'$ est reproduit par ϑ, la relation $H\vartheta = F^{-1}\vartheta$ entraîne $H = F^{-1}$, c'est-à-dire $HF = E$. La correspondance $H' \rightarrow H'\vartheta$, définie par ϑ dans $\mathfrak{H}'$, est un isomorphisme, cela veut dire, $\mathfrak{H}'$ est un sousgroupe reproduit par ϑ. $\mathfrak{H}$ étant un sousgroupe maximum, on a $\mathfrak{H}' = (\mathfrak{H}, \mathfrak{F}) = = \mathfrak{H}$, c'est-à-dire $\mathfrak{H} \supseteqq \mathfrak{F}$.

2,3. Lemme. *Soit ϑ un automorphisme de $\mathfrak{G}$. Soit $\mathfrak{K}$ l'ensemble de tous les éléments $K \in \mathfrak{G}$, ayant la propriété suivante: Pour chaque K on peut trouver un entier positif n tel que $K\vartheta^n = E$. $\mathfrak{K}$ est un sousgroupe normal de $\mathfrak{G}$ et on a $\mathfrak{K}\vartheta \subseteqq \mathfrak{K}$.* Nous allons appeler le sousgroupe $\mathfrak{K}$ *sousgroupe annulé par ϑ.*

Démonstration. L'ensemble de tous les éléments $K^{(1)} \in \mathfrak{G}$ tels que $K^{(1)}\vartheta = E$ forme, comme on sait, un sousgroupe normal $\mathfrak{K}^{(1)} \subseteqq \mathfrak{G}$. En général, soit $\mathfrak{K}^{(n)}$ l'ensemble de tous les éléments de $\mathfrak{G}$ tels que $K^{(n)}\vartheta^n = E$. $\mathfrak{K}^{(n)}$ est un sousgroupe normal et on a évidemment:

$$\mathfrak{E} \subseteqq \mathfrak{K}^{(1)} \subseteqq \mathfrak{K}^{(2)} \subseteqq \ldots \quad .$$

Construisons l'ensemble de tous les éléments de $\mathfrak{G}$ qui sont con-

[8]) Dans cette démonstration on a employé l'axiome de choix. Dans ce qui suit nous allons employer plusieurs fois cet axiome sans en faire une mention expresse.

tenus au moins dans un des sousgroupes $\mathfrak{K}^{(i)}$. Cet ensemble est un sousgroupe normal et il est identique à l'ensemble $\mathfrak{K}$. Parce qu'on peut écrire pour chaque n $\mathfrak{K}^{(n)}\vartheta \subseteq \mathfrak{K}^{(n-1)}$, on a $\mathfrak{K}\vartheta \subseteq \mathfrak{K}$.

2,4. Définition. *L'automorphisme ϑ de $\mathfrak{G}$ est dit parfait,* si le groupe $\mathfrak{G}$ est le produit direct $\mathfrak{G} = \mathfrak{H} \times \mathfrak{K}$ d'un sousgroupe maximum $\mathfrak{H}$ reproduit par ϑ et le sousgroupe $\mathfrak{K}$ annulé par ϑ. En ce cas, $\mathfrak{H}$ étant un sousgroupe normal de $\mathfrak{G}$, il est le sousgroupe maximum unique reproduit par ϑ.

Les démonstrations des paragraphes suivants reposent d'une manière fondamentale sur le théorème:

2,5. Théorème. *Soit ϑ un automorphisme du groupe $\mathfrak{G}$. Supposons que au moins un sousgroupe maximum $\mathfrak{H}$, reproduit par ϑ, soit normal et que le sousgroupe-quotient $\mathfrak{G}/\mathfrak{K}$ soit abélien et satisfasse à la supposition des chaînes descendantes finies. Sous ces conditions ϑ est parfait pour $\mathfrak{G}$.*

Démonstration. Nous allons prouver d'abord un lemme sur les groupes abéliens.

2,51. *Soit $\mathfrak{A}$ un groupe abélien qui satisfait à la supposition des chaînes descendantes finies. $\mathfrak{A}$ ne contient que les éléments d'ordre fini. Soit p un nombre premier quelconque. $\mathfrak{A}$ ne contient qu'un nombre fini ou zéro d'éléments d'ordre p.*[9])

En effet, dans $\mathfrak{A}$ chaque chaîne descendante étant finie, $\mathfrak{A}$ ne peut contenir aucun élément d'ordre infini. Envisageons pour un nombre premier donné p l'ensemble de tous les éléments de $\mathfrak{A}$ d'ordre p. S'il n'y a pas dans $\mathfrak{A}$ de tels éléments, le lemme est vrai. Dans le cas contraire, je prends un quelconque parmi ces éléments et je le désigne par A_1. Pour A_2 je prends un élément de cet ensemble qui est indépendant de A_1, cela veut dire qu'il ne peut pas être mis sous la forme $A_2 = A_1^k$ avec un k entier. En général, les $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ étant déjà choisis, je prends pour A_n un élément de l'ensemble envisagé qui est indépendant des éléments précédents, cela veut dire qu'il ne peut pas être mis sous la forme $A_1^{k_1}A_2^{k_2}\ldots A_{n-1}^{k_{n-1}}$, les k_i étant des entiers. Si l'on arrive à un entier n, pour lequel on ne peut plus choisir dans l'ensemble un éléments A_n indépendant des précédents, l'ensemble n'a qu'un nombre fini d'éléments. Dans le cas contraire nous avons construit une suite infinie d'éléments d'ordre $p: A_1, A_2, \ldots$, chaque élément étant indépendant des précédents.

---

[9]) Cette chose est la conséquence du fait que, d'après M. Kurosch [1], un tel $\mathfrak{A}$ est le produit direct d'un nombre fini de facteurs irréductibles qui sont, ou des sousgroupes cycliques, ayant comme ordre une puissance d'un nombre premier, ou les sousgroupes p^∞, appelés par M. Kurosch quasicycliques. Conformer aussi Prüfer [1]. Afin que les démonstrations du présent travail soient indépendantes des résultats de M. Kurosch, je donne ici une preuve du lemme.

Par conséquent on a pour chaque n[3]) $(A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}) \cap (A_n) = \mathfrak{E}$ et le groupe $\mathfrak{A}$ contient le produit direct infini $(A_1) \times (A_2) \times (A_3) \times \ldots$. Posons $\mathfrak{A}_i = (A_i) \times (A_{i+1}) \times \ldots, i = 1, 2, \ldots$. On voit que, en ce cas, $\mathfrak{A}$ contiendrait la chaîne descendante infinie $\mathfrak{A} \supseteqq \mathfrak{A}_1 \supset \mathfrak{A}_2 \supset \mathfrak{A}_3 \supset \ldots$ Le second cas est donc impossible.

2,52. On a pour chaque entier positif n: $H\vartheta^n \neq E$ pour $H \neq E$, $H \in \mathfrak{H}$, d'où $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{K} = \mathfrak{E}$. $\mathfrak{H}$ étant normal, $\mathfrak{G}$ *contient le produit direct*

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{H} \times \mathfrak{K} \subseteqq \mathfrak{G}$$

qui est un sousgroupe normal de $\mathfrak{G}$.

2,53. *On a* $\mathfrak{Q}\vartheta \subseteqq \mathfrak{Q}$. En effet $\mathfrak{H}\vartheta = \mathfrak{H}$ et d'après 2,3 $\mathfrak{K}\vartheta \subseteqq \mathfrak{K}$.

2,54. *Le groupe-quotient* $\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}/\mathfrak{Q}$ *est un groupe abélien, satisfaisant à la supposition des chaînes descendantes finies.* D'après la supposition le groupe-quotient $\mathfrak{G}/\mathfrak{K}$ est un groupe abélien qui satisfait à la supposition des chaînes descendantes finies. La même chose est donc vraie pour $\mathfrak{G}/\mathfrak{Q}$, à cause de $\mathfrak{K} \subseteqq \mathfrak{Q}$.

2,55. D'après 2,53 on a $(\mathfrak{Q}G)\,\vartheta = (\mathfrak{Q}\vartheta)\,(G\vartheta) \subseteqq \mathfrak{Q}(G\vartheta)$. *La correspondance entre les classes de* $\mathfrak{G}$ *d'après le sousgroupe* $\mathfrak{Q}$: $\mathfrak{Q}G \to \mathfrak{Q}(G\vartheta)$ *est un automorphisme du groupe-quotient* $\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}/\mathfrak{Q}$ que nous allons désigner par $\overline{\vartheta}$.

2,56. *L'automorphisme* $\overline{\vartheta}$ *est un automorphisme propre pour* $\overline{\mathfrak{G}}$. Soit $\overline{G}$ un élément de $\overline{\mathfrak{G}}$ et $\mathfrak{Q}G = (\mathfrak{H} \times \mathfrak{K})\,G$, la classe respective. Soit $\overline{G\vartheta} = E$, c'est-à-dire $G\vartheta = HK \in \mathfrak{Q}$ avec un $H \in \mathfrak{H}$ et un $K \in \mathfrak{K}$. On peut trouver dans $\mathfrak{H}$ un élément H' tel que $H'\vartheta = H$, d'où $(H'^{-1}G)\,\vartheta = K \in \mathfrak{K}$ et par conséquent $H'^{-1}G = K' \in \mathfrak{K}$, $G = H'K' \in \mathfrak{Q}$, c'est-à-dire $\overline{G} = E$. L'automorphisme $\overline{\vartheta}$ représente donc $\overline{\mathfrak{G}}$ d'une manière isomorphe à un sousgroupe $\overline{\mathfrak{G}}\overline{\vartheta}$ de $\overline{\mathfrak{G}}$, d'où il suit $\overline{\mathfrak{G}}\overline{\vartheta} = \overline{\mathfrak{G}}$.[10]) $\overline{\vartheta}$ est propre pour $\overline{\mathfrak{G}}$.

2,57. Supposons maintenant que $\overline{\mathfrak{G}}$ ne soit pas le groupe-unité. Il existe alors d'après 2,54 et 2,51 un nombre premier p tel qu'il y a dans $\overline{\mathfrak{G}}$ des éléments d'ordre p. L'ensemble de ces éléments est un sousgroupe $\overline{\mathfrak{G}}_p \subseteqq \overline{\mathfrak{G}}$, ayant d'après 2,51 l'ordre fini. $\overline{\mathfrak{G}}_p$ étant invariant par rapport à chaque automorphisme de $\overline{\mathfrak{G}}$, l'automorphisme $\overline{\vartheta}$ est propre pour $\overline{\mathfrak{G}}_p$. Soit $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_r$ une base de $\overline{\mathfrak{G}}_p$. Un élément arbitraire $\overline{A}$ de $\overline{\mathfrak{G}}_p$ peut être mis sous la forme

$$\overline{A} = \overline{A}_1^{d_1}\overline{A}_2^{d_2} \ldots \overline{A}_r^{d_r} \text{ avec } 0 \leqq d_i < p. \tag{3}$$

Choisissons dans la classe $\overline{A}_i$, $i = 1,2,\ldots,r$, d'une manière arbi-

[10]) Autrement, il y aurait dans $\overline{\mathfrak{G}}$ une chaîne descendante infinie: $\overline{\mathfrak{G}} \supset \overline{\mathfrak{G}}\overline{\vartheta} \supset \overline{\mathfrak{G}}\overline{\vartheta}^2 \supset \ldots$, contrairement à 2,54.

traire un élément A_i comme représentant de cette classe. Dans la classe $\bar{A}$ nous choisissons comme représentant l'élément

$$A = A_1^{d_1} A_2^{d_2} \dots A_r^{d_r}. \tag{4}$$

De $\bar{A}^p = \bar{E}$, il suit

$$A^p = HK \tag{5}$$

avec un $H \in \mathfrak{H}$ et un $K \in \mathfrak{K}$. p est le plus petit exposant pour lequel une telle équation est vraie. Soit s_A un nombre entier positif tel que pour K de (5) on a $K\vartheta^{s_A} = E$. Un tel s_A existe d'après 2,3. Posons

$$A\vartheta = H^{(1)} K^{(1)} A^{(1)}, \tag{6}$$

où $A^{(1)}$ est le représentant de la classe contenant $A\vartheta$. Soit t_A un entier positif tel qu'il est $K^{(1)}\vartheta^{t_A} = E$. Soit n le plus grand nombre de tous les s_A et de tous les t_A, A parcourant les représentants des classes de $\bar{\mathfrak{G}}_p$. Si l'on pose $\bar{A}_i \bar{\vartheta}_i^n = \bar{B}_i$, les $\bar{B}_i$ forment une nouvelle base pour $\bar{\mathfrak{G}}_p$ et on peut choisir pour les représentants des classes de la base les éléments

$$A_i \vartheta^n = B_i.$$

Pour le représentant d'une classe arbitraire $\bar{B} = \bar{B}_1^{d_1} \bar{B}_2^{d_2} \dots \bar{B}_r^{d_r}$ de $\bar{\mathfrak{G}}$ nous choisissons évidemment l' élément

$$B = B_1^{d_1} B_2^{d_2} \dots B_r^{d_r}, \qquad 0 \leqq d_i < p \tag{7}$$

et nous avons d'après (4)

$$A\vartheta^n = B. \tag{8}$$

D'après (5) et d'après le choix du nombre n il est

$$B^p = A^p \vartheta^n = (HK)\, \vartheta^n = (H\vartheta^n) \in \mathfrak{H}. \tag{9}$$

D'après (6) et (8) et d'après le choix du nombre n il est

$$\begin{aligned} B\vartheta = (A\vartheta^n)\, \vartheta = (A\vartheta)\, \vartheta^n = (H^{(1)} K^{(1)} A^{(1)})\, \vartheta^n = \\ = (H^1 \vartheta^n)\, (A^{(1)} \vartheta^n) = (H^1 \vartheta^n)\, B^{(1)}, \end{aligned} \tag{10}$$

où l'on a posé $A^{(1)}\vartheta^n = B^{(1)}$.

2,58. Le sousgroupe $\mathfrak{H}^{(1)} = (\mathfrak{H}, B_1, B_2, \dots, B_r)$[3]) de $\mathfrak{G}$ est reproduit par ϑ: On a d'après (10) $\mathfrak{H}^{(1)}\vartheta = (\mathfrak{H}\vartheta, B_1\vartheta, B_2\vartheta, \dots$ $\dots, B_r\vartheta) = (\mathfrak{H}, B_1, B_2, \dots, B_r) = \mathfrak{H}^{(1)}$. Un élément arbitraire de $\mathfrak{H}^{(1)}$ peut être mis sous la forme $HB_1^{d_1} B_2^{d_2} \dots B_r^{d_r}$ ce qui est d'après (7) égal à HB. $(HB)\, \vartheta = (H\vartheta)\, (B\vartheta) = E$ signifie $B\vartheta \in \mathfrak{H}$, cela veut dire pour les classes d'après 2,55 $\bar{B}\bar{\vartheta} = \bar{E}$ et de 2,56 il suit $\bar{B} = \bar{E}$, d'où $B = E$. $\mathfrak{H}$ étant le sousgroupe maximum reproduit par ϑ, on a $\mathfrak{H}^{(1)} = \mathfrak{H}$, cela veut dire $\bar{\mathfrak{G}}_p = \mathfrak{E}$, contrairement à la supposition faite au commencement de 2,57. Il en suit $\mathfrak{G} = \mathfrak{H} \times \mathfrak{K}$ et ϑ est parfait.

2,6. Définition. Envisageons la décomposition (1) du § 1. Soit $\mathfrak{H}$ un sousgroupe de $\mathfrak{G}$. Soit $H \in \mathfrak{H}$, la correspondance $H \to G_i$, où G_i est le composant de H dans $\mathfrak{G}_i$, est un homomorphisme que nous allons appeler *homomorphisme de décomposition.* D'une manière analogue nous parlerons d'un *isomorphisme de décomposition* et d'un *automorphisme de décomposition.* D'après M. Fitting [4], § 2, p. 382, nous allons désigner par γ_i l'automorphisme de décomposition qui fait correspondre à chaque élément $G = G_1 G_2 \ldots G_r$ son composant G_i dans le facteur $\mathfrak{G}_i$. On voit toute suite que chaque couple γ_i, γ_k, $i \neq k$, est sommable et d'après M. Fitting [4] l. c. on a les relations suivantes

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_r = \varepsilon, \tag{11}$$

$$\gamma_i \gamma_i = \gamma_i, \quad \gamma_i \gamma_k = \varrho \quad \text{pour } i \neq k. \tag{12}$$

On vérifie aisément le lemme:

2,61. Lemme. *Chaque automorphisme de décomposition est normal.*

2,7. Définition. Soit $\mathfrak{G}$ un groupe avec un champ d'opérateurs Ω. *L'automorphisme* ϑ de $\mathfrak{G}$ est dit *admis par* Ω, si l'on a $\omega\vartheta = \vartheta\omega$ pour chaque $\omega \in \Omega$.

2,71. Lemme. *Le produit d'un nombre fini d'automorphismes admis par Ω et la somme de ces automorphismes, si elle existe, est un automorphisme admis par Ω.*

Démonstration. Quant au produit l'énoncé est évident. Envisageons la somme $\vartheta_1 + \vartheta_2 + \ldots + \vartheta_n$. Nous avons d'après (1) et (2)

$$\omega\,(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \ldots + \vartheta_n) = \omega\vartheta_1 + \omega\vartheta_2 + \ldots + \omega\vartheta_n$$
$$(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \ldots + \vartheta_n)\,\omega = \vartheta_1\omega + \vartheta_2\omega + \ldots + \vartheta_n\omega$$

et les deux expressions sont identiques.

2,72. Lemme. *Si ϑ est un automorphisme de $\mathfrak{G}$ admis par Ω, le sousgroupe $\mathfrak{K}$, annulé par ϑ, est invariant par raport à Ω. Si, de plus, le sousgroupe maximum $\mathfrak{H}$, reproduit par ϑ, est unique et satisfait à la supposition des chaînes descendantes finies, il est de même invariant par rapport à Ω.*

Démonstration. Soit $K \in \mathfrak{K}$ et soit d'après 2,3 n entier positif tel que $K\vartheta^n = E$. On a $(K\omega)\,\vartheta^n = (K\vartheta^n)\,\omega = E$, c'est-à-dire $\mathfrak{K}\omega \subseteq \mathfrak{K}$.

Soit $\mathfrak{F}$ le sousgroupe, formé par tous les éléments $F \in \mathfrak{H}$ pour lesquels $F\omega = E$. On a donc $\mathfrak{F}\omega = \mathfrak{E}$ et ensuite $(\mathfrak{F}\vartheta)\,\omega = (\mathfrak{F}\omega)\,\vartheta = \mathfrak{E}$, d'où $\mathfrak{F}\vartheta \subseteq \mathfrak{F}$. L'automorphisme ϑ étant propre pour $\mathfrak{H}$, il représente le sousgroupe $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ d'une manière isomorphe au sousgroupe $\mathfrak{F}\vartheta \subseteq \mathfrak{F}$. Mais, parce que $\mathfrak{H}$ satisfait à la supposition des chaînes descendantes finies, le cas $\mathfrak{F}\vartheta \subset \mathfrak{F}$ n'est possible.[10]) Or, on a $\mathfrak{F}\vartheta = \mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}$ est reproduit par ϑ. Pour le sousgroupe $\mathfrak{H}\omega$, on a d'abord

$$\mathfrak{H}\omega = (\mathfrak{H}\vartheta)\,\omega = (\mathfrak{H}\omega)\,\vartheta. \tag{13}$$

Soit ensuite $H' \in \mathfrak{H}\omega$ et $H'\vartheta = E$. On peut déterminer un élément $H \in \mathfrak{H}$ tel que $H\omega = H'$. On a $E = H'\vartheta = (H\omega)\,\vartheta = (H\vartheta)\,\omega$, c'est-à-dire $(H\vartheta) \in \mathfrak{F}$. $\mathfrak{F}$ étant reproduit par ϑ, H est de même contenu dans $\mathfrak{F}$ et par conséquent $E = H\omega = H'$. ϑ représente $\mathfrak{H}\omega$ d'une manière isomorphe à $(\mathfrak{H}\omega)\,\vartheta$. En vertu de (13) $\mathfrak{H}\omega$ est donc reproduit par ϑ et parce que $\mathfrak{H}$ est le sousgroupe maximum unique reproduit par ϑ: $\mathfrak{H}\omega \subseteqq \mathfrak{H}$.

2,73. Lemme. *Soit $\mathfrak{G}$ un groupe avec un champ d'opérateurs Ω. Soit* (1) *du* § 1 *une décomposition de $\mathfrak{G}$, où les $\mathfrak{G}_i$ sont invariants par rapport à Ω. En ce cas tous les automorphismes de décomposition γ_i sont admis par Ω.*

Démonstration. D'après les suppositions, on a pour un $\omega \in \Omega$ et un $G \in \mathfrak{G}$ avec $G = G_1 G_2 \ldots G_r$: $G_k\omega = G'_k \in \mathfrak{G}_k$ pour $k = 1, 2, \ldots, r$. On en tire d'un côté $G\gamma_i\omega = G_i\omega = G'_i$, d'autre côté $G\omega\gamma_i = [(G_1\omega)(G_2\omega)\ldots(G_r\omega)]\,\gamma_i = [G'_1 G'_2 \ldots G'_r]\,\gamma_i = G'_i\gamma_i = G'_i$, par conséquent $\gamma_i\omega = \omega\gamma_i$.

Nous aurons besoin encore du lemme suivant:

2,8. Lemme. *Soient ϑ_1 et ϑ_2 deux automorphismes du groupe $\mathfrak{G}$. Soit $\mathfrak{H}$ un sousgroupe de $\mathfrak{G}$ reproduit par $\vartheta_1\vartheta_2$ et $\mathfrak{K}$ un sousgroupe reproduit par $\vartheta_2\vartheta_1$. Soit de plus*

$$\mathfrak{K}' = \mathfrak{H}\vartheta_1 \subseteqq \mathfrak{K}, \quad \mathfrak{H}' = \mathfrak{K}\vartheta_2 \subseteqq \mathfrak{H}. \tag{14}$$

On a alors $\mathfrak{H}\vartheta_1 = \mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}\vartheta_2 = \mathfrak{H}$ et les correspondances entre les éléments de $\mathfrak{H}$ et de $\mathfrak{K}$ y sont isomorphes.

En particulier, si $\vartheta_1\vartheta_2 = \vartheta_2\vartheta_1$ et si $\mathfrak{G}$ est reproduit par $\vartheta_1\vartheta_2$, $\mathfrak{G}$ est reproduit même par ϑ_1 et par ϑ_2.

Démonstration. On a

$$\mathfrak{H}\vartheta_1\vartheta_2 = \mathfrak{H}, \quad \mathfrak{K}\vartheta_2\vartheta_1 = \mathfrak{K} \tag{15}$$

et on peut écrire

$$\mathfrak{H}\vartheta_1 = \mathfrak{K}', \quad \mathfrak{K}'\vartheta_2 = \mathfrak{H}, \tag{16}$$

$$\mathfrak{K}\vartheta_2 = \mathfrak{H}', \quad \mathfrak{H}'\vartheta_1 = \mathfrak{K}. \tag{17}$$

Ici, les correspondances sont isomorphes, parce que, d'après la supposition, les correspondances (15) qui en résultent le sont aussi. De la seconde relation (16) et de la première relation (17) il résulte d'après (14) $\mathfrak{H} = \mathfrak{K}'\vartheta_2 \subseteqq \mathfrak{K}\vartheta_2 = \mathfrak{H}'$, ce qui donne d'après la seconde relation (14) $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}'$. De la même manière on prouve l'égalité $\mathfrak{K}' = \mathfrak{K}$. On parvient au cas particulier, si l'on pose $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}$, en tenant compte du fait qu'on a, en vertu de $\vartheta_1\vartheta_2 = \vartheta_2\vartheta_1$, $\mathfrak{K} = \mathfrak{G}$.

À la fin rappelons ce lemme démontré par M. Fitting [3], Hilfssatz 5, p. 20, qui est très important:

2,9. Lemme. *Envisageons la décomposition* (1) *du* § 1 *pour* $\mathfrak{G}$. *Soit* χ *un automorphisme de* $\mathfrak{G}$ *qui fait correspondre aux éléments de* $\mathfrak{G}_i$ *les éléments d'un certain sousgroupe* $\mathfrak{G}'_k$ *de* $\mathfrak{G}_k$, $i \neq k$. *Si* χ *est normal,* $\mathfrak{G}'_k$ *est un sousgroupe du centre de* $\mathfrak{G}_k$ *et par conséquent du centre de* $\mathfrak{G}$.

§ 3. Les produits directs de deux facteurs.

Dans ce qui suit nous revenons au cas d'un groupe $\mathfrak{G}$ ayant un champ d'opérateurs Ω. Soit $\mathfrak{C}$ le centre de $\mathfrak{G}$. Il se peut que $\mathfrak{C}$ n'est pas un sousgroupe invariant par rapport à Ω. Mais il existe toujours dans $\mathfrak{C}$ un sousgroupe maximum unique qui est invariant par rapport à Ω. Ce sousgroupe sera désigné par $\mathfrak{C}_\Omega$. Nous ferons maintenant sur $\mathfrak{G}$ la supposition suivante:

3,1. Supposition. $\mathfrak{C}_\Omega$ satisfait à la supposition des chaînes descendantes finies.

3,2. Soient

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2 = \mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2 \tag{1}$$

deux décompositions distinctes du groupe $\mathfrak{G}$ en produit direct de deux facteurs. Nous allons chercher un élargissement de la première et un élargissement de la seconde décomposition qui soient centralement isomorphes, l'un à l'autre. Pour ce but, nous allons désigner par γ_1, γ_2 les automorphismes de décomposition de la première décomposition et δ_1, δ_2 ceux de la seconde.[11]) Nous allons examiner ces automorphismes.[12])

3,21. Lemme. *Les sousgroupes* $\mathfrak{G}\gamma_i\delta_j\gamma_k = \mathfrak{G}_i\gamma_i\delta_j\gamma_k$, $i \neq k$, $i, j, k = 1, 2$ *sont sousgroupes de* $\mathfrak{C}_\Omega$. *La même chose est vraie pour* $\mathfrak{G}\delta_i\gamma_j\delta_k = \mathfrak{H}_i\delta_i\gamma_j\delta_k$. *Par conséquent* $\gamma_i\delta_1\gamma_k$, $\gamma_i\delta_2\gamma_k$ *et* $\delta_i\gamma_1\delta_k$, $\delta_i\gamma_2\delta_k$ *sont sommables et on a*

$$\gamma_i\delta_1\gamma_k + \gamma_i\delta_2\gamma_k = \varrho,\ \delta_i\gamma_1\delta_k + \delta_i\gamma_2\delta_k = \varrho,\quad i \neq k,\quad i, k = 1, 2, \tag{2}$$

ce qui peut être écrit:

$$\gamma_i\delta_1\gamma_k = -\gamma_i\delta_2\gamma_k,\ \delta_i\gamma_1\delta_k = -\delta_i\gamma_2\delta_k. \tag{3}$$

Démonstration. $\gamma_i\delta_j\gamma_k$ avec $i \neq k$ est un automorphisme normal (voir 2,61) pour lequel on a $\mathfrak{G}\gamma_i\delta_j\gamma_k = (\mathfrak{G}\gamma_i)\,\delta_j\gamma_k = \mathfrak{G}_i\delta_j\gamma_k \subseteq \subseteq \mathfrak{G}_k$. Ce sousgroupe est alors, en vertu de 2,9, un sousgroupe du centre et, en vertu de 2,73 et 2,71, un sousgroupe de $\mathfrak{C}_\Omega$. On a maintenant d'après (11) et (12) du § 2: $\varrho = \gamma_i\gamma_k = \gamma_i\,\varepsilon\,\gamma_k =$

---

[11]) J'attire l'attention du lecteur au fait que l'automorphisme de décomposition γ_1 n'est pas déterminé par le facteur direct $\mathfrak{G}_1$ seul, mais simultanément par ce facteur et par son facteur complémentaire $\mathfrak{G}_2$. En effet, s'il existe une autre décomposition $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}'_2$ avec $\mathfrak{G}'_2 \neq \mathfrak{G}_2$, on a pour les automorphismes de décomposition respectifs $\gamma'_1, \gamma'_2 : \gamma'_1 \neq \neq \gamma_1, \gamma'_2 \neq \gamma_2$.

[12]) Les lemmes 3,21, 3,23, 3,24, 3,25 sont vrais même sans la supposition 3,1.

$= \gamma_i(\delta_1 + \delta_2)\,\gamma_k = \gamma_i\delta_1\gamma_k + \gamma_i\delta_2\gamma_k$. $\mathfrak{G}\gamma_i\delta_j\gamma_k$ étant abélien, l'expression $-\gamma_i\delta_j\gamma_k$ a un sens. On a une preuve analogue pour $\delta_i\gamma_1\delta_k$, $\delta_i\gamma_2\delta_k$.

3,22. Lemme. *Posons* $\mathfrak{G}_i\gamma_i\delta_j\gamma_k = \mathfrak{G}''_k$, $\mathfrak{H}_i\delta_i\gamma_j\delta_k = \mathfrak{H}''_k$, $i, j, k = 1, 2$, $i \neq k$ *et* $\mathfrak{D}_{rs} = \mathfrak{G}_r \cap \mathfrak{H}_s$, $r, s = 1, 2$. *Les homomorphismes*: $\gamma_i\delta_j\gamma_k$ *entre* $\mathfrak{G}_i$ *et* $\mathfrak{G}''_k$ *et* $\delta_i\gamma_j\delta_k$ *entre* $\mathfrak{H}_i$ *et* $\mathfrak{H}''_k$ *engendrent les isomorphismes suivants*

$$\mathfrak{G}_i/(\mathfrak{D}_{ij} \times \mathfrak{D}_{il}) \cong \mathfrak{G}''_k, \qquad \mathfrak{H}_i/(\mathfrak{D}_{ji} \times \mathfrak{D}_{li}) \cong \mathfrak{H}''_k,$$

où $l = 1, 2$, $l \neq j$. *Ici, à cause de* 3, 21 *et* 3,1, *les groupes-quotients sont abéliens et satisfont à la supposition des chaînes descendantes finies.*

Démonstration. D'abord le sousgroupe $\mathfrak{D}_{rs}$, étant la partie commune de deux sousgroupes normaux de $\mathfrak{G}$, est lui-même un sousgroupe normal de $\mathfrak{G}$. Il est $\mathfrak{D}_{ij} \cap \mathfrak{D}_{il} \subseteq \mathfrak{H}_j \cap \mathfrak{H}_l = \mathfrak{E}$, par conséquent $\mathfrak{D}_{ij} \times \mathfrak{D}_{il}$ existe dans $\mathfrak{G}$. On a ensuite $\mathfrak{G}_i\gamma_i\delta_j\gamma_k = \mathfrak{G}_i\delta_j\gamma_k$. Posons $\mathfrak{G}_i\delta_j = \mathfrak{H}'_j$. Tous les éléments de $\mathfrak{G}_i$ auxquels l'automorphisme δ_j fait correspondre E forment exactement le sousgroupe $\mathfrak{D}_{il} = \mathfrak{G}_i \cap \mathfrak{H}_l$. De même on a $\mathfrak{H}'_j \supseteq \mathfrak{D}_{ij}$ et tous les éléments de $\mathfrak{H}'_j$ auxquels l'automorphisme γ_k fait correspondre E forment exactement le sousgroupe $\mathfrak{D}_{ij}$. Parce que δ_j laisse invariant chaque élément de $\mathfrak{D}_{ij}$, tous les éléments de $\mathfrak{G}_i$ auxquels l'automorphisme $\delta_j\gamma_k$ fait correspondre E forment exactement le sousgroupe $\mathfrak{D}_{ij} \times \mathfrak{D}_{il}$. Le lemme pour $\gamma_i\delta_j\gamma_k$ est maintenant la conséquence du théorème sur l'homomorphisme. On a une démonstration analogue pour $\delta_i\gamma_j\delta_k$.

3,23. Lemme. *Posons*

$$\varkappa_{ij} = \gamma_i\delta_j\gamma_i, \quad \lambda_{ij} = \delta_i\gamma_j\delta_i, \quad i, j = 1, 2.$$

Les automorphismes $\varkappa_{i1}$, $\varkappa_{i2}$ et λ_{i1}, λ_{i2}, $i = 1, 2$, sont *sommables et il est*

$$\varkappa_{i1} + \varkappa_{i2} = \gamma_i, \quad \lambda_{i1} + \lambda_{i2} = \delta_i, \quad i = 1, 2. \tag{4}$$

Démonstration. D'après (11) et (12) du § 2 il est

$$\gamma_i = \gamma_i\gamma_i = \gamma_i\,\varepsilon\,\gamma_i = \gamma_i(\delta_1 + \delta_2)\,\gamma_i = \gamma_i\delta_1\gamma_i + \gamma_i\delta_2\gamma_i = \varkappa_{i1} + \varkappa_{i2}$$

et on a une relation analogue pour δ_i.

3,24. Lemme. *Il est* $\varkappa_{i1}\varkappa_{i2} = \varkappa_{i2}\varkappa_{i1}$, $\lambda_{i1}\lambda_{i2} = \lambda_{i2}\lambda_{i1}$, $i = 1, 2$.

Démonstration. D'après (3) on a par exemple pour $\varkappa_{11}\varkappa_{12}$

$$\varkappa_{11}\varkappa_{12} = \gamma_1\delta_1\gamma_1\delta_2\gamma_1 = -\gamma_1\delta_1\gamma_2\delta_2\gamma_1 = -\gamma_1\delta_2\gamma_2\delta_1\gamma_1 = \gamma_1\delta_2\gamma_1\delta_1\gamma_1 = \\ = \varkappa_{12}\varkappa_{11}.$$

3,25. Lemme. *Il est*

$$\varkappa_{11}\varkappa_{12} + \varkappa_{21}\varkappa_{22} = \lambda_{11}\lambda_{12} + \lambda_{21}\lambda_{22}.$$

Démonstration. Les sommes existent, car, par exemple, pour la première, on a $\mathfrak{G}\varkappa_{11}\varkappa_{12} = (\mathfrak{G}\varkappa_{11})\,\varkappa_{12} \subseteq \mathfrak{G}\varkappa_{12} \subseteq \mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}\varkappa_{21}\varkappa_{22} = (\mathfrak{G}\varkappa_{21})\,\varkappa_{22} \subseteq \mathfrak{G}\varkappa_{22} \subseteq \mathfrak{G}_2$. On peut écrire la première somme, en vertu de (11), (1), (2) du § 2, et de 3,24, sous la forme

$$\varkappa_{11}\varkappa_{12}+\varkappa_{21}\varkappa_{22}=(\varkappa_{11}\varkappa_{12}+\varkappa_{22}\varkappa_{21})\,\varepsilon=(\gamma_1\delta_1\gamma_1\delta_2\gamma_1+\gamma_2\delta_2\gamma_2\delta_1\gamma_2)\,(\delta_1+\delta_2)=$$
$$=\gamma_1\delta_1\gamma_1\delta_2\gamma_1\delta_1+\gamma_2\delta_2\gamma_2\delta_1\gamma_2\delta_1+\gamma_1\delta_1\gamma_1\delta_2\gamma_1\delta_2+\gamma_2\delta_2\gamma_2\delta_1\gamma_2\delta_2$$

et la seconde, sous la forme

$$\lambda_{11}\lambda_{12}+\lambda_{21}\lambda_{22}=\varepsilon\,(\lambda_{11}\lambda_{12}+\lambda_{22}\lambda_{21})=(\gamma_1+\gamma_2)\,(\delta_1\gamma_1\delta_1\gamma_2\delta_1+\delta_2\gamma_2\delta_2\gamma_1\delta_2)=$$
$$=\gamma_1\delta_1\gamma_1\delta_1\gamma_2\delta_1+\gamma_2\delta_1\gamma_1\delta_1\gamma_2\delta_1+\gamma_1\delta_2\gamma_2\delta_2\gamma_1\delta_2+\gamma_2\delta_2\gamma_2\delta_2\gamma_1\delta_2.$$

D'après (3) il est ici

$$\begin{aligned}
\gamma_1\delta_1\gamma_1\delta_2\gamma_1\delta_1 &= -\gamma_1\delta_1\gamma_1\delta_2\gamma_2\delta_1=\gamma_1\delta_1\gamma_1\delta_1\gamma_2\delta_1,\\
\gamma_2\delta_2\gamma_2\delta_1\gamma_2\delta_1 &= -\gamma_2\delta_2\gamma_1\delta_1\gamma_2\delta_1=\gamma_2\delta_1\gamma_1\delta_1\gamma_2\delta_1,\\
\gamma_1\delta_1\gamma_1\delta_2\gamma_1\delta_2 &= -\gamma_1\delta_1\gamma_2\delta_2\gamma_1\delta_2=\gamma_1\delta_2\gamma_2\delta_2\gamma_1\delta_2,\\
\gamma_2\delta_2\gamma_2\delta_1\gamma_2\delta_2 &= -\gamma_2\delta_2\gamma_2\delta_1\gamma_1\delta_2=\gamma_2\delta_2\gamma_2\delta_2\gamma_1\delta_2,
\end{aligned}$$

ce qui prouve le lemme.

3,3. Nous ferons voir que les automorphismes $\varkappa_{ik}$, $\varkappa_{i1}\varkappa_{i2}$, λ_{ik}, $\lambda_{i1}\lambda_{i2}$ sont parfaits.

3,31. Lemme. *Les automorphismes $\varkappa_{i1}\varkappa_{i2}$ et $\lambda_{i1}\lambda_{i2}$, $i=1,2$, sont parfaits pour $\mathfrak{G}_i$ et $\mathfrak{H}_i$. On peut alors écrire*

$$\mathfrak{G}_i=\overline{\mathfrak{G}_i}\times\mathfrak{K}_i \quad et \quad \mathfrak{H}_i=\overline{\mathfrak{H}_i}\times\mathfrak{L}_i,$$

où $\overline{\mathfrak{G}_i}$ resp. $\overline{\mathfrak{H}_i}$ est le sousgroupe maximum de $\mathfrak{G}_i$ resp. $\mathfrak{H}_i$ reproduit par $\varkappa_{i1}\varkappa_{i2}$ resp. $\lambda_{i1}\lambda_{i2}$, et $\mathfrak{K}_i$ resp. $\mathfrak{L}_i$ le sousgroupe de $\mathfrak{G}_i$ resp. $\mathfrak{H}_i$ annulé par $\varkappa_{i1}\varkappa_{i2}$ resp. $\lambda_{i1}\lambda_{i2}$.

Démonstration. Nous donnons la preuve pour $\varkappa_{i1}\varkappa_{i2}$ et $\mathfrak{G}_i$. On a d'après la définition $\mathfrak{G}_i\varkappa_{i1}\varkappa_{i2}=\mathfrak{G}_i\gamma_i\delta_1\gamma_i\delta_2\gamma_i=\mathfrak{G}_i\delta_1\gamma_i\delta_2\gamma_i$. D'après 3,21 $\mathfrak{G}_i\delta_1\gamma_i\delta_2$ et par conséquent de même $\mathfrak{G}_i\delta_1\gamma_2\gamma_{ii}\delta$ est un sousgroupe de $\mathfrak{C}_\Omega$, car γ_i fait correspondre à un sousgroupe invariant du centre de même un sousgroupe invariant du centre. Ce sousgroupe est alors abélien et, d'après la supposition 3,1, il satisfait à la supposition des chaînes descendantes finies. Le sousgroupe $\overline{\mathfrak{G}_i}\subseteq\mathfrak{G}_i\varkappa_{i1}\varkappa_{i2}$ est donc normal. D'après le théorème sur l'homomorphisme, l'automorphisme $\varkappa_{i1}\varkappa_{i2}$ engendre l'isomorphisme suivant

$$\mathfrak{G}_i/\mathfrak{K}_i^{(1)}\cong\mathfrak{G}_i\varkappa_{i1}\varkappa_{i2},$$

où $\mathfrak{K}_i^{(1)}$ a la même signification pour $\mathfrak{K}_i$ comme $\mathfrak{K}^{(1)}$ pour $\mathfrak{K}$ à 2,3. $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{K}_i^{(1)}$ et, par conséquent aussi $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{K}_i$, est un sousgroupe abélien, satisfaisant à la supposition des chaînes descendantes finies. En vertu du théorème 2,5 $\varkappa_{i1}\varkappa_{i2}$ est parfait pour $\mathfrak{G}_i$. Les décompositions (1) étant invariantes par rapport à Ω, les automorphismes γ_i, δ_i, $i=1,2$, sont, en vertu de 2,73 et 2,71, admis par Ω. Le lemme 2,72 fait voir que $\overline{\mathfrak{G}_i}$ et $\mathfrak{K}_i$ sont invariants par rapport à Ω.

3,32. Lemme. *L'automorphisme $\varkappa_{ij}$ est parfait pour $\mathfrak{G}_i$, l'automorphisme λ_{ij}, parfait pour $\mathfrak{H}_i$, $i,j=1,2$. On peut donc écrire,* *en posant* $l = 1, 2,\ l \neq j$:

$$\mathfrak{G}_i = \overline{\mathfrak{G}}_{ij} \times \mathfrak{K}_{il} \text{ et } \mathfrak{H}_i = \overline{\mathfrak{H}}_{ji} \times \mathfrak{L}_{li},$$

où $\overline{\mathfrak{G}}_{ij}$ *resp.* $\overline{\mathfrak{H}}_{ji}$ *est le sousgroupe maximum de* $\mathfrak{G}_i$ *resp.* $\mathfrak{H}_i$ *reproduit par* $\varkappa_{ij}$ *resp.* λ_{ij}. $\mathfrak{K}_{il}$ *resp.* $\mathfrak{L}_{li}$ *est le sousgroupe de* $\mathfrak{G}_i$ *resp.* $\mathfrak{H}_i$ *annulé par* $\varkappa_{ij}$ *resp.* λ_{ij}.

Démonstration. Nous donnons la preuve pour $\varkappa_{ij}$ et $\mathfrak{G}_i$. Prenons le sousgroupe $\mathfrak{D}_{il}$ de 3,22. De $\mathfrak{D}_{il} \subseteqq \mathfrak{H}_l$ on tire $D_{il}\delta_j = E$ pour chaque $D_{il} \epsilon \mathfrak{D}_{il}$ et à plus forte raison $D_{il}\varkappa_{ij} = D_{il}\delta_j\gamma_i = E$. On a donc $\mathfrak{D}_{il} \subseteqq \mathfrak{K}_{il}^{(1)} \subseteqq \mathfrak{K}_{il}$. Il est d'autre part $D_{ij}\varkappa_{ij} = D_{ij}\gamma_i\delta_j\gamma_i = D_{ij}\delta_j\gamma_i = D_{ij}\gamma_i = D_{ij}$ pour chaque $D_{ij} \epsilon \mathfrak{D}_{ij}$. On a donc $\mathfrak{D}_{ij} \subseteqq \overline{\mathfrak{G}}_i$. L'automorphisme $\varkappa_{ij}$ engendre alors un automorphisme $\bar{\varkappa}_{ij}$ du groupe-quotient $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{D}_{ij} = \widetilde{\mathfrak{G}}_i$. $\bar{\varkappa}_{ij}$ fait correspondre à ce groupe le groupe $(\mathfrak{G}_i\varkappa_{ij})/\mathfrak{D}_{ij}$. Il en suit que le sousgroupe de $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{D}_{ij}$ annulé par $\bar{\varkappa}_{ij}$ est $\mathfrak{D}_{ij} \,.\, \mathfrak{K}_{il}/\mathfrak{D}_{ij} = \overline{\mathfrak{K}}_{li} \supseteqq \mathfrak{D}_{ij} \times \mathfrak{D}_{il}/\mathfrak{D}_{ij}$ et le sousgroupe maximum reproduit par $\bar{\varkappa}_{ij}$ est $\overline{\mathfrak{G}}_i/\mathfrak{D}_{ij}$. D'après le second théorème sur l'isomorphisme on a

$$(\mathfrak{G}_i/\mathfrak{D}_{ij})/(\mathfrak{D}_{ij} \times \mathfrak{D}_{il}/\mathfrak{D}_{ij}) \cong \mathfrak{G}_i/\mathfrak{D}_{ij} \times \mathfrak{D}_{il}$$

et nous avons vu à 3,22 que ce dernier groupe-quotient est abélien et satisfait à la supposition des chaînes descendantes finies. La même chose est donc vraie pour $\widetilde{\mathfrak{G}}_i/\overline{\mathfrak{K}}_{il}$. On a d'après le premier theorème sur l'isomorphisme

$$\overline{\mathfrak{G}}_i/\mathfrak{D}_{ij} \cong (\mathfrak{D}_{ij} \times \mathfrak{D}_{il}) \,.\, \overline{\mathfrak{G}}_i/\mathfrak{D}_{ij} \times \mathfrak{D}_{il} \subseteqq \mathfrak{G}_i/\mathfrak{D}_{ij} \times \mathfrak{D}_{il}.$$

Ce dernier groupe-quotient étant abélien, $\overline{\mathfrak{G}}_i/\mathfrak{D}_{ij}$ est un sousgroupe normal de $\widetilde{\mathfrak{G}}_i$. En vertu de 2,5 $\bar{\varkappa}_{ij}$ est donc parfait pour $\widetilde{\mathfrak{G}}_i$. Chaque élément de $\mathfrak{D}_{ij}$ étant invariant par rapport à $\varkappa_{ij}$, il en suit que $\varkappa_{ij}$ est parfait pour $\mathfrak{G}_i$.

3,33. Lemme. *Il est*

$$\mathfrak{K}_i = \mathfrak{K}_{i1} \times \mathfrak{K}_{i2}, \quad \mathfrak{L}_i = \mathfrak{L}_{1i} \times \mathfrak{L}_{2i}, \quad i = 1, 2.$$

3,34. Lemme. $\mathfrak{K}_{ij}$ *est reproduit par* $\varkappa_{ij}$. *De même* $\mathfrak{L}_{ji}$ *est reproduit par* λ_{ij}. $i, j = 1, 2$.

Démonstration. Nous allons prouver la première formule du lemme 3,33 et la première partie du lemme 3,34. On a d'abord $\mathfrak{K}_{i1} \cap \mathfrak{K}_{i2} = \mathfrak{E}$. Soit $K \epsilon \mathfrak{K}_{i1}$, $K \epsilon \mathfrak{K}_{i2}$. D'après 2,3 deux nombres entiers positifs n_1, n_2 existent tels que $K\varkappa_{i1}{}^{n_1} = E$, $K\varkappa_{i2}{}^{n_2} = E$. D'après 3,23 et (12) du § 2 il est $K = K\gamma_i = K\gamma_i^{n_1+n_2} = K(\varkappa_{i1} + \varkappa_{i2})^{n_1+n_2} = E$, car $(\varkappa_{i1} + \varkappa_{i2})^{n_1+n_2}$ est égal à la somme des termes $\varkappa_{i1}^{n_1+n_2-r}\varkappa_{i2}{}^r$, où $0 \leqq r \leqq n_1 + n_2$. Or, on a, ou $n_1 + n_2 - r > n_1$, ou $r \geqq n_2$, par conséquent $K\varkappa_{i1}^{n_1+n_2-r}\varkappa_{i2}{}^r = K\varkappa_{i2}{}^r\varkappa_{i1}^{n_1+n_2-r} = E$.

Soit $K_{i2} \in \mathfrak{K}_{i2}$ avec $K_{i2}\varkappa_{i1}^n = E$ d'après 2,3. Il est $(K_{i2}\varkappa_{i2})\,\varkappa_{i1}^n = (K_{i2}\varkappa_{i1}^n)\,\varkappa_{i2} = E$, donc $K_{i2}\varkappa_{i2} \in \mathfrak{K}_{i2}$. Or, $\varkappa_{i2}$ fait correspondre à $\mathfrak{K}_{i2}$ un sousgroupe $\mathfrak{K}_{i2}\varkappa_{i2} \subseteqq \mathfrak{K}_{i2}$. Cette correspondance est isomorphe, car $K_{i2}\varkappa_{i2} = E$ signifie $K_{i2} \in \mathfrak{K}_{i1}$, d'où on tire $K_{i2} = E$. Si l'on avait $\mathfrak{K}_{i2}\varkappa_{i2} \subset \mathfrak{K}_{i2}$, une chaîne descendante infinie existerait dans $\mathfrak{K}_{i2}$.[10]) À 3,22 on a vu $\mathfrak{K}_{i2} \supseteqq \mathfrak{D}_{i2}$ et à 3,32 on a vu $\overline{\mathfrak{G}}_{i1} \supseteqq \mathfrak{D}_{i1}$. Chaque élément de $\mathfrak{D}_{i2}$ étant invariant par rapport à $\varkappa_{i2}$, il serait $\mathfrak{K}_{i2}\varkappa_{i}^{n}{}_{2} \supseteqq \mathfrak{D}_{i2}$ pour chaque n. Il existerait donc dans

$$\mathfrak{K}_{i2}/\mathfrak{D}_{i2} \cong \mathfrak{D}_{i1}\,.\,\mathfrak{K}_{i2}/(\mathfrak{D}_{i1} \times \mathfrak{D}_{i2}) \subseteqq \mathfrak{G}_i/(\mathfrak{D}_{i1} \times \mathfrak{D}_{i2})$$

une chaîne descendante infinie ce qui est contraire à 3,22. Par conséquent $\mathfrak{K}_{i2}\varkappa_{i2} = \mathfrak{K}_{i2}$ et $\mathfrak{K}_{i2}$ est reproduit par $\varkappa_{i2}$. De même $\mathfrak{K}_{i1}$ est reproduit par $\varkappa_{i1}$. Le lemme 3,34 est donc démontré.

On a évidemment en vertu de 3,24 $\mathfrak{K}_{i1} \times \mathfrak{K}_{i2} \subseteqq \mathfrak{K}_i$. Soit $K_i \in \mathfrak{K}_i$, il existe un entier positif n tel que $E = K_i(\varkappa_{i1}\varkappa_{i2})^n = (K_i\varkappa_{i1}^n)\,\varkappa_{i2}^n$, d'où il suit $K_i\varkappa_{i1}^n = K'_{i1} \in \mathfrak{K}_{i1}$. $\mathfrak{K}_{i1}$ étant reproduit par $\varkappa_{i1}$, on peut y trouver l'élément K_{i1} tel que $K_{i1}\varkappa_{i1}^n = K'_{i1}$. Or, $(K_{i1}^{-1}K_i)\,\varkappa_{i1}^n = E$, c'est-à-dire $K_{i1}^{-1}K_i = K_{i2} \in \mathfrak{K}_{i2}$ et $K_i = K_{i1}K_{i2}$. On a donc $\mathfrak{K}_{i1} \times \mathfrak{K}_{i1} \supseteqq \mathfrak{K}_i$ et le lemme 3,33 est démontré.

3,4. Nous allons prouver quelques lemmes concernant les décompositions de $\mathfrak{G}_i$ et $\mathfrak{H}_i$.

3,41. Lemme. *On a*

$$\mathfrak{G}_i = \overline{\mathfrak{G}}_i \times \mathfrak{K}_{i1} \times \mathfrak{K}_{i2}, \quad \mathfrak{H}_i = \overline{\mathfrak{H}}_i \times \mathfrak{L}_{1i} \times \mathfrak{L}_{2i}, \quad i = 1, 2.$$

Les sousgroupes maximum reproduits par $\varkappa_{i1}, \varkappa_{i2}, \varkappa_{i1}\varkappa_{i2}$ *sont ici* $\overline{\mathfrak{G}}_i \times \mathfrak{K}_{i1}$, $\overline{\mathfrak{G}}_i \times \mathfrak{K}_{i2}$, $\overline{\mathfrak{G}}_i$ *respectivement, les sousgroupes maximum reproduits par* $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \lambda_{i1}\lambda_{i2}$ *sont* $\overline{\mathfrak{H}}_i \times \mathfrak{L}_{i1}$, $\overline{\mathfrak{H}}_i \times \mathfrak{L}_{i2}$, $\overline{\mathfrak{H}}_i$ *respectivement.*

Démonstration. En vertu du cas particulier du lemme 2,8 $\overline{\mathfrak{G}}_i$ est reproduit en même temps par $\varkappa_{i1}$ et par $\varkappa_{i2}$. Le lemme est maintenant la conséquence de 3,33 et 3,34.

3,42. Lemme. *On a*

$$\overline{\mathfrak{G}} = \overline{\mathfrak{G}}_1 \times \overline{\mathfrak{G}}_2 = \overline{\mathfrak{H}}_1 \times \overline{\mathfrak{H}}_2.$$

3,43. Lemme. *On a*

$$\overline{\mathfrak{K}} = \mathfrak{K}_{11} \times \mathfrak{K}_{12} \times \mathfrak{K}_{21} \times \mathfrak{K}_{22} = \mathfrak{L}_{11} \times \mathfrak{L}_{21} \times \mathfrak{L}_{12} \times \mathfrak{L}_{22}.$$

Démonstration. On trouve aisément que $\overline{\mathfrak{G}}_1 \times \overline{\mathfrak{G}}_2$ est le sousgroupe maximum de $\mathfrak{G}$ reproduit par $\varkappa_{11}\varkappa_{12} + \varkappa_{21}\varkappa_{22}$, car on a pour chaque $G = G_1G_2 \in \mathfrak{G}$, où $G_i \in \mathfrak{G}_i$: $G(\varkappa_{11}\varkappa_{12} + \varkappa_{21}\varkappa_{22}) = (G_1G_2)\,(\varkappa_{11}\varkappa_{12} + \varkappa_{21}\varkappa_{22}) = (G_1\varkappa_{11}\varkappa_{12})\,(G_2\varkappa_{21}\varkappa_{22})$. De même $\overline{\mathfrak{H}}_1 \times \overline{\mathfrak{H}}_2$ est le sousgroupe maximum de $\mathfrak{G}$ reproduit par $\lambda_{11}\lambda_{12} + \lambda_{21}\lambda_{22}$. La relation de 3,42 est maintenant la conséquence de 3,25. Par la même raison $\overline{\mathfrak{K}}$ est le sousgroupe annulé par $\varkappa_{11}\varkappa_{12} + \varkappa_{21}\varkappa_{22}$ et par $\lambda_{11}\lambda_{12} + \lambda_{21}\lambda_{22}$, d'où il suit la relation 3,43.

3,5. Théorème. *Soit $\mathfrak{G}$ un groupe qui satisfait à la supposition* 3,1. *Soient* (1) *deux décompositions quelconques de $\mathfrak{G}$ en produit direct de deux facteurs. L'élargissement de la première décomposition*

$$\mathfrak{G} = (\overline{\mathfrak{G}}_1 \times \mathfrak{K}_{11} \times \mathfrak{K}_{12}) \times (\overline{\mathfrak{G}}_2 \times \mathfrak{K}_{21} \times \mathfrak{K}_{22}) \tag{5}$$

est centralement isomorphe à l'élargissement de la seconde décomposition:

$$\mathfrak{G} = (\overline{\mathfrak{H}}_1 \times \mathfrak{L}_{11} \times \mathfrak{L}_{21}) \times (\overline{\mathfrak{H}}_2 \times \mathfrak{L}_{12} \times \mathfrak{L}_{22}) \tag{6}$$

de sorte qu'on a les isomorphismes centraux suivants:

$$\overline{\mathfrak{G}}_i \cong \overline{\mathfrak{H}}_k, \text{ pour chaque } i \text{ et } k,$$
$$\mathfrak{K}_{ik} \cong \mathfrak{L}_{ik}, \quad i, k = 1, 2.$$

L'automorphisme de décomposition δ_k fait correspondre d'une manière isomorphe au facteur $\overline{\mathfrak{G}}_i$ de (5) *le facteur $\overline{\mathfrak{H}}_k$ pour chaque i et k, $i, k = 1, 2$. δ_k fait de plus correspondre d'une manière isomorphe au facteur $\mathfrak{K}_{ik}$ de* (5) *le facteur $\mathfrak{L}_{ik}$ de* (6). *Inversement γ_i fait correspondre au facteur $\overline{\mathfrak{H}}_k$ le facteur $\overline{\mathfrak{G}}_i$ et au facteur $\mathfrak{L}_{ik}$ le facteur $\mathfrak{K}_{ik}$. Il en suit que l'ensemble de tous les composants de $\overline{\mathfrak{G}}_i$ dans $\mathfrak{H}_k$ constitue le facteur $\overline{\mathfrak{H}}_k$, l'ensemble de tous les composants de $\mathfrak{K}_{ik}$, le facteur $\mathfrak{L}_{ik}$. Une chose analogue est vraie pour les composants de $\overline{\mathfrak{H}}_k$ et $\mathfrak{L}_{ik}$ dans $\mathfrak{G}_i$.*

Démonstration. D'après 3,41, (5) est l'élargissement de la première décomposition (1), (6), de la seconde. D'après la démonstration de 3,41 $\overline{\mathfrak{G}}_i$ est reproduit par $\varkappa_{ik}$, $\overline{\mathfrak{H}}_k$ par λ_{ki}, $i, k = 1, 2$. On a $\overline{\mathfrak{G}}_i = \overline{\mathfrak{G}}_i\varkappa_{ik} = \overline{\mathfrak{G}}_i\delta_k\gamma_i$, $\overline{\mathfrak{H}}_k = \overline{\mathfrak{H}}_k\lambda_{ki} = \overline{\mathfrak{H}}_k\gamma_i\delta_k$. De 3,42 résultent les relations suivantes

$$\overline{\mathfrak{G}}_i\delta_k \subseteqq \overline{\mathfrak{H}}_k, \quad \overline{\mathfrak{H}}_k\gamma_i \subseteqq \overline{\mathfrak{G}}_i.$$

Nous pouvons alors appliquer le lemme 2,8 avec $\vartheta_1 = \delta_k$, $\vartheta_2 = \gamma_i$. Il en suit que l'automorphisme de décomposition γ_i fait correspondre d'une manière isomorphe au facteur $\overline{\mathfrak{G}}_i$ de (5) le facteur $\overline{\mathfrak{H}}_k$ de (6) et l'automorphisme de décomposition γ_i au facteur $\overline{\mathfrak{H}}_k$ le facteur $\overline{\mathfrak{G}}_i$. Soit K_{11} un élément arbitraire de $\mathfrak{K}_{11}$. On a d'après 3,43 dans (6) la décomposition $K_{11} = L_{11}L_{21}L_{12}L_{22}$ avec $L_{ik} \in \mathfrak{L}_{ik}$. Soit n l'entier positif tel que $K_{11}\varkappa_{12}^n = E$. On trouve aisément d'après (3) $\varkappa_{12}{}^n\delta_1 = \gamma_1\delta_2\gamma_1\delta_2 \ldots \gamma_1\delta_2\gamma_1\delta_1 = \gamma_1\delta_1\gamma_2\delta_1\gamma_2 \ldots \gamma_2\delta_1\gamma_2\delta_1 = \gamma_1\lambda_{12}{}^n$. Par conséquent il est $E = K_{11}\varkappa_{12}{}^n\delta_1 = K_{11}\gamma_1\lambda_{12}{}^n = K_{11}\lambda_{12}{}^n = (L_{11}L_{21}L_{12}L_{22})\,\lambda_{12}{}^n = (L_{11}\lambda_{12}{}^n)\,(L_{21}\lambda_{12}{}^n)$. D'après 3,32 on a $(L_{11}\lambda_{12}{}^n) \in \mathfrak{L}_{11}$ et d'après 3,34 $(L_{21}\lambda_{12}{}^n) \in \mathfrak{L}_{21}$ et par conséquent $L_{11}\lambda_{12}{}^n = E$,

$L_{21}\lambda_{12}{}^n = E$. λ_{12} étant propre pour $\mathfrak{L}_{21}$, il en suit $L_{21} = E$. Le composant de K_{11} dans $\mathfrak{H}_1$ est l'élément $L_{11} \epsilon \mathfrak{L}_{11}$ et on a $\mathfrak{K}_{11}\delta_1 \subseteqq \mathfrak{L}_{11}$. D'une manière générale il est $\mathfrak{K}_{ik}\delta_k \subseteqq \mathfrak{L}_{ik}$ et inversement $\mathfrak{L}_{ik}\gamma_i \subseteqq \mathfrak{K}_{ik}$. Maintenant on prouve au moyen du lemme 2,8 par le même raisonnement comme auparavant que l'automorphisme de décomposition δ_k fait correspondre d'une manière isomorphe au facteur $\mathfrak{K}_{ik}$ de (5) le facteur $\mathfrak{L}_{ik}$ de (6) et l'automorphisme de décomposition γ_i, au facteur $\mathfrak{L}_{ik}$ le facteur $\mathfrak{K}_{ik}$.

Comme on sait, ces faits ont pour, conséquence qu'on peut remplacer dans la décomposition (5) le facteur $\overline{\mathfrak{G}}_i$ par $\overline{\mathfrak{H}}_k$ et le facteur $\mathfrak{K}_{ik}$ par $\mathfrak{L}_{ik}$. Prouvons-le, par exemple, pour $\overline{\mathfrak{G}}_1, \overline{\mathfrak{H}}_1$. Le composant d'un $\overline{H}_1 \epsilon \overline{\mathfrak{H}}_1$, $\overline{H}_1 \neq E$ dans $\overline{\mathfrak{G}}_1$ est différent de E, parce que $\mathfrak{H}_1\gamma_1 = \mathfrak{G}_1$ est une relation isomorphe. Il en suit que

$$\overline{\mathfrak{H}}_1 \cap (\mathfrak{K}_{11} \times \mathfrak{K}_{12} \times \overline{\mathfrak{G}}_2 \times \mathfrak{K}_{21} \times \mathfrak{K}_{22}) = \mathfrak{E}.$$

Or, il existe dans $\mathfrak{G}$ le produit direct

$$\mathfrak{G}' = \overline{\mathfrak{H}}_1 \times \mathfrak{K}_{11} \times \mathfrak{K}_{12} \times \overline{\mathfrak{G}}_2 \times \mathfrak{K}_{21} \times \mathfrak{K}_{22}.$$

Soit $\overline{G}_1$ un élément de $\overline{\mathfrak{G}}_1$. D'après ce qui a été dit sur γ_1, on peut trouver un élément $H_1 \epsilon \overline{\mathfrak{H}}_1$ tel que $\overline{H}_1 = \overline{G}_1 K_{11} K_{12} \overline{G}_2 K_{21} K_{22}$, d'où $\overline{G}_1 = \overline{H}_1{}^{-1} K_{11} K_{12} \overline{G}_2 K_{21} K_{22}$. Or, on a $\overline{\mathfrak{G}}_1 \subseteqq \mathfrak{G}'$ et par conséquent $\mathfrak{G}' = \mathfrak{G}$. On peut faire un raisonnement analogue pour les autres facteurs. On en obtient d'après un lemme connu, démontré par M. Schmidt [1], § 4, Hilfssatz I, p. 38, les isomorphismes centraux $\overline{\mathfrak{G}}_i \cong \overline{\mathfrak{H}}_k$, $\mathfrak{K}_{ik} \cong \mathfrak{L}_{ik}$. Le théorème 3,5 est donc démontré.

3,6. Théorème. *Soit* $\mathfrak{G}$ *un groupe qui satisfait à la supposition* 3,1. *Soient* (1) *deux décompositions quelconques de* $\mathfrak{G}$ *en produit direct de deux facteurs. On peut toujours trouver un élargissement de la première décomposition*

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_{11} \times \mathfrak{G}_{12} \times \mathfrak{G}_{21} \times \mathfrak{G}_{22} \textit{ avec } \mathfrak{G}_i = \mathfrak{G}_{i1} \times \mathfrak{G}_{i2} \tag{7}$$

et un élargissement de la seconde décomposition

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_{11} \times \mathfrak{H}_{21} \times \mathfrak{H}_{12} \times \mathfrak{H}_{22} \textit{ avec } \mathfrak{H}_i = \mathfrak{H}_{1i} \times \mathfrak{H}_{2i} \tag{8}$$

qui sont centralement isomorphes de sorte qu'on a entre les facteurs les isomorphismes centraux $\mathfrak{G}_{ik} \cong \mathfrak{H}_{ik}$, $i, k = 1, 2$.

Démonstration. Il suffit de poser par exemple

$$\mathfrak{G}_{11} = \overline{\mathfrak{G}}_1 \times \mathfrak{K}_{11},\ \mathfrak{G}_{12} = \mathfrak{K}_{12},\ \mathfrak{G}_{21} = \mathfrak{K}_{21},\ \mathfrak{G}_{22} = \overline{\mathfrak{G}}_2 \times \mathfrak{K}_{22}$$

$$\mathfrak{H}_{11} = \overline{\mathfrak{H}}_1 \times \mathfrak{L}_{11},\ \mathfrak{H}_{12} = \mathfrak{L}_{12},\ \mathfrak{H}_{21} = \mathfrak{L}_{21},\ \mathfrak{H}_{22} = \overline{\mathfrak{H}}_2 \times \mathfrak{L}_{22}.$$

Puis on tire aisément du théorème 3,5 la remarque suivante:

Remarque. L'automorphisme de décomposition δ_k fait correspondre d'une manière isomorphe au facteur $\mathfrak{G}_{ik}$ de (7) le facteur $\mathfrak{G}_{ik}$ de (8) pour chaque i et k. Inversement, la chose analogue est vraie pour l'automorphisme de décomposition γ_i. Par conséquent l'ensemble de tous les composants de $\mathfrak{G}_{ik}$ dans $\mathfrak{H}_k$ constitue le facteur $\mathfrak{H}_{ik}$ et l'ensemble de tous les composants de $\mathfrak{H}_{ik}$ dans $\mathfrak{G}_i$ constitue le facteur $\mathfrak{G}_{ik}$.

De cette remarque on obtient le théorème par un raisonnement analogue à celui de la démonstration du théorème 3,5.

§ 4. Les produits directs de *n* facteurs.

En partant du théorème 3,6, on obtient par l'induction double le théorème suivant:

4,1. Théorème. *Soit $\mathfrak{G}$ un groupe qui satisfait à la supposition* 3,1. *Soient*

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2 \times \ldots \times \mathfrak{G}_r \tag{1}$$

et

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2 \times \ldots \times \mathfrak{H}_s \tag{2}$$

deux décompositions de $\mathfrak{G}$ en produits directs de r et s facteurs, r et s étant deux entiers positifs arbitraires. On peut toujours trouver un élargissement de (1)

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_{11} \times \mathfrak{G}_{12} \times \ldots \times \mathfrak{G}_{1s} \times \mathfrak{G}_{21} \times \ldots \times \mathfrak{G}_{2s} \times \mathfrak{G}_{31} \times \ldots \times \mathfrak{G}_{rs}$$

avec (3)

$$\mathfrak{G}_i = \mathfrak{G}_{i1} \times \mathfrak{G}_{i2} \times \ldots \times \mathfrak{G}_{is}, \quad i = 1, 2, \ldots, r$$

et un élargissement de (2)

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_{11} \times \mathfrak{H}_{21} \times \ldots \times \mathfrak{H}_{r1} \times \mathfrak{H}_{12} \times \ldots \times \mathfrak{H}_{22} \times \mathfrak{H}_{13} \times \ldots \times \mathfrak{H}_{rs} \tag{4}$$

avec

$$\mathfrak{H}_i = \mathfrak{H}_{1i} \times \mathfrak{H}_{2i} \times \ldots \times \mathfrak{H}_{ri}, \quad i = 1, 2, \ldots, s$$

qui sont centralement isomorphes de sorte qu'on a entre les facteurs les isomorphismes centraux

$$\mathfrak{G}_{ik} \cong \mathfrak{H}_{ik}, \quad i = 1, 2, \ldots, r, \quad k = 1, 2, \ldots, s.^{13)}$$

Démonstration. Si l'on a deux décompositions du groupe $\mathfrak{G}$ qui sont centralement isomorphes, on peut toujours trouver à l'élargissement arbitraire de la première décomposition un élargissement de la seconde qui lui est centralement isomorphe. D'après 3,6 le theorème est vrai pour $r = 2$, $s = 2$. Dans ce qui suit on

[13]) En partant de la remarque ajoutée au théorème 3,6 et en arrangeant les deux inductions par lesquelles se fait la démonstration d'une manière convenable, on démontre de plus le fait suivant: Si l'on décompose les éléments de $\mathfrak{G}_{ik}$ d'après la décomposition (4), l'ensemble de composants de tous les éléments de $\mathfrak{G}_{ik}$ dans $\mathfrak{H}_{ik}$ forme le facteur $\mathfrak{H}_{ik}$ tout entier. L'automorphisme de décomposition: $G \to$ composant de G dans le facteur $\mathfrak{H}_{ik}$ de (4) fait correspondre d'une manière isomorphe au facteur $\mathfrak{G}_{ik}$ le facteur $\mathfrak{H}_{ik}$. Je ne donne pas ici la démonstration de cette assertion.

désigne par les mêmes indices auprès des facteurs $\mathfrak{G}_{ik}$ et $\mathfrak{H}_{ik}$ le fait que ces deux facteurs sont centralement isomorphes.

I. Posons $r = 2$ et supposons que le théorème soit vrai pour $s - 1$. On part de la décomposition (1) avec $r = 2$ et de la décomposition

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2 \times \ldots \times \mathfrak{H}_{s-2} \times \overline{\mathfrak{H}}_{s-1}, \tag{5}$$

où

$$\overline{\mathfrak{H}}_{s-1} = \mathfrak{H}_{s-1} \times \mathfrak{H}_s. \tag{6}$$

D'après la supposition on peut trouver un élargissement de (1)

$$\mathfrak{G} = (\mathfrak{G}_{11} \times \ldots \times \mathfrak{G}_{1,s-2} \times \overline{\mathfrak{G}}_{1,s-1}) \times (\mathfrak{G}_{21} \times \ldots \times \mathfrak{G}_{2,s-2} \times \overline{\mathfrak{G}}_{2,s-1}) \tag{7}$$

et un élargissement de (5)

$$\mathfrak{G} = (\mathfrak{H}_{11} \times \mathfrak{H}_{21}) \times (\mathfrak{H}_{12} \times \mathfrak{H}_{22}) \times \ldots \times (\mathfrak{H}_{1,s-2} \times \mathfrak{H}_{2,s-2}) \times \\ \times (\overline{\mathfrak{H}}_{1,s-1} \times \overline{\mathfrak{H}}_{2,s-1}), \tag{8}$$

où

$$\overline{\mathfrak{H}}_{s-1} = \overline{\mathfrak{H}}_{1,s-1} \times \overline{\mathfrak{H}}_{2,s-1}, \tag{9}$$

qui sont centralement isomorphes. D'après 3,6, on peut trouver élargissements de (6) et (9):

$$\overline{\mathfrak{H}}_{s-1} = (\mathfrak{H}_{1,s-1} \times \mathfrak{H}_{2,s-1}) \times (\mathfrak{H}_{1,s} \times \mathfrak{H}_{2,s}), \tag{10}$$

$$\overline{\mathfrak{H}}_{s-1} = (\overline{\mathfrak{H}}_{1,s-1}^{(1)} \times \overline{\mathfrak{H}}_{1,s-1}^{(2)}) \times (\overline{\mathfrak{H}}_{2,s-1}^{(1)} \times \overline{\mathfrak{H}}_{2,s-1}^{(2)}) \tag{11}$$

qui sont centralement isomorphes: $\mathfrak{H}_{i,s-1} \cong \mathfrak{H}_{i,s-1}^{(1)}$, $\mathfrak{H}_{i,s} \cong \mathfrak{H}_{i,s-1}^{(2)}$. En remplaçant dans la décomposition (8) $\overline{\mathfrak{H}}_{s-1} = \overline{\mathfrak{H}}_{1,s-1} \times \overline{\mathfrak{H}}_{2,s-1}$ par (10) et par (11), on obtient deux élargissements de (8), centralement isomorphes. Le premier d'eux est la décomposition (4). (7) et (8) étant centralement isomorphes, on peut trouver un élargissement de (7) qui est centralement isomorphe au second élargissement que nous venons d'obtenir et par conséquent centralement isomorphe à (4). Pour cela on n'a qu'à décomposer $\overline{\mathfrak{G}}_{1,s-1} = \mathfrak{G}_{1s-1} \times \mathfrak{G}_{1,s}$ et $\overline{\mathfrak{G}}_{2,s-1} = \mathfrak{G}_{2,s-1} \times \mathfrak{G}_{2,s}$ avec $\mathfrak{G}_{i,s-1} \cong \overline{\mathfrak{H}}_{i,s-1}^{(1)}$, $\mathfrak{G}_{i,s} \cong \overline{\mathfrak{H}}_{i,s-1}^{(2)}$, $i = 1, 2$. On obtient ainsi la décomposition (3) avec $r = 2$. Le théorème est donc vrai pour $r = 2$ et s quelconque.

II. Supposons que le théorème soit vrai pour $r - 1$ et s quelconque. On part de la décomposition

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2 \times \ldots \times \mathfrak{G}_{r-2} \times \overline{\mathfrak{G}}_{r-1}, \tag{12}$$

où

$$\overline{\mathfrak{G}}_{r-1} = \mathfrak{G}_{r-1} \times \mathfrak{G}_r, \tag{13}$$

et de la décomposition (2). D'après la supposition il existe un élargissement de (12)

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_{11} \times \mathfrak{G}_{12} \times \ldots \times \mathfrak{G}_{1s} \times \mathfrak{G}_{21} \times \ldots \times \mathfrak{G}_{r-2,s} \times \\ \times \overline{\mathfrak{G}}_{r-1,1} \times \ldots \times \overline{\mathfrak{G}}_{r-1,s}, \tag{14}$$

où

$$\overline{\mathfrak{G}}_{r-1} = \overline{\mathfrak{G}}_{r-1,1} \times \overline{\mathfrak{G}}_{r-1,2} \times \ldots \times \overline{\mathfrak{G}}_{r-1,s}, \tag{15}$$

et un élargissement de (2)

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_{11} \times \ldots \times \mathfrak{H}_{r-2,1} \times \overline{\mathfrak{H}}_{r-1,1} \times \mathfrak{H}_{12} \times \ldots \times \mathfrak{H}_{r-2,s} \times \overline{\mathfrak{H}}_{r-1,s} \tag{16}$$

qui sont centralement isomorphes. D'après I on peut trouver élargissements de (13) et (15)

$$\overline{\mathfrak{G}}_{r-1} = (\mathfrak{G}_{r-1,1} \times \ldots \times \mathfrak{G}_{r-1,s}) \times (\mathfrak{G}_{r,1} \times \ldots \times \mathfrak{G}_{r,s}), \tag{17}$$

$$\overline{\mathfrak{G}}_{r-1} = (\overline{\mathfrak{G}}^{(1)}_{r-1,1} \times \overline{\mathfrak{G}}^{(2)}_{r-1,1}) \times \ldots \times (\overline{\mathfrak{G}}^{(1)}_{r-1,s} \times \overline{\mathfrak{G}}^{(2)}_{r-1,s}) \tag{18}$$

qui sont centralement isomorphes: $\mathfrak{G}_{r-1,i} \cong \overline{\mathfrak{G}}^{(1)}_{r-1,i}$, $\mathfrak{G}_{r,i} \cong \overline{\mathfrak{G}}^{(2)}_{r-1,i}$. En remplaçant dans la décomposition (14) $\overline{\mathfrak{G}}_{r-1} = \overline{\mathfrak{G}}_{r-1,1} \times \times \overline{\mathfrak{G}}_{r-1,2} \times \ldots \times \overline{\mathfrak{G}}_{r-1,s}$ par (17) et par (18), on obtient deux élargissements de (14) centralement isomorphes. Le premier d'eux est précisement la décomposition (3). (14) et (16) étant centralement isomorphes, on peut trouver un élargissement de (16) qui est centralement isomorphe au second élargissement que nous venons d'obtenir et par conséquent centralement isomorphe à (3). Pour cela on n'a qu'à décomposer: $\overline{\mathfrak{H}}_{r-1,i} = \mathfrak{H}_{r-1,i} \times \mathfrak{H}_{r,i}$ avec $\mathfrak{H}_{r-1,i} \cong \overline{\mathfrak{G}}^{(1)}_{r-1,i}$, $\mathfrak{H}_{r,i} \cong \overline{\mathfrak{G}}^{(2)}_{r-1,i}$. On obtient ainsi la décomposition (4). Le théorème est vrai pour r et s quelconque.

La conséquence immédiate de 4,1 est le théorème:

4,2. Théorème. *Soit $\mathfrak{G}$ un groupe qui satisfait à la supposition* 3,1. *Supposons que $\mathfrak{G}$ possède une décomposition irréductible. En ce cas, chaque décomposition de $\mathfrak{G}$ en produit direct peut être élargie en une décomposition irréductible et deux décompositions irréductibles quelconques sont centralement isomorphes, l'une à l'autre.*

§ 5. La substitution des facteurs dans deux décompositions centralement isomorphes.

5,1. Théorème. *Soit $\mathfrak{G}$ un groupe qui satisfait à la supposition* 3,1. *Étant données deux décompositions quelconques de $\mathfrak{G}$, on peut toujours trouver un élargissement*

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{U}_1 \times \mathfrak{U}_2 \times \ldots \times \mathfrak{U}_q \tag{1}$$

de la première décomposition et un élargissement

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{V}_1 \times \mathfrak{V}_2 \times \ldots \times \mathfrak{V}_q \tag{2}$$

de la seconde décomposition qui sont centralement isomorphes et qui ont la propriété suivante: On peut substituer pour un ensemble quelconque des facteurs $\mathfrak{U}_i$, par exemple pour $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \ldots, \mathfrak{U}_t$, $1 \leq t \leq q-1$, certains facteurs de la seconde décomposition qui sont centralement isomorphes aux facteurs choisis $\mathfrak{U}_i$ de sorte qu'on *obtient ainsi une nouvelle décomposition de $\mathfrak{G}$, centralement isomorphe à* (1) *et* (2), *dans notre exemple la décomposition*:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{B}_{k_1} \times \mathfrak{B}_{k_2} \times \ldots \times \mathfrak{B}_{k_t} \times \mathfrak{U}_{t+1} \times \ldots \times \mathfrak{U}_q.$$

avec les isomorphismes centraux $\mathfrak{B}_{k_i} \cong \mathfrak{U}_i$, $i = 1, 2, \ldots, t$.

5,2. Avant d'aborder la démonstration de 5,1, nous allons démontrer deux lemmes.

5,21. Lemme.[14]) *Soit $\mathfrak{G}$ un groupe irréductible qui satisfait à la supposition* 3,1. *Soit ϑ un automorphisme propre pour $\mathfrak{G}$ qui est la somme $\vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_2$ de deux automorphismes de $\mathfrak{G}$ tels que les automorphismes $\vartheta_1\vartheta^{-1}$, $\vartheta_2\vartheta^{-1}$ sont parfaits pour $\mathfrak{G}$. En ce cas, au moins un des automorphismes ϑ_1 et ϑ_2 est propre pour $\mathfrak{G}$.*

Démonstration. On conclut de $(\vartheta_i\vartheta^{-1})\,\vartheta = \vartheta_i$, $i = 1, 2$ que les automorphismes ϑ_i et $\vartheta_i\vartheta^{-1}$ sont en même temps, ou propres pour $\mathfrak{G}$, ou ne le sont pas. Supposons alors que ϑ_1 et ϑ_2 et par conséquent $\vartheta_1\vartheta^{-1}$ et $\vartheta_2\vartheta^{-1}$ ne soient pas propres pour $\mathfrak{G}$. Nous avons la relation

$$\vartheta_1\vartheta^{-1} + \vartheta_2\vartheta^{-1} = \varepsilon.$$

En la multipliant par $\vartheta_1\vartheta^{-1}$, d'abord à gauche, puis à droite, on obtient les relations $(\vartheta_1\vartheta)^2 + (\vartheta_1\vartheta^{-1})\,(\vartheta_2\vartheta^{-1}) = \vartheta_1\vartheta^{-1}$, $(\vartheta_1\vartheta^{-1})^2 + (\vartheta_2\vartheta^{-1})\,(\vartheta_1\vartheta^{-1}) = \vartheta_1\vartheta^{-1}$, d'où il suit[15])

$$(\vartheta_1\vartheta^{-1})\,(\vartheta_2\vartheta^{-1}) = (\vartheta_2\vartheta^{-1})\,(\vartheta_1\vartheta^{-1}). \tag{3}$$

$\vartheta_i\vartheta^{-1}$ est d'une part parfait et n'est pas propre pour $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}$ est d'autre part irréductible. Il en suit que le sousgroupe annulé par $\vartheta_i\vartheta^{-1}$ est le groupe $\mathfrak{G}$ entier. Pour un G arbitraire de $\mathfrak{G}$ on peut donc déterminer un entier positif n tel que $G(\vartheta_1\vartheta^{-1})^n = E$, $G(\vartheta_2\vartheta^{-1})^n = E$. On en tire l'équation impossible $G = G(\vartheta_1\vartheta^{-1} + \vartheta_2\vartheta^{-1})^{2n} = E$ de la manièere suivante: $(\vartheta_1\vartheta^{-1} + \vartheta_2\vartheta^{-1})^{2n}$ est en vertu de (3) la somme des termes $(\vartheta_1\vartheta^{-1})^{2n-r}\,(\vartheta_2\vartheta^{-1})^r = (\vartheta_2\vartheta^{-1})^r\,(\vartheta_1\vartheta^{-1})^{2n-r}$ avec $0 \leq r \leq 2n$. On a donc, ou $2n - r \geq n$, ou $r > n$ et par conséquent $G(\vartheta_1\vartheta^{-1})^{2n-r}\,(\vartheta_2\vartheta^{-1})^r = E$. Il faut alors que au moins un des automorphismes ϑ_1, ϑ_2 soit propre pour $\mathfrak{G}$.

5,22. Lemme. *Soit $\mathfrak{G}$ un groupe satisfaisant à la supposition* 3,1. *Parmi les facteurs directs abéliens de $\mathfrak{G}$, il y en a qui sont des facteurs abéliens maximum, cela veut dire que un tel facteur $\mathfrak{A}$ n'est contenu dans aucun autre facteur direct abélien. Dans la décomposition $\mathfrak{G} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}$ ne possède aucun facteur direct abélien.*

---

[14]) Quant à ce lemme et sa démonstration conformer Fitting [3], § 1, Hilfssatz 4, p. 19.

[15]) Soient φ et ψ deux automorphismes quelconques pour un groupe. On trouve aisément que, s'il existe un automorphisme ξ, satisfaisant à la relation $\varphi + \xi = \psi$, il n'existe qu'un seul.

Démonstration. Soit

$$\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}_2 \subset \mathfrak{A}_3 \subset \dots \tag{4}$$

une chaîne montante infinie des facteurs directs abéliens de $\mathfrak{G}$. Posons $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_i \times \mathfrak{Q}_i$. L'ensemble de tous les éléments qui sont contenus au moins dans un $\mathfrak{A}_i$ forme un sousgroupe $\mathfrak{A}$ du centre de $\mathfrak{G}$ qui est invariant par rapport à Ω, parce que les $\mathfrak{A}_i$ le sont. On a évidemment $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}_{i-1} \times \mathfrak{B}_i$, $\mathfrak{B}_i = \mathfrak{A}_i \cap \mathfrak{Q}_{i-1}$.[16]) En posant $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{A}_1$, on a pour $\mathfrak{A}$ le produit direct infini: $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}_1 \times \times \mathfrak{B}_2 \times \dots \times \mathfrak{B}_n \times \dots$. On en conclut comme dans la démonstration de 2,51, que, dans $\mathfrak{A}$, une chaîne descendante infinie existe ce qui est d'après la supposition 3,1 impossible. Or, dans $\mathfrak{G}$ une chaîne (4) n'existe pas. Par conséquent il y a dans $\mathfrak{G}$ des facteurs abéliens maximum.

5,3. Démonstration du théorème 5,1. Envisageons deux décompositions quelconques (1) et (2) du § 4 pour le groupe $\mathfrak{G}$. Chaque facteur abélien de $\mathfrak{G}$ peut être décomposé, en vertu de la supposition 3,1, en produit direct des facteurs irréductibles. Alors on peut trouver, d'après 5,22 et 4,1 un élargissement de la décomposition (1) du § 4

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \dots \times \mathfrak{A}_u \times \mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{P}_2 \times \dots \times \mathfrak{P}_v \tag{5}$$

et un élargissement de la décomposition (2) du § 4

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2 \times \dots \times \mathfrak{B}_u \times \mathfrak{Q}_1 \times \mathfrak{Q}_2 \times \dots \times \mathfrak{Q}_v \tag{6}$$

qui sont centralement isomorphes: $\mathfrak{A}_i \cong \mathfrak{B}_i$, $i = 1, 2, \dots, u$, $\mathfrak{P}_i \cong \mathfrak{Q}_i$, $i = 1, 2, \dots, v$, et dans lesquels les $\mathfrak{A}_i$ et $\mathfrak{B}_i$ sont des facteurs abéliens irréductibles, les $\mathfrak{P}_i$ et $\mathfrak{Q}_i$, les facteurs non-abéliens qui ne possèdent aucun facteur abélien direct. Soient α_i, $i = 1, 2, \dots, u$ les automorphismes de décompositions dans (5) pour les facteurs $\mathfrak{A}_i$, γ_i, $i = 1, 2, \dots, v$, les mêmes automorphismes pour les $\mathfrak{P}_i$, β_i, $i = 1, 2, \dots, u$, δ_1, $i = 1, 2, \dots, v$ auront une signification analogue pour la décomposition (6). Soit encore $\bar{\delta}_i = \beta_1 + \dots + \beta_u + \delta_1 + \dots + \delta_{i-1} + \delta_{i+1} + \dots + \delta_v$, $i = = 1, 2, \dots, v$. Écrivons pour un i quelconque, $i = 1, 2, \dots, v$, les décompositions (5) et (6) sous la forme:

$$\mathfrak{G} = \overline{\mathfrak{P}}_i \times \mathfrak{P}_i = \overline{\mathfrak{Q}}_i \times \mathfrak{Q}_i.$$

$\overline{\mathfrak{P}}_i$ y est le produit de tous les facteurs de (5), autres que $\mathfrak{P}_i$, $\overline{\mathfrak{Q}}_i$, le produit de tous les facteurs de (6), autres que $\mathfrak{Q}_i$. Maintenant le $\mathfrak{P}_i$ est reproduit par $\gamma_i\delta_i\gamma_i$ et $\mathfrak{Q}_i$ par $\delta_i\gamma_i\delta_i$. Autrement, il existerait d'après le théorème 3,5 (voir aussi la démonstration de 3,5) un facteur direct $\mathfrak{P}'_i \neq \mathfrak{E}$ de $\mathfrak{P}_i$ reproduit par $\gamma_i\bar{\delta}_i\gamma_i$ et

[16]) Remak [1], § 1, Satz 2, p. 296. Voir aussi Schmidt [1], § 4, Hilfssatz III, p. 39.

on aurait la répresentation isomorphe $\mathfrak{P}'_i \bar{\delta}_i = \bar{\mathfrak{Q}}'_i$, $\bar{\mathfrak{Q}}'_i \neq \mathfrak{E}$ étant un facteur direct de $\bar{\mathfrak{Q}}_i$. $\mathfrak{P}_i$ et $\mathfrak{Q}_i$ étant centralement isomorphes, il existerait un facteur direct $\mathfrak{Q}'_i \neq \mathfrak{E}$ de $\mathfrak{Q}_i$ qui serait centralement isomorphe à $\mathfrak{P}'_i$ et par conséquent à $\bar{\mathfrak{Q}}'_i$. Il suivrait du lemme 2,9 que $\mathfrak{Q}'_i$ serait un facteur abélien ce qui est impossible d'après la supposition faite sur $\mathfrak{Q}_i$. Or, on voit par la même voie comme dans la démonstration du théorème 3,5 qu'on peut substituer dans (5) $\mathfrak{Q}_i$ à la place de $\mathfrak{P}_i$ et dans (6) $\mathfrak{P}_i$ à la place de $\mathfrak{Q}_i$.

Pour les facteurs abéliens nous allons procéder comme il suit: Posons $\bar{\beta}_1 = \beta_2 + \beta_3 + \ldots + \beta_u + \delta_1 + \ldots + \delta_v$. On a $\alpha_1 = \alpha_1(\beta_1 + \bar{\beta}_1)\,\alpha_1 = \alpha_1\beta_1\alpha_1 + \alpha_1\bar{\beta}_1\alpha_1$ et α_1 est l'automorphisme-unité pour $\mathfrak{A}_1$. $\mathfrak{A}_1$ étant irréductible, et $\alpha_1\beta_1\alpha_1$, $\alpha_1\bar{\beta}_1\alpha_1$ étant parfaits, il suit du lemme 5,21[17]) que, si $\alpha_1\beta_1\alpha_1$ n'est pas propre pour $\mathfrak{A}_1$, $\alpha_1\bar{\beta}_1\alpha_1$ l'est. Dans ce cas posons $\bar{\beta}_2 = \beta_3 + \beta_4 + \ldots + \beta_u + \delta_1 + \ldots + \delta_v$. On a $\eta_1 = \alpha_1\bar{\beta}_1\alpha_1 = \alpha_1\beta_2\alpha_1 + \alpha_1\bar{\beta}_2\alpha_1$ et η_1 est propre pour $\mathfrak{A}_1$. Parce que $\mathfrak{A}_1$ est un groupe abélien satisfaisant d'après 3,1 à la supposition des chaînes descendantes finies, il suit du théorème 2,5 que chaque automorphisme de $\mathfrak{A}_1$ est parfait. $\alpha_1\beta_2\alpha_1\eta_1^{-1}$ et $\alpha_1\bar{\beta}_2\alpha_1\eta_1^{-1}$ sont donc parfaits pour $\mathfrak{A}_1$. On voit maintenant d'après le lemme 5,21 que, si $\alpha_1\beta_2\alpha_1$ n'est pas propre pour $\mathfrak{A}_1$, $\alpha_1\bar{\beta}_2\alpha_1$ l'est. Dans ce dernier cas on pose $\bar{\beta}_3 = \beta_4 + \beta_5 + \ldots + \beta_u + \delta_1 + \ldots + \delta_v$ et on refait le raisonnement pour l'automorphisme propre $\eta_2 = \alpha_1\bar{\beta}_2\alpha_1 = \alpha_1\beta_3\alpha_1 + \alpha_1\bar{\beta}_3\alpha_1$ et ainsi de suite. On trouve ainsi un automorphisme $\alpha_1\beta_{k_1}\alpha_1$ ou un automorphisme $\alpha_1\delta_{l_1}\alpha_1$ qui est propre pour $\mathfrak{A}_1$. Mais aucun automorphisme $\alpha_1\delta_{l_1}\alpha_1$ n'est propre pour $\mathfrak{A}_1$, car, en ce cas, l'automorphisme $\alpha_1\delta_{l_1}$ ferait correspondre au sousgroupe abélien $\mathfrak{A}_1$ un facteur direct de $\mathfrak{Q}_{l_1}$ qui est d'après la supposition non-abélien. Il existe donc un automorphisme $\alpha_1\beta_{k_1}\alpha_1$ qui est propre pour $\mathfrak{A}_1$. On voit maintenant par la même voie comme dans la démonstration du théorème 3,5 qu'on peut substituer dans (5) à la place de $\mathfrak{A}_1$ le facteur $\mathfrak{B}_{k_1}$ et par suite on a la décomposition

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{B}_{k_1} \times \mathfrak{A}_2 \times \ldots \times \mathfrak{A}_u \times \mathfrak{P}_1 \times \ldots \times \mathfrak{P}_v. \qquad (7)$$

On raisonnera maintenant de la même manière sur cette nouvelle décomposition et sur la décomposition (6). On trouvera que le facteur $\mathfrak{A}_2$ peut être remplacer dans (7) par un facteur $\mathfrak{B}_{k_2}$ qui est forcement différent de $\mathfrak{B}_{k_1}$ et ainsi de suite. Le théorème 5,1 est donc démontré.

[17]) Si l'on veut se borner aux groupes ordinaires n'ayant pas un champ d'opérateurs, on peut se passer du lemme 5,21, en procédant comme le fait M. Kurosch [1], § 3, Satz II, p. 110.

§ 6. Une généralisation des théorèmes du § 3 et du § 4.

Soient $\mathfrak{G}_1$ et $\mathfrak{H}_1$ deux facteurs directs du groupe $\mathfrak{G}$ choisis arbitrairement. Soient

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \times \overline{\mathfrak{G}}_1 = \mathfrak{H}_1 \times \overline{\mathfrak{H}}_1 \tag{1}$$

deux décompositions de $\mathfrak{G}$ en produit direct de deux facteurs, la première d'elles contenant le facteur direct $\mathfrak{G}_1$, la seconde, le facteur direct $\mathfrak{H}_1$. Soient $\gamma_1, \overline{\gamma_1}$ et $\delta_1, \overline{\delta_1}$ les automorphismes de décomposition appartenant à la première et à la seconde décomposition (1).[11]) Nous faisons maintenant sur $\mathfrak{G}$ la supposition suivante:

6,1. Supposition. Pour chaque couple de facteurs directs $\mathfrak{G}_1$ et $\mathfrak{H}_1$ de $\mathfrak{G}$ et pour toutes les décompositions de $\mathfrak{G}$ (1) en produit direct de deux facteurs dans lesquelles ces facteurs figurent, les sousgroupes $\mathfrak{G}\gamma_1\delta_1\overline{\gamma_1}$ et $\mathfrak{G}\delta_1\gamma_1\overline{\delta_1}$ satisfont à la supposition des chaînes descendantes finies.

Remarquons que $\mathfrak{G}\gamma_1\delta_1\overline{\gamma_1}$ et $\mathfrak{G}\delta_1\gamma_1\overline{\delta_1}$ sont, en vertu du lemme 2,9, des sousgroupe du centre. Cette supposition est plus générale que la supposition 3,1, car, sous la supposition 6,1, le groupe $\mathfrak{G}$ peut avoir pour facteur direct le groupe cyclique infini ou le groupe, ayant le type du groupe additif des nombres rationnels, pourvu que ce facteur soit le seul facteur direct de ce type. On peut réaliser cette condition sans difficulté. On a maintenant le théorème suivant:

6,2. Théorème. *Les lemmes et les théorèmes du* § 3 *et du* § 4 *restent vrais, si l'on remplace la supposition* 3,1 *par la supposition* 6,1.

Démonstration. En effet, on n'avait besoin de la supposition 3,1 que pour la démonstration du lemme 3,22 et du lemme 3,31. On vérifie aisément que les démonstrations restent valables même sous la supposition 6,1. Parce que la supposition 6,1 n'assure pas l'existence d'une décomposition irréductible d'un facteur abélien de $\mathfrak{G}$, on ne peut pas remplacer 3,1 par 6,1 dans le théorème 5,1.

*

O rozkladu grupy v direktní součin.

(Obsah předešlého článku.)

Práce týká se grup, v jejichž centru každý klesající řetězec podgrup jest konečný. Hlavní výsledek práce jest tato věta: Libovolné dva rozklady takové grupy v direktní součin konečného počtu faktorů dají se vždy tak rozšířiti, že oba nové rozklady rozšířením vzniklé jsou si centrálně isomorfní, to jest, že faktory prvního rozšířeného rozkladu dají se vzájemně jednoznačně přiřaditi faktorům druhého rozšířeného rozkladu tak, že sobě přiřazené faktory jsou si centrálně isomorfní.

ČÁST FYSIKÁLNÍ.

Poznámky o resonátorech s pružnou stěnou.

Jan Potoček, Brno.

(Došlo 7. prosince 1936.)

Účelem tohoto článku je upozorniti na vzorec označený v dalším (12), který je zajímavý pro svou souvislost s Weberovou teorií jazýčkových píšťal a dal by se poměrně snadno přezkoušeti experimentálně. Odvozuji jej zde způsobem, který lépe dbá skutečných podmínek pokusu, než odvození dosavadní.

Resonátory, o nichž článek jedná, jsou válcové trubice kruhového průřezu, na jejichž jednom konci je napjata blána (kaučuk, pergamen), která uzavírá ústí neprodyšně. Druhý konec trubice je buď otevřený — resonátory otevřené, nebo uzavřený nepružným rovinným dnem — resonátory zavřené.

H. Bouasse věnoval ve své Akustice těmto a podobným resonátorům několik odstavců, v nichž pojednává o jejich částkových tónech a počítá vzorce, které udávají závislost kmitočtu částkových tónů na plošné hustotě a vlastním kmitočtu blány a na délce trubice. Jeho výpočty jsou založeny na těchto zjednodušujících předpokladech:

a) Blána je nahrazena rovinnou deskou kolmou na osu trubice, uzavírající jeden konec trubice vzduchotěsně a kmitající ve směru osy bez tření a bez útlumu.

b) V trubici se udržuje stojaté vlnění rovinné s kmitnou (uzlem) na druhém, otevřeném (uzavřeném) konci.

c) Vlnivý pohyb sahá nerušeně až k bláně, která sleduje pohyb sousední vzduchové vrstvy.

d) Účinek pohybu vzduchu na vnější straně blány lze zanedbati.

Označme v dalším písmenem m plošnou hustotu napjaté blány, Ω její vlastní kruhovou frekvenci ve vzduchoprázdnu, L délku trubice, ω kruhovou frekvenci vlnění v trubici, ω_0 resp. ω_1 kruhovou frekvenci základního tónu trubice délky L otevřené na obou koncích resp. uzavřené na jednom konci. Platí

[1]) H. Bouasse, Tuyaux et résonateurs, str. 245 a další.

$$\omega_0 = 2\omega_1 = \frac{\pi V}{L}, \tag{1}$$

kde V je fázová rychlost vlnění.

Položme počátek osy x do rovnovážné polohy blány, kladnou poloosu do trubice a rovnoběžně s její osou. Pak je pošinutí vzduchové částice v uvnitř otevřeného resonátoru dáno podle b) výrazem

$$v = C \cos k\,(L - x) \cos \omega t, \tag{2}$$

kde

$$k = \omega / V.$$

Napišme pohybovou rovnici blány, či lépe řečeno desky, která ji nahrazuje. Kdyby blána — jejíž plocha buď pro jednoduchost rovna jedné — kmitala ve vzduchoprázdnu, vyhovovalo by její pošinutí w rovnici

$$m \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}t^2} = - m\Omega^2 w. \tag{3}$$

Ve vzduchu přistoupí na pravou stranu k síle od pružnosti přetlak vzduchu vně trubice proti tlaku, který působí na blánu z vnitřku. Protože se podle d) považuje hodnota tlaku vně blány za stálou a rovnou tlaku průměrnému, objeví se na pravé straně podtlak vzduchu na vnitřní straně blány proti tlaku průměrnému, úměrný dilataci $(\partial v/\partial x)_{x=0}$; konstanta úměrnosti je ϱV^2, kde ϱ je střední hustota vzduchu. Píšeme-li mimo to podle předpokladu c) $v_{x=0}$ a $(\partial^2 v/\partial t^2)_{x=0}$ místo w a $\mathrm{d}w^2/\mathrm{d}t^2$, dostaneme pohybovou rovnici ve tvaru

$$m\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \Omega^2 v\right) = \varrho V^2 \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \text{pro } x = 0. \tag{4}$$

Dosadíme-li sem za v výraz (2) a zavedeme veličiny ω a ω_0 místo k a L, obdržíme vztah, k němuž Bouasse došel:

$$\gamma\left(\frac{\Omega^2}{\omega} - \omega\right) - \operatorname{tg} \frac{\omega}{\omega_0}\pi = 0, \tag{5}$$

kde

$$\gamma = \frac{m}{\varrho V}. \tag{6}$$

Při pevném ω_0 a m vypočtou se kruhové frekvence částkových tónů otevřeného resonátoru jako kořeny této rovnice v ω. O jejich rozložení lze snadno získati představu z grafické konstrukce. Narýsujeme-li v pravoúhlé soustavě souřadné ω, y větév hyperboly $y = \gamma\,(\Omega^2/\omega - \omega)$, $(\omega > 0)$ a tangentoidu $y = \operatorname{tg} \omega\pi/\omega_0$, jsou dány hodnoty kořenů jako úsečky průsečíků hyperboly s větvemi tangentoidy. Hyperbola má asymptoty: osu y a přímku $y = -\gamma\omega$, a seče osu ω v bodě $\omega = \Omega$. Je-li blána velmi tenká a málo napjatá, svírá asymptota s osou ω velmi malý úhel a bod Ω leží blízko počátku: Základní tón je velmi hluboký, svrchní tóny se blíží částkovým tónům trubice bez blány, na obou koncích otevřené. Je-li blána velice napjatá, leží bod Ω daleko od počátku: Částkové tóny blíží se částkovým tónům trubice na jednom konci zavřené.

Pro resonátor zavřený je

$$v = C \sin k\,(L - x) \cos \omega t$$

a rovnice pro částkové tóny je

$$\gamma \left(\frac{\Omega^2}{\omega} - \omega \right) + \operatorname{cotg} \frac{\omega}{\omega_1} \frac{\pi}{2} = 0. \tag{7}$$

Bouasse a Fouché zjišťovali částkové tóny dvojím způsobem:

1. Resonancí na tón spojitě měněné výšky. Resonance zjištěna podle prudkého pohybu korkových pilin na vodorovné bláně nebo podle utvoření Kundtových obrazců uvnitř trubice.

2. Určením výšky tónu obdrženého foukáním napříč otevřeného kraje trubice. U otevřeného resonátoru dávaly oba způsoby tytéž frekvence.

Výsledky pokusů s otevřeným resonátorem: Je-li Ω značně větší nebo značně menší než ω_0, souhlasí pozorování s teorií; v prvním případě jsou totiž nalezené frekvence přibližně v poměru 1 : 3 : 5 : . . ., v druhém případě ozývá se velmi hluboký základní tón a ostatní částkové tóny mají frekvence o něco menší, než částkové tóny otevřené trubice. Neliší-li se však Ω příliš od ω_0, ukáží se mimo částkové tóny odpovídající kořenům rovnice (6) ještě tóny jiné, jejichž frekvence jsou přibližně celými (nejčastěji lichými) násobky frekvence základního hlubokého tónu. Bouasse nepraví nic určitého o původu těchto teorií nepředvídaných tónů; snad že jsou působeny svrchními tóny blány, snad že se dají vyložiti zavedením útlumu blány.

U resonátoru zavřeného se ukázalo, že, zní-li některý částkový tón resonátoru, jsou předpoklady b) a c) splněny; v resonátoru existuje dokonale pravidelné stojaté vlnění s uzlem na uzavřeném konci.

Resonátor s pružnou stěnou je zajímavý tím, že u něho působí kmity vzduchového sloupce na kmity blány, podobně jako působí u jazýčkové píšťaly ozvučna na jazýček.[2]) Jenom že u resonátoru

[2]) Uvedená teorie je v podstatě totožná s Weberovou teorií jazýčkové píšťaly a vzorec (5) je vzorec Weberův. Viz Bouasse, l. c. str. 249, dále Instruments à vent I., str. 74, W. E. Weber, Theorie der Zungenpfeifen, Pogg. Ann., Bd. 17 (1829).

jsou poměry mnohem jednodušší. Není zde proudu vzduchu a pak, zjišťují-li se částkové tóny způsobem uvedeným pod 1., působí na blánu zvenčí síla o dané periodě; jazýček však dostává proud vzduchu, který si soustava jazýček—ozvěna rozděluje periodicky sama. Mimo to u resonátoru zavřeného není opravy na otevřený konec. Pokusné zkoumání zpětného působení vzduchového sloupce bylo by tedy snad jednodušší u resonátoru než u jazýčkové píšťaly, zvláště u resonátoru zavřeného. Bylo by i zajímavo zjistit, do jaké míry vyhovuje skutečnosti zvláště vzorec (7); v akustice vzduchových sloupců není mnoho takových vzorců, které by se daly experimentálně vyzkoušet. Ovšem, je zde zatím možnost, že útlum blány má vliv na výšku částkových tónů. Pokusme se tedy vzíti tento útlum do počtu.

Výše uvedené předpoklady změníme takto:

1. Předpoklad a) doplníme tím, že zavedeme útlum blány. Předpokládáme, že se pohyb desky zastupující blánu děje ve vzduchoprázdnu podle rovnice

$$\frac{d^2w}{dt^2} + 2H\frac{dw}{dt} + K^2w = 0, \tag{8}$$

místo podle rovnice (3).

2. Předpoklad d) vynecháme a budeme uvažovati o případu, že se částkové tóny zavřeného resonátoru zjišťují metodou resonance uvedenou výše pod 1. Protože má blána útlum, reaguje na každou výšku tónu budícího zdroje, a úloha je vypočísti, při kterých frekvencích budícího tónu nabývá rozkmit blány maxima.

Zvukový zdroj budiž umístěn před blanou v ose resonátoru a tak daleko od blány, abychom mohli považovali vlny dopadající na blánu v kladném směru osy x za rovinné. Jejich amplitudu označme A, jejich kruhovou frekvenci ω. Mimo ně bude v prostoru před blanou vlnění odražené od blány, pak vlnění prošlé blanou, odražené ode dna a opět prošlé blanou atd. Tato vlnění dají složena vlnění postupující záporným směrem osy x, amplitudy B a s fásovým pošinutím η; B a η závisí na dané frekvenci dopadajícího vlnění ω. Lze tedy vzíti v prostoru před blanou pošinutí vzduchové částice u ve tvaru

$$u = A\cos(\omega t - kx) + B\cos(\omega t + kx + \eta).$$

Uvnitř trubice může být při ustáleném pohybu — nepočítáme-li s útlumem vln ve vzduchu — jen stojaté vlnění s uzlem na dně. Je tedy uvnitř trubice

$$v = C\sin k(L - x)\cos(\omega t - \vartheta),$$

kde ϑ opět závisí na ω.

Na bláně, t. j. pro $x = 0$, musí být $u = v = w$, kde

$$w = P \cos \omega t + Q \sin \omega t$$

značí výchylku blány. Vyjádříme-li tuto podmínku a napíšeme-li, že jí musí vyhovovati při ustáleném stavu členy se $\sin \omega t$ a členy s $\cos \omega t$ zvlášť, dostaneme:

$$\begin{cases} A + B \cos \eta = C \sin kL \cos \vartheta = P \\ \quad - B \sin \eta = C \sin kL \sin \vartheta = Q. \end{cases}$$

Podmínku pro kmity blány (4) doplníme na levé straně členem od útlumu, na pravé členem, znamenajícím přetlak vzduchu na vnější straně blány proti tlaku střednímu:

$$m \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2H \frac{\partial v}{\partial t} + K^2 v \right) = \varrho V^2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \text{ pro } x = 0. \tag{9}$$

Koeficient útlumu H a konstanta K platí pro blánu kmitající ve vzduchoprázdnu. Pro odlišení od koeficientu útlumu, který by se naměřil u volné blány na vzduchu za předpokladu, že platí rovnice (8), budu označovati H jako vlastní koeficient útlumu. Dosadíme-li sem příslušné výrazy za u, v, dostaneme opět dvě rovnice, které lze napsati po krátké úpravě ve tvaru

$$[\gamma (K^2 - \omega^2) + \omega \cotg kL] \, C \sin kL \cos \vartheta + 2\omega H \gamma C \sin kL \sin \vartheta = \\ = \omega B \sin \eta,$$

$$[\gamma (K^2 - \omega^2) + \omega \cotg kL] \, C \sin kL \sin \vartheta - 2\omega H \gamma C \sin kL \cos \vartheta = \\ = \omega B \cos \eta - \omega A.$$

Máme tedy čtyři rovnice pro B, C, η, ϑ. Užijeme-li prvých dvou, lze psáti druhé dvě

$$\left[\gamma \left(\frac{K^2}{\omega} - \omega \right) + \cotg kL \right] P + (2H\gamma + 1) \, Q = 0,$$

$$- (2H\gamma + 1) \, P + \left[\gamma \left(\frac{K^2}{\omega} - \omega \right) + \cotg kL \right] Q = - 2A.$$

Odtud

$$P = \frac{1}{D} \, 2 \, (2H\gamma + 1) \, A,$$

$$Q = - \frac{1}{D} \, 2 \left[\gamma \left(\frac{K^2}{\omega} - \omega \right) + \cotg kL \right] A,$$

kde

$$D = \left[\gamma \left(\frac{K^2}{\omega} - \omega \right) + \cotg kL \right]^2 + (2H\gamma + 1)^2.$$

Z toho dostaneme pro amplitudu blány $U = \sqrt{P^2 + Q^2}$ vzorec

$$U = \frac{2A}{\sqrt{\left[\gamma\left(\frac{K^2}{\omega} - \omega\right) + \operatorname{cotg} kL\right]^2 + (2H\gamma + 1)^2}}. \tag{10}$$

Ostatní veličiny vypočtou se podle vzorců

$$\begin{aligned} C &= U/\sin kL, \\ \operatorname{tg} \vartheta &= Q/P, \\ B^2 &= (P - A)^2 + Q^2, \\ \operatorname{tg} \eta &= Q/(A - P). \end{aligned} \tag{11}$$

Je patrno, že rozkmit blány dosahuje maxima $2A/(1 + 2H\gamma)$, je-li výraz v hranaté závorce ve vzorci (9) roven nule, neboli, resonance nastává pro tóny, jejichž kruhová frekvence ω vyhovuje rovnici

$$\gamma\left(\frac{K^2}{\omega} - \omega\right) + \operatorname{cotg} \frac{\omega}{\omega_1}\frac{\pi}{2} = 0. \tag{12}$$

Výsledek tedy je: *Tóny, na něž resonuje zavřený resonátor nezávisí na vlastním útlumu blány H. Resonátory týchž rozměrů, jejichž blány se liší při stejné hmotě a stejných koeficientech K jen hodnotami vlastních útlumů, resonují na tytéž tóny.*

Ovšem vlastní frekvence těchto blan ve vzduchoprázdnu se od sebe liší, protože souvisí s H podle známého vztahu $\Omega^2 = K^2 - H^2$. V mezním případě, je-li vlastní útlum H roven nule, je Ω totožné s K. Ve skutečnosti tomu tak není. V tom je rozdíl mezi vzorcem (7) a (12), který se od něho liší jen tím, že K stojí místo vlastní frekvence Ω.

Vzorec pro C praví, že rozkmit stojatého vlnění uvnitř resonátoru není nikdy menší než rozkmit blány (rovnost nastává jen pro $\omega = (2n + 1)\,\omega_1$), a že maxima rozkmitu vlnění nastávají pro jiné frekvence ω budícího tónu než maxima rozkmitu blány. Zároveň nastanou jen, je-li $K = \omega = (2n + 1)\,\omega_1$. (Viz Bouasse, l. c. odst. 131.)

Konstantu K lze určiti přímo z pozorování kmitů blány pod recipientem na př. způsobem uvedeným v Bouassově knize Cordes et membranes, str. 448. K jinému, nepřímému způsobu vede tato úloha v podstatě řešená v několikrát citované knize v odstavci 133.

Kolmo na blánu napjatou ve velmi tenkém rámci dopadá zvukové vlnění vysílané píšťalou. Nechť je blána dosti veliká a dosti vzdálená od píšťaly, abychom mohli považovat dopadající vlnění za rovinné. Nalézti, jak závisí rozkmit blány na frekvenci tónu píšťaly.

Úloha je (opět za zjednodušujícího předpokladu, že místo blány lze vzíti rovinný oscilátor) vlastně rozřešena, ale výsledek je napsán jen pro zvláštní případy. Poněvadž je výpočet velmi krátký, podám jej zde doplněný, s malou změnou.

Osa x budiž kolmá na blánu, počátek položme do rovnovážné polohy. Vlnění, které dopadá v kladném směru, měj tvar

$$A \cos (\omega t - kx).$$

Od blány se odráží část $B \cos (\omega t + kx + \alpha)$, takže pošinutí u před blanou je

$$u = A \cos (\omega t - kx) + B \cos (\omega t + kx + \alpha).$$

Vlnění blanou prošlé je

$$v = A \cos (\omega t - kx) + B \cos (\omega t - kx + \alpha).$$

Pro $x = 0$ je $u = v = w$, kde w je výchylka blány:

$$\begin{aligned} w &= P \cos \omega t - Q \sin \omega t, \\ P &= A + B \cos \alpha, \\ Q &= B \sin \alpha. \end{aligned}$$

Pohybová rovnice blány je opět rovnice (9). Dosadíme za u a v příslušné výrazy a obdržíme po úpravě:

$$\gamma \left(\frac{K^2}{\omega} - \omega \right) P - (2 + 2H\gamma)\, Q = 0,$$

$$(2 + 2H\gamma)\, P + \gamma \left(\frac{K^2}{\omega} - \omega \right) Q = 2A.$$

Odtud vypočteme P a Q. Pro rozkmit blány $U = \sqrt{P^2 + Q^2}$ máme výsledek:

$$U = \frac{A}{\sqrt{\frac{\gamma^2}{4}\left(\frac{K^2}{\omega} - \omega\right)^2 + (1 + H\gamma)^2}}.$$

Je zřejmo, že maximum rozkmitu blány nastane, když kruhová frekvence ω budícího tónu nabude hodnoty K[3]). Je tedy možno určiti K metodou resonance. Bouasse a Fouché určovali touto metodou vlastní frekvenci blány; u níž zanedbávali útlum; měřili tedy vlastně K. Vlastní frekvence blány s útlumem je ve vzduchoprázdnu (držíme-li se stále užívaných zjednodušení) $\sqrt{K^2 - H^2}$, na vzduchu ještě menší. Je známo, že blána resonuje na tón vyšší, než jaký vydá sama rozkmitána úderem. (Viz na př. Lord Rayleigh, Theory of Sound I, str. 346, H. Bouasse, Cordes et membranes, odst. 258.)

[3]) Zajímavý je rozdíl proti výsledku podobné úlohy pro hmotný bod, jenž kmitá ponechán sám sobě po přímce podle rovnice (8). Působí-li naň síla tvaru $A \sin \omega t$, nabývá jeho rozkmit maxima pro hodnotu $\omega = \sqrt{K^2 - 2H^2}$, závislou na útlumu.

Při odvozování vzorce (10) počítali jsme tak, jako by byly předpoklady b) a c) splněny pro každé ω a jako by se dal zanedbati útlum vlnění v resonátoru. Toto zanedbání vede pro ta ω, pro něž nastává minimum rozkmitu blány, k zřejmému rozporu se skutečností. Na př. pro $\omega = 2\omega_1$ plyne z rovnice (10) a z prvního vzorce (11), že rozkmit blány je roven nule a že se uvnitř resonátoru udržuje stojaté vlnění o amplitudě $2A$ s uzly na dně a na bláně, což není možné. (Srov. s odst. 127, 3° cit. knihy.) Počítáme-li s útlumem vlnění a vezmeme pošinutí v uvnitř resonátoru ve tvaru

$$v = Ce^{-\delta x} \sin [\omega t + k(L - x) - \vartheta] - Ce^{-\delta(2L-x)} \, . \, \sin [\omega t - k(L - x) - \vartheta],$$

dojdeme týmž postupem ke vzorci obdobnému vzorci (10), který z něho plyne položením $\delta = 0$. Tento vzorec zde neuvádím, protože je velmi složitý a protože podmínka pro maximum rozkmitu z něho plynoucí neliší se při malém δ prakticky od podmínky (12). Zmíněný rozpor však už neobsahuje, protože dává pro minimum rozkmitu hodnotu sice malou, ale od nuly různou. Rovnici (12) lze pokládati za správně odvozenou, platí-li vzorec (10) aspoň v jakémsi okolí resonance. Pro resonanci byla však platnost předpokladů b) a c) zjištěna pokusem. Je ovšem nutno míti na zřeteli, že rovnice (12) byla odvozena za předpokladů velmi zjednodušujících, které vyloučily z úvahy vliv svrchních tónů blány.

U resonátoru otevřeného dostali bychom rovnici obdobnou

$$\gamma \left(\frac{K^2}{\omega} - \omega \right) - \operatorname{tg} \frac{\omega}{\omega_0} \pi = 0,$$

která se však hodí ke zkoušení daleko méně, protože je nutno počítati s opravou na otevřený konec. Mohli bychom sice zavésti tuto opravu přibližným způsobem do počtu a dojíti k vzorci složitějšímu, ale jeho zkoušení neřeklo by nic o tom, do jaké míry jsou výše uvedená zjednodušení přípustná, protože případné odchylky jimi způsobené nedaly by se odlišit od odchylek způsobených nepřesností opravy.

Poslední rovnice neobsahuje, stejně jako rovnice (5), frekvence, jež by byly celými násobky frekvence hlubokého základního tónu.

*

Remarques sur les vibrations de la membrane au bout d'un bourdon.

(Extrait de l'article précédent.)

M. Bouasse a établi dans son livre Tuyaux et résonateurs la relation (7) qui a lieu entre la pulsation ω d'un partiel de la membrane au bout d'un bourdon, la masse m de la membrane par unité d'aire et la pulsation ω_1 du fondamental du bourdon. M. Bouasse a fait le calcul en supposant la membrane sans amortissement propre, dont les vibrations dans le vide sont régies par l'équation (3) et en négligeant les variations de la pression extérieure.

Supposons la membrane avec l'amortissement propre (l'équation (3) sera remplacée par celle (8)) et considérons le cas ou la membrane est excitée par une onde extérieure $A \cos (\omega t - kx)$. Calculons la valeur de l'amplitude U de la membrane en fonction de ω.

Le résultat est donné par la formule (10), L étant la longueur du bourdon. Il s'ensuit que l'amplitude de la membrane est maximum pour les valeurs de ω qui satisfont l'équation (12). Ces valeurs sont indépendantes de facteur amortissant propre H de la membrane.

Die Temperaturverteilung im einem rechteckigen Querschnitt, wenn die Temperatur an der Berandung vorgegeben ist.

Ph. Bock, Brünn.

(Eingegangen am 22. April 1937).

In der vorliegenden Arbeit soll die Temperaturverteilung in einem Rechteck untersucht werden, wenn die Temperatur an den Rändern vorgegeben ist. Die Randtemperatur setzen wir als eine Temperaturschwankung an, deren Amplitude längs des Randes eine zu den Mittellinien des Rechteckes symetrische Verteilung aufweist. Diese Amplitudenverteilung und die Kreisfrequenz ν der Temperaturschankungen wollen wir als gegeben ansehen. Bei der weiteren Auswertung der Lösung werden wir dann insbesondere annehmen, daß die Amplitude der Temperaturschwankung A längs des ganzen Randes konstant ist. Diese Annahme entspricht der Vorstellung, daß das Rechteck in ein räumlich homogenes Feld von Temperaturschwankungen eingebettet ist. Die Integration der Wärmeleitungsgleichung geht unter den gegebenen Randbedingungen so vor sich, daß die Lösung durch Überlagerung von zwei Teillösungen gebildet wird. Die Teillösung u_1 und u_2 werden in der Form von unendlichen Reihen ausgedrückt.

I.

Die Wärmeleitungsgleichung hat im Falle rechtwinkliger kartesicher Koordinaten die Gestalt.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = l\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{1}$$

wobei, wie üblich u die Temperatur, t die Zeit und l eine Materialkonstante bedeuten. Den rechtwinkligen Querschnitt mit den Seiten $2a$ und $2b$ legen wir so in das Koordinatensystem, daß die Achsen des Systems mit den Mittellinien des Rechteckes zusammenfallen.

Wir setzen die Lösung der Differentialgleichung (1) nach dem Vorgang D. Bernoullis in bekannter Weise an, und zwar

$$u = XYT, \tag{2}$$

wobei X nur eine Funktion von x ist, Y nur von y und T nur von t abhängig sind.

Die entsprechenden Gleichungen sind daher

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \tag{3'}$$

$$Y'' + \mu^2 Y = 0 \tag{3''}$$

$$T = e^{i\nu t}. \tag{3'''}$$

Damit die Gleichung (1) erfüllt sei, muß zwischen den Konstanten λ, μ und ν die Beziehung

$$\mu^2 + \lambda^2 = -\frac{i\nu}{l} \tag{4}$$

bestehen.

Liegt nun etwa die erste Randwertaufgabe vor, d. h. soll

$$\left.\begin{array}{lll} \text{für } x = -a & u(-a, y; t) & = g(y)\, e^{i\nu t} \\ \;\;\text{,,}\;\; x = a & u(a, y; t) & = g(y)\, e^{i\nu t} \\ \;\;\text{,,}\;\; y = -b & u(x, -b; t) & = f(x)\, e^{i\nu t} \\ \;\;\text{,,}\;\; y = b & u(x, b; t) & = f(x)\, e^{i\nu t} \end{array}\right\} \tag{5}$$

sein, wobei $f(x)$ und $g(y)$ vorgegebene, wegen der in der Einleitung gekennzeichneten Symmetrie der Randbedingungen, gerade Funktionen sind und ν die vorgegebene Kreisfrequenz bedeutet, so verfahren wir folgendermaßen.

Wir bilden zunächst eine Lösung u_1, die den nachstehenden Randbedingungen genügt:

$$\begin{array}{l} \text{für } x = \pm a \text{ sei } u_1 = 0 \quad \text{für alle } y \text{ und } t \\ \;\;\text{,,}\;\; y = \pm b \text{ sei } u_1 = f(x)\, e^{i\nu t} \end{array} \tag{5'}$$

Hierauf bilden wir eine Lösung u_2 mit den entsprechenden Randbedingungen. Es sei

$$\begin{array}{l} \text{für } x = \pm a \quad u_2 = g(y)\, e^{i\nu t} \\ \;\;\text{,,}\;\; y = \pm b \quad u_2 = 0 \quad \text{für alle } x \text{ und } t. \end{array} \tag{5''}$$

Man sieht sofort, daß die Lösung der durch (5) gekennzeichneten Randwertaufgabe u sich additiv aus u_1 und u_2 zusammensetzt:

$$u = u_1 + u_2. \tag{6}$$

Wir bestimmen zunächst u_1.

Diese Lösung wird additiv aus einer Reihe von Termen der

Form (2) zusammengesetzt. Der von x abhängige Faktor eines dieser Terme genügt der Differentialgleichung

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \tag{3'}$$

deren allgemeines Integral

$$X = c_1 \sin \lambda x + c_2 \cos \lambda x$$

ist. Die Randbedingungen (5') verlangen, daß X für $x = \pm a$ verschwinde. Daraus ergibt sich

$$c_1 = 0, \quad \lambda_n = \frac{2n+1}{2a}\pi.$$

Den willkürlichen konstanten Faktor setzen wir

$$c_2 = 1,$$

so daß die Lösung von (3') schließlich

$$X_n = \cos \frac{2n+1}{2a}\pi x \tag{7}$$

wird.

Der symmetrischen Anordnung des Querschnittes und der Randbedingungen und damit auch der Temperaturwellen entsprechend, ist X_n eine gerade Funktion von x.

Die Lösung der Gleichung (3")

$$Y'' + \mu^2 Y = 0 \tag{8}$$

ist gegeben durch

$$Y_n = c_n^{(1)} \sin \mu_n y + c_n^{(2)} \cos \mu_n y \tag{9}$$

wobei nach (4)

$$\mu_n = \sqrt{-\frac{i\nu}{l} - \lambda^2_n}$$

ist. Die Teillösung u_1 hat daher zunächst die Gestalt

$$u_1 = e^{i\nu t} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{(2n+1)\,\pi x}{2a} \{c_n^{(1)} \sin \mu_n y + c_n^{(2)} \cos \mu_n y\}. \tag{10}$$

Die so erhaltene Lösung passen wir nun den Randbedingungen

$$y = \pm b, \; u_1 = f(x)\, e^{i\nu t}$$

an. Es müssen demnach

$$\text{für } y = \pm b, \; u = f(x)\, e^{i\nu t}$$

folgende Gleichungen erfüllt werden:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{2n+1}{2a} \pi x \{- c_n^{(1)} \sin \mu_n b + c_n^{(2)} \cos \mu_n b\}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{2n+1}{2a} \pi x \{c_n^{(1)} \sin \mu_n b + c_n^{(2)} \cos \mu_n b\}.$$

Durch Subtraktion dieser beiden Gleichungen ergibt sich

$$c_n^{(1)} = 0$$

und

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(2)} \cos \mu_n b \cos \frac{2n+1}{2a} \pi x.$$

Die Bestimmung der Koeffizienten dieser Fourier'schen Reihe geht in der üblichen Weise vor sich und ergibt die Gleichung

$$c_n^{(2)} \cos \mu_n b = \frac{1}{a} \int_{-a}^{a} f(x) \cos \frac{2n+1}{2a} \pi x \, dx.$$

Führt man die analoge Rechnung für u_2 durch, wobei der entsprechende Ansatz für u_2

$$u_2 = e^{i\nu t} \sum_{n=0}^{\infty} \cos \frac{2n+1}{2b} \pi y \{c_n^{(3)} \sin \lambda_n x + c_n^{(4)} \cos \lambda_n x\} \quad (12)$$

mit

$$\lambda_n = \sqrt{-\frac{i\nu}{l} - (2n+1)^2 \frac{\pi^2}{4b^2}}$$

lautet, so erhält man bei Berücksichtigung der Randbedingungen

$$x = a, \; u_2 = g(y)\, e^{i\nu t}$$

für die Konstanten $c_n^{(3)}$ und $c_n^{(4)}$ die Werte:

$$c_n^{(3)} = 0$$

und

$$c_n^{(4)} \cos \mu_n a = \frac{1}{b} \int_{-b}^{b} g(y) \cos \frac{2n+1}{2b} \pi y \, dy.$$

Setzen wir insbesondere

$$f(x) = g(y) = A$$

als eine Konstante voraus, um unter dieser Voraussetzung die Lösung explicite darstellen zu können, so ergeben sich für die Koeffizienten $c_n^{(3)}$ und $c_n^{(4)}$ die beiden Ausdsücke

$$c_n^{(2)} \cos \mu_n b = (-1)^n \frac{4A}{(2n+1)\pi}$$

und

$$c_n^{(4)} \cos \lambda_n a = (-1)^n \frac{4A}{(2n+1)\pi}.$$

Werden diese Koeffizienten in die Gleichungen (10) und (12) eingesetzt, so ergibt sich der Wert für die Lösung u. Die Gesamttemperatur

$$u = u_1 + u_2$$

ist daher

$$u = e^{i\nu t} \cdot \frac{4A}{\pi} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos \dfrac{2n+1}{a} \dfrac{\pi}{2} x \cos \mu_n y}{(2n+1) \cos \mu_n b} + \right. \left. + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos \dfrac{2n+1}{b} \dfrac{\pi}{2} y \cos \lambda_n x}{(2n+1) \cos \lambda_n a} \right]. \tag{13}$$

Die Lösung unseres Problems erscheint somit als Überlagerung zweier Lösungen. Die physikalische Bedeutung der Zusammensetzung der Lösung aus zwei Teillösungen u_1 und u_2 kann in diesem Falle genau so diskutiert werden, wie es in einer früheren Arbeit des Verfassers geschah.*)

II.

Entwicklung der Lösung in eine Fouriersche Doppelreiche.

Es ist selbstverständlich, daß die gewonnene Lösung in eine Fouriersche Doppelreihe entwickelt werden kann. Um die Fouriersche Doppelreihe des Lösungsanteiles u_2 herzustellen, müssen wir den von x abhängigen Bestandteil dieser Teillösung in eine Reihe von der Form

$$\frac{\cos \lambda_m x}{\cos \lambda_m a} = \sum_{n=0}^{\infty} d \cos (n + \tfrac{1}{2}) \frac{\pi x}{a}$$

entwickeln. Die Bestimmung der Konstanten d_n in der üblichen Weise liefert die Entwicklung

$$\frac{\cos \lambda_m x}{\cos \lambda_m a} = 2 \sum_{n}^{\infty} (-1)^n \frac{(n + \frac{1}{2}) \pi \cos (n + \frac{1}{2}) \dfrac{\pi x}{a}}{(n + \frac{1}{2})^2 \pi^2 - \lambda_m^2 a^2}. \tag{14}$$

Ganz entsprechend können wir den analogen Term in der zweiten Teillösung darstellen. Es ist

$$\frac{\cos \mu_n y}{\cos \mu_n b} = 2 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(m + \frac{1}{2}) \pi \cos (m + \frac{1}{2}) \dfrac{\pi y}{b}}{(m + \frac{1}{2})^2 \pi^2 - \mu_n^2 b^2}. \tag{15}$$

Wenn man diese Reihenentwicklung in die Gleichung (13) einsetzt,

*) F. Bock, Časopis pro pěst. mat. a fys. 66 (1937), 159.

so ergibt sich für die Temperatur u folgende Fouriersche Doppelreihe:

$$u = e^{i\nu t}\frac{4A}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{m+n}\cdot$$

$$\cdot\frac{[(m+\frac{1}{2})^2 a^2 + (n+\frac{1}{2})^2 b^2]\cos(n+\frac{1}{2})\frac{\pi x}{a}\cos(m+\frac{1}{2})\frac{\pi y}{b}}{\left[(m+\frac{1}{2})^2 a^2 + (n+\frac{1}{2})^2 b^2 + \frac{i\nu a^2 b^2}{l\pi^2}\right](m+\frac{1}{2})(n+\frac{1}{2})}.$$

Bei der Ableitung dieser Doppelreihe wurde die Vertauschung zweier Grenzprozesse vorgenommen. Wenn man die Zulässigkeit dieses Vorganges, was im Einzelnen nicht ausgeführt werden soll, untersucht, so findet man, daß die Vertauschung der Grenzübergänge wegen der gleichmäßigen Konvergenz der auftretenden Reihen sicher gestattet ist, wenn x und y auf ein ganz im Inneren des Rechteckes gelegenes Gebiet beschränkt werden.

Es wäre möglich gewesen gleich vom Anfang an die Lösung in dieser Form darzustellen; daß hier die in Abschnitt 1 durchgeführte Herleitung vorgezogen wurde, kann dadurch gerechtfertigt werden, daß die zur rechnerischen Auswertung der Ergebnisse ohnedies bequemeren einfachen Reihen in diesem besonderen Falle rascher konvergieren als die Doppelreihe. Daß dies tatsächlich der Fall ist, kann man daran ersehen, daß die Glieder der Reihe (13) mit wachsenden n (für $|y| < b$) exponentiell abnehmen, während die Abnahme der Glieder der Doppelreihe mit wachsenden n nur wie eine Potenz dieser Größen erfolgt.

III.

Der Sonderfall $\nu = 0$.

In diesem Abschnitte soll gezeigt werden, daß die im Abschnitte I erhaltene Lösung (13) im Sonderfalle $\nu = 0$, welcher dem stationären Zustand entspricht und sich auf die Konstante A reduziert durch Jacobische Thetafunktionen ausgedrückt werden kann.

Wir wollen die Lösung für die Frequenz $\nu = 0$ mit u_0 und die entsprechenden Teillösungen mit u_{10} bezw. u_{20} bezeichnen, wobei wieder

$$u_0 = u_{10} + u_{20}$$

ist. Umformung der Teillösung u_{10} liefert

$$u_{10} = \frac{4A}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos\frac{2n+1}{a}\frac{\pi}{2}x\cos\frac{2n+1}{a}\frac{\pi}{2}y}{(2n+1)\cos i\frac{2n+1}{a}\frac{\pi}{2}b}$$

Wir formen den Nennerausdruck

$$\cos i \frac{(2n+1)\pi}{2} \frac{b}{a}$$

folgendermaßen um. Es ist

$$\cos i \frac{(2n+1)\pi}{2} \frac{b}{a} = \frac{e^{-(2n+1)\frac{\pi b}{2a}} + e^{(2n+1)\frac{\pi b}{2a}}}{2} =$$

$$= (-1)^n i \frac{1 - (-e^{-\frac{\pi b}{a}})^{2n+1}}{2(-e^{-\frac{\pi b}{a}})^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Setzt man

$$\sqrt{-e^{-\frac{\pi b}{a}}} = q_1$$

so nimmt u_{10} folgende Gestalt an:

$$u_{10} = \frac{4A}{i\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_1^{n+\frac{1}{2}} \left[\cos \frac{(2n+1)\pi}{2a}(x+iy) + \cos \frac{(2n+1)\pi}{2a}(x-iy)\right]}{(2n+1)(1-q_1^{2n+1})}.$$

Diese unendliche Summe läßt sich nach Jacobi mittels der Formel*)

$$\log \vartheta_0(v, q) = Q - 2 \sum_{m}^{1,\infty} \frac{q^m}{1-q^{2m}} \cdot \frac{\cos 2mv\pi}{m} \tag{16}$$

summieren, wobei Q eine von v unabhängige Größe bedeutet. Die Reihe für $\log \vartheta_0(v, q)$ konvergiert, wenn

$$|\,\mathfrak{Im}\, v\,| < \left|\frac{\log q}{2\pi}\right|$$

ist. Weiters kann man für den $\log \vartheta_0(v + \frac{1}{2}, q)$ schreiben:

$$\log \vartheta_0(v + \tfrac{1}{2}, q) = Q - 2 \sum_{1,\infty}^{m} (-1)^m \frac{q^m}{1-q^{2m}} \cdot \frac{\cos 2mv\pi}{m} \tag{17}$$

Subtrahiert man die Gleichungen (16) und (17), so erhält man die Beziehung:

$$\log \frac{\vartheta_0(v+\frac{1}{2}, q)}{\vartheta_0(v, q)} = \log \frac{\vartheta_3(v, q)}{\vartheta_0(v, q)} = 4 \sum_{m}^{1,\infty} \frac{q^{2m+1} \cos 2(2m+1)v\pi}{(2m+1)(1-q^{2(2m+1)})}.$$

Bei der Subtraktion hebt sich nämlich jedes zweite Glied weg und es bleiben nur die mit ungeraden Zeigern versehenen Glieder stehen. Nach diesen Umformungen erscheint die Teillösung u_{10} in der Form

*) Vergl. z. B. A. Kneser, Integralgleidrungen, 2 Aufl. S. 160.

$$u_{10} = \frac{4A}{\pi i} \log \frac{\vartheta_3\left(\frac{x+iy}{4a}, q_1\right) \vartheta_3\left(\frac{x-iy}{4a}, q_1\right)}{\vartheta_0\left(\frac{x+iy}{4a}, q_1\right) \vartheta_0\left(\frac{x-iy}{4a}, q_1\right)}. \tag{10''}$$

In ähnlicher Weise bestimmen wir die zweite Teillösung u_{20}. Es ist

$$u_{20} = \frac{4A}{i\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos \frac{(2n+1)}{b} \frac{\pi}{2} y \cos i \frac{(2n+1)}{b} \frac{\pi}{2} x}{(2n+1) \cos i \frac{2n+1}{b} \frac{\pi}{2} a}. \tag{12'}$$

Die analoge Umformung wie bei u_{10} führt diesen Ausdruck über in

$$u_{20} = \frac{4A}{i\pi} \log \frac{\vartheta_3\left(\frac{y+ix}{4b}, q_2\right) \vartheta_3\left(\frac{y-ix}{4b}, q_2\right)}{\vartheta_0\left(\frac{y+ix}{4b}, q_2\right) \vartheta_0\left(\frac{y-ix}{4b}, q_2\right)}$$

wobei jetzt q_2 den Wert

$$q_2 = \sqrt{-e^{-\frac{\pi a}{b}}}$$

hat. Daher ergibt sich für die Gesamtlösung

$$u_0 =$$

$$\frac{4A}{\pi i} \log \frac{\vartheta_3\left(\frac{x+iy}{4a}, q_1\right) \vartheta_3\left(\frac{x-iy}{4a}, q_1\right) \vartheta_3\left(\frac{y+ix}{4b}, q_2\right) \vartheta_3\left(\frac{y-ix}{4b}, q_2\right)}{\vartheta_0\left(\frac{x+iy}{4a}, q_1\right) \vartheta_0\left(\frac{x-iy}{4a}, q_1\right) \vartheta_0\left(\frac{y+ix}{4b}, q_2\right) \vartheta_0\left(\frac{y-ix}{4b}, q_2\right)}.$$

Andererseits muß sich diese Lösung, wie schon am Anfang des Abschnittes erwähnt wurde, auf eine Konstante, nämlich

$$u_0 = A$$

reduzieren. Sonach muß daher zwischen den hier auftretenden Thetafunktionen, die vielleicht nicht uninteressante Beziehung

$$\frac{\vartheta_3\left(\frac{x+iy}{4a}, q_1\right) \vartheta_3\left(\frac{x-iy}{4a}, q_1\right) \vartheta_3\left(\frac{y+ix}{4b}, q_2\right) \vartheta_3\left(\frac{y-ix}{4b}, q_2\right)}{\vartheta_0\left(\frac{x+iy}{4a}, q_1\right) \vartheta_0\left(\frac{x-iy}{4a}, q_1\right) \vartheta_0\left(\frac{y+ix}{4b}, q_2\right) \vartheta_0\left(\frac{y-ix}{4b}, q_2\right)} = e^{\frac{i\pi}{4}}$$

bestehen, die also in einer physikalisch sinnvollen Weise abgeleitet erscheint.

Zum Schlusse möchte ich Herrn Prof. Dr. Rudolf Weyrich für die Anregung zu dieser Arbeit, sowie den Herrn Dr. F. Schobilk und A. Erdélyi für ihre wertvollen Ratschläge meinen besten Dank aussprechen.

Brünn, im April 1937.

*

Rozdělení teploty v pravoúhlém průřezu, na jehož obvodě je teplota dána.

(Obsah předešlého článku).

V předešlém článku je řešena úloha stanoviti rozdělení teploty v pravoúhlém průřezu, je-li dána teplota na jeho obvodě. Řešení je provedeno pro případ, že teplota je periodickou funkcí času, a že její hodnoty na obvodě jsou rozděleny symetricky vzhledem k přímkám spojujícím středy protilehlých stran. Jako speciální případ je stanoveno rozdělení teploty, je-li amplituda teplotních oscilací ve všech bodech obvodu stejná, teplota v těchto bodech závisí tedy jen na čase. To nastane, je-li pravoúhlý vodivý válec vložen do homogenního periodického tepelného pole.

Vydává a nakládá Jednota československých matematiků a fysiků v Praze. Redakce a administrace v Praze II, Žitná 25. Telefon 29308. Denně od $8^{1}/_{2}$—$12^{1}/_{2}$ a od 14—18 hod. kromě soboty odpol., neděle a svátku. — Účet poštovní spořitelny v Praze 13103. — Knihtiskárna Prometheus v Praze VIII, Na Rokosce 94. Telefon RR 8139, RR 8107. — Novinová sazba povolena řed. pošt a telegrafů 18. listopadu 1933, čís. 288250/VII. Podací úřad Praha 25.