ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY A FYSIKY

ČÁST MATEMATICKÁ

# Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden.

## Sechste Abhandlung.

Arnold Walfisz, Radość (Polen).

(Eingegangen am 21. August 1936.)

Es seien:

$k \geqq 4$ ganz (wenn der Fall $k = 4$ nicht besonders hervorgehoben wird, sei sogar $k \geqq 5$);

$$Q = Q(u_1, \ldots, u_k) = \sum_{\mu,\nu=1}^{k} a_{\mu\nu} u_\mu u_\nu \qquad (a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}) \tag{1}$$

eine positiv definite Form mit ganzzahligen Koeffizienten und der Determinante $D$;

$\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ rationale Zahlen mit dem Hauptnenner $H$;

$$A(n) = A_{Q;\alpha_1,\ldots,\alpha_k}(n) = \sum_{Q(m_1,\ldots,m_k)=n} \exp\{2\pi i\,(\alpha_1 m_1 + \ldots + \alpha_k m_k)\} \tag{2}$$

für ganzes $n \geqq 0$ (falls der Wert $n = 0$ nicht ausdrücklich zugelassen wird, sei stets $n > 0$).

Mit $B$ werden unterschiedslos Zahlen bezeichnet, deren absolute Beträge gewisse, nur von $Q$ und $H$ abhängige Schranken nicht überschreiten. Eine Ausnahme bilden die beiden Hilfssätze, in denen die $B$-Schranken von anderen Parametern abhängen; ich komme darauf noch zurück.

In der vorliegenden Arbeit betrachte ich die Summe $\sum_{n=1}^{N} | A(n) |^2$ für $N \geqq 3$.

* * *

Satz 1: *Mit einer geeigneten Konstanten*

$$\lambda = \lambda_{Q;\alpha_1,\ldots,\alpha_k} > 0 \tag{3}$$

*ist für* $k \geqq 5$

$$\sum_{n=1}^{N} | A(n) |^2 = \lambda N^{k-1} + BN^{k-2} + BN^{\frac{1}{2}k}. \tag{4}$$

Beweis: $q$ und $q'$ seien natürliche, $p$ und $p'$ ganze Zahlen. In Summen, die nach $p$ oder $p'$ laufen, soll $\Sigma'$ andeuten, dass neben den anderen Summationsbedingungen noch $(p, q) = 1$ oder $(p', q') = 1$ verlangt wird. Ich setze

$$\begin{aligned} S_{p,q} = S_{p,q;\alpha_1,\ldots,\alpha_k} = \sum_{a_1,\ldots,a_k=0}^{q-1} \exp \Big\{ 2\pi i \frac{p}{q} Q(a_1, \ldots, a_k) + \\ + 2\pi i (\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_k a_k) \Big\}, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\lambda = \frac{\pi^k}{(k-1) D\Gamma^2(\frac{1}{2}k)} \sum_{\substack{q=1 \\ q \equiv 0 \pmod H}}^{\infty} \sum_{0 \leq p < q}' \frac{|S_{p,q}|^2}{q^{2k}}, \tag{6}$$

$$\mathfrak{S}(n) = \sum_{\substack{q=1 \\ q \equiv 0 \pmod H}}^{\infty} \sum_{0 \leq p < q}' \frac{S_{p,q}}{q^k} \exp \left\{ - 2\pi i n \frac{p}{q} \right\}. \tag{7}$$

Wegen

$$S_{p,q} = Bq^{\frac{1}{2}k} \text{ [1]} \tag{8}$$

konvergieren die Reihen (6) und (7) absolut und es ist

$$\mathfrak{S}(n) = B.$$

Nimmt man noch

$$A(n) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}k}}{\sqrt{D}\Gamma(\frac{1}{2}k)} \mathfrak{S}(n)\, n^{\frac{1}{2}k-1} + Bn^{\frac{1}{4}k} \text{ [2]} \tag{9}$$

hinzu, so folgt

$$|A(n)|^2 = \frac{\pi^k}{D\Gamma^2(\frac{1}{2}k)} |\mathfrak{S}(n)|^2 n^{k-2} + Bn^{\frac{3}{4}k-1},$$

$$\sum_{n=1}^{N} |A(n)|^2 = \frac{\pi^k}{D\Gamma^2(\frac{1}{2}k)} \sum_{n=1}^{N} |\mathfrak{S}(n)|^2 n^{k-2} + BN^{\frac{3}{4}k}, \tag{10}$$

$$\sum_{n=1}^{N} |\mathfrak{S}(n)|^2 n^{k-2}$$

$$= \sum_{\substack{q,q'=1 \\ q,q' \equiv 0 \pmod H}}^{\infty} \sum_{\substack{0 \leq p < q \\ 0 \leq p' < q'}}' \frac{S_{p,q}\overline{S}_{p',q'}}{q^k q'^k} \sum_{n=1}^{N} n^{k-2} \exp \left\{ - 2\pi i n \left( \frac{p}{q} - \frac{p'}{q'} \right) \right\}.$$

Wegen

$$\left| \frac{p}{q} - \frac{p'}{q'} \right| < 1, \; (p, q) = 1, \; (p', q') = 1$$

---

[1]) Vgl. die erste gleichnamige Abhandlung (im folgenden kurz $E_I$ genannt): Mathematische Zeitschrift **19** (1924), S. 300—307, Formel (23a). Einen Beweis dieser Abschätzung kann der Leser auch weiter unten kennen lernen, vgl. Fussnote [3]).

[2]) $E_I$, Formel (14).

sind nur die beiden Fälle möglich

$$p = p',\ q = q';\ 0 < \left| \frac{p}{q} - \frac{p'}{q'} \right| < 1.$$

Es ist also, mit Rücksicht auf (8),

$$\sum_{n=1}^{N} | \mathfrak{S}(n)|^2 n^{k-2} = \sum_{\substack{q=1 \\ q \equiv 0 \pmod H}}^{\infty} \sum_{0 \leqq p < q}' \frac{| S_{p,q} |^2}{q^{2k}} \sum_{n=1}^{N} n^{k-2} \tag{11}$$

$$+ B \sum_{q,q'=1}^{\infty} \sum_{\substack{0 \leqq p < q,\ 0 \leqq p' < q' \\ 0 < \left| \frac{p}{q} - \frac{p'}{q'} \right| < 1}} (qq')^{-\frac{1}{2}k} \operatorname{cosec} \left( \pi \left| \frac{p}{q} - \frac{p'}{q'} \right| \right) N^{k-2},$$

falls die Reihe im $B$-Glied konvergiert. Dies ist aber der Fall, wegen

$$\sum_{q,q'=1}^{N} (qq')^{-\frac{1}{2}k} \sum_{\substack{0 \leqq p < q,\ 0 \leqq p' < q' \\ 0 < \left| \frac{p}{q} - \frac{p'}{q'} \right| < 1}} \operatorname{cosec} \left( \pi \left| \frac{p}{q} - \frac{p'}{q'} \right| \right) = \sum_{d=1}^{N} \sum_{\substack{q,q'=1 \\ (q,q')=d}}^{N}$$

$$= \sum_{d=1}^{N} d^{-k} \sum_{\substack{q,q' \leqq \frac{N}{d} \\ (q,q')=1}} (qq')^{-\frac{1}{2}k} \sum_{\substack{0 \leqq p < dq,\ 0 \leqq p' < dq' \\ 0 < \left| \frac{p}{dq} - \frac{p'}{dq'} \right| < 1}} \operatorname{cosec} \frac{\pi \, | pq' - qp' |}{dqq'}$$

(ich habe $q$, $q'$ durch $dq$, $dq'$ ersetzt)

$$= B \sum_{d=1}^{N} d^{2-k} \sum_{\substack{q,q'=1 \\ (q,q')=1}}^{N} (qq')^{-\frac{1}{2}k} \sum_{1 \leqq a < dqq'} \operatorname{cosec} \frac{\pi a}{dqq'}$$

(ich habe $| pq' - qp' | = a$ gesetzt und beachtet, dass jedes $a$ nur $Bd^2$ mal vorkommen kann, weil entweder $pq' - qp' \equiv a \pmod{qq'}$ oder $pq' - qp' \equiv - a \pmod{qq'}$ sein muss, und in jeder dieser Kongruenzen $p \bmod q$, $p' \bmod q'$ eindeutig bestimmt sind)

$$= B \sum_{d=1}^{N} d^{3-k} \sum_{q,q'=1}^{N} (qq')^{1-\frac{1}{2}k} \sum_{1 \leqq a < dqq'} a^{-1}$$

$$= B \sum_{d=1}^{N} d^{-2} \sum_{q,q'=1}^{\infty} (qq')^{-\frac{3}{2}} \log (dqq') = B.$$

Zugleich ergibt sich aus (11)

$$\sum_{n=1}^{N} | \mathfrak{S}(n) |^2 n^{k-2} = \frac{1}{k-1} \sum_{\substack{q=1 \\ q \equiv 0 \pmod H}}^{\infty} \sum_{0 \leqq p < q}' \frac{| S_{p,q} |^2}{q^{2k}} N^{k-1} + BN^{k-2}.$$

Setzt man dies in (10) ein, so folgt (4) mit (6). Ich habe noch (3) für den Ausdruck (6) nachzuweisen.

Aus (5) und (1) folgt

$$|S_{p,q}|^2 = \sum_{a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k = 0}^{q-1} \exp\left\{2\pi i \frac{p}{q}(Q(a_1, \ldots, a_k) - Q(b_1, \ldots, b_k)) + 2\pi i \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu (a_\nu - b_\nu)\right\}$$

$$= \sum_{b_1, \ldots, b_k = 0}^{q-1} \sum_{c_1 = -b_1}^{q-1-b_1} \cdots \sum_{c_k = -b_k}^{q-1-b_k} \exp\left\{2\pi i \frac{p}{q}(Q(b_1 + c_1, \ldots, b_k + c_k) - Q(b_1, \ldots, b_k)) + 2\pi i \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu c_\nu\right\}$$

(ich habe neue Summationsbuchstaben $b_1, \ldots, b_k, c_1, \ldots, c_k$ durch $a_1 = b_1 + c_1, \ldots, a_k = b_k + c_k$ eingeführt)

$$= \sum_{b_1, \ldots, b_k, c_1, \ldots, c_k = 0}^{q-1} \exp\left\{2\pi i \frac{p}{q}(Q(b_1 + c_1, \ldots, b_k + c_k) - Q(b_1, \ldots, b_k)) + 2\pi i \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu c_\nu\right\}$$

(wegen $q \equiv 0 \pmod{H}$ hat $\exp\{\ \}$ bei jedem $c$ die Periode $q$)

$$= \sum_{b_1, \ldots, b_k, c_1, \ldots, c_k = 0}^{q-1} \exp\left\{2\pi i \frac{p}{q} Q(c_1, \ldots, c_k) + 4\pi i \frac{p}{q} \sum_{\mu, \nu = 1}^{k} a_{\mu\nu} b_\mu c_\nu + 2\pi i \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu c_\nu\right\}$$

$$= \sum_{c_1, \ldots, c_k = 0}^{q-1} \exp\left\{2\pi i \frac{p}{q} Q(c_1, \ldots, c_k) + 2\pi i \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu c_\nu\right\} \prod_{\mu=1}^{k} \sum_{b_\mu = 0}^{q-1} \exp\left\{4\pi i \frac{p}{q} \sum_{\nu=1}^{k} a_{\mu\nu} c_\nu \cdot b_\mu\right\} \tag{12}$$

$$= q^k \sum_{\substack{c_1, \ldots, c_k = 0 \\ 2\sum_{\nu=1}^{k} a_{1\nu} c_\nu \equiv 0, \ldots, 2\sum_{\nu=1}^{k} a_{k\nu} c_\nu \equiv 0 \pmod{q}}}^{q-1} \exp\left\{2\pi i \frac{p}{q} Q(c_1, \ldots, c_k) + 2\pi i \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu c_\nu\right\}, \tag{13}$$

denn das $\mu$-Produkt in (12) ist nur dann von Null verschieden, und zwar $= q^k$, wenn die unter dem $c$-Summenzeichen von (13) aufgeschriebenen Kongruenzen erfüllt sind. Da diese linearen Kongruenzen

$$2\sum_{\nu=1}^{k} a_{1\nu}c_\nu \equiv 0, \ldots, 2\sum_{\nu=1}^{k} a_{k\nu}c_\nu \equiv 0 \pmod q \tag{14}$$

die Determinante $2^k D$ haben, so erfüllen die Lösungen $c_1, \ldots, c_k$ auch die folgenden Kongruenzen

$$2^k Dc_1 \equiv 0, \ldots, 2^k Dc_k \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ q).^3) \tag{15}$$

Es sei (nur für den Augenblick)

$$D = 2^d D', \ d \geqq 0, \ D' \text{ ungerade.} \tag{16}$$

Dann setze ich

$$q = 2^k DH, \ p = 1 \text{ für gerades } H; \ q = 1, \ p = 0 \text{ für } H = 1;$$
$$q = D'H, \ p = 2 \text{ für ungerades } H \geqq 3$$

und bekomme, mit Rücksicht auf (13) — (16),

$$c_1 \equiv 0, \ldots, c_k \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ H),$$

$$2Q(c_1, \ldots, c_k) = 2\sum_{\mu=1}^{k} c_\mu \sum_{\nu=1}^{k} a_{\mu\nu}c_\nu \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ Hq),$$

$$pQ(c_1, \ldots, c_k) \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ q),$$

$$|S_{p,q}|^2 = q^k \sum_{\substack{c_1, \ldots, c_k = 0 \\ 2\sum_{\nu=1}^{k} a_{1\nu}c_\nu \equiv 0, \ldots, 2\sum_{\nu=1}^{k} a_{k\nu}c_\nu \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ q)}}^{q-1} 1 \geqq q^k > 0, \tag{17}$$

weil die $c$-Summe mindestens das eine Glied mit $c_1 = 0, \ldots, c_k = 0$ enthält, also nicht leer ist.

(3) folgt aus (6) und (17).

Bemerkungen: 1. Die Landausche Abschätzung

$$\sum_{n=1}^{N} A(n) = BN^{\frac{1}{2}k-1} \qquad (H > 1)^4)$$

ist scharf. Aus Satz 1 folgt nämlich

$$A(n) = \Omega(n^{\frac{1}{2}k-1}), \tag{18}$$

---

[3]) Da das System (15) nur $B$ Lösungen hat, so ist (8) eine Folge von (13).

[4]) E. Landau: „Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden" [Mathematische Zeitschrift 21 (1924), S. 126—132], für $k \geqq 8$ auch in $E_I$.

also

$$\sum_{n=1}^{N} A(n) = \Omega(N^{\frac{1}{2}k-1}). \tag{19}$$

2. (18) gilt auch für $k = 4$, also gilt (19) für $k = 4$. Gesetzt nämlich, dass für eine geeignete quaternäre Form $Q = \sum_{\mu,\nu=1}^{4} a_{\mu\nu} u_\mu u_\nu$ und ein dazugehöriges System $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$

$$A_{Q;\, \alpha_1, \ldots, \alpha_4}(n) = o(n)$$

wäre, so folgte hieraus nach (2) für $Q' = Q + u_5^2$; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, $0 = \alpha_5$

$$A_{Q';\, \alpha_1, \ldots, \alpha_5}(n) = \sum_{Q(m_1, \ldots, m_4) + m_5^2 = n} \exp\{2\pi i\, (\alpha_1 m_1 + \ldots + \alpha_4 m_4)\}$$

$$= \sum_{0 \leqq |m_5| \leqq \sqrt{n}} \sum_{Q(m_1, \ldots, m_4) = n - m_5^2} \exp\{2\pi i\, (\alpha_1 m_1 + \ldots + \alpha_4 m_4)\}$$

$$= \sum_{0 \leqq |m_5| \leqq \sqrt{n}} A_{Q;\, \alpha_1, \ldots, \alpha_4}(n - m_5^2) = o(n^{\frac{3}{2}}),$$

im Gegensatz zu (18) mit $k = 5$.

Nach oben ist für $k = 4$ durch Landau[4])

$$\sum_{n=1}^{N} A(n) = BN \log^2 N \quad (H > 1)$$

bekannt. Hier ist also noch eine Spanne von der Grössenordnung $\log^2 N$ vorhanden.

* * *

Von jetzt ab nehme ich $H = 1$ an, setze also $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$. Es sei für $k \geqq 4$

$$A_{Q;0, \ldots, 0}(n) = \sum_{Q(m_1, \ldots, m_k) = n} 1 = r_Q(n).$$

Im Spezialfall

$$Q = K_k = u_1^2 + \ldots + u_k^2,\ D = 1$$

setze ich

$$r_{K_k}(n) = r_k(n).$$

**Satz 2:** *Für* $k \geqq 5$ *gilt die scharfe Abschätzung*

$$\sum_{n=1}^{N} r_k^2(n) = \frac{\pi^k}{(k-1)\,\Gamma^2(\frac{1}{2}k)} \frac{1}{1 - 2^{-k}} \frac{\zeta(k-1)}{\zeta(k)} N^{k-1} + BN^{k-2}. \tag{20}$$

**Beweis:** Für $Q = K_k$, $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$, $(p, q) = 1$ ist nach (13)

$$|S_{p,q}|^2 = q^k \sum_{\substack{c_1,\ldots,c_k=0 \\ 2c_1\equiv 0,\ldots,2c_k\equiv 0 \pmod q}}^{q-1} \exp\left\{2\pi i \frac{p}{q}(c_1^2 + \ldots + c_k^2)\right\}$$

$$= \left(q \sum_{\substack{c=0 \\ 2c\equiv 0 \pmod q}}^{q-1} \exp\left\{2\pi i \frac{p}{q} c^2\right\}\right)^k = \begin{cases} q^k & \text{für ungerade } q \\ q^k(1+(-1)^{\frac{1}{2}pq})^k & \text{für gerade } q, \end{cases}$$

d. h.

$$|S_{p,q}|^2 = q^k \text{ für } q \equiv 1 \pmod 2, \ = 0 \text{ für } q \equiv 2 \pmod 4, \ = (2q)^k \text{ für } q \equiv 0 \pmod 4.$$

Setzt man dies in (6) ein, so folgt aus (4)

$$\sum_{n=1}^{N} r_k^2(n) = \tag{21}$$

$$= \frac{\pi^k}{(k-1)\,\Gamma^2(\frac{1}{2}k)} \left(\sum_{\substack{q=1 \\ q\equiv 1 \pmod 2}}^{\infty} \frac{\varphi(q)}{q^k} + 2^k \sum_{\substack{q=1 \\ q\equiv 0 \pmod 4}}^{\infty} \frac{\varphi(q)}{q^k}\right) N^{k-1}$$
$$+ BN^{k-2} + BN^{\frac{3}{4}k}.$$

Hierin kann man jedoch das Glied $BN^{\frac{3}{4}k}$ streichen, denn es tritt nur für $k \leq 7$ auf, und da gilt nach Hardy

$$r_k(n) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}k}}{\Gamma(\frac{1}{2}k)} \mathfrak{S}(n)\, n^{\frac{1}{2}k-1} \qquad (5 \leq k \leq 8).^{5)}$$

Verwendet man dies statt (9), so folgt, für unseren Spezialfall, (4) mit (6), ohne das Glied $BN^{\frac{3}{4}k}$.

Es verbleibt noch nachzuweisen, dass 1. die Koeffizienten von $N^{k-1}$ in (20) und (21) übereinstimmen, d. h.

$$\sum_{\substack{q=1 \\ q\equiv 1 \pmod 2}}^{\infty} \frac{\varphi(q)}{q^k} + 2^k \sum_{\substack{q=1 \\ q\equiv 0 \pmod 4}}^{\infty} \frac{\varphi(q)}{q^k} = \frac{1}{1-2^{-k}} \frac{\zeta(k-1)}{\zeta(k)} \tag{22}$$

ist, und 2. das Restglied von (20) nicht durch $o(N^{k-2})$ ersetzt werden kann. Von nun an sei, bis zum Schluss dieser Arbeit, der Buchstabe $p$ für Primzahlen vorbehalten.

1. Die linke Seite von (22) ist

---

[5]) G. H. Hardy: „On the representation of a number as the sum of any number of squares and in particular of five" [Transactions of the American Mathematical Society 21 (1920), S. 255—284], vgl. auch L. E. Dickson: „Studies in the theory of numbers" (Chicago 1930), Kapitel 13.

Einen verhältnismässig einfachen Beweis dieser tiefliegenden Identität gab kürzlich T. Estermann: „On the representations of a number as a sum of squares" [Acta Arithmetica 2 (1936), S. 47—79].

$$= \sum_{\substack{q=1 \\ q \equiv 1 (\mathrm{mod} 2)}}^{\infty} \frac{\varphi(q)}{q^k} + 2^{-k} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\varphi(4q)}{q^k} =$$

$$= \left(1 + 2^{-k} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varphi(4 \,.\, 2^m)}{2^{mk}}\right) \sum_{\substack{q=1 \\ q \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2)}}^{\infty} \frac{\varphi(q)}{q^k} =$$

$$= \frac{1}{1 - 2^{1-k}} \prod_{p>2} \frac{1 - p^{-k}}{1 - p^{1-k}} = \frac{1}{1 - 2^{1-k}} \frac{\zeta(k-1)}{\zeta(k)} \frac{1 - 2^{1-k}}{1 - 2^{-k}} =$$

$$= \frac{1}{1 - 2^{-k}} \frac{\zeta(k-1)}{\zeta(k)}.$$

2. Aus

$$z_k = \frac{1}{1 - 2^{-k}} \frac{\zeta(k-1)}{\zeta(k)},$$

$$\sum_{n=1}^{N} r_k^2(n) = \frac{\pi^k}{(k-1)\, \Gamma^2\left(\frac{1}{2}k\right)} z_k N^{k-1} + o(N^{k-2})$$

folgte

$$r_k^2(n) = \frac{\pi^k}{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}k\right)} z_k n^{k-2} + o(n^{k-2}),$$

$$r_k(n) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}k}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}k\right)} z_k^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}k-1} + o(n^{\frac{1}{2}k-1}),$$

$$\frac{\pi^{\frac{1}{2}k}}{\Gamma(\frac{1}{2}k+1)} N^{\frac{1}{2}k} = \sum_{n=1}^{N} r_k(n) + o(N^{\frac{1}{2}k}) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}k}}{\Gamma(\frac{1}{2}k+1)} z_k^{\frac{1}{2}} N^{\frac{1}{2}k} + o(N^{\frac{1}{2}k}),$$

$$z_k = 1,$$

während nach (22)

$$z_k > 1 + 2^k \frac{\varphi(4)}{4^k} = 1 + 2^{1-k} \tag{23}$$

ist.

Bemerkung: Für den Gitterrest

$$\mathsf{P}_k(x) = \sum_{n \leqq x} r_k(n) - \frac{\pi^{\frac{1}{2}k}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}k+1\right)} x^{\frac{1}{2}k} \qquad (x > 0)$$

der $k$-dimensionalen Kugel $K_k \leqq x$ folgt aus Satz 2: Wird

$$M_k = \frac{\pi^{\frac{1}{2}k}}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}k\right)}$$

gesetzt, so ist für jedes $\delta_k < \sqrt{z_k}$ mindestens eine der beiden Ungleichungen

$$\mathsf{P}_k(n) > M_k \delta_k n^{\frac{1}{2}k-1}, \quad \mathsf{P}_k(n-0) < -M_k \delta_k n^{\frac{1}{2}k-1}$$

unendlich oft erfüllt.

Wäre nämlich für ein geeignetes $\delta_k < \sqrt{z_k}$ und alle hinreichend grossen $n$

$$\mathsf{P}_k(n) \leqq M_k \delta_k n^{\frac{1}{2}k-1}, \quad \mathsf{P}_k(n-0) \geqq - M_k \delta_k n^{\frac{1}{2}k-1},$$

so wäre zuletzt

$$r_k(n) = \mathsf{P}_k(n) - \mathsf{P}_k(n-0) \leqq 2 M_k \delta_k n^{\frac{1}{2}k-1},$$

d. h. es folgte

$$\limsup_{N=\infty} N^{-k+1} \sum_{n=1}^{N} r_k^2(n) \leqq \frac{(2M_k\delta_k)^2}{k-1} < \frac{4M_k^2 z_k}{k-1},$$

wo ganz rechts der Koeffizient von $N^{k-1}$ in (20) steht.

Nach (23) kann z. B.

$$\delta_k = \sqrt{1 + 2^{1-k}}$$

angenommen werden.

Für $\mathsf{P}_k(n)$ und $\mathsf{P}_k(n-0)$ gibt es indessen bessere Abschätzungen.[6])

* * *

Ich will jetzt $\sum_{n=1}^{N} r_4^2(n)$ abschätzen. Um den folgenden Hilfssatz besser ausnutzen zu können, betrachte ich neben $K_4$ noch die beiden quaternären Formen

$$K'_4 = u_1^2 + u_2^2 + 2u_3^2 + 2u_4^2, \quad D = 4$$
$$K''_4 = u_1^2 + 2u_2^2 + 2u_3^2 + 4u_4^2, \quad D = 16$$

mit

$$r'_4(n) = \sum_{m_1^2+m_2^2+2m_3^2+2m_4^2=n} 1,$$

$$r''_4(n) = \sum_{m_1^2+2m_2^2+2m_3^2+4m_4^2=n} 1.$$

$\sigma(n)$ sei die Teilersumme von $n$:

$$\sigma(n) = \sum_{d/n} d,$$

$r$ eine nicht negative ganze Zahl (nicht mit den Funktionszeichen $r_4(n)$, $r'_4(n)$, $r''_4(n)$ zu verwechseln), $x$ eine stetige Veränderliche $\geqq 3$ (diese Bedeutung habe $x$ bis zum Schluss dieser Arbeit),

$$S_r(x) = \sum_{n \leqq x} \sigma(2^r n)\, \sigma(n). \tag{24}$$

Im folgenden Hilfssatz hängt die $B$-Schranke nur von $r$ ab.

---

[6]) Vgl. H. Petersson: „Über die Anzahl der Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden“ [Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität **5** (1926), S. 116—150], § 5 und V. Jarník: „O mřížových bodech ve vícerozměrných koulích“ [Časopis pro pěstování matematiky a fysiky **57** (1928), S. 123—128].

**Hilfssatz 1:**

$$S_r(x) = (\tfrac{7}{6} 2^r - \tfrac{1}{3})\, \zeta(3)\, x^3 + Bx^2 \log^2 x. \tag{25}$$

**Bemerkung:** Für $r = 0$ ist hierin die Ramanujansche Abschätzung

$$\sum_{n=1}^{N} \sigma^2(n) = \tfrac{5}{6}\, \zeta(3)\, N^3 + BN^2 \log^2 N\ ^{7)} \tag{26}$$

enthalten.

**Beweis:** Ich führe die Restklassen $a_0, a_1, \ldots, a_r$ wie folgt ein:

$$a_0 \equiv 0 \pmod{2^r};\quad a_\varrho \equiv 2^{\varrho-1} \pmod{2^\varrho} \text{ für } 1 \leqq \varrho \leqq r \tag{27}$$

und beachte, dass

$$\sum_{\substack{a,c=1\\(a,c)=1}}^{\infty} \frac{1}{a^2c^2} = \tfrac{5}{2}, \tag{28}$$

$$\sum_{\substack{a,c=1\\(a,c)=1,\ a\equiv 1 \pmod 2}}^{\infty} \frac{1}{a^2c^2} = 2 \tag{29}$$

ist.[8]) Mit Hilfe von (27) — (29) wird nun $S_r(x)$ so abgeschätzt:

$$S_r(x) = \sum_{n \leqq x} \sum_{a \mid 2^r n} a \sum_{c \mid n} c = \sum_{ab = 2^r cd \leqq 2^r x} ac$$

$$= \sum_{a \leqq 2^r x} a \sum_{b \leqq \frac{2^r x}{a}} \sum_{c \leqq x} c \sum_{\substack{d \leqq \frac{x}{c}\\ d = \frac{ab}{2^r c}}} 1$$

$$= \sum_{a \leqq 2^r x} a \sum_{b \leqq \frac{2^r x}{a}} \sum_{c \leqq x} c \sum_{d = \frac{ab}{2^r c}} 1$$

$$= \sum_{a \leqq 2^r x} a \sum_{b \leqq \frac{2^r x}{a}} \sum_{\substack{c \leqq x\\ 2^r c \mid ab}} c = \sum_{t \leqq 2^r x} \sum_{a \leqq 2^r x} a \sum_{\substack{c \leqq x\\ (2^r c, a) = t}} c \sum_{\substack{b \leqq \frac{2^r x}{a}\\ 2^r c \mid ab}} 1$$

$$= \sum_{\varrho=0}^{r} \sum_{t \leqq 2^r x} \sum_{a_\varrho \leqq 2^r x} a_\varrho \sum_{\substack{c \leqq x\\ (2^r c, a_\varrho) = t}} c \sum_{\substack{b \leqq \frac{2^r x}{a_\varrho}\\ 2^r c \mid a_\varrho b}} 1 = \sum_{\varrho=0}^{r} S_{r\varrho}.$$

---

[7]) S. Ramanujan: „Some formulae in the analytic theory of numbers" [Messenger of Mathematics **45** (1916), S. 81—84 oder auch Collected Papers of Srinivasa Ramanujan (Cambridge 1927), S. 133—135], Formel (19).

[8]) Vgl. meine „Teilerprobleme. Zweite Abhandlung" [Mathematische Zeitschrift **34** (1931), S. 448—472], Formeln (39) und (115).

$$S_{r0} = \sum_{t \leqq x} \sum_{a \leqq x} 2^r a \sum_{\substack{c \leqq x \\ (a,a)=t}} c \sum_{\substack{b \leqq \frac{x}{a} \\ c|ab}} 1$$

(ich habe $t$, $a_0$ durch $2^r t$, $2^r a$ ersetzt)

$$= 2^r \sum_{t \leqq x} \sum_{\substack{a,c \leqq x \\ (a,c)=t}} ac \sum_{\substack{b \leqq \frac{x}{a} \\ c|ab}} 1$$

$$= 2^r \sum_{t \leqq x} t^2 \sum_{\substack{a,c \leqq \frac{x}{t} \\ (a,c)=1}} ac \sum_{\substack{b \leqq \frac{x}{ta} \\ c|b}} 1$$

$$= 2^r \sum_{t \leqq x} t^2 \sum_{\substack{a,c \leqq \frac{x}{t} \\ (a,c)=1}} ac \sum_{b \leqq \frac{x}{tac}} 1$$

$$= 2^r \sum_{\substack{a,c \leqq x \\ (a,c)=1}} ac \sum_{b \leqq \frac{x}{ac}} \sum_{t \leqq \frac{x}{abc}} t^2$$

$$= 2^r \sum_{\substack{ac \leqq x \\ (a,c)=1}} ac \sum_{b \leqq \frac{x}{ac}} \sum_{t \leqq \frac{x}{abc}} t^2$$

$$= 2^r \sum_{\substack{ac \leqq x \\ (a,c)=1}} ac \sum_{b \leqq \frac{x}{ac}} \left( \frac{x^3}{3a^3b^3c^3} + \frac{Bx^2}{a^2b^2c^2} \right)$$

$$= \tfrac{1}{3}\, 2^r x^3 \sum_{\substack{ac \leqq x \\ (a,c)=1}} \frac{1}{a^2c^2} \sum_{b \leqq \frac{x}{ac}} \frac{1}{b^3} + Bx^2 \sum_{a,c \leqq x} \frac{1}{ac}$$

$$= \tfrac{1}{3}\, 2^r x^3 \sum_{\substack{ac \leqq x \\ (a,c)=1}} \frac{1}{a^2c^2} \left( \zeta(3) + \frac{Ba^2c^2}{x^2} \right) + Bx^2 \log^2 x$$

$$= \tfrac{1}{3}\, 2^r\, \zeta(3)\, x^3 \sum_{\substack{ac \leqq x \\ (a,c)=1}} \frac{1}{a^2c^2} + Bx^2 \log^2 x$$

$$= \tfrac{1}{3}\, 2^r\, \zeta(3)\, x^3 \sum_{\substack{a,c=1 \\ (a,c)=1}}^{\infty} \frac{1}{a^2c^2} + Bx^2 \log^2 x$$

$$= \tfrac{5}{6}\, 2^r\, \zeta(3)\, x^3 + Bx^2 \log^2 x.$$

$$(1 \leqq \varrho \leqq r) \quad S_{r\varrho} = \sum_{\substack{t \leqq 2^{r-\varrho+1}x \\ t \equiv 1}} \sum_{\substack{a \leqq 2^{r-\varrho+1}x \\ a \equiv 1}} 2^{\varrho-1} a \sum_{\substack{c \leqq x \\ (a,c)=t}} c \sum_{\substack{b \leqq 2^{r-\varrho+1}\frac{x}{a} \\ 2^{r-\varrho+1}c|ab}} 1$$

(ich habe 1. $t$, $a$ durch $2^{\varrho-1}t'$, $2^{\varrho-1}a'$ ersetzt und beachtet, dass $t'$, $a'$ ungerade sein müssen; 2. wieder $t$, $a$ für $t'$, $a'$ geschrieben — die Kongruenzen unter den Summenzeichen sind mod 2 zu verstehen)

$$= 2^{\varrho-1} \sum_{\substack{t \leqq 2^{r-\varrho+1} x \\ t \equiv 1}} t^2 \sum_{\substack{a \leqq 2^{r-\varrho+1} \frac{x}{t} \\ a \equiv 1}} a \sum_{\substack{c \leqq \frac{x}{t} \\ (a,c)=1}} c \sum_{\substack{b \leqq 2^{r-\varrho+1} \frac{x}{ta} \\ 2^{r-\varrho+1} c \mid b}} 1$$

$$= 2^{\varrho-1} \sum_{\substack{t \leqq 2^{r-\varrho+1} x \\ t \equiv 1}} t^2 \sum_{\substack{a \leqq 2^{r-\varrho+1} \frac{x}{t} \\ a \equiv 1}} a \sum_{\substack{c \leqq \frac{x}{t} \\ (a,c)=1}} c \sum_{b \leqq \frac{x}{tac}} 1$$

$$= 2^{\varrho-1} \sum_{\substack{t \leqq x \\ t \equiv 1}} t^2 \sum_{\substack{ac \leqq \frac{x}{t} \\ (a,c)=1,\, a \equiv 1}} ac \sum_{b \leqq \frac{x}{tac}} 1$$

$$= 2^{\varrho-1} \sum_{\substack{ac \leqq x \\ (a,c)=1,\, a \equiv 1}} ac \sum_{b \leqq \frac{x}{ac}} \sum_{\substack{t \leqq \frac{x}{abc} \\ t \equiv 1}} t^2$$

$$= 2^{\varrho-1} \sum_{\substack{ac \leqq x \\ (a,c)=1,\, a \equiv 1}} ac \sum_{b \leqq \frac{x}{ac}} \left( \frac{x^3}{6a^3b^3c^3} + \frac{Bx^2}{a^2b^2c^2} \right)$$

$$= \tfrac{1}{12}\, 2^{\varrho} x^3 \sum_{\substack{ac \leqq x \\ (a,c)=1,\, a \equiv 1}} \frac{1}{a^2c^2} \left( \zeta(3) + \frac{Ba^2c^2}{x^2} \right) + Bx^2 \log^2 x$$

$$= \tfrac{1}{12}\, 2^{\varrho}\, \zeta(3)\, x^3 \sum_{\substack{a,c=1 \\ (a,c)=1,\, a \equiv 1}}^{\infty} \frac{1}{a^2c^2} + Bx^2 \log^2 x$$

$$= \tfrac{1}{6}\, 2^{\varrho}\, \zeta(3)\, x^3 + Bx^2 \log^2 x.$$

$$S_r(x) = \left( \tfrac{5}{6}\, 2^r + \tfrac{1}{6} \sum_{\varrho=1}^{r} 2^{\varrho} \right) \zeta(3)\, x^3 + Bx^2 \log^2 x$$

$$= \left(\tfrac{7}{6} 2^r - \tfrac{1}{3}\right) \zeta(3)\, x^3 + Bx^2 \log^2 x. \tag{25}$$

**Satz 3:**

$$\sum_{n=1}^{N} r_4^2(n) = 32\, \zeta(3)\, N^3 + BN^2 \log^2 N, \tag{30}$$

$$\sum_{n=1}^{N} r_4'^2(n) = \tfrac{15}{2}\, \zeta(3)\, N^3 + BN^2 \log^2 N, \tag{31}$$

$$\sum_{n=1}^{N} r_4''^2(n) = \tfrac{29}{16}\, \zeta(3)\, N^3 + BN^2 \log^2 N. \tag{32}$$

Beweis: Für $n = 2^h u$, $h \geqq 0$ ganz, $u$ ungerade ist nach Jacobi[9])

$$r_4(n) = 8\sigma(u) \text{ für } h = 0, \quad = 24\sigma(u) \text{ für } h > 0 \tag{33}$$

und nach Liouville[10])

$$\begin{aligned} r'_4(n) &= 4\sigma(u) \text{ für } h = 0, \quad = 8\sigma(u) \text{ für } h = 1, \\ &= 24\sigma(u) \text{ für } h > 1, \end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned} r''_4(n) &= 2\sigma(u) \text{ für } h = 0, \quad = 4\sigma(u) \text{ für } h = 1, \\ &= 8\sigma(u) \text{ für } h = 2, \quad = 24\sigma(u) \text{ für } h > 2. \end{aligned} \tag{35}$$

Hieraus folgt, falls $\sigma(\ )$ für nicht ganzes Argument Null bedeutet,

$$r_4(n) = 8\sigma(n) - 32\sigma(\tfrac{1}{4}n), \tag{36}$$

$$r'_4(n) = 4\sigma(n) - 4\sigma(\tfrac{1}{2}n) + 8\sigma(\tfrac{1}{4}n) - 32\sigma(\tfrac{1}{8}n), \tag{37}$$

$$r''_4(n) = 2\sigma(n) - 2\sigma(\tfrac{1}{2}n) + 8\sigma(\tfrac{1}{8}n) - 32\sigma(\tfrac{1}{16}n). \tag{38}$$

Aus (36) — (38) und (24) ergibt sich für $x \geqq 48 = 16 \,.\, 3$

$$\sum_{n \leqq x} r_4^2(n) = 2^6 \sum_{n \leqq x} \sigma^2(n) + 2^{10} \sum_{n \leqq x} \sigma^2(\tfrac{1}{4}n) - 2^9 \sum_{n \leqq x} \sigma(n)\, \sigma(\tfrac{1}{4}n) \tag{39}$$

$$= 2^6 S_0(x) + 2^{10} S_0(\tfrac{1}{4}x) - 2^9 S_2(\tfrac{1}{4}x), \tag{40}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n \leqq x} r'^2_4(n) = {} & 2^4 \sum_{n \leqq x} \sigma^2(n) + 2^4 \sum_{n \leqq x} \sigma^2(\tfrac{1}{2}n) + 2^6 \sum_{n \leqq x} \sigma^2(\tfrac{1}{4}n) + \\ & + 2^{10} \sum_{n \leqq x} \sigma^2(\tfrac{1}{8}n) \\ & - 2^5 \sum_{n \leqq x} \sigma(n)\, \sigma(\tfrac{1}{2}n) + 2^6 \sum_{n \leqq x} \sigma(n)\, \sigma(\tfrac{1}{4}n) - 2^8 \sum_{n \leqq x} \sigma(n)\, \sigma(\tfrac{1}{8}n) \\ & - 2^6 \sum_{n \leqq x} \sigma(\tfrac{1}{2}n)\, \sigma(\tfrac{1}{4}n) + 2^8 \sum_{n \leqq x} \sigma(\tfrac{1}{2}n)\, \sigma(\tfrac{1}{8}n) - 2^9 \sum_{n \leqq x} \sigma(\tfrac{1}{4}n)\, \sigma(\tfrac{1}{8}n) \end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned} = {} & 2^4 S_0(x) + 2^4 S_0(\tfrac{1}{2}x) + 2^6 S_0(\tfrac{1}{4}x) + 2^{10} S_0(\tfrac{1}{8}x) - 2^5 S_1(\tfrac{1}{2}x) \\ & + 2^6 S_2(\tfrac{1}{4}x) - 2^8 S_3(\tfrac{1}{8}x) - 2^6 S_1(\tfrac{1}{4}x) + 2^8 S_2(\tfrac{1}{8}x) - 2^9 S_1(\tfrac{1}{8}x), \end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n \leqq x} r''^2_4(n) = {} & 2^2 \sum_{n \leqq x} \sigma^2(n) + 2^2 \sum_{n \leqq x} \sigma^2(\tfrac{1}{2}n) + 2^6 \sum_{n \leqq x} \sigma^2(\tfrac{1}{8}n) + \\ & + 2^{10} \sum_{n \leqq x} \sigma^2(\tfrac{1}{16}n) \\ & - 2^3 \sum_{n \leqq x} \sigma(n)\, \sigma(\tfrac{1}{2}n) + 2^5 \sum_{n \leqq x} \sigma(n)\, \sigma(\tfrac{1}{8}n) - 2^7 \sum_{n \leqq x} \sigma(n)\, \sigma(\tfrac{1}{16}n) \\ & - 2^5 \sum_{n \leqq x} \sigma(\tfrac{1}{2}n)\, \sigma(\tfrac{1}{8}n) + 2^7 \sum_{n \leqq x} \sigma(\tfrac{1}{2}n)\, \sigma(\tfrac{1}{16}n) - 2^9 \sum_{n \leqq x} \sigma(\tfrac{1}{8}n)\, \sigma(\tfrac{1}{16}n) \end{aligned} \tag{43}$$

---

[9]) Vgl. P. Bachmann: „Niedere Zahlentheorie. Zweiter Teil. Additive Zahlentheorie“ (Leipzig 1910), S. 353—354.

[10]) Bachmann a. a. O., S. 414 und 418.

$$= 2^2 S_0(x) + 2^2 S_0(\tfrac{1}{2}x) + 2^6 S_0(\tfrac{1}{8}x) + 2^{10} S_0(\tfrac{1}{16}x) - 2^3 S_1(\tfrac{1}{2}x) \tag{44}$$
$$+ 2 \ S_3(\tfrac{1}{8}x) - 2^7 S_4(\tfrac{1}{16}x) - 2^5 S_2(\tfrac{1}{8}x) + 2^7 S_3(\tfrac{1}{16}x) - 2^9 S_1(\tfrac{1}{16}x).$$

Die Behauptungen (30) — (32) folgen aus (40), (42), (44) und (25).

Bemerkungen: 1. Das Restglied in (30) — (32) ist $\Omega\ (N \log\log N)^2$. Lässt man nämlich $u$ die ungeraden Zahlen von der Form

$$u = u_m = 1 \,.\, 3 \ldots (2m+1);\ m = 1, 2, 3, \ldots$$

durchlaufen, so ist

$$\sigma(u) \geqq u\left(1 + \tfrac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2m+1}\right) \sim \tfrac{1}{2} u \log m \sim \tfrac{1}{2}\, u \log\log u,$$

d. h., mit Rücksicht auf (33) — (35),

$$r_4(n) = \Omega\ (n \log\log n),\ r'_4(n) = \Omega\ (n \log\log n),$$
$$r''_4(n) = \Omega\ (n \log\log n),$$

woraus die $\Omega$-Behauptung folgt. Wie man sieht, ist hier zwischen dem $B$-und $\Omega$-Ergebnis noch eine Spanne von der Grössenordnung $\left(\dfrac{\log N}{\log\log N}\right)^2$.

Satz 2 ist somit für $k = 4$ falsch. Dagegen stimmt das Hauptglied, denn es ist

$$\frac{\pi^4}{3\Gamma^2(2)}\,\frac{1}{1-2^{-4}}\,\frac{\zeta(3)}{\zeta(4)} = 32\zeta(3).$$

2. Für $S_0(N)$ hatte Ramanujan, als Gegenstück zu (26), sogar

$$\sum_{n=1}^{N} \sigma^2(n) = \tfrac{5}{6}\,\zeta(3)\, N^3 + \Omega\ (N^2 \log N)$$

bekommen. Das folgt sofort aus seiner Identität

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^2(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s)\,\zeta^2(s-1)\,\zeta(s-2)}{\zeta(2s-2)} \quad (\Re(s) > 3)\ ^{11}), \tag{45}$$

da die rechte Seite in $s = 2$ einen Pol zweiter Ordnung besitzt.

Das zu (45) führende einfache Verfahren[12]) kann man auch dazu verwenden, um für die drei Funktionen $\sum_{n=1}^{\infty} r_4^2(n)\, n^{-s}, \ldots$ ähnliche Darstellungen durch die Zetafunktion zu gewinnen. Hier ist aller-

[11]) Ramanujan a. a. O., Formel (15) mit $a = b = 1$.

[12]) B. M. Wilson: „Proofs of some formulae enunciated by Ramanujan" [Proceedings of the London Mathematical Society (2), **21** (1922), S. 235—255]; vgl. auch E. C. Titchmarsh: „The theory of functions" (Oxford 1932), S. 316.

dings in $s = 2$ nur ein Pol erster Ordnung vorhanden. Ich will dennoch die Formeln herleiten, weil sie vielleicht an sich Beachtung verdienen:

Satz 4: *Mit*

$$Z(s) = \frac{(1 - 2^{1-s})(1 - 2^{2-s})\,\zeta(s)\,\zeta^2(s-1)\,\zeta(s-2)}{(1 + 2^{1-s})\,\zeta(2s-2)} \tag{46}$$

*ist für* $\Re(s) > 3$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_4^2(n)}{n^s} = (2^6 + 2^{9-s})\,Z(s), \tag{47}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r'^2_4(n)}{n^s} = (2^4 + 3\,.\,2^{4-s} + 2^{9-2s})\,Z(s), \tag{48}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r''^2_4(n)}{n^s} = (2^2 + 3\,.\,2^{2-s} + 3\,.\,2^{4-2s} + 2^{9-3s})\,Z(s). \tag{49}$$

Beweis: Für $\Re(s) > 3$ ist nach (39), (41) und (43)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_4^2(n)}{n^s} = (2^6 + 2^{10-2s}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^2(n)}{n^s} - 2^{9-2s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(4n)\,\sigma(n)}{n^s} \tag{50}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r'^2_4(n)}{n^s} = {} & (2^4 + 2^{4-s} + 2^{6-2s} + 2^{10-3s}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^2(n)}{n^s} \\ & - (2^{5-s} + 2^{6-2s} + 2^{9-3s}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(2n)\,\sigma(n)}{n^s} \\ & + (2^{6-2s} + 2^{8-3s}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(4n)\,\sigma(n)}{n^s} - 2^{8-3s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(8n)\,\sigma(n)}{n^s}, \end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r''^2_4(n)}{n^s} = {} & (2^2 + 2^{2-s} + 2^{6-3s} + 2^{10-4s}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^2(n)}{n^s} \\ & - (2^{3-s} + 2^{9-4s}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(2n)\,\sigma(n)}{n^s} - 2^{5-3s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(4n)\,\sigma(n)}{n^s} \\ & + (2^{5-3s} + 2^{7-4s}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(8n)\,\sigma(n)}{n^s} - 2^{7-4s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(16n)\,\sigma(n)}{n^s}. \end{aligned} \tag{52}$$

Andererseits gilt ebenda für ganze $r \geqq 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma(2^r n)\,\sigma(n)\,n^{-s} = \sum_{m=0}^{\infty} \sigma(2^{m+r})\,\sigma(2^m)\,2^{-ms}\,.\prod_{p>2}\left(\sum_{a=0}^{\infty} \sigma^2(p^a)\,p^{-as}\right)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (2^{m+r+1} - 1)(2^{m+1} - 1) 2^{-ms} \cdot \prod_{p>2} \left( (p-1)^{-2} \sum_{a=0}^{\infty} (p^{a+1} - 1)^2 p^{-as} \right)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (2^{2m+r+2} - 2^{m+r+1} - 2^{m+1} + 1) 2^{-ms} \cdot \prod_{p>2} \left( \frac{1 - p^{2-2s}}{(1-p^{-s})(1-p^{1-s})^2 (1-p^{2-s})} \right)$$

$$= \left( \frac{1}{1-2^{-s}} - \frac{2^{r+1}+2}{1-2^{1-s}} + \frac{2^{r+2}}{1-2^{2-s}} \right) \cdot \frac{(1-2^{-s})(1-2^{1-s})^2(1-2^{2-s})\zeta(s)\zeta^2(s-1)\zeta(s-2)}{(1-2^{2-2s})\zeta(2s-2)}$$

$$= (2^{r+1} - 1 - (2^{r+1} - 4) 2^{-s}) \frac{\zeta(s)\zeta^2(s-1)\zeta(s-2)}{(1+2^{1-s})\zeta(2s-2)}. \tag{53}$$

Die Behauptungen (47) — (49) mit (46) folgen durch Einsetzen von (53) in (50) — (52).

* * *

Zum Schluss will ich die Summe $\sum_{n=1}^{N} r^2_Q(n)$ für $k = 4$ abschätzen. Ich komme jedoch hier zu einem viel ungünstigeren Ergebnis, als vorhin bei den drei Formen $K_4$, $K'_4$, $K''_4$ des Satzes 3.[13])

Es sei $q$ eine natürliche Zahl; $\alpha$, $\beta$, $\alpha_1$, $\beta_1$, $\alpha_2$, $\beta_2$ seien ganze Zahlen $\geqq 1$ und $\leqq q$. Kongruenzen ohne Angabe des Moduls gelten modulo $q$. Es sei

$$\sigma_{\alpha,\beta}(n) = \sum_{\substack{ab=n \\ a\equiv\alpha,\, b\equiv\beta}} a,$$

$$S_{\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2}(x) = \sum_{n \leqq x} \sigma_{\alpha_1,\beta_1}(n)\, \sigma_{\alpha_2,\beta_2}(n). \tag{54}$$

Beim folgenden Hilfssatz hängt die $B$-Schranke nur von $q$ ab.

Hilfssatz 2: *Mit einer geeigneten Konstanten* $\varrho_{\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2}$ *ist*

$$S_{\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2}(x) = \varrho_{\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2} x^3 + Bx^2 \log^2 x. \tag{55}$$

Beweis:

$$S_{\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2}(x) = \sum_{n\leqq x} \sum_{\substack{a_1b_1=n \\ a_1\equiv\alpha_1,\, b_1\equiv\beta_1}} a_1 \sum_{\substack{a_2b_2=n \\ a_2\equiv\alpha_2,\, b_2\equiv\beta_2}} a_2 = \sum_{\substack{a_1b_1=a_2b_2\leqq x \\ a_1\equiv\alpha_1,\, b_1\equiv\beta_1 \\ a_2\equiv\alpha_2,\, b_2\equiv\beta_2}} a_1a_2$$

---

[13]) Das liegt sicher an der primitiven Art, in der ich weiter unten die Summe $\sum_{n\leqq qx} c_n \sigma_{\alpha,\beta}(n)$ abschätze.

$$= \sum_{\substack{a_1 \leqq x \\ a_1 \equiv \alpha_1}} a_1 \sum_{\substack{b_1 \leqq \frac{x}{a_1} \\ b_1 \equiv \beta_1}} \sum_{\substack{a_2 \leqq x \\ a_2 \equiv \alpha_2}} a_2 \sum_{\substack{b_2 \leqq \frac{x}{a_2} \\ b_2 = \frac{a_1 b_1}{a_2},\, b_2 \equiv \beta_2}} 1$$

$$= \sum_{\substack{a_1 \leqq x \\ a_1 \equiv \alpha_1}} a_1 \sum_{\substack{b_1 \leqq \frac{x}{a_1} \\ b_1 \equiv \beta_1}} \sum_{\substack{a_2 \leqq x \\ a_2 \equiv \alpha_2}} a_2 \sum_{\substack{b_2 = \frac{a_1 b_1}{a_2} \\ b_2 \equiv \beta_2}} 1$$

$$= \sum_{\substack{a_1 \leqq x \\ a_1 \equiv \alpha_1}} a_1 \sum_{\substack{b_1 \leqq \frac{x}{a_1} \\ b_1 \equiv \beta_1}} \sum_{\substack{a_2 \leqq x,\, a_2 \equiv \alpha_2 \\ a_2 \mid a_1 b_1,\, \frac{a_1 b_1}{a_2} \equiv \beta_2}} a_2$$

$$= \sum_{t \leqq x} \sum_{\substack{a_1 \leqq x \\ a_1 \equiv \alpha_1}} a_1 \sum_{\substack{a_2 \leqq x \\ a_2 \equiv \alpha_2,\, (a_1, a_2) = t}} a_2 \sum_{\substack{b_1 \leqq \frac{x}{a_1},\, b_1 \equiv \beta_1 \\ a_2 | a_1 b_1,\, \frac{a_1 b_1}{a_2} \equiv \beta_2}} 1$$

$$= \sum_{t \leqq x} t^2 \sum_{\substack{a_1 \leqq \frac{x}{t} \\ t a_1 \equiv \alpha_1}} a_1 \sum_{\substack{a_2 \leqq \frac{x}{t} \\ t a_2 \equiv \alpha_2,\, (a_1, a_2) = 1}} a_2 \sum_{\substack{b_1 \leqq \frac{x}{t a_1},\, b_1 \equiv \beta_1 \\ a_2 | b_1,\, \frac{a_1 b_1}{a_2} \equiv \beta_2}} 1$$

$$= \sum_{t \leqq x} t^2 \sum_{\substack{a_1 \leqq \frac{x}{t} \\ t a_1 \equiv \alpha_1}} a_1 \sum_{\substack{a_2 \leqq \frac{x}{t} \\ t a_2 \equiv \alpha_2,\, (a_1, a_2) = 1}} a_2 \sum_{\substack{b_1 \leqq \frac{x}{t a_1 a_2} \\ a_2 b_1 \equiv \beta_1,\, a_1 b_1 \equiv \beta_2}} 1$$

$$= \sum_{\substack{a_1 a_2 \leqq x \\ (a_1, a_2) = 1}} a_1 a_2 \sum_{\substack{b_1 \leqq \frac{x}{a_1 a_2} \\ a_2 b_1 \equiv \beta_1,\, a_1 b_1 \equiv \beta_2}} \sum_{\substack{t \leqq \frac{x}{a_1 a_2 b_1} \\ t a_1 \equiv \alpha_1,\, t a_2 \equiv \alpha_2}} t^2. \tag{56}$$

Gehört $t$ einer festen Restklasse mod $q$ an, so gilt

$$\sum_{\substack{t \leqq \frac{x}{a_1 a_2 b_1} \\ t \bmod q \text{ fest}}} t^2 = \frac{x^3}{3 q a_1^3 a_2^3 b_1^3} + \frac{B x^2}{a_1^2 a_2^2 b_1^2}. \tag{57}$$

Bezeichnet daher $T = T_{a_1, a_2, \alpha_1, \alpha_2}$ die Anzahl der Restklassen mod $q$, die den Kongruenzen

$$t a_1 \equiv \alpha_1, \; t a_2 \equiv \alpha_2 \tag{58}$$

genügen, so folgt aus (56) — (58)

$$S_{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2}(x) = \sum_{\substack{a_1 a_2 \leqq x \\ (a_1, a_2) = 1}} T a_1 a_2 \sum_{\substack{b_1 \leqq \frac{x}{a_1 a_2} \\ a_2 b_1 \equiv \beta_1,\, a_1 b_1 \equiv \beta_2}} \left( \frac{x^3}{3 q a_1^3 a_2^3 b_1^3} + \frac{B x^2}{a_1^2 a_2^2 b_1^2} \right)$$

$$= \frac{x^3}{3q} \sum_{\substack{a_1 a_2 \leqq x \\ (a_1, a_2) = 1}} \frac{T}{a_1^2 a_2^2} \sum_{\substack{b_1 \leqq \frac{x}{a_1 a_2} \\ a_2 b_1 \equiv \beta_1,\, a_1 b_1 \equiv \beta_2}} \frac{1}{b_1^3} + Bx^2 \log^2 x$$

$$= \frac{x^3}{3q} \sum_{\substack{a_1 a_2 \leqq x \\ (a_1, a_2) = 1}} \frac{T}{a_1^2 a_2^2} \sum_{\substack{b_1 = 1 \\ a_2 b_1 \equiv \beta_1,\, a_1 b_1 \equiv \beta_2}}^{\infty} \frac{1}{b_1^3} + Bx^2 \log^2 x$$

$$= \frac{x^3}{3q} \sum_{\substack{a_1, a_2 = 1 \\ (a_1, a_2) = 1}}^{\infty} \frac{T}{a_1^2 a_2^2} \sum_{\substack{b_1 = 1 \\ a_2 b_1 \equiv \beta_1,\, a_1 b_1 \equiv \beta_2}}^{\infty} \frac{1}{b_1^3} + Bx^2 \log^2 x$$

$$= \varrho_{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2} x^3 + Bx^2 \log^2 x. \tag{55}$$

Satz 5: *Mit geeignetem $\varrho_Q > 0$ ist für $k = 4$*

$$\sum_{n=1}^{N} r_Q^2(n) = \varrho_Q N^3 + BN^{\frac{5}{2}}. \tag{59}$$

Beweis: Nach Hecke[14]) gibt es eine natürliche Zahl $q = q(Q)$ und eine geeignete Funktion $f(\alpha, \beta) = f(\alpha, \beta; Q)$, so dass für jedes $\tau$ mit $\mathfrak{J}(\tau) > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_Q(n)\, e^{2\pi i n \tau} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\frac{2\pi i n \tau}{q}},$$

$$a_n = \sum_{\alpha, \beta = 1}^{q} f(\alpha, \beta)\, \sigma_{\alpha,\beta}(n) + c_n, \quad \sum_{n \leqq x} c_n^2 = Bx^2.$$

Hieraus folgt, in Verbindung mit (54) und (55),

$$\sum_{n \leqq x} r_Q^2(n) = \sum_{n \leqq qx} a_n^2$$

$$= \sum_{n \leqq qx} \left( \sum_{\alpha_1, \beta_1 = 1}^{q} f(\alpha_1, \beta_1)\, \sigma_{\alpha_1, \beta_1}(n) + c_n \right) \left( \sum_{\alpha_2, \beta_2 = 1}^{q} f(\alpha_2, \beta_2)\, \sigma_{\alpha_2, \beta_2}(n) + c_n \right)$$

$$= \sum_{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 = 1}^{q} f(\alpha_1, \beta_1)\, f(\alpha_2, \beta_2) \sum_{n \leqq qx} \sigma_{\alpha_1, \beta_1}(n)\, \sigma_{\alpha_2, \beta_2}(n)$$

$$+ 2 \sum_{\alpha, \beta = 1}^{q} f(\alpha, \beta) \sum_{n \leqq qx} c_n\, \sigma_{\alpha,\beta}(n) + \sum_{n \leqq qx} c_n^2$$

$$= \sum_{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 = 1}^{q} f(\alpha_1, \beta_1)\, f(\alpha_2, \beta_2)\, S_{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2}(qx)$$

---

[14]) E. Hecke: „Theorie der Eisensteinschen Reihen höherer Stufe und ihre Anwendung auf Funktionentheorie und Arithmetik“ [Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität 5 (1927), S. 199—224], § 4.