Über differenzierbare Kurven und Bögen.

Peter Scherk, Praha.

(Eingegangen am 4. Dezember 1936.)

II.

Elementarbogen und Kurve n-ter Ordnung im R_n.

Einleitung.

Im folgenden sollen reelle Kurven n-ter Ordnung und Elementarbögen im n-dimensionalen projektiven Raume R_n untersucht werden, also Bögen und Kurven, die von jeder Hyperebene in höchstens n Punkten getroffen werden.[1]) Die betreffenden Gebilde werden als differenzierbar im Sinne der Definitionen I, **1.6** und **1.7** vorausgesetzt.[2])

Die Arbeit zerfällt in 2 Teile. Der 1. (**1**—**4**) stellt eine Reihe einfacher in der Literatur größtenteils schon erwähnter Tatsachen über differenzierbare Elementarbögen B^n im R_n zusammen. Es sei etwa angegeben: Die B^n sind regulär, d. h. sie haben in jedem inneren Punkte die Charakteristik (1, 1, . . ., 1) (**1**); für alle offenen B^n und gewisse abgeschlossene gilt eine Vielfachheitszählung ihrer Treffpunkte mit einer Hyperebene (**2**); die linearen Schmiegmannigfaltigkeiten der B^n sind stetig (**3**). In **4** wird die Zusammensetzung zweier B^n zu einer differenzierbaren Kurve n-ter Ordnung C^n besprochen. Das Hauptergebnis des 2. Teiles ist der Satz **7.6**: Eine Dualität führt jede B^n wieder in eine B^n über. Hierin ist enthalten, daß die Klasse einer B^n, also die Maximalzahl ihrer Schmieghyperebenen durch einen Punkt des Raumes gleich n ist.

Neben den Sätzen von **4**, die gestatten, sich auf die C^n zu beschränken und einer zur obenerwähnten dualen Vielfachheitszählung der Schmieghyperebenen der C^n durch einen Punkt des R_n ist das Haupthilfsmittel beim Beweise von **7.6** diejenige stetige

---

[1]) Elementarbogen und Kurve n-ter Ordnung im R_n unterscheiden sich nur darin, daß der eine das eineindeutige und stetige Bild der Strecke, die andere das der Kreisperipherie ist.

[2]) Die vorangehende Note wird mit I zitiert.

Abbildung der C^n auf sich, die entsteht, wenn jedem Kurvenpunkte s der eindeutig bestimmte Punkt zugeordnet wird, in dem die Hyperebene durch einen festen Punkt des R_n und die Hypertangente von s die Kurve noch einmal schneidet.

Über die Tragweite der Differenzierbarkeitsvoraussetzungen vergleiche man HJELMSLEV [1] und SAUTER [2].[3]) Ein Beweis der Regularität der B^n läßt sich aus SAUTER [2] entnehmen; bei HJELMSLEV [1] findet man einen für die Stetigkeit der linearen Schmiegmannigfaltigkeiten der B^n. Fräulein SAUTER [2] hat auch die Zusammensetzung zweier nichtdifferenzierbarer B^n zu einer Kurve n-ter Ordnung untersucht. Natürlich wird die Behandlung dieser Frage durch die Differenzierbarkeitsvoraussetzungen wesentlich vereinfacht. Das Dualitätsprinzip **7.6** für die B^n ist für $n = 2$ und $n = 3$ schon von JUEL [1] und [2] erwähnt. Beweise dieser beiden Fälle finden sich bei LINSMAN [1].

1. Regularität des differenzierbaren Elementarbogens.

Wir betrachten offene differenzierbare Elementarbögen B^n im n-dimensionalen projektiven Raum R_n.

1.1 Aus der Definition des Elementarbogens folgt unmittelbar, daß er doppelpunktfrei ist, und daß keine Gerade ihn in mehr als zwei Punkten trifft. *Die Projektion von B^n aus einem seiner Punkte s' ist daher wieder ein differenzierbarer Elementarbogen B^{n-1}.*

Für $s \neq s'$ werde die Projektion von s wieder mit s, die k-dimensionale lineare Schmiegmannigfaltigkeit von B^{n-1} in s mit $L_k^{n-1}(s)$ bezeichnet $(-1 \leqq k \leqq n-1)$.

1.2 Ein Bogen heiße regulär in einem differenzierbaren Punkte s, wenn s die Charakteristik $(1, \ldots, 1)$ hat, wenn also für jedes k mit $-1 \leqq k < n$ gilt: Jede Hyperebene, die genau $L_k^n(s)$ enthält, ist Schnitt- oder Stützhyperebene in s, je nachdem k gerade oder ungerade ist.

Nach dem Satze I, **4.1** sind *alle Punkte von B^n regulär.*

1.3 Es sei noch ein direkter Beweis der obigen Bemerkung angegeben. Wie behaupten zugleich:

Die Schmieghyperebenen treffen B^n nicht mehr.

1.4 Anhand des Lemmas I, **2** überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit beider Behauptungen für $n = 2$. Sie seien schon für die B^{n-1} bewiesen. Dann ergibt sich die Gültigkeit von **1.2** für die B^n etwa so:

Die Schmieghyperebene eines beliebigen Punktes s von B^n trifft den Bogen jedenfalls in höchstens endlich vielen Punkten;

[3]) Die Literaturangaben beziehen sich auf das am Schlusse dieser Note befindliche Verzeichnis.

s' sei von diesen, insbesondere von s verschieden. B^{n-1} sei die Projektion von B^n aus s' (vergl. **1.1**). Für $-1 \leqq k < n-1$ enthält eine passende Hyperebene durch s' genau $L_k^n(s)$; sie projiziert sich aus s' in eine Hyperebene, die genau $L_k^{n-1}(s)$ enthält. Es projizieren sich aber Schnitt- in Schnitt-, Stütz- in Stützhyperebenen.

Die Hyperebene E durch s' und $L_{n-2}^n(s)$ trifft B^n sonst nicht mehr. Denn andernfalls träfe die Schmieghyperebene $L_{n-2}^{n-1}(s)$ B^{n-1} noch einmal, was der Induktionsannahme **1.3** widerspricht; aus dem gleichen Grunde ist s' Schnittpunkt bezüglich E. Lasse ich s' gegen s rücken, so strebt E definitionsgemäß gegen $L_{n-1}^n(s)$; die Endpunkte irgendeiner Umgebung von s liegen für alle s hinreichend nahen s' auf derselben oder auf verschiedenen Seiten von E, also auch von $L_{n-1}^n(s)$, je nachdem s Schnitt- oder Stützpunkt bezüglich E ist. Daher ist s Stütz- oder Schnittpunkt bezüglich $L_{n-1}^n(s)$, je nachdem E Schnitt- oder Stützhyperebene in s ist.

Die Behauptung **1.3** ergibt sich etwa so für die B^n: $L_{n-1}^n(s)$ treffe B^n noch in s'. $L_{n-2}^{n-1}(s)$ sei die Projektion von $L_{n-1}^n(s)$ aus s' (Bezeichnungen wie in **1.1**). Ist s Stütz- bezw. Schnittpunkt bezüglich $L_{n-1}^n(s)$, so auch auf B^{n-1} bezüglich $L_{n-2}^{n-1}(s)$. Dies ist nicht möglich; denn nach Induktionsannahme ist s auf B^{n-1} und, wie eben bemerkt, auch auf B^n regulär.

2. Vielfachheitszählung.

2.1 *Der Punkt s gehöre dem offenen differenzierbaren Elementarbogen B^n an. Enthält eine lineare Mannigfaltigkeit genau $L_k^n(s)$ $(-1 \leqq k < n)$, so werde s als $(k+1)$-facher Treffpunkt der linearen Mannigfaltigkeit mit dem Bogen gezählt. Man zeigt leicht, daß diese Vielfachheitszählung die Ordnung von B^n nicht erhöht, mit andern Worten, daß die Summe der Vielfachheiten der Treffpunkte von B^n mit einer Hyperebene höchstens gleich n ist.*

Für $n = 2$ ist diese Behauptung in **1.3** enthalten. Es sei $n > 2$. Wir können voraussetzen, daß die betrachtete Hyperebene E_{n-1}^n den Bogen B^n in mindestens 2 Punkten trifft; einer von ihnen sei s'. Nach **1.3** ist E_{n-1}^n nicht Schmieghyperebene und geht keine lineare Schmiegmannigfaltigkeit eines von s' verschiedenen Punktes s durch s'. Wir projizieren B^n aus s' (Bezeichnungen wie in **1.1**). Dann projiziert sich E_{n-1}^n in eine Hyperebene E_{n-2}^{n-1} und $L_k^n(s)$ in $L_k^{n-1}(s)$ $(s \neq s';\ 0 \leqq k < n-1)$. Die Projektion läßt also die Vielfachheiten der von s' verschiedenen Treffpunkte ungeändert.

Die Vielfachheit, mit der s' gezählt wird, wird durch die Projektion um eins vermindert; denn $L_k^n(s')$ projiziert sich in $L_{k-1}^{n-1}(s')$ $(0 \leqq k \leqq n)$. Im ganzen wird die Summe der Vielfachheiten der Treffpunkte durch die Projektion um eins vermindert. Hieraus folgt die Behauptung durch Induktion.

Als Sonderfälle von **2.1** seien hervorgehoben:

2.2 *Trifft eine Hyperebene den Bogen B^n in n verschiedenen Punkten, so zerschneidet sie ihn in jedem von ihnen*; denn alle Treffpunkte sind einfach.

2.3 *Sind s und s' voneinander verschieden, so haben $L_k^n(s)$ und $L_{n-k-1}^n(s')$ $(-1 \leqq k \leqq n)$ keinen Punkt gemeinsam.* Denn andernfalls ließe sich durch sie eine Hyperebene legen, und diese träfe den Bogen mindestens $(n+1)$-fach. Hierin ist außer **1.3** insbesondere enthalten, daß

2.4 *die linearen Schmiegmannigfaltigkeiten verschiedener Punkte verschieden sind.*

2.5 Bei abgeschlossenen differenzierbaren Elementarbögen $\bar{B}^n$ im R_n ergeben sich einige Unterschiede. Damit die Projektion von $\bar{B}^n$ ein $\bar{B}^{n-1}$ ist, muss man zusammenfallende Endpunkte von $\bar{B}^n$ zulassen. Auf $\bar{B}^n$ braucht **2.1** nicht zu gelten. *Für die Gültigkeit der Vielfachheitszählung ist notwendig und hinreichend das folgende Fremdheitskriterium*[4]: *Hat $\bar{B}^n$ die Endpunkte s und s', so haben $L_k^n(s)$ und $L_{n-k-1}^n(s')$ keinen Punkt gemeinsam* $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Die Notwendigkeit der Bedingung ist evident. (vergl. **2.3**). Um zu zeigen, daß sie hinreicht, langt es zu beweisen, daß keine Hyperebene, die $\bar{B}^n$ mehr als n-fach gemäß der Vielfachheitszählung **2.1** trifft, innere Punkte mit $\bar{B}^n$ gemein hat. Dies ist klar für $n = 2$; denn eine Tangente, die $\bar{B}^2$ noch einmal träfe und durch einen inneren Punkt ginge, könnte durch eine passende kleine Drehung in eine Gerade übergeführt werden, die $\bar{B}^2$ in drei Punkten träfe. Wegen **2.1** muß eine, Hyperebene, die $\bar{B}^n$ mehr als n-fach träfe, durch wenigstens einen Endpunkt, etwa durch s' gehen. Projektion aus s' führt die Behauptung auf den $(n-1)$-dimensionalen Fall zurück.

2.6 Aus **2.1** ergibt sich unmittelbar die folgende Bemerkung[5]: *Ist der Bogen B^n in einem affinen Raume beschränkt, so liegt er ganz auf dem Rande seiner konvexen Hülle.*[6])

---

[4]) Systematisch betrachtet u. a. von Fräulein SAUTER [2], die ihm auch den schönen Namen gegeben hat. Falls s und s' inzidieren, ist die Vielfachheitszählung für s und s' gesondert vorzunehmen.

[5]) Die Bemerkung stammt von HAUPT [2], der sie für beliebige Elementarbögen bewiesen hat.

[6]) Unter der konvexen Hülle einer beschränkten Punktmenge

Es ist zu zeigen, daß durch jeden Punkt s von B^n eine Stützhyperebene an B^n gelegt werden kann. Ist n gerade, so stützt nach **1.2** die Schmieghyperebene von s dort den Bogen und trifft ihn sonst nicht mehr.[7]) Ist n ungerade, so stützt die Hyperebene durch $L^n_{n-2}(s)$ und einen beliebigen Punkt s' des Bogens ($s' \neq s$) ihn in s, zerschneidet ihn in s' und trifft ihn sonst nirgends (**2.1**). Daher dreht sie sich monoton um $L^n_{n-2}(s)$, wenn s' B^n durchläuft. Rückt s' gegen einen Endpunkt von B^n, so konvergiert die Hyperebene gegen eine Grenzhyperebene, die B^n nur in s selbst trifft und dort stützt.[8])

3. Totale Konvergenz.

3.1 Gegeben eine stetige Schar offener differenzierbarer Elementarbögen $B^n(s')$ (s' = Scharparameter), die alle auf ein- und denselben Bogenparameter s bezogen seien. Der zu s gehörige Punkt des Bogens $B^n(s')$ werde mit s/s' bezeichnet, seine linearen Schmiegmannigfaltigkeiten mit $L^n_k(s/s')$.

Eine Folge von Scharparametern s' strebe gegen den Scharparameter s'_0. Dann nennen wir die $B^n(s')$ total konvergent gegen $B^n(s'_0)$, wenn für jeden Bogenparameter s_0 und jede gegen s_0 konvergente Folge von Bogenparametern s die Punkte s/s' gegen den Punkt s_0/s'_0 rücken.

3.2 Wir schließen uns an die obigen Bezeichungen an. Unser Ziel ist der folgende Satz:

Die Folge der $B^n(s')$ konvergiere total gegen $B^n(s'_0)$. Es sei $0 \leqq k < n$; $k+1$ Folgen von Bogenparametern $s_1, \ldots, s_{k+1}$ mögen

---

in einem affinen Raume versteht man den Durchschnitt aller abgeschlossenen konvexen Punktmengen, die die Menge enthalten. Vergl. etwa BONNESEN-FENCHEL [1].

[7]) Dies gilt auch für einen beliebigen differenzierbaren Elementarbogen B^n in einen projektiven Raume gerader Dimension. Für gerade n kann B^n also stets durch Auszeichnung einer passenden uneigentlichen Hyperebene in einen beschränkten Elementarbogen übergeführt werden. Vergl. JUELS [1] Definition der ebenen Elementarbögen. — Ebenso zeigt man für gerade n, daß eine differenzierbare Kurve n-ter Ordnung im R_n (vergl. 4) nach Auszeichnung einer passenden uneigentlichen Hyperebene ganz im Endlichen und auf dem Rande ihrer konvexen Hülle gelegen ist.

[8]) Da der Bogen als offen angenommen, also die Existenz von Endpunkten von B^n nicht vorausgesetzt ist, so haben wir genauer zu sagen: Strebt der Parameter s' gegen einen Endpunkt der Parameterstrecke, . . .

Übrigens ist die Existenz der Endpunkte von B^n sowie die Richtigkeit der folgenden Angaben leicht einzusehen: Die Vereinigungsmenge von B^n und seinen Endpunkten ist ein abgeschlossener differenzierbarer Elementarbogen; B^n ist für ungerades n genau dann nach Auszeichnung einer passenden Hyperebene beschränkt, wenn die Endpunkte von B^n nicht zusammenfallen.

sämtlich gegen den Bogenparameter s_0 konvergieren. Dann konvergiert die von den Punkten $s_1/s', \ldots. s_{k+1}/s'$ aufgespannte k-dimensionale lineare Mannigfaltigkeit[9]) *gegen* $L_k^n(s_0/s'_0)$.

3.3 Nimmt man für alle $k+1$ Folgen ein und dieselbe Folge, so ergibt sich aus **3.2**:

Die Folge von Bogen- bezw. Scharparametern s bezw. s' strebe gegen den Bogen- bezw. Scharparameter s_0 bezw. s'_0; die Folge der $B^n(s')$ sei total konvergent. Dann konvergieren die $L_k^n(s/s')$ gegen $L_k^n(s_0/s'_0)$. Mit anderen Worten: *Die totale Konvergenz der $B^n(s')$ zieht die totale Konvergenz ihrer linearen Schmiegmannigfaltigkeiten nach sich.*

3.4 Wählt man für alle $B^n(s')$ ein und denselben differenzierbaren Elementarbogen, so folgt aus **3.2**: *Konvergieren $k+1$ Punkte eines differenzierbaren Elementarbogens gegen einen Punkt s_0 des Bogens, so konvergiert die von ihnen aufgespannte k-dimensionale lineare Mannigfaltigkeit*[9]) *gegen die k-dimensionale lineare Schmiegmannigfaltigkeit des Bogens in s_0.*

3.5 Identifiziert man schließlich alle diese $k+1$ Punkte, so ergibt sich: *Die linearen Schmiegmannigfaltigkeiten eines differenzierbaren Elementarbogens sind stetig.*[10])

3.6 Der Begriff der totalen Konvergenz kann leicht weiter verfolgt werden. Hier sei nur auf folgendes hingewiesen: *Der Punkt s' bewege sich auf dem differenzierbaren Elementarbogen B^{n+1} $(n \geq 2)$ gegen einen Punkt s'_0 des Bogens. Dann konvergiert die Projektion von B^{n+1} aus s' total gegen die aus s'_0* (vergl. **1.1**).

Beweis: Die Projektion des Punktes s von B^{n+1} aus s' sei mit s/s' bezeichnet. Wir haben zu zeigen: Konvergiert eine Folge der s gegen s_0, eine der s' gegen s'_0 (s, s', s_0, s'_0 auf B^{n+1} gelegen), so konvergiert der Punkt s/s' gegen den Punkt s_0/s'_0.

Diese Behauptung ist sicher richtig für $s_0 \neq s'_0$; denn dann besagt sie nur, daß die Gerade durch zwei verschiedene Punkte von B^{n+1} sich stetig mit ihnen ändert. Für $s_0 = s'_0$ folgt sie aber aus dem Falle $k = 1$ von Satz **3.4**.

3.7 Beweis von **3.2**.

Die Behauptung, für $k = 0$ in der Definition der totalen Konvergenz enthalten, sei bis $k - 1$ bewiesen $(0 < k < n)$. Die $k+1$ Folgen von Bogenparametern lassen sich zu einer Folge von Systemen S von je $k+1$ Bogenparametern zusammen-

---

[9]) Vergl. die Vielfachheitszählung **2.1**.

[10]) Hjelmslev [1]. Daß die Sätze **3.4** und **3.5** auch für die Endpunkte eines a b g e s c h l o s s e n e n differenzierbaren Elementarbogens gelten, läßt sich mittels **4** unmittelbar einsehen; vergl. den Beweis von **7.6**.

fassen. Wir wählen ein System S_1 von $n - k - 1$ festen Werten des Bogenparameters, alle voneinander und von s_0 verschieden. Das zu S bezw. zu S_1 gehörige Punktesystem auf $B^n(s')$ werde mit S/s' bezw. S_1/s' bezeichnet.

Die Hyperebene $E(s')$ durch S/s' und S_1/s' trifft $B^n(s')$ nach **2.1** im ganzen genau $(k + 1)$-fach in S/s', genau $(n - k - 1)$-fach in S_1/s' und sonst nirgends. Die $E(s')$ häufen sich gegen Hyperebenen durch $L^n_{k-1}(s_0/s'_0)$ und die $n - k - 1$ Punkte von S_1/s'_0. Wir beschränken uns auf eine Teilfolge der s' mit der Eigenschaft, daß die zugehörigen $E(s')$ und ihre Treffpunkte mit $B^n(s'_0)$ konvergent sind. Die Grenzlage dieser $E(s')$ sei mit $E(s'_0)$ bezeichnet.

Auf der Parameterstrecke grenzen wir um s_0 eine zu S_1 fremde Umgebung ab, deren Endpunkte s_1 und s_2 so gewählt sind, daß der von s_1/s'_0 und s_2/s'_0 begrenzte abgeschlossene Teilbogen von $B^n(s'_0)$ keinen Punkt außer s_0/s'_0 mit $E(s'_0)$ gemein hat. Wir können annehmen, daß die S im Innern dieser Umgebung liegen. Der Punkt s_1/s' konvergiert gegen den (nicht auf $E(s'_0)$ gelegenen) Punkt s_1/s'_0; daher liegen s_1/s' und s_1/s'_0 für alle s' bis auf höchstens endlich viele auf derselben Seite von $E(s')$. Nun folgt aus **1.2**, daß s_1/s' und s_2/s' stets auf derselben oder stets auf verschiedenen Seiten von $E(s')$ liegen, je nachdem k ungerade oder gerade ist; dies gilt also auch für die beiden Punkte s_1/s'_0 und s_2/s'_0 und alle $E(s')$ bis auf höchstens endlich viele. Lassen wir s' gegen s'_0 gehen, so folgt hieraus weiter: s_1/s'_0 und s_2/s'_0 liegen auf derselben oder auf verschiedenen Seiten von $E(s'_0)$, s_0/s'_0 ist also Stütz- oder Schnittpunkt bezüglich $E(s'_0)$, je nachdem k ungerade oder gerade ist. Da $E(s'_0)$ $L^n_{k-1}(s_0/s'_0)$ enthält, folgt hieraus und aus **1.2**, daß auch $L^n_k(s_0/s'_0)$ in $E(s'_0)$ liegt. $E(s'_0)$ ist somit eindeutig bestimmt, und wir haben: Strebt S/s' gegen s_0/s'_0, so konvergiert die Hyperebene durch S/s' und S_1/s' gegen die Hyperebene durch $L^n_k(s_0/s'_0)$ und S_1/s'_0. Dies gilt bei beliebiger Wahl von S_1. Hieraus folgt etwa vermittels der Bemerkung **3.8** die Behauptung.[11])

3.8 Gegeben $n - k$ verschiedene Punkte eines differenzierbaren Elementarbogens im R_n; der Punkt s_0 sei von ihnen verschieden. Dann haben die $n - k$ Hyperebenen durch $L^n_k(s_0)$ und je $n - k - 1$ der übrigen Punkte gerade den Durchschnitt $L^n_k(s_0)$ $(-1 \leqq k < n)$.

Der Induktionsbeweis ist trivial.

---

[11]) Aus **3.7** läßt sich sofort ein Beweis von **3.5** herausschälen. Nach einer freundlichen Mitteilung von Herrn HAUPT berührt sich dieser Beweis mit einem demnächst erscheinenden von Fräulein SAUTER. Vergl. SAUTER [1].

4. Bogen und Kurve n-ter Ordnung im R_n.[12])

Unter einer Kurve werde hier das eindeutige und stetige Bild der Kreisperipherie verstanden.

4.1 *Wir betrachten zwei abgeschlossene differenzierbare Elementarbögen B^n und $\bar{B}^n$ im R_n. Für jeden von ihnen gelte die Fremdheitsbedingung* **2.5**, also auch die Vielfachheitszählung **2.1**. Dies ist z. B. der Fall, wenn B^n und $\bar{B}^n$ abgeschlossene Teilbögen differenzierbarer offener Elementarbögen sind. *B^n und $\bar{B}^n$ mögen die Endpunkte s und $\bar{s}$ gemein haben; die aus ihnen gebildete Kurve C^n sei in s und $\bar{s}$ regulär* (also nach **1.2** überall). *Dann hat C^n die Ordnung n.*

Wir führen zugleich den Beweis für $n = 2$ und den Induktionsbeweis für $n > 2$.

Eine Hyperebene durch s oder $\bar{s}$ trifft C^n höchstens n-fach. Dies folgt für $n > 2$ unmittelbar daraus, daß die Projektion von C^n aus s oder $\bar{s}$ nach Induktionsannahme eine Kurve $(n-1)$-ter Ordnung im R_{n-1} ist, für $n = 2$ aber daraus, daß die Gerade durch s bezw. $\bar{s}$ und einen C^2 monoton durchlaufenden Punkt sich wegen **2.2** monoton um s bezw. $\bar{s}$ dreht.

Ich lege durch irgend $n - 1$ innere Punkte von $\bar{B}^n$ eine Hypergerade E. Das Hyperebenenpaar durch E und s bezw. $\bar{s}$ zerlegt den R_n in zwei Teilräume. B^n liegt ganz in dem einen Teilraum, $\bar{B}^n$ ganz in dem anderen; denn keine der beiden Hyperebenen trifft C^n in weiteren Punkten, und alle Treffpunkte sind auf $\bar{B}^n$ einfach zu zählen, also Schnittpunkte (vergl. **2.2**). Die Hyperebene durch E und einen beliebigen inneren Punkt von $\bar{B}^n$ trifft B^n also nicht.

Hieraus folgt für $n = 2$ die Behauptung. Für $n > 2$ schließen wir so:

Träfe eine Hyperebene C^n in mehr als n Punkten, so gäbe es einen inneren Punkt von B^n, aus dem sich C^n in den R_{n-1} als Kurve von mindestens n-ter Ordnung projizierte, $\bar{B}^n$ also wegen der Induktionsvoraussetzung als Bogen n-ter Ordnung. Daher gäbe es eine Hyperebene durch n Punkte von $\bar{B}^n$, die B^n in wenigstens einem inneren Punkte träfe. Dies ist, wie eben bewiesen, unmöglich.

4.2 *Es reicht* übrigens *zu verlangen, daß C^n nicht in s und $\bar{s}$, sondern etwa nur in s regulär, in $\bar{s}$ aber differenzierbar ist. Denn dann ist C^n von allein auch in $\bar{s}$ regulär.* Dies ist richtig für $n = 2$;

[12]) Vergl. SAUTER [2]. Fräulein SAUTER hat dort auch gezeigt, daß die in **4.3** vorgenommene Ergänzung schon mittels eines projektiven Bildes des ursprünglichen Bogens gelingt.

es sei bis $n - 1$ bewiesen. Die Projektion der C^n aus s bezw. $\bar{s}$ erfüllt die Voraussetzungen. Nach Induktionsannahme ist die Projektion von $\bar{s}$ auf der Projektion der C^n aus s bezw. $\bar{s}$ regulär. Daher hat $\bar{s}$ wegen der Fremdheitsbedingung und nach I **3.4** und **3.5** die Charakteristik $(1, \ldots, 1, a_{n-1})$ bezw. $(a_0, 1, \ldots, 1)$, also die Charakteristik $(1, \ldots, 1)$.

4.3 Aus der Verschärfung **4.2** von **4.1** folgt insbesondere, *daß jeder abgeschlossene differenzierbare Elementarbogen B^n, der die Fremdheitsbedingung* **2.5** *erfüllt, sich zu einer geschlossenen Kurve n-ter Ordnung im R_n ergänzen läßt.*

B^n habe also die Endpunkte s und $\bar{s}$. Aus der Fremdheitsbedingung folgt, daß wir ein projektives Koordinatensystem einführen können, in dem die $L_k^n(s)$ und $L_k^n(\bar{s})$ die Koordinaten haben[12]):

$$L_0^n(s) = (10\ldots0);\; L_1^n(s) = \begin{pmatrix}100\ldots0\\010\ldots0\end{pmatrix};\ldots;\; L_{n-1}^n(s) = \begin{pmatrix}100\ldots00\\010\ldots00\\\cdots\cdots\\\cdots\cdots\\000\ldots10\end{pmatrix}$$

$$L_{n-1}^n(\bar{s}) = \begin{pmatrix}00\ldots001\\00\ldots010\\\cdots\cdots\\\cdots\cdots\\01\ldots000\end{pmatrix};\ldots;\; L_1^n(\bar{s}) = \begin{pmatrix}0\ldots001\\0\ldots010\end{pmatrix};\; L_0^n(\bar{s}) = (0\ldots01).$$

Es sei $c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_{n+1} \neq 0$. Dann geht die algebraische Kurve n-ter Ordnung

$$x_1 : x_2 : \ldots : x_{n+1} = c_1 : c_2 t : \ldots : c_{n+1} t^n$$

durch s und $\bar{s}$ und hat dort die gleichen linearen Schmiegmannigfaltigkeiten wie B^n. Sie wird durch s und $\bar{s}$ in zwei Bögen n-ter Ordnung zerlegt, welche die Fremdheitsbedingung erfüllen. Durch passende Wahl der Vorzeichen der c_i lässt sich erreichen, daß die aus B^n und dem einen der beiden Bögen gebildete Kurve C^n in s regulär ist; sie ist in $\bar{s}$ differenzierbar, erfüllt also die Voraussetzungen von **4.2**.

4.4 *Man zeigt leicht, daß* **4.1** (aber nicht **4.2**!) *richtig bleibt, wenn die Voraussetzung wegfällt, daß B^n und $\bar{B}^n$ der Fremdheitsbedingung genügen.* Aus der Regularität von C^n in s und $\bar{s}$ folgt also schon die Gültigkeit des Fremdheitskriteriums.

Der Induktionsschluß von $n - 1$ auf n durch Projektion aus einem passenden der beiden gemeinsamen Endpunkte s und $\bar{s}$ von B^n und $\bar{B}^n$ ist trivial. Wir beschränken uns auf den Fall $n = 2$.

Eine Gerade durch s trifft B^2 und $\overline{B}^2$ in höchstens noch je einem Punkte. Die Gerade durch s und einen die C^2 monoton durchlaufenden Punkt ändert sich stetig mit diesem. Solange er nicht durch $\bar{s}$ hindurchläuft, dreht sich die Gerade monoton; dies folgt aus der obigen Bemerkung und aus der Regularität von C^2 in s. Folglich ist die Drehung auch bei Durchgang des Punktes durch $\bar{s}$ monoton. Da die C^2 in $\bar{s}$ regulär ist, kann daher die Tangente von $\bar{s}$ nicht durch s gehen.

5. Bestimmung der Klasse.

5.1 Unter der Klasse etwa eines differenzierbaren Bogens im R_n versteht man die obere Grenze der Anzahl der Schmieghyperebenen, die er durch einen Punkt des Raumes schickt. Da irgend n Schmieghyperebenen wenigstens einen Punkt gemein haben, ist die Klasse eines Bogens mindestens gleich n. Das Ziel dieses Abschnittes ist der Nachweis, *daß jede differenzierbare Kurve C^n der n-ten Ordnung im R_n die Klasse n hat.*[13])

5.2 Der Punkt P liege auf der Schmieghyperebene, aber nicht auf der Hypertangente $L^n_{n-2}(s)$ des Punktes s der Kurve C^n. Dann enthält jede Umgebung U von s eine andere Umgebung V, sodaß jede Hyperebene durch P, die V $(n - 1)$-fach trifft, U insgesamt n-fach trifft.

Andernfalls gäbe es nämlich eine Folge von Hyperebenen durch P, von denen jede eine feste Umgebung von s in genau $n - 1$ gegen s konvergenten Punkten träfe. Diese Hyperebenen häuften sich gemäß **3.4** gegen Hyperebenen durch P und die Hypertangente von s, also gegen die Schmieghyperebene von s; andererseits lägen die Endpunkte der festen Umgebung auf derselben oder auf verschiedenen Seiten einer jeden Hyperebene der Folge, also auch der Schmieghyperebene von s, je nachdem n ungerade oder gerade ist. Dies widerspricht aber der Regularität von s.

s zerlegt U und V in je zwei Teilbögen; die beiden Teilbögen U' von U und V' von V seien durch s getrennt. Wie eben bemerkt, trifft jede Hyperebene durch P, die das Innere von V' $(n - 1)$-fach trifft, U in noch einem Punkte. Wir behaupten, dieser Punkt liegt im Innern von U'.

Diese Behauptung ist klar im ebenen Falle. Ist sie gültig im R_{n-1}, so ergibt sich durch Projektion aus s für den n-dimensionalen Fall: die Hyperebene durch P, s und $n - 2$ innere Punkte von V' trifft U' in einem inneren Punkte. Daher trifft die Hyperebene durch P, die $n - 2$ Punkte und einen aus s in V' hinein-

[13]) Über differenzierbare Elementarbögen vergl. **7.6**.

laufenden Punkt s' U in einem stetig von s' abhängenden Punkte, der für $s' = s$ im Innern von U' liegt und s nicht überschreiten kann.

5.3 Unter einer *einseitigen Umgebung* eines Punktes s der C^n werde ein abgeschlossener Teilbogen der C^n verstanden mit s als dem einen Endpunkte.

Der Punkt P liege auf der Schmieghyperebene von s, sei aber von s selbst verschieden. Dann gibt es zu jeder einseitigen Umgebung U' von s eine andere V', so daß U' und V' durch s getrennt werden, und daß jede Hyperebene durch P, die das Innere von V' $(n-1)$-fach trifft, das Innere von U' einfach trifft.[14])

Die Behauptung ist richtig für die C^2; sie sei für die C^{n-1} bewiesen. Da je zwei Tangenten der C^n wegen **2.1** windschief sein müssen, geht höchstens eine Tangente durch P. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei U' so gewählt, daß die Tangente des von s verschiedenen Endpunktes $\bar{s}$ von U' nicht durch P geht.

Wegen **5.2** können wir voraussetzen, daß P auf der Hypertangente von s liegt. Mittels Projektion aus $\bar{s}$ ergibt sich dann nach Induktionsannahme: Es gibt eine einseitige Umgebung V'_1 von s mit folgenden Eigenschaften: s trennt U' und V'_1; jede Hyperebene durch $\bar{s}$, P und $n-2$ innere Punkte von V'_1 trifft U' in einem inneren Punkte. Liegt P nicht auf der Tangente von s, so folgt aus der Induktionsannahme mittels Projektion aus s: Eine passende einseitige Umgebung V'_2 von s wird von U' durch s getrennt und hat die Eigenschaft, daß jede Hyperebene durch s, P und $n-2$ innere Punkte von V'_2 U' in einem inneren Punkte trifft. Die kleinere der beiden einseitigen Umgebungen V'_1 und V'_2 sei mit V' bezeichnet. Liegt P auf der Tangente von s, so setzen wir $V' = V'_1$. In beiden Fällen leistet V' das Verlangte.

Zum Beweis betrachte man die ebene Projektion C^2 der C^n aus irgend $n-2$ inneren Punkten von V'. Werden die übrigen Projektionen wie ihre Urbilder bezeichnet, so hat man: Die Gerade $P\,\bar{s}$ trifft U' in einem inneren Punkte. Die Gerade $P\,s$ ist entweder Tangente der C^2 in s oder trifft U' in einem inneren Punkte. Läuft der Punkt s' aus s in V' hinein, so trifft die Gerade $P\,s'$ die C^2 in einem weiteren stetig von s' abhängenden Punkte, der für jedes dem Punkte s hinreichend nahe s' im Innern von U' liegt. Er könnte U' nur durch s oder $\bar{s}$ hindurch verlassen.

[14]) Der Unterschied zwischen **5.2** und **5.3** besteht darin, daß der Punkt P in **5.3** auf der Hypertangente von s liegen darf. In **5.3** wird nur der zweite Satz von **5.2** verschärft; die entsprechende Verallgemeinerung des ersten Satzes ist falsch, also die Behauptung, daß unter den Voraussetzungen von **5.3** jede Umgebung U von s eine andere Umgebung V enthält, so daß jede V $(n-1)$-fach treffende Hyperebene durch P U insgesamt n-fach trifft.

In beiden Fällen träfe die Gerade $P\ s'$ die Kurve zweiter Ordnung C^2 der obigen Bemerkung zufolge mindestens dreifach.

5.4 *Die Summe der Vielfachheiten der Treffpunkte der C^n mit einer Hyperebene ist n oder eine gerade Zahl weniger.*

Dieser Satz, eine triviale Verschärfung des Satzes **2.1** für den Fall der C^n wird wie jener bewiesen.

5.5 Der Punkt P liege nicht auf der C^n. Liegt P nicht auf der Hypertangente von s, so spannt diese mit P zusammen eine Hyperebene auf, die die C^n nach **5.4** in genau einem weiteren Punkte $t_n(s)$ trifft. Liegt P auf der Hypertangente von s, so setzen wir $t_n(s) = s$. Die Fixpunkte der Abbildung $t_n(s)$ sind genau die Punkte, deren Schmieghyperebenen durch P gehen. Wegen **3.5** ist die Abbildung außerhalb der Fixpunkte stetig. Aus **5.3** folgt, daß sie in den Fixpunkten stetig und rückläufig ist.[15])

5.6 *C^n hat die Klasse n.*

Es genügt zu zeigen, daß die Klasse von C^n höchstens gleich n ist. Die Behauptung ist klar für die C^2; sie sei für die C^{n-1} bewiesen. P sei ein beliebiger Punkt des R_n, aber nicht auf der C^n gelegen (vergl. **1.3**). Dann folgt aus der Induktionsvoraussetzung, daß jeder Punkt t höchstens $n - 1$ Urbilder der in **5.5** betrachteten stetigen Abbildung $t_n(s)$ hat. Da diese Abbildung in den Fixpunkten rückläufig ist, hat sie höchstens n Fixpunkte, mit anderen Worten, es gehen höchstens n Schmieghyperebenen durch P.[16])

5.7 Solange P keine Hypertangente überschreitet, ändert sich die Abbildung $t_n(s)$ stetig mit P. Daher bleiben Umlaufszahl und Anzahl der Fixpunkte fest, also auch die Anzahl der Schmieghyperebenen durch P.

---

[15]) Über die hier benutzten Begriffe vergl. FENCHEL [1].

[16]) Es sei noch ein zweiter Beweis des Satzes **5.6** angedeutet, der **5.3** nicht benutzt. Die Behauptung, richtig für die C^2, sei für die C^{n-1} bewiesen.

Liegt P auf der Hypertangente von s, so lassen wir die Abbildung $t_n(s)$, — vergl. **5.5** —, undefiniert. Die Fixpunkte der Abbildung $t_n(s)$ sind dann genau die Punkte, deren Schmieghyperebenen durch P gehen, deren Hypertangenten aber nicht. Die Abbildung $t_n(s)$ ist dann wegen **3.5**, soweit definiert, außerhalb der Fixpunkte stetig. Aus **5.2** folgt, daß sie in den Fixpunkten stetig und rückläufig ist.

Der Punkt P liege auf keiner Hypertangente; dann ist die Abbildung $t_n(s)$ auf der ganzen C^n definiert und der Beweis **5.6** bleibt schlüssig. Jetzt möge es Hypertangenten durch P geben. Wir zeigen zunächst, daß nur endlich viele Schmieghyperebenen durch P gehen.

Aus der Induktionsvoraussetzung folgt durch Projektion aus einem beliebigen Kurvenpunkte, daß nur endlich viele Hypertangenten durch P gehen. Die Abbildung $t_n(s)$ ist also auf der ganzen C^n, ausgenommen endlich viele Punkte, definiert und stetig und in den Fixpunkten rückläufig. Da jeder Punkt t, wie aus der Induktionsvoraussetzung folgt, nur beschränkt viele Urbilder hat, folgt daraus, daß die Abbildung $t_n(s)$ nur endlich viele Fixpunkte besitzt. Die Gesamtzahl der Punkte, deren Schmieghyperebenen durch P gehen, ist gleich der Anzahl der Fixpunkte der Abbildung $t_n(s)$

6. Die Abbildung $t_n(s)$.

In diesen Abschnitt seien einige Bemerkungen eingeschaltet über die in **5.5** eingeführte Abbildung $t_n(s)$ einer differenzierbaren Kurve C^n der n-ten Ordnung im R_n auf sich; in **7** werden nur Sonderfälle von **6.6** benötigt.

P sei ein fester Punkt des R_n, aber nicht auf der C^n gelegen.

6.1 s_0 sei ein fester Punkt der C^n. Die Gerade $s_0 P$ treffe die C^n nicht mehr. Dann induziert die Abbildung $t_{n-1}(s)$ der Projektion der C^n aus s_0 auf sich eine Abbildung der C^n auf sich, die wir gleichfalls mit $t_{n-1}(s)$ bezeichnen. $t_{n-1}(s)$ ist also derjenige Punkt, in dem die Hyperebene durch P, s_0 und $L^n_{n-3}(s)$ die C^n noch einmal trifft.[17]) Liegen $L^n_{n-3}(s)$, P und s_0 auf einer Hypergeraden, so ist $t_{n-1}(s) = s$ zu setzen; $t_{n-1}(s_0) = t_n(s_0) = t_0$. Durch Projektion aus s_0 folgt aus **5.5**, daß die Abbildung $t_{n-1}(s)$ auf der ganzen C^n stetig und in den Fixpunkten rückläufig ist. Ihre Fixpunkte sind gerade die Urbilder von s_0 bei der Abbildung $t_n(s)$.

6.2 *Die Schmieghyperebene von s_0 gehe nicht durch P; die Gerade s_0 P treffe die Kurve C^n nicht mehr.*

6.21 Liegt s hinreichend nahe bei s_0 und s' zwischen s und s_0, so gilt:

a) P, s_0, s' und $L^n_{n-3}(s)$ liegen nicht in einer Hyperebene;

b) P, t_0, s' und $L^n_{n-3}(s)$ liegen nicht in einer Hyperebene;

c) P, s' und $L^n_{n-3}(s)$ liegen nicht in einer Hypergeraden.

6.22 *Liegt s hinreichend nahe bei s_0, so liegen $t_n(s)$ und $t_{n-1}(s)$ auf derselben Seite von t_0.*

Beweis von **6.21**: Wäre a) bezw. b) falsch, so gäbe es eine Folge von gegen s_0 konvergenten Punkten s und zu jedem s einen Punkt s' zwischen s und s_0, so daß für jedes solche Paar s und s' $L^n_{n-3}(s)$, die Punkte P und s' und der Punkt s_0 bezw. t_0 in einer Hyperebene lägen. Wäre a) falsch, so konvergierte diese Hyperebene nach **3.4** gegen die Schmieghyperebene von s_0, und diese ginge entgegen der Voraussetzung durch P. Wäre aber b) falsch,

---

vermehrt um die Anzahl der Punkte, deren Hypertangenten durch P gehen, also endlich.

Die Gerade g durch P und einen Kurvenpunkt, dessen Schmieghyperebene nicht durch P geht, trifft, wie sich durch Projektion aus dem Kurvenpunkte ergibt, nur endlich viele Hypertangenten. Es kann also eine Umgebung von P auf g abgegrenzt werden, derart daß kein Punkt der Umgebung außer P selbst auf einer Hypertangente liegt.

Der Punkt s bewege sich stetig auf der Kurve C^n. Dann läuft der Schnittpunkt der Schmieghyperebene von s mit g stetig auf g. Jeder von P verschiedene Punkt der Umgebung wird höchstens n mal durchlaufen, P selbst nur endlich oft, also gleichfalls höchstens n mal.

[17]) Diese Definition von $t_{n-1}(s)$ wird im ganzen Abschnitte **6** ausgenommen **6.21** beibehalten.

so hätte die zur Projektion der C^n aus t_0 gehörige Abbildung $t_{n-1}(s)$ einen Fixpunkt in s_0, in dem sie nicht rückläufig wäre, im Widerspruch zu **5.5**. (Daß die Gerade t_0P die C^n nicht mehr trifft, das folgt aus den Voraussetzungen.) c) folgt aus a) oder b).

Beweis von **6.22**: s liege so nahe an s_0, daß **6.21** erfüllt ist. Die von $L^n_{n-3}(s)$, P und einem von s_0 nach s laufenden Punkte s' aufgespannte Hyperebene (vergl. **6.21** c) trifft die C^n in einem weiteren stetig von s' abhängigen Punkte, der für $s' = s_0$ nach $t_{n-1}(s)$, für $s' = s$ nach $t_n(s)$ fällt. Würden $t_{n-1}(s)$ und $t_n(s)$ durch s_0 und t_0 getrennt werden, so gäbe es einen Punkt s' zwischen s_0 und s, sodaß die Hyperebene durch $L^n_{n-3}(s)$, P und s' die C^n entweder in s_0 oder in t_0 träfe. Beides ist nach **6.21** unmöglich.

6.3 Ist s_0 Umkehrpunkt der Abbildung $t_n(s)$, so trifft die Hypergerade durch P und $L^n_{n-3}(s_0)$ die C^n in einem weiteren Punkte.[18])

Beweis: Nach **6.22** und **5.5** ist s_0 höchstens dann Umkehrpunkt der Abbildung $t_n(s)$, wenn die Gerade $s_0\,P$ die C^n noch einmal trifft, oder wenn s_0 Umkehrpunkt der Abbildung $t_{n-1}(s)$ ist. Hieraus folgt die Behauptung durch Induktion.

6.4 Die Sehne s_1s_2 gehe durch P. Ist n gerade bezw. ungerade, so gehen 0 oder 2 bezw. eine Schmieghyperebene durch P und die Abbildung $t_n(s)$ ist monoton mit der Umlaufszahl $\pm$ 1 bezw. hat s_2 und s_1 als einzige Umkehrpunkte und die Umlaufszahl **0**.

Beweis: Zunächst ist klar, daß s_1 bezw. s_2 das einzige Urbild von s_2 bezw. s_1 ist. Der Punkt s_0 sei von s_1 und s_2 verschieden gewählt. Dann folgt aus **6.3**, daß s_0 nicht Umkehrpunkt der Abbildung $t_n(s)$ ist.

Die Behauptung ist richtig für $n = 2$. Der Induktionsschritt von geradem $n - 1$ zu ungeradem n verläuft so: Durch Projektion aus s_0 folgt, daß s_0 0 oder 2 Urbilder hat (vergl. **6.1**). Da s_1 und s_2 nur einander zu Urbildern haben, sind sie Umkehrpunkte, und die Abbildung $t_n(s)$ hat die Umlaufszahl 0 und einen Fixpunkt.

Ist n gerade, so erhalten wir durch Projektion aus s_0, daß s_0 genau ein Urbild hat. Daher ist die Abbildung $t_n(s)$ eineindeutig, folglich monoton und hat die Umlaufszahl $\pm$ 1, also 0 oder 2 Fixpunkte.

6.5 s_0 *ist genau dann Umkehrpunkt der Abbildung* $t_n(s)$, *wenn es eine gerade Zahl* $k \geq 2$ *gibt, so daß die von* P *und* $L^n_{n-1-k}(s_0)$ *auf-*

[18]) Eine weitere einfache Folgerung aus Satz **6.22** ist: *P liege nicht auf der Schmieghyperebene von* s_0; *die Hypergerade durch P und* $L^n_{n-3}(s_0)$ *treffe die* C^n *sonst nicht mehr. Dann ist die Abbildung* $t_n(s)$ *gleich- oder rückläufig in* s_0, *je nachdem jede Hyperebene durch diese Hypergerade die* C^n *mindestens* $(n - 1)$*-fach trifft oder nicht.*

Der Induktionsbeweis mittels **6.22** ist trivial.

gespannte lineare Mannigfaltigkeit die C^n noch einmal trifft, die von P und $L^n_{n-2-k}(s_0)$ aufgespannte aber nicht.

Die Behauptung folgt für $n = 2$ aus **6.4**. Sie sei bis $n - 1$ bewiesen. Geht die Schmieghyperebene von s_0 durch P, so ist die Behauptung richtig nach **5.5**. Ist die Gerade $P\ s_0$ Sehne, so folgt die Behauptung aus **6.4**. In allen übrigen Fällen ergibt sie sich aus **6.22** und der Induktionsvoraussetzung.

6.6 *Liegt P auf $L^n_{n-k}(s)$ aber nicht auf $L^n_{n-k-1}(s)$, so zählen wir $L^n_{n-1}(s)$ als k-fache Schmieghyperebene durch P. Dann gilt: Die Summe der Vielfachheiten der Schmieghyperebenen durch P ist n oder eine gerade Zahl weniger.*

Dieser Satz ist ein Analogon des Satzes **5.4**. Zum Beweis zerlegen wir die Behauptung:

6.61 Die Summe der Vielfachheiten der Schmieghyperebenen durch P ist höchstens gleich n.

6.62 Die Summe der Vielfachheiten der Schmieghyperebenen durch P ist $\equiv n \pmod 2$.

Beweis von **6.61**. Der Punkt P liege auf $L^n_{n-k_i}(s_i)$, aber nicht auf $L^n_{n-1-k_i}(s_i)$ $(i = 1, \ldots, r;\ k_i \geqq 1$; die Punkte s_i paarweise verschieden). Die Punkte s_i zerlegen die Kurve C^n in r einander fremde Bögen. Da die Abbildung $t_n(s)$ in den Fixpunkten s_i rückläufig ist, hat ein von den s_i verschiedener Punkt t auf jedem der $r - 1$ Bögen, die t nicht enthalten, mindestens je ein Urbild der Abbildung. Die Urbilder $s'_1, \ldots, s'_{r-1}$ von t seien paarweise voneinander verschieden. Die Hyperebene durch $L^n_{n-2}(s'_i)$ und P geht also durch t, $L^n_{n-k_i}(s_i)$ durch P.

Die Projektion von C^n aus t sei mit C^{n-1}, ihre linearen Schmiegmannigfaltigkeiten mit L^{n-1}_k und die Projektion von P mit P' bezeichnet.

Die Hyperebene durch $L^n_{n-2}(s'_i)$, t und P projiziert sich aus t in die durch P' gehende Schmieghyperebene von s'_i. Es gehen also die zusammen mindestens $(r - 1)$-fach zu zählenden Schmieghyperebenen $L^{n-1}_{n-2}(s'_i)$ von C^{n-1} durch P' $(i = 1, \ldots, r - 1)$.

Da P auf $L^n_{n-k_i}(s_i)$ liegt, geht $L^{n-1}_{n-k_i}(s_i)$ durch P'. Die k_i-fache Schmieghyperebene $L^n_{n-1}(s_i)$ durch P projiziert sich somit in die $(k_i - 1)$-fache Schmieghyperebene $L^{n-1}_{n-2}(s_i)$ durch P'. Die Punkte $s_1, \ldots, s_r$ schicken also zusammen genau $\sum_1^r i\ (k_i - 1)$ Schmieghyperebenen durch P'. Insgesamt gehen also mindestens

$$(r-1)+\sum_1^r i\,(k_i-1)=\sum_1^r i\,k_i-1$$

Schmieghyperebenen von C^{n-1} durch P'.

Ist die für $n=2$ richtige Behauptung mit $n-1$ statt n bewiesen, so folgt aus der letzten Bemerkung $k_i-1\leqq n-1$ oder $k_i<n$, also die Behauptung für die C^n.

Beweis von **6.62**. Wir schließen uns an den Beweis von **6.61** und seine Bezeichnungen an.

Die Punkte s_1 und s_2 mögen einen offenen Teilbogen B^n von C^n begrenzen, der keinen weitern Punkt s_i enthält. Durch Projektion aus t ergibt sich mittels **5.6**, daß t jedenfalls nur endlich viele Urbilder der Abbildung $t_n(s)$ auf C^n hat. Es seien $s''_1,\ldots,s''_m$ sämtliche Urbilder von t auf B^n (die s''_i paarweise verschieden). Die von P und $L^n_{n-1-k''_i}(s''_i)$ aufgespannte lineare Mannigfaltigkeit gehe durch t, aber nicht die von P und $L^n_{n-2-k''_i}(s''_i)$ aufgespannte ($i=1,\ldots,m$; $k''_i\geqq 1$). Es geht also $L^{n-1}_{n-1-k''_i}(s''_i)$ durch P' aber nicht $L^{n-1}_{n-2-k''_i}(s''_i)$. Somit schickt die Projektion von B^n aus t genau $\sum_1^m i\,k''_i$ Schmieghyperebenen durch P'. Es langt zu zeigen

$$\sum_1^m i\,k''_i\equiv\begin{cases}0 \pmod 2, & \text{wenn } t \text{ auf } B^n\\ 1 \pmod 2, & \text{wenn } t \text{ nicht auf } B^n;\end{cases}\qquad *$$

denn dann geben die sämtlichen Urbilder von t bei der Abbildung $t_n(s)$ Anlaß zu Schmieghyperebenen der C^{n-1} durch P', deren Gesamtvielfachheit $\equiv r-1 \pmod 2$ ist. Die Gesamtvielfachheit aller Schmieghyperebenen der C^{n-1} durch P' ist also

$$\equiv(r-1)+\sum_1^r i\,(k_i-1)\equiv\sum_1^r i\,k_i-1 \pmod 2,$$

woraus die Behauptung wie oben durch Induktion folgt.

Die Formel * kann so eingesehen werden: s''_i ist nach **6.5** genau dann Umkehrpunkt der Abbildung $t_n(s)$, wenn k''_i gerade ist; die geraden k''_i liefern nur den Beitrag 0 (mod 2) zur linken Seite von *.

Die Abbildung $t_n(s)$ ist rückläufig in s_1 und in s_2. s laufe auf B^n von s_1 nach s_2. Dann läuft $t_n(s)$ auf C^n von s_1 nach s_2, ohne sonst mit s zusammenzufallen. Daher wird t von $t_n(s)$ ebenso oft in beiden Sinnen oder einmal mehr in dem einen Sinne durchlaufen als in dem anderen, je nachdem t auf B^n liegt oder nicht. $t_n(s)$ überschreitet also t im ganzen im ersten Falle eine gerade, im zweiten eine ungerade Anzahl von Malen. Jedes hierzu gehörige k''_i liefert aber nach **6.5** den Beitrag 1 (mod 2) zur linken Seite von *, woraus diese Kongruenz folgt.[19])

7. Ein Dualitätsprinzip für die C^n.

7.1 *Eine Dualität führt die Gesamtheit der Schmieghyperebenen einer differenzierbaren Kurve n-ter Ordnung C^n im R_n* nach **3.5** und **5.1** *in eine stetige Kurve n-ter Ordnung $\overline{C^n}$ über. Das Ziel dieses Abschnittes ist der Nachweis der Differenzierbarkeit von $\overline{C^n}$, genauer der Nachweis, daß die k-dimensionalen linearen Schmiegmannigfaltigkeiten von C^n durch die Dualität in die $(n-1-k)$-dimensionalen von $\overline{C^n}$ übergeführt werden* $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$.

7.2 Offensichtlich genügt es, für jeden Punkt s_0 von C^n zu beweisen: *Strebt s gegen s_0, so konvergiert der Durchschnitt von $L^n_{n-1}(s)$ mit $L^n_k(s_0)$ gegen $L^n_{k-1}(s_0)$ $(0 \leqq k < n)$.*

Diese Behauptung, für $k = 0$ trivial, sei bis $k - 1$ bewiesen. Ist $n = k$, so sind wir fertig. Es sei $n > k$.

Es sei $s_1 \neq s_0$. Nach **6.6** geht durch jeden der beiden Schnittpunkte $P(s_0)$ von $L^n_{k-1}(s_0)$ mit $L^n_{n-k+1}(s_1)$ und $P(s_1)$ von $L^n_k(s_0)$ mit $L^n_{n-k}(s_1)$ keine, durch jeden anderen Punkt der Schnittgeraden g von $L^n_k(s_0)$ mit $L^n_{n-k+1}(s_1)$ noch genau eine weitere Schmieghyperebene.

s_0 und s_1 zerlegen C^n in zwei Teilbögen. Läuft s auf einem von ihnen, so läuft der Schnittpunkt $P(s)$ von $L^n_{n-1}(s)$ mit g stetig auf einer der beiden Strecken, in die g durch $P(s_0)$ und $P(s_1)$ zerlegt wird. Nun wird, wenn s die beiden Teilbögen durchläuft, jeder Punkt dieser beiden Strecken einmal und nur einmal von $P(s)$ durchlaufen. Daraus folgt: s durchlaufe den einen der beiden Teilbögen. Dann durchläuft $P(s)$ stetig und monoton die eine der beiden Strecken, und zwar geht durch jeden Punkt dieser Strecke die Schmieghyperebene eines Punktes des Teilbogens.

s strebe auf dem Bogen gegen s_0. Dann ist der letzten Bemerkung zufolge $P(s)$ konvergent, und zwar gegen einen der beiden Punkte $P(s_0)$ und $P(s_1)$. Hieraus und aus der Induktionsvoraussetzung folgt, daß der Durchschnitt $E^n_{k-1}(s)$ von $L^n_k(s_0)$ mit der Schmieghyperebene von s gegen eine $(k-1)$-dimensionale lineare Mannigfaltigkeit durch $L^n_{k-2}(s_0)$ und einen dieser beiden Punkte konvergiert, wenn s auf dem Bogen gegen s_0 strebt. Gibt es ein s_1, so daß $P(s)$ gegen $P(s_0)$ konvergiert, so folgt hieraus

[19]) Das in **5** und **6** benutzte Verfahren gestattet, wie ich an anderer Stelle auszuführen hoffe, die Diskussion der differenzierbaren Kurve $(n+1)$-ter Ordnung im R_n nach Anzahl und Art ihrer singulären Punkte.

weiter die Konvergenz von $E^n_{k-1}(s)$ gegen die von $L^n_{k-2}(s_0)$ und $P(s_0)$ aufgespannte lineare Mannigfaltigkeit, also gegen $L^n_{k-1}(s_0)$ (vergl. **2.3**). Andernfalls folgte aber aus der Konvergenz von $E^n_{k-1}(s)$, daß die Punkte $P(s_1)$ für alle s_1 in einer festen $(k-1)$-dimensionalen linearen Mannigfaltigkeit durch $L^n_{k-2}(s_0)$ gelegen wären; mit anderen Worten: Alle $L^n_{n-k}(s_1)$ inzidierten mit einer festen $(k-1)$-dimensionalen linearen Mannigfaltigkeit durch $L^n_{k-2}(s_0)$, und man erhielte für die Projektion C^{n-k+1} der C^n aus $L^n_{k-2}(s_0)$: Die Schmieghyperebenen $L^{n-k+1}_{n-k}(s_1)$ gingen alle durch einen festen Punkt des R_{n-k+1} im Widerspruch zu **5.6**.

7.3 Mittels des Dualitätsprinzips geht **5.4** in **6.6** über.

7.4 Aus dem Dualitätsprinzip folgt unmittelbar, *daß der Durchschnitt von $L^n_k(s_0)$ mit der Gesamtheit aller $L^n_{n-k}(s)$ der C^n eine differenzierbare Kurve k-ter Ordnung C^k auf $L^n_k(s_0)$ bildet.* Dies ist einfach das duale Analogon der Bemerkung, daß die Projektion der C^n aus $L^n_{n-k-1}(s_0)$ eine C^k ist.

7.5 Aus **3.4** und dem Dualitätsprinzip ergibt sich: *Konvergieren $k+1$ Punkte der C^n gegen einen Kurvenpunkt s_0, so konvergiert der Durchschnitt ihrer Schmieghyperebenen gegen $L^n_{n-1-k}(s_0)$.* Diese Bemerkung bleibt gültig bei Einführung einer Vielfachheitszählung entsprechend **6.6**.

7.6 *Ein differenzierbarer Elementarbogen B^n im R_n wird durch eine Dualität wieder in einen differenzierbaren Elementarbogen übergeführt. Dabei gehen die k-dimensionalen linearen Schmiegmannigfaltigkeiten von B^n in die $(n-1-k)$-dimensionalen des dualen Bogens über $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$.*

Für B^n gelten also die sinngemäß abgeänderten Bemerkungen **7.4** und **7.5**.

Beweis: Falls B^n abgeschlossen ist und der Sauterschen Fremdheitsbedingung **2.5** genügt, bezw. falls B^n offen ist, läßt sich B^n bezw. jeder abgeschlossene Teilbogen von B^n nach **4.3** zu einer differenzierbaren Kurve C^n ergänzen. In diesen beiden Fällen folgt die Behauptung aus **7.1**.

B^n sei abgeschlossen und erfülle nicht das Fremdheitskriterium. Dann gilt die Behauptung wenigstens für jeden offenen Teilbogen von B^n. Daher gilt **7.2** für jeden inneren Punkt von B^n. Daß **7.2** auch in den Endpunkten von B^n gilt, folgt daraus, daß ein abgeschlossener Teilbogen von B^n, der den einen der beiden Endpunkte von B^n enthält, den anderen aber nicht, dem Fremdheitskriterium genügt.

Es ist noch zu zeigen, daß B^n die Klasse n hat. B^n wird durch eine Dualität in einen stetigen differenzierbaren Bogen $\bar{B}^n$

übergeführt, mit der Eigenschaft daß jeder offene Teilbogen von $\bar{B}^n$ die Ordnung n hat. Es langt zu zeigen, daß $\bar{B}^n$ selbst von der Ordnung n ist.

Eine Gerade, die den Bogen $\bar{B}^2$ in mehr als zwei Punkten träfe, könnte durch eine passende kleine Änderung in eine Gerade übergeführt werden, die mehr als zwei innere Punkte mit $\bar{B}^2$ gemein hätte, was unmöglich ist. Die Behauptung sei für die $\bar{B}^{n-1}$ bewiesen ($n > 2$). Eine Hyperebene, die $\bar{B}^n$ in mehr als n Punkten träfe, ginge durch wenigstens einen inneren Punkt. Durch Projektion von $\bar{B}^n$ aus diesem Punkte ergibt sich ein Widerspruch gegen die Induktionsannahme.

7.7 Aus **7.6** folgt unmittelbar, daß ein elementarer Punkt auf einem differenzierbaren Bogen durch eine Dualität in einen Punkt der gleichen Art übergeführt wird.[20])

Literatur.

BONNESEN-FENCHEL [1]: Theorie der konvexen Körper. Ergebnisse der Math. **3**, Heft 1.

DENK [1]: Über elementare Punkte höherer Ordnung auf Kurven im R_n. S.-B. phys.-med. Soz. Erlangen **67** (1935), S. 1 ff.

FENCHEL [1]: Elementare Beweise und Anwendungen einiger Fixpunktsätze. Matematisk Tidskrift B (1932) S. 66 ff.

HAUPT [1]: Über die Struktur reeller Kurven. Journ. reine ang. Math. **164** (1931), S. 50 ff.

[2]: Über Kontinua von beschränkter Ordnung. S.-B. Bayer. Akad. Wiss. (1931), S. 49 ff.

[3]: Strukturprobleme bei reellen Gebilden. S.-B. Bayer. Akad. Wiss. (1935), S. 183 ff.

[4]: Gestaltsprobleme bei reellen Gebilden. Mon. Hefte Math. Phys. **43** (1936), S. 261 ff.

HJELMSLEV [1]: Introduction à la théorie des suites monotones. Overs. over Danske Vid. Selsk. Forh. (1914) Heft 1, S. 68 ff.

JUEL [1]: Einleitung in die Theorie der ebenen Elementarkurven dritter und vierter Ordnung. Danske Vid. Selsk. Skr. (7) **11**, 2 (1914), S. 113 ff.

[2]: Beispiele von Elementarkurven und Elementarflächen. Atti Congr. internaz. Matem. Bologna **4** (1928), S. 195 ff.

LINSMAN [1]: Sur les singularités des courbes élémentaires en géometrie finie. Bull. Acad. de Belgique (1936), S. 688 ff, 873 ff.

MONTEL [1]: Sur la géometrie finie et les travaux de M. C. Juel. Bull. sc. math. (2) **48** (1924); S. 109 ff.

[20]) Vergl. I, **1**. Hat der eine der beiden Punkte die Charakteristik $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, so der andere die Charakteristik $(a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0)$. Ein Beweis dieser für $n = 2$ und $n = 3$ von Herrn LINSMAN [1] stammenden Bemerkung werde bei anderer Gelegenheit gegeben. Aus diesem Satze folgt beispielsweise, daß die Klasse eines solchen Punktes gleich seiner Ordnung $A = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1}$ ist. Unter der Klasse eines Punktes ist die Klasse einer hinreichend kleinen Umgebung des Punktes zu verstehen. Vergl. I, **3**; I, **4**.