

Werk

Label: Periodical issue

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311028X_0066|log54

Kontakt/Contact

[Digizeitschriften e.V.](#)
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

ROČNÍK 66.



SEŠIT 3.

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ

MATEMATIKY A FYSIKY

Redaktoři:

VOJTĚCH JARNÍK a FRANTIŠEK ZÁVIŠKA

Redakční rada:

BOH. BYDŽOVSKÝ, E. ČECH, V. DOLEJŠEK,
V. HLAVATÝ, B. HOSTINSKÝ, M. KÖSSLER,
K. RYCHLÍK, V. ŠTECH, M. A. VALOUCH,
FR. VYČICHLO, AL. WANGLER, AUG. ŽÁČEK.

VYDÁVÁ VLASTNÍM NÁKLADEM

JEDNOTA ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

za podpory ministerstva školství a národní osvěty.



PRAHA 1937.

Ročně 4 sešity.

Předplatné (pro nečleny) 120 Kč.

Journal Tchecoslovaque de Mathématiques et de Physique.

Éditeur: Jednota čsl. matematiků a fyziků, Praha II-609, Tchécoslovaquie.

Abonnement pour un an 120 Kč.

Chèques postaux: Praha 13103.

Année 66

Fascicule 3

1936/37

Obsah — Sommaire

ČÁST VĚDECKÁ

Část matematická — Travaux mathématiques

- Peter Scherk, Praha XIX, tř. kr. Alexandra II: Über differenzierbare Kurven und Bögen — O derivovatelných křivkách a obloucích.
- I. Zum Begriff der Charakteristik — K pojmu charakteristiky 165
 - II. Elementarbogen und Kurve n -ter Ordnung im R_n — Elementární oblouk a křivka n -tého řádu v R_n 172
- Vojtěch Jarník, Praha II, U Karlova 3: Über die angenäherte Lösung der Gleichung $x_1\theta_1 + \dots + x_n\theta_n + x_0 = 0$ in ganzen Zahlen — O přibližném řešení rovnice ... celými čísly..... 192
- J. Novák, Brno, Kotlářská 2: Charakter množiny — Über den Charakter von Mengen 206
- Wilhelm Schmid, Brno, něm. technika: Quadratische Transformationen und Kegelschnitt-Dreiecksnetze — Kvadratické transformace a trojúhelníkové sítě kuželoseček 210

Část fyzikální — Travaux de physique

- Václav Dolejšek a B. Janiček, Praha II, U Karlova 5: Conditions for discharge in the ionic tube — Podmínky pro výboj v iontové trubici 218
- Stanislav Láska, Praha II, U Karlova 5: Elektromagnetische Wellen an dielektrischen Röhren — Elektromagnetické vlny na dielektrických trubicích 224

ČÁST MATEMATICKÁ

Über differenzierbare Kurven und Bögen.

Peter Scherk, Praha.

(Eingegangen am 4. Dezember 1936.)

Die vorliegenden ersten beiden Arbeiten dieser Reihe sind meinem Lehrer, Herrn Professor Dr. Edmund Landau, in dankbarer Verehrung zu seinem 60. Geburtstage am 14. Februar 1937 gewidmet.

I.

Zum Begriff der Charakteristik.

Einleitung.

Diese Note ist die erste einer Reihe von Arbeiten, in denen in Anlehnung an die Theorie der algebraischen Kurven allgemeinere reelle Kurven untersucht werden sollen. Dabei erweist es sich als nützlich, auch gewisse einfache Bögen zu behandeln. Die Aufgabe sei durch ein klassisch einfaches Beispiel aus der älteren Literatur erläutert: JUEL [1]¹⁾ betrachtet geschlossene Kurven mit stetiger Tangente in der projektiven Ebene, die von jeder Geraden in höchstens drei, von jeweils passenden Geraden in genau drei Punkten getroffen werden, und zeigt, daß die wohlbekannte Einteilung der irreduziblen ebenen algebraischen Kurven dritter Ordnung nach ihrem Verhalten im Reellen für diese allgemeinere Klasse von Kurven ungeändert gültig bleibt. Offensichtlich gibt es Kurven dieser Art, die nicht algebraisch, nicht einmal analytisch sind.

Die Natur der Fragestellung bringt es mit sich, daß die betrachteten Kurven und Bögen gewissen, möglichst schwach gewählten Differenzierbarkeitsforderungen unterworfen werden. Es wird aber häufig nützlich sein, auf die reiche Literatur über

¹⁾ Die Angaben beziehen sich auf das am Schluß der zweiten Arbeit befindliche Literaturverzeichnis.

allgemeinere Bögen und Kurven Bezug zu nehmen (vergl. etwa: HAUPT [3]), eine Literatur, die ihre Hilfsmittel der geometrischen Mengenlehre und der Theorie der reellen Funktionen entnimmt. Beide Richtungen haben den grundlegenden allgemeinen Ordnungsbegriff gemeinsam. Die Ordnung einer Mannigfaltigkeit mißt die obere Grenze der Mächtigkeiten des Durchschnitts der Mannigfaltigkeit mit anderen Mannigfaltigkeiten, die einer ausgezeichneten Schar angehören (vergl. HAUPT [4]). Besonders wichtig ist der lineare Ordnungsbegriff; hier besteht die ausgezeichnete Schar aus linearen Mannigfaltigkeiten. So gelangen wir etwa bei einem im Sinne von 1.7 differenzierbaren Bogen im dreidimensionalen projektiven Raum u. a. zu drei verschiedenen Definitionen der linearen Ordnung, indem wir ihn als die Mannigfaltigkeit bzw. seiner Punkte, Tangenten, Schmiegeebenen auffassen und als seine Ordnung die obere Grenze der Anzahl der Schnittpunkte dieser Mannigfaltigkeit mit bzw. den Ebenen, Geraden, Punkten des Raumes definieren.

Die Übertragung von Ergebnissen der algebraischen Geometrie auf allgemeinere reelle Gebilde ist systematisch zuerst von JUEL unternommen worden. Eine schöne Übersicht über seine wichtigsten Arbeiten und über die Literatur bis zum Jahre 1924 findet sich bei MONTEL [1], weitere Literaturnachweise bei HAUPT [4]. Es sei noch darauf hingewiesen, daß Herr v. NAGY in seinen Untersuchungen über die sog. Kurven und Flächen vom Maximalindex algebraisch-geometrische Ergebnisse und Gedankengänge auf ausgedehnte Klassen reeller Kurven und Flächen zu übertragen vermochte; vergl. die bei v. NAGY [1] angegebene Literatur.

In der folgenden Note betrachten wir einen Bogen, der in einem seiner Punkte im Sinne von 1.6 differenzierbar ist. Dann gestattet ein einfaches Lemma die Einführung eines Zahlensystems, der Charakteristik des Punktes, die das Verhalten des Bogens in seiner Nähe beschreibt. Die systematische Untersuchung der Charakteristik sei auf spätere Arbeiten verschoben. Hier gebe nur der letzte Paragraph Beispiele seiner Anwendbarkeit.

Eine der Charakteristik im wesentlichen gleichwertige Folge von Vorzeichen wurde von Herrn DENK [1] eingeführt, um die Ordnung eines differenzierbaren elementaren Punktes (vergl. 1) zu bestimmen. Einige einfache Eigenschaften der Projektion eines Bogens (3.3 — 3.5) findet der Leser ausführlicher nachgewiesen von Fräulein SAUTER [2]. An dieser Stelle möchte ich noch Herrn Prof. Dr. HAUPT für sein Interesse und seine Verbesserungsvorschläge danken.

1. Definitionen.

1.1 Wir betrachten (reelle) Bögen in einem n -dimensionalen projektiven Raume R_n . Hierbei werde unter einem Bogen das eindeutige und stetige Bild der Strecke verstanden; er kann also eindeutig und stetig auf einen Parameter s bezogen werden. Der zum Parameter s gehörige Punkt werde gleichfalls mit s bezeichnet.

1.2 Eine Umgebung des Parameters s auf der Parameterstrecke hat zum Bild eine Umgebung des Punktes s auf dem Bogen. Konvergiert eine Folge von Parameterwerten gegen den Parameter s , so nennen wir auch die zugehörige Folge von Punkten des Bogens konvergent gegen den Punkt s .

1.3 Die obere Grenze der Anzahl der in einer Hyperebene gelegenen Punkte eines Bogens heißt seine Ordnung. Die Ordnung eines Punktes s des Bogens ist die Ordnung einer hinreichend kleinen Umgebung von s . Offensichtlich ist die Ordnung eines Bogens im R_n mindestens gleich n .

1.4 Ein Elementarbogen ist ein Bogen n -ter Ordnung im R_n ; ein elementarer Punkt des Bogens zerlegt passende Umgebungen in zwei Elementarbögen.

1.5 Der Punkt s heiße Stützpunkt bzw. Schnittpunkt bezüglich einer Hyperebene, wenn eine passende Umgebung von s keinen weiteren Punkt mit der Hyperebene gemein hat, und wenn die beiden Teilbögen, in die die Umgebung durch s zerlegt wird, auf derselben bzw. auf verschiedenen Seiten der Hyperebene liegen. Entsprechend werde die Hyperebene selbst als Stütz- oder Schnitthyperebene des Bogens in s bezeichnet. Eine nicht durch s gehende Hyperebene ist also Stützhyperebene.

1.6 Der Punkt s heiße differenzierbar, wenn sämtliche linearen Schmiegmannigfaltigkeiten $L_k^n = L_k^n(s)$ existieren ($k = -1, 0, 1, \dots, n$): L_{-1}^n sei der leere Raum. L_{k-1}^n ($0 \leq k < n$) sei bereits definiert und seine Existenz gefordert. Dann soll die k -dimensionale lineare Mannigfaltigkeit durch L_{k-1}^n und einen irgendwie gegen s rückenden Punkt des Bogens konvergieren; ihre Grenzlage wird dann gerade als k -dimensionale lineare Schmiegmannigfaltigkeit L_k^n bezeichnet. Es ist also L_0^n der Punkt s selbst, L_n^n der volle Raum R_n .²⁾

Enthält eine Hyperebene L_k^n , aber nicht L_{k+1}^n ($-1 \leq k < n$), so sagen wir, sie enthalte „genau“ L_k^n .

1.7 Ein Bogen heiße differenzierbar, wenn jeder seiner Punkte differenzierbar ist.

²⁾ Vergl. SAUTER [2].

2. Ein Lemma.

Der Punkt s sei differenzierbar. Dann ist jede Hyperebene Stütz- oder Schnitthyperebene in s , ausgenommen höchstens die Schmieghyperebene $L_{n-1}^n(s)$; ist s Schnitt- bzw. Stützpunkt bezüglich einer Hyperebene, die genau $L_k^n(s)$ enthält, so bezüglich einer jeden solchen Hyperebene ($0 \leq k \leq n-2$).

Die erste Behauptung ist klar: s sei weder Schnitt- noch Stützpunkt bezüglich der durch ihn gehenden Hyperebene E ; dann wird E also von jeder Umgebung von s außerhalb von s getroffen, und es gibt eine Folge von Punkten s_1, s_2, \dots des Bogens, die in E gelegen sind und gegen s konvergieren. Es sei schon gezeigt, daß $L_{k-1}^n(s)$ in E liegt ($0 \leq k \leq n-1$). Die k -dimensionalen linearen Mannigfaltigkeiten durch $L_{k-1}^n(s)$ und die s_i liegen in E und konvergieren definitionsgemäß gegen $L_k^n(s)$, das somit gleichfalls in E liegt. Nach $n-1$ Schritten ergibt sich die Behauptung.

Die zweite Behauptung kann etwa so eingesehen werden: Es sei $0 \leq k < n-1$. Zwei Hyperebenen, von denen jede genau $L_k^n(s)$ enthält, lassen sich durch eine stetig von einem Parameter λ ($0 \leq \lambda \leq 1$) abhängige Schar von Hyperebenen $E(\lambda)$ verbinden, deren jede die gleiche Eigenschaft hat.

Konvergiert die Folge $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ gegen λ_0 und sind alle $E(\lambda_i)$ Schnitt- bzw. Stützhyperebenen in s , so ist auch $E(\lambda_0)$ Schnitt- bzw. Stützhyperebene. Diese Bemerkung ist klar, wenn es eine Umgebung von s gibt, die von allen $E(\lambda_i)$ nur in s selbst getroffen wird; gäbe es aber keine solche Umgebung, so gäbe es eine Teilfolge der λ , sodaß die zugehörigen Hyperebenen den Bogen in Punkten trafen, die gegen s konvergierten; $E(\lambda_0)$ enthielte also $L_{k+1}^n(s)$. Daher ist für alle λ , die irgend einem λ_0 mit $0 \leq \lambda_0 \leq 1$ hinreichend nahe liegen, $E(\lambda)$ zugleich mit $E(\lambda_0)$ Schnitt- bzw. Stützhyperebene. Von hier aus läßt sich die Annahme, daß $E(0)$ Schnitt-, $E(1)$ aber Stützhyperebene ist, leicht zum Widerspruch führen.

3. Einführung der Charakteristik.

3.1 Der Punkt s sei differenzierbar. Dann kann ihm auf Grund des Lemmas 2 folgendermaßen eine Charakteristik zugeordnet werden: Es sei $0 \leq k < n$; ist s Stütz- bzw. Schnittpunkt bezüglich einer Hyperebene, die genau L_{k-1}^n enthält, so werde L_k^n die Zahl 1 oder 2 zugeordnet, je nachdem eine Hyperebene, die genau L_k^n enthält, Schnitt- bzw. Stützhyperebene bezüglich s ist oder nicht. Ist die Schmieghyperebene L_{n-1}^n weder

Stütz- noch Schnitthyperebene, so werde ihr ∞ zugeordnet. Hiermit ist der Folge L_0^n, \dots, L_{n-1}^n eine Zahlenfolge

$$(a_0, \dots, a_{n-1})$$

zugeordnet, die Charakteristik von s .

3.2 Herr DENK ordnet der Folge $L_{-1}^n L_0^n, \dots, L_{n-1}^n$ eine Folge von Vorzeichen zu, und zwar der k -dimensionalen linearen Schmiegmannigfaltigkeit L_k^n ($-1 \leq k \leq n-1$) das Zeichen $+$ oder das Zeichen $-$, je nachdem eine Hyperebene, die genau L_k^n enthält, Stütz- oder Schnitthyperebene ist.³⁾ Es ist also a_k gleich 1 oder gleich 2, je nachdem L_k^n und L_{k-1}^n entgegengesetzte oder gleiche Vorzeichen haben.

Es werde noch die Charakteristik einer Projektion angegeben.⁴⁾

3.3 Das Projektionszentrum liege auf $L_{k_0+1}^n$, aber nicht auf $L_{k_0}^n$ ($-1 \leq k_0 < n$). Die Projektion von s ist gleichfalls differenzierbar; sie habe die linearen Schmiegmannigfaltigkeiten $L_k^{n-1} = L_k^{n-1}(s)$ ($k = -1, 0, 1, \dots, n-1$). Dann ist L_k^{n-1} die Projektion von L_k^n bzw. von L_{k+1}^n für $-1 \leq k < k_0$ bzw. $k_0 \leq k \leq n$.

3.4 Wird zum Projektionszentrum der Punkt s selbst gewählt, ist also $k_0 = -1$, so haben L_k^{n-1} und L_{k+1}^n ($k = -1, \dots, n-2$) gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen, je nachdem eine Hyperebene, die genau L_0^n enthält, den Bogen stützt oder schneidet. Die Projektion aus s hat somit die Charakteristik (a_1, \dots, a_{n-1}) .

3.5 Es sei $0 \leq k_0 < n$. Das Projektionszentrum liege auf $L_{k_0+1}^n$ aber nicht auf $L_{k_0}^n$. Dann gehören zu den Folgen $L_{-1}^{n-1}, L_0^{n-1}, \dots, L_{n-2}^{n-1}$ und $L_{-1}^n, L_0^n, \dots, L_{k_0-1}^n, L_{k_0+1}^n, \dots, L_{n-1}^n$ die gleichen Vorzeichenfolgen. Die Projektion hat somit die Charakteristik $(a_0, \dots, a_{k_0-1}, a'_{k_0}, a_{k_0+2}, \dots, a_{n-1})$ mit $a'_{k_0} \equiv a_{k_0} + a_{k_0+1} \pmod{2}$ für $k_0 < n-1$; für $k_0 = n-1$ hat die Projektion einfach die Charakteristik (a_0, \dots, a_{n-2}) .

4. Ordnung und Charakteristik eines differenzierbaren Punktes.

4.1 Der Punkt s sei differenzierbar. Er habe die Charakteristik (a_0, \dots, a_{n-1}) . Es werde $A = a_0 + \dots + a_{n-1}$ gesetzt. Dann hat s mindestens die Ordnung A (vergl. 1.3).

³⁾ DENK [1]. Um der Schmieghyperebene ein Vorzeichen zuzuordnen zu können, muß man natürlich verlangen, daß sie wirklich Stütz- oder Schnitthyperebene ist.

⁴⁾ Vergl. SAUTER [2].

4.2 Vorbemerkungen:

4.21 Wir können beim Beweise voraussetzen, daß a_{n-1} endlich ist, und daß die Schmieghyperebene von s den Bogen nur in s selbst trifft.

4.22 Man beweist leicht: Die Schmieghyperebene ist Stütz- oder Schnitthyperebene, je nachdem A gerade oder ungerade ist.

4.3 Zur Erleichterung der Induktion behaupten wir etwas mehr:

Es gibt eine gegen die Schmieghyperebene konvergente Folge von Hyperebenen, von denen jede den Bogen in wenigstens A gegen s rückenden Punkten schneidet (d. h. durchsetzt, nicht stützt).

Die Behauptung erledigt sich für $n = 2$ durch Diskussion der vier möglichen Fälle. Sie sei bis $n - 1$ bewiesen.

Die Folge von Punkten s_1, s_2, \dots strebe gegen s . Die Projektion des Bogens aus einem s_i hat nach 3.5 die Charakteristik (a_0, \dots, a_{n-2}) in s . Daher ergibt sich aus der Induktionsannahme: Zu jedem s_i gibt es eine gegen die Hyperebene durch s_i und die Hypertangente von s strebende Folge von Hyperebenen E_{ik} durch s_i ($k = 1, 2, \dots$), so daß jede Hyperebene E_{ik} den Bogen in wenigstens $A - a_{n-1}$ mit wachsendem k gegen s konvergenten Punkten schneidet. Für hinreichend große k sind diese Schnittpunkte sicher von s_i verschieden. Hieraus läßt sich sofort entnehmen, daß aus dem System der E_{ik} eine neue Folge von Hyperebenen $E_i = E_{ik_i}$ mit folgenden Eigenschaften ausgewählt werden kann: Sie konvergiert gegen die Schmieghyperebene von s und jede Hyperebene E_i trifft den Bogen in s_i und schneidet ihn außerdem in wenigstens $A - a_{n-1}$ Punkten, die für hinreichend hohen Index i dem Punkte s beliebig nahe liegen. Indem die E_i und die s_i passenden kleinen Änderungen unterworfen werden, läßt sich erreichen, daß die E_i den Bogen in den s_i schneiden und sonst alle obigen Eigenschaften behalten.

Ist $a_{n-1} = 1$, so leistet die neue Folge schon das Verlangte.

Es sei $a_{n-1} = 2$. Ich grenze eine beliebige Umgebung um s ab. Ist i groß genug, so schneidet E_i diese Umgebung in wenigstens $A - 1$ Punkten. Wir nehmen an, unendlich viele E_i schneiden die Umgebung in nicht mehr als $A - 1$ Punkten. Diese Hyperebenen bilden eine neue Folge. Die Endpunkte der Umgebung lägen auf derselben oder auf verschiedenen Seiten einer jeden Hyperebene der Folge, also auch der Schmieghyperebene, je nachdem $A - 1$ gerade oder ungerade ist. Die Schmieghyperebene wäre also Stütz- oder Schnitthyperebene, je nachdem A ungerade oder gerade ist. Dies widerspricht der Bemerkung 4.22; aus der Falschheit der obigen Annahme folgt unmittelbar die Behauptung.

4.4 Die Ordnung von s kann, wie Beispiele zeigen, größer als A sein; kommt aber zu den Voraussetzungen von 4.1 hinzu, daß s elementar ist, so hat s nach einem Satze von Herrn DENK genau die Ordnung A .⁵⁾

*

O derivovatelných křivkách a obloucích.

I. K pojmu charakteristiky.

(Obsah předešlého článku.)

Tento článek je první v řadě prací, v nichž budou vyšetřovány — s hlediska obdobného tomu, jež se uplatňuje v teorii algebraických křivek — obecnější reálné oblouky a uzavřené křivky. Objasníme problém klasicky jednoduchým příkladem ze starší literatury: Juel vyšetřoval v projektivní rovině uzavřené křivky, jejichž tečna se spojitě mění a jež jsou každou přímkou protčaty nejvýše ve třech bodech a aspoň jednou přímkou právě ve třech bodech; ukázal pak, že známé rozdělení ireducibilních rovinných algebraických křivek třetího řádu podle jejich průběhu v reálném oboru zůstává beze změny v platnosti pro tuto obecnější třídu křivek. Samozřejmě existují křivky tohoto druhu, jež nejsou algebraické, ba ani analytické.

V tomto článku vyšetřuji oblouk, který v jednom svém bodě je v jistém smyslu derivovatelný. Potom dovoluje nám jednoduchá pomocná věta zavést systém čísel, t. zv. charakteristiku bodu, která charakterisuje průběh oblouku v blízkosti tohoto bodu. Dokazuji, že řád derivovatelného bodu má dolní hranici, závisící pouze na jeho charakteristice. Při tom „řád oblouku“ znamená maximální počet jeho průsečíků s libovolnou nadrovinou; „řád bodu“ znamená pak řád dostatečně malého okolí tohoto bodu.

⁵⁾ DENK [1].

Über differenzierbare Kurven und Bögen.

Peter Scherk, Praha.

(Eingegangen am 4. Dezember 1936.)

II.

Elementarbogen und Kurve n -ter Ordnung im R_n .

Einleitung.

Im folgenden sollen reelle Kurven n -ter Ordnung und Elementarbögen im n -dimensionalen projektiven Raume R_n untersucht werden, also Bögen und Kurven, die von jeder Hyperebene in höchstens n Punkten getroffen werden.¹⁾ Die betreffenden Gebilde werden als differenzierbar im Sinne der Definitionen I, 1.6 und 1.7 vorausgesetzt.²⁾

Die Arbeit zerfällt in 2 Teile. Der 1. (1—4) stellt eine Reihe einfacher in der Literatur größtenteils schon erwähnter Tatsachen über differenzierbare Elementarbögen B^n im R_n zusammen. Es sei etwa angegeben: Die B^n sind regulär, d. h. sie haben in jedem inneren Punkte die Charakteristik $(1, 1, \dots, 1)$ (1); für alle offenen B^n und gewisse abgeschlossene gilt eine Vielfachheitszählung ihrer Treffpunkte mit einer Hyperebene (2); die linearen Schmiegmännigfaltigkeiten der B^n sind stetig (3). In 4 wird die Zusammensetzung zweier B^n zu einer differenzierbaren Kurve n -ter Ordnung C^n besprochen. Das Hauptergebnis des 2. Teiles ist der Satz 7.6: Eine Dualität führt jede B^n wieder in eine B^n über. Hierin ist enthalten, daß die Klasse einer B^n , also die Maximalzahl ihrer Schmieghyperebenen durch einen Punkt des Raumes gleich n ist.

Neben den Sätzen von 4, die gestatten, sich auf die C^n zu beschränken und einer zur obenerwähnten dualen Vielfachheitszählung der Schmieghyperebenen der C^n durch einen Punkt des R_n ist das Haupthilfsmittel beim Beweise von 7.6 diejenige stetige

¹⁾ Elementarbogen und Kurve n -ter Ordnung im R_n unterscheiden sich nur darin, daß der eine das eindeutige und stetige Bild der Strecke, die andere das der Kreisperipherie ist.

²⁾ Die vorangehende Note wird mit I zitiert.

Abbildung der C^n auf sich, die entsteht, wenn jedem Kurvenpunkte s der eindeutig bestimmte Punkt zugeordnet wird, in dem die Hyperebene durch einen festen Punkt des R_n und die Hyper-tangente von s die Kurve noch einmal schneidet.

Über die Tragweite der Differenzierbarkeitsvoraussetzungen vergleiche man HJELMSLEV [1] und SAUTER [2].³⁾ Ein Beweis der Regularität der B^n läßt sich aus SAUTER [2] entnehmen; bei HJELMSLEV [1] findet man einen für die Stetigkeit der linearen Schmiegmännigfaltigkeiten der B^n . Fräulein SAUTER [2] hat auch die Zusammensetzung zweier nichtdifferenzierbarer B^n zu einer Kurve n -ter Ordnung untersucht. Natürlich wird die Behandlung dieser Frage durch die Differenzierbarkeitsvoraussetzungen wesentlich vereinfacht. Das Dualitätsprinzip 7.6 für die B^n ist für $n = 2$ und $n = 3$ schon von JUEL [1] und [2] erwähnt. Beweise dieser beiden Fälle finden sich bei LINSMAN [1].

1. Regularität des differenzierbaren Elementarbogens.

Wir betrachten offene differenzierbare Elementar-bögen B^n im n -dimensionalen projektiven Raum R_n .

1.1 Aus der Definition des Elementarbogens folgt unmittelbar, daß er doppeltpunktfrei ist, und daß keine Gerade ihn in mehr als zwei Punkten trifft. *Die Projektion von B^n aus einem seiner Punkte s' ist daher wieder ein differenzierbarer Elementar-bogen B^{n-1} .*

Für $s \neq s'$ werde die Projektion von s wieder mit s , die k -dimensionale lineare Schmiegmännigfaltigkeit von B^{n-1} in s mit $L_k^{n-1}(s)$ bezeichnet ($-1 \leq k \leq n-1$).

1.2 Ein Bogen heiße regulär in einem differenzierbaren Punkte s , wenn s die Charakteristik $(1, \dots, 1)$ hat, wenn also für jedes k mit $-1 \leq k < n$ gilt: Jede Hyperebene, die genau $L_k^n(s)$ enthält, ist Schnitt- oder Stützhyperebene in s , je nachdem k gerade oder ungerade ist.

Nach dem Satze I, 4.1 sind *alle Punkte von B^n regulär.*

1.3 Es sei noch ein direkter Beweis der obigen Bemerkung angegeben. Wie behaupten zugleich:

Die Schmieghyperebenen treffen B^n nicht mehr.

1.4 Anhand des Lemmas I, 2 überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit beider Behauptungen für $n = 2$. Sie seien schon für die B^{n-1} bewiesen. Dann ergibt sich die Gültigkeit von 1.2 für die B^n etwa so:

Die Schmieghyperebene eines beliebigen Punktes s von B^n trifft den Bogen jedenfalls in höchstens endlich vielen Punkten;

³⁾ Die Literaturangaben beziehen sich auf das am Schlusse dieser Note befindliche Verzeichnis.

s' sei von diesen, insbesondere von s verschieden. B^{n-1} sei die Projektion von B^n aus s' (vergl. 1.1). Für $-1 \leq k < n-1$ enthält eine passende Hyperebene durch s' genau $L_k^n(s)$; sie projiziert sich aus s' in eine Hyperebene, die genau $L_k^{n-1}(s)$ enthält. Es projizieren sich aber Schnitt- in Schnitt-, Stütz- in Stützhyperebenen.

Die Hyperebene E durch s' und $L_{n-2}^n(s)$ trifft B^n sonst nicht mehr. Denn andernfalls träfe die Schmieghyperebene $L_{n-2}^{n-1}(s)$ B^{n-1} noch einmal, was der Induktionsannahme 1.3 widerspricht; aus dem gleichen Grunde ist s' Schnittpunkt bezüglich E . Lasse ich s' gegen s rücken, so strebt E definitionsgemäß gegen $L_{n-1}^n(s)$; die Endpunkte irgendeiner Umgebung von s liegen für alle s hinreichend nahen s' auf derselben oder auf verschiedenen Seiten von E , also auch von $L_{n-1}^n(s)$, je nachdem s Schnitt- oder Stützpunkt bezüglich E ist. Daher ist s Stütz- oder Schnittpunkt bezüglich $L_{n-1}^n(s)$, je nachdem E Schnitt- oder Stützhyperebene in s ist.

Die Behauptung 1.3 ergibt sich etwa so für die B^n : $L_{n-1}^n(s)$ treffe B^n noch in s' . $L_{n-2}^{n-1}(s)$ sei die Projektion von $L_{n-1}^n(s)$ aus s' (Bezeichnungen wie in 1.1). Ist s Stütz- bzw. Schnittpunkt bezüglich $L_{n-1}^n(s)$, so auch auf B^{n-1} bezüglich $L_{n-2}^{n-1}(s)$. Dies ist nicht möglich; denn nach Induktionsannahme ist s auf B^{n-1} und, wie eben bemerkt, auch auf B^n regulär.

2. Vielfachheitszählung.

2.1 *Der Punkt s gehöre dem offenen differenzierbaren Elementarbogen B^n an. Enthält eine lineare Mannigfaltigkeit genau $L_k^n(s)$ ($-1 \leq k < n$), so werde s als $(k+1)$ -facher Treffpunkt der linearen Mannigfaltigkeit mit dem Bogen gezählt. Man zeigt leicht, daß diese Vielfachheitszählung die Ordnung von B^n nicht erhöht, mit andern Worten, daß die Summe der Vielfachheiten der Treffpunkte von B^n mit einer Hyperebene höchstens gleich n ist.*

Für $n=2$ ist diese Behauptung in 1.3 enthalten. Es sei $n > 2$. Wir können voraussetzen, daß die betrachtete Hyperebene E_{n-1}^n den Bogen B^n in mindestens 2 Punkten trifft; einer von ihnen sei s' . Nach 1.3 ist E_{n-1}^n nicht Schmieghyperebene und geht keine lineare Schmiegmannigfaltigkeit eines von s' verschiedenen Punktes s durch s' . Wir projizieren B^n aus s' (Bezeichnungen wie in 1.1). Dann projiziert sich E_{n-1}^n in eine Hyperebene E_{n-2}^{n-1} und $L_k^n(s)$ in $L_k^{n-1}(s)$ ($s \neq s'$; $0 \leq k < n-1$). Die Projektion läßt also die Vielfachheiten der von s' verschiedenen Treffpunkte ungeändert.

Die Vielfachheit, mit der s' gezählt wird, wird durch die Projektion um eins vermindert; denn $L_k^n(s')$ projiziert sich in $L_{k-1}^{n-1}(s')$ ($0 \leq k \leq n$). Im ganzen wird die Summe der Vielfachheiten der Treffpunkte durch die Projektion um eins vermindert. Hieraus folgt die Behauptung durch Induktion.

Als Sonderfälle von 2.1 seien hervorgehoben:

2.2 *Trifft eine Hyperebene den Bogen B^n in n verschiedenen Punkten, so zerschneidet sie ihn in jedem von ihnen; denn alle Treffpunkte sind einfach.*

2.3 *Sind s und s' voneinander verschieden, so haben $L_k^n(s)$ und $L_{n-k-1}^n(s')$ ($-1 \leq k \leq n$) keinen Punkt gemeinsam. Denn andernfalls ließe sich durch sie eine Hyperebene legen, und diese träge den Bogen mindestens $(n+1)$ -fach. Hierin ist außer 1.3 insbesondere enthalten, daß*

2.4 *die linearen Schmiegmännigfaltigkeiten verschiedener Punkte verschieden sind.*

2.5 Bei abgeschlossenen differenzierbaren Elementarbögen \bar{B}^n im R_n ergeben sich einige Unterschiede. Damit die Projektion von \bar{B}^n ein \bar{B}^{n-1} ist, muss man zusammenfallende Endpunkte von \bar{B}^n zulassen. Auf \bar{B}^n braucht 2.1 nicht zu gelten. Für die Gültigkeit der Vielfachheitszählung ist notwendig und hinreichend das folgende Fremdheitskriterium⁴⁾: *Hat \bar{B}^n die Endpunkte s und s' , so haben $L_k^n(s)$ und $L_{n-k-1}^n(s')$ keinen Punkt gemeinsam ($k = 0, 1, \dots, n-1$).*

Die Notwendigkeit der Bedingung ist evident. (vergl. 2.3). Um zu zeigen, daß sie hinreicht, langt es zu beweisen, daß keine Hyperebene, die \bar{B}^n mehr als n -fach gemäß der Vielfachheitszählung 2.1 trifft, innere Punkte mit \bar{B}^n gemein hat. Dies ist klar für $n = 2$; denn eine Tangente, die \bar{B}^2 noch einmal träge und durch einen inneren Punkt ginge, könnte durch eine passende kleine Drehung in eine Gerade übergeführt werden, die \bar{B}^2 in drei Punkten träge. Wegen 2.1 muß eine Hyperebene, die \bar{B}^n mehr als n -fach träge, durch wenigstens einen Endpunkt, etwa durch s' gehen. Projektion aus s' führt die Behauptung auf den $(n-1)$ -dimensionalen Fall zurück.

2.6 Aus 2.1 ergibt sich unmittelbar die folgende Bemerkung⁵⁾: *Ist der Bogen B^n in einem affinen Raume beschränkt, so liegt er ganz auf dem Rande seiner konvexen Hülle.*⁶⁾

⁴⁾ Systematisch betrachtet u. a. von Fräulein SAUTER [2], die ihm auch den schönen Namen gegeben hat. Falls s und s' inzidieren, ist die Vielfachheitszählung für s und s' gesondert vorzunehmen.

⁵⁾ Die Bemerkung stammt von HAUPT [2], der sie für beliebige Elementarbögen bewiesen hat.

⁶⁾ Unter der konvexen Hülle einer beschränkten Punktmenge

Es ist zu zeigen, daß durch jeden Punkt s von B^n eine Stützhyperebene an B^n gelegt werden kann. Ist n gerade, so stützt nach 1.2 die Schmieghyperebene von s dort den Bogen und trifft ihn sonst nicht mehr.⁷⁾ Ist n ungerade, so stützt die Hyperebene durch $L_{n-2}^n(s)$ und einen beliebigen Punkt s' des Bogens ($s' \neq s$) ihn in s , zerschneidet ihn in s' und trifft ihn sonst nirgends (2.1). Daher dreht sie sich monoton um $L_{n-2}^n(s)$, wenn s' B^n durchläuft. Rückt s' gegen einen Endpunkt von B^n , so konvergiert die Hyperebene gegen eine Grenzhyperebene, die B^n nur in s selbst trifft und dort stützt.⁸⁾

3. Totale Konvergenz.

3.1 Gegeben eine stetige Schar offener differenzierbarer Elementarbögen $B^n(s')$ (s' = Scharparameter), die alle auf ein- und denselben Bogenparameter s bezogen seien. Der zu s gehörige Punkt des Bogens $B^n(s')$ werde mit s/s' bezeichnet, seine linearen Schmiegmännigfaltigkeiten mit $L_k^n(s/s')$.

Eine Folge von Scharparametern s' strebe gegen den Scharparameter s'_0 . Dann nennen wir die $B^n(s')$ total konvergent gegen $B^n(s'_0)$, wenn für jeden Bogenparameter s_0 und jede gegen s_0 konvergente Folge von Bogenparametern s die Punkte s/s' gegen den Punkt s_0/s'_0 rücken.

3.2 Wir schließen uns an die obigen Bezeichnungen an. Unser Ziel ist der folgende Satz:

Die Folge der $B^n(s')$ konvergiere total gegen $B^n(s'_0)$. Es sei $0 \leq k < n$; $k + 1$ Folgen von Bogenparametern s_1, \dots, s_{k+1} mögen

in einem affinen Raume versteht man den Durchschnitt aller abgeschlossenen konvexen Punktmenge, die die Menge enthalten. Vergl. etwa BONNESEN-FENCHEL [1].

⁷⁾ Dies gilt auch für einen beliebigen differenzierbaren Elementarbogen B^n in einen projektiven Raume gerader Dimension. Für gerade n kann B^n also stets durch Auszeichnung einer passenden uneigentlichen Hyperebene in einen beschränkten Elementarbogen übergeführt werden. Vergl. JUELS [1] Definition der ebenen Elementarbögen. — Ebenso zeigt man für gerade n , daß eine differenzierbare Kurve n -ter Ordnung im R_n (vergl. 4) nach Auszeichnung einer passenden uneigentlichen Hyperebene ganz im Endlichen und auf dem Rande ihrer konvexen Hülle gelegen ist.

⁸⁾ Da der Bogen als offen angenommen, also die Existenz von Endpunkten von B^n nicht vorausgesetzt ist, so haben wir genauer zu sagen: Strebt der Parameter s' gegen einen Endpunkt der Parameterstrecke, ...

Übrigens ist die Existenz der Endpunkte von B^n sowie die Richtigkeit der folgenden Angaben leicht einzusehen: Die Vereinigungsmenge von B^n und seinen Endpunkten ist ein abgeschlossener differenzierbarer Elementarbogen; B^n ist für ungerades n genau dann nach Auszeichnung einer passenden Hyperebene beschränkt, wenn die Endpunkte von B^n nicht zusammenfallen.

sämtlich gegen den Bogenparameter s_0 konvergieren. Dann konvergiert die von den Punkten $s_1/s', \dots, s_{k+1}/s'$ aufgespannte k -dimensionale lineare Mannigfaltigkeit⁹⁾ gegen $L_k^n(s_0/s'_0)$.

3.3 Nimmt man für alle $k + 1$ Folgen ein und dieselbe Folge, so ergibt sich aus **3.2**:

Die Folge von Bogen- bzw. Scharparametern s bzw. s' strebe gegen den Bogen- bzw. Scharparameter s_0 bzw. s'_0 ; die Folge der $B^n(s')$ sei total konvergent. Dann konvergieren die $L_k^n(s/s')$ gegen $L_k^n(s_0/s'_0)$. Mit anderen Worten: Die totale Konvergenz der $B^n(s')$ zieht die totale Konvergenz ihrer linearen Schmiegmännigfaltigkeiten nach sich.

3.4 Wählt man für alle $B^n(s')$ ein und denselben differenzierbaren Elementarbogen, so folgt aus **3.2**: Konvergieren $k + 1$ Punkte eines differenzierbaren Elementarbogens gegen einen Punkt s_0 des Bogens, so konvergiert die von ihnen aufgespannte k -dimensionale lineare Mannigfaltigkeit⁹⁾ gegen die k -dimensionale lineare Schmiegmännigfaltigkeit des Bogens in s_0 .

3.5 Identifiziert man schließlich alle diese $k + 1$ Punkte, so ergibt sich: Die linearen Schmiegmännigfaltigkeiten eines differenzierbaren Elementarbogens sind stetig.¹⁰⁾

3.6 Der Begriff der totalen Konvergenz kann leicht weiter verfolgt werden. Hier sei nur auf folgendes hingewiesen: Der Punkt s' bewege sich auf dem differenzierbaren Elementarbogen B^{n+1} ($n \geq 2$) gegen einen Punkt s'_0 des Bogens. Dann konvergiert die Projektion von B^{n+1} aus s' total gegen die aus s'_0 (vergl. **1.1**).

Beweis: Die Projektion des Punktes s von B^{n+1} aus s' sei mit s/s' bezeichnet. Wir haben zu zeigen: Konvergiert eine Folge der s gegen s_0 , eine der s' gegen s'_0 (s, s', s_0, s'_0 auf B^{n+1} gelegen), so konvergiert der Punkt s/s' gegen den Punkt s_0/s'_0 .

Diese Behauptung ist sicher richtig für $s_0 \neq s'_0$; denn dann besagt sie nur, daß die Gerade durch zwei verschiedene Punkte von B^{n+1} sich stetig mit ihnen ändert. Für $s_0 = s'_0$ folgt sie aber aus dem Falle $k = 1$ von Satz **3.4**.

3.7 Beweis von **3.2**.

Die Behauptung, für $k = 0$ in der Definition der totalen Konvergenz enthalten, sei bis $k - 1$ bewiesen ($0 < k < n$). Die $k + 1$ Folgen von Bogenparametern lassen sich zu einer Folge von Systemen S von je $k + 1$ Bogenparametern zusammen-

⁹⁾ Vergl. die Vielfachheitszählung **2.1**.

¹⁰⁾ HJELMSLEV [1]. Daß die Sätze **3.4** und **3.5** auch für die Endpunkte eines abgeschlossenen differenzierbaren Elementarbogens gelten, läßt sich mittels **4** unmittelbar einsehen; vergl. den Beweis von **7.6**.

fassen. Wir wählen ein System S_1 von $n - k - 1$ festen Werten des Bogenparameters, alle voneinander und von s_0 verschieden. Das zu S bzw. zu S_1 gehörige Punktesystem auf $B^n(s')$ werde mit S/s' bzw. S_1/s' bezeichnet.

Die Hyperebene $E(s')$ durch S/s' und S_1/s' trifft $B^n(s')$ nach 2.1 im ganzen genau $(k + 1)$ -fach in S/s' , genau $(n - k - 1)$ -fach in S_1/s' und sonst nirgends. Die $E(s')$ häufen sich gegen Hyperebenen durch $L_{k-1}^n(s_0/s'_0)$ und die $n - k - 1$ Punkte von S_1/s'_0 . Wir beschränken uns auf eine Teilfolge der s' mit der Eigenschaft, daß die zugehörigen $E(s')$ und ihre Treffpunkte mit $B^n(s'_0)$ konvergent sind. Die Grenzlage dieser $E(s')$ sei mit $E(s'_0)$ bezeichnet.

Auf der Parameterstrecke grenzen wir um s_0 eine zu S_1 fremde Umgebung ab, deren Endpunkte s_1 und s_2 so gewählt sind, daß der von s_1/s'_0 und s_2/s'_0 begrenzte abgeschlossene Teilbogen von $B^n(s'_0)$ keinen Punkt außer s_0/s'_0 mit $E(s'_0)$ gemein hat. Wir können annehmen, daß die S im Innern dieser Umgebung liegen. Der Punkt s_1/s' konvergiert gegen den (nicht auf $E(s'_0)$ gelegenen) Punkt s_1/s'_0 ; daher liegen s_1/s' und s_1/s'_0 für alle s' bis auf höchstens endlich viele auf derselben Seite von $E(s')$. Nun folgt aus 1.2, daß s_1/s' und s_2/s' stets auf derselben oder stets auf verschiedenen Seiten von $E(s')$ liegen, je nachdem k ungerade oder gerade ist; dies gilt also auch für die beiden Punkte s_1/s'_0 und s_2/s'_0 und alle $E(s')$ bis auf höchstens endlich viele. Lassen wir s' gegen s'_0 gehen, so folgt hieraus weiter: s_1/s'_0 und s_2/s'_0 liegen auf derselben oder auf verschiedenen Seiten von $E(s'_0)$, s_0/s'_0 ist also Stütz- oder Schnittpunkt bezüglich $E(s'_0)$, je nachdem k ungerade oder gerade ist. Da $E(s'_0)$ $L_{k-1}^n(s_0/s'_0)$ enthält, folgt hieraus und aus 1.2, daß auch $L_k^n(s_0/s'_0)$ in $E(s'_0)$ liegt. $E(s'_0)$ ist somit eindeutig bestimmt, und wir haben: Strebt S/s' gegen s_0/s'_0 , so konvergiert die Hyperebene durch S/s' und S_1/s' gegen die Hyperebene durch $L_k^n(s_0/s'_0)$ und S_1/s'_0 . Dies gilt bei beliebiger Wahl von S_1 . Hieraus folgt etwa vermittels der Bemerkung 3.8 die Behauptung.¹¹⁾

3.8 Gegeben $n - k$ verschiedene Punkte eines differenzierbaren Elementar bogens im R_n ; der Punkt s_0 sei von ihnen verschieden. Dann haben die $n - k$ Hyperebenen durch $L_k^n(s_0)$ und je $n - k - 1$ der übrigen Punkte gerade den Durchschnitt $L_k^n(s_0)$ ($-1 \leq k < n$).

Der Induktionsbeweis ist trivial.

¹¹⁾ Aus 3.7 läßt sich sofort ein Beweis von 3.5 herauschälen. Nach einer freundlichen Mitteilung von Herrn HAUPT berührt sich dieser Beweis mit einem demnächst erscheinenden von Fräulein SAUTER. Vergl. SAUTER [1].

4. Bogen und Kurve n -ter Ordnung im R_n .¹²⁾

Unter einer Kurve werde hier das eindeutige und stetige Bild der Kreisperipherie verstanden.

4.1 *Wir betrachten zwei abgeschlossene differenzierbare Elementarbögen B^n und \bar{B}^n im R_n . Für jeden von ihnen gelte die Fremdheitsbedingung 2.5, also auch die Vielfachheitszählung 2.1. Dies ist z. B. der Fall, wenn B^n und \bar{B}^n abgeschlossene Teilbögen differenzierbarer offener Elementarbögen sind. B^n und \bar{B}^n mögen die Endpunkte s und \bar{s} gemein haben; die aus ihnen gebildete Kurve C^n sei in s und \bar{s} regulär (also nach 1.2 überall). Dann hat C^n die Ordnung n .*

Wir führen zugleich den Beweis für $n = 2$ und den Induktionsbeweis für $n > 2$.

Eine Hyperebene durch s oder \bar{s} trifft C^n höchstens n -fach. Dies folgt für $n > 2$ unmittelbar daraus, daß die Projektion von C^n aus s oder \bar{s} nach Induktionsannahme eine Kurve $(n - 1)$ -ter Ordnung im R_{n-1} ist, für $n = 2$ aber daraus, daß die Gerade durch s bzw. \bar{s} und einen C^2 monoton durchlaufenden Punkt sich wegen 2.2 monoton um s bzw. \bar{s} dreht.

Ich lege durch irgend $n - 1$ innere Punkte von \bar{B}^n eine Hypergerade E . Das Hyperebenenpaar durch E und s bzw. \bar{s} zerlegt den R_n in zwei Teilräume. B^n liegt ganz in dem einen Teilraum, \bar{B}^n ganz in dem anderen; denn keine der beiden Hyperebenen trifft C^n in weiteren Punkten, und alle Treffpunkte sind auf \bar{B}^n einfach zu zählen, also Schnittpunkte (vergl. 2.2). Die Hyperebene durch E und einen beliebigen inneren Punkt von \bar{B}^n trifft B^n also nicht.

Hieraus folgt für $n = 2$ die Behauptung. Für $n > 2$ schließen wir so:

Träfe eine Hyperebene C^n in mehr als n Punkten, so gäbe es einen inneren Punkt von B^n , aus dem sich C^n in den R_{n-1} als Kurve von mindestens n -ter Ordnung projizierte, \bar{B}^n also wegen der Induktionsvoraussetzung als Bogen n -ter Ordnung. Daher gäbe es eine Hyperebene durch n Punkte von \bar{B}^n , die B^n in wenigstens einem inneren Punkte träfe. Dies ist, wie eben bewiesen, unmöglich.

4.2 *Es reicht übrigens zu verlangen, daß C^n nicht in s und \bar{s} , sondern etwa nur in s regulär, in \bar{s} aber differenzierbar ist. Denn dann ist C^n von allein auch in \bar{s} regulär. Dies ist richtig für $n = 2$;*

¹²⁾ Vergl. SAUTER [2]. Fräulein SAUTER hat dort auch gezeigt, daß die in 4.3 vorgenommene Ergänzung schon mittels eines projektiven Bildes des ursprünglichen Bogens gelingt.

es sei bis $n - 1$ bewiesen. Die Projektion der C^n aus s bzw. \bar{s} erfüllt die Voraussetzungen. Nach Induktionsannahme ist die Projektion von \bar{s} auf der Projektion der C^n aus s bzw. \bar{s} regulär. Daher hat \bar{s} wegen der Fremdheitsbedingung und nach I 3.4 und 3.5 die Charakteristik $(1, \dots, 1, a_{n-1})$ bzw. $(a_0, 1, \dots, 1)$, also die Charakteristik $(1, \dots, 1)$.

4.3 Aus der Verschärfung 4.2 von 4.1 folgt insbesondere, daß jeder abgeschlossene differenzierbare Elementarbogen B^n , der die Fremdheitsbedingung 2.5 erfüllt, sich zu einer geschlossenen Kurve n -ter Ordnung im R_n ergänzen läßt.

B^n habe also die Endpunkte s und \bar{s} . Aus der Fremdheitsbedingung folgt, daß wir ein projektives Koordinatensystem einführen können, in dem die $L_k^n(s)$ und $L_k^n(\bar{s})$ die Koordinaten haben¹²⁾:

$$L_0^n(s) = (10\dots 0); L_1^n(s) = \begin{pmatrix} 100\dots 0 \\ 010\dots 0 \end{pmatrix}; \dots; L_{n-1}^n(s) = \begin{pmatrix} 100\dots 00 \\ 010\dots 00 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ 000\dots 10 \end{pmatrix}$$

$$L_{n-1}^n(\bar{s}) = \begin{pmatrix} 00\dots 001 \\ 00\dots 010 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ 01\dots 000 \end{pmatrix}; \dots; L_1^n(\bar{s}) = \begin{pmatrix} 0\dots 001 \\ 0\dots 010 \end{pmatrix}; L_0^n(\bar{s}) = (0\dots 01).$$

Es sei $c_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_{n+1} \neq 0$. Dann geht die algebraische Kurve n -ter Ordnung

$$x_1 : x_2 : \dots : x_{n+1} = c_1 : c_2 t : \dots : c_{n+1} t^n$$

durch s und \bar{s} und hat dort die gleichen linearen Schmiegmännigfaltigkeiten wie B^n . Sie wird durch s und \bar{s} in zwei Bögen n -ter Ordnung zerlegt, welche die Fremdheitsbedingung erfüllen. Durch passende Wahl der Vorzeichen der c_i läßt sich erreichen, daß die aus B^n und dem einen der beiden Bögen gebildete Kurve C^n in s regulär ist; sie ist in \bar{s} differenzierbar, erfüllt also die Voraussetzungen von 4.2.

4.4 Man zeigt leicht, daß 4.1 (aber nicht 4.2!) richtig bleibt, wenn die Voraussetzung wegfällt, daß B^n und \bar{B}^n der Fremdheitsbedingung genügen. Aus der Regularität von C^n in s und \bar{s} folgt schon die Gültigkeit des Fremdheitskriteriums.

Der Induktionsschluß von $n - 1$ auf n durch Projektion aus einem passenden der beiden gemeinsamen Endpunkte s und \bar{s} von B^n und \bar{B}^n ist trivial. Wir beschränken uns auf den Fall $n = 2$.

Eine Gerade durch s trifft B^2 und \overline{B}^2 in höchstens noch je einem Punkte. Die Gerade durch s und einen die C^2 monoton durchlaufenden Punkt ändert sich stetig mit diesem. Solange er nicht durch \overline{s} hindurchläuft, dreht sich die Gerade monoton; dies folgt aus der obigen Bemerkung und aus der Regularität von C^2 in s . Folglich ist die Drehung auch bei Durchgang des Punktes durch \overline{s} monoton. Da die C^2 in s regulär ist, kann daher die Tangente von \overline{s} nicht durch s gehen.

5. Bestimmung der Klasse.

5.1 Unter der Klasse etwa eines differenzierbaren Bogens im R_n versteht man die obere Grenze der Anzahl der Schmieghyperebenen, die er durch einen Punkt des Raumes schiebt. Da irgend n Schmieghyperebenen wenigstens einen Punkt gemein haben, ist die Klasse eines Bogens mindestens gleich n . Das Ziel dieses Abschnittes ist der Nachweis, daß jede differenzierbare Kurve C^n der n -ten Ordnung im R_n die Klasse n hat.¹³⁾

5.2 Der Punkt P liege auf der Schmieghyperebene, aber nicht auf der Hypertangente $L_{n-2}^n(s)$ des Punktes s der Kurve C^n . Dann enthält jede Umgebung U von s eine andere Umgebung V , sodaß jede Hyperebene durch P , die V $(n - 1)$ -fach trifft, U insgesamt n -fach trifft.

Andernfalls gäbe es nämlich eine Folge von Hyperebenen durch P , von denen jede eine feste Umgebung von s in genau $n - 1$ gegen s konvergenten Punkten träfe. Diese Hyperebenen häuften sich gemäß 3.4 gegen Hyperebenen durch P und die Hypertangente von s , also gegen die Schmieghyperebene von s ; andererseits lägen die Endpunkte der festen Umgebung auf derselben oder auf verschiedenen Seiten einer jeden Hyperebene der Folge, also auch der Schmieghyperebene von s , je nachdem n ungerade oder gerade ist. Dies widerspricht aber der Regularität von s .

s zerlegt U und V in je zwei Teilbögen; die beiden Teilbögen U' von U und V' von V seien durch s getrennt. Wie eben bemerkt, trifft jede Hyperebene durch P , die das Innere von V' $(n - 1)$ -fach trifft, U in noch einem Punkte. Wir behaupten, dieser Punkt liegt im Innern von U' .

Diese Behauptung ist klar im ebenen Falle. Ist sie gültig im R_{n-1} , so ergibt sich durch Projektion aus s für den n -dimensionalen Fall: die Hyperebene durch P , s und $n - 2$ innere Punkte von V' trifft U' in einem inneren Punkte. Daher trifft die Hyperebene durch P , die $n - 2$ Punkte und einen aus s in V' hinein-

¹³⁾ Über differenzierbare Elementarbögen vergl. 7.6.

laufenden Punkt $s' U$ in einem stetig von s' abhängenden Punkte, der für $s' = s$ im Innern von U' liegt und s nicht überschreiten kann.

5.3 Unter einer einseitigen Umgebung eines Punktes s der C^n werde ein abgeschlossener Teilbogen der C^n verstanden mit s als dem einen Endpunkte.

Der Punkt P liege auf der Schmieghyperebene von s , sei aber von s selbst verschieden. Dann gibt es zu jeder einseitigen Umgebung U' von s eine andere V' , so daß U' und V' durch s getrennt werden, und daß jede Hyperebene durch P , die das Innere von V' ($n-1$)-fach trifft, das Innere von U' einfach trifft.¹⁴⁾

Die Behauptung ist richtig für die C^2 ; sie sei für die C^{n-1} bewiesen. Da je zwei Tangenten der C^n wegen 2.1 windschief sein müssen, geht höchstens eine Tangente durch P . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei U' so gewählt, daß die Tangente des von s verschiedenen Endpunktes \bar{s} von U' nicht durch P geht.

Wegen 5.2 können wir voraussetzen, daß P auf der Hypertangente von s liegt. Mittels Projektion aus \bar{s} ergibt sich dann nach Induktionsannahme: Es gibt eine einseitige Umgebung V'_1 von s mit folgenden Eigenschaften: s trennt U' und V'_1 ; jede Hyperebene durch \bar{s} , P und $n-2$ innere Punkte von V'_1 trifft U' in einem inneren Punkte. Liegt P nicht auf der Tangente von s , so folgt aus der Induktionsannahme mittels Projektion aus s : Eine passende einseitige Umgebung V'_2 von s wird von U' durch s getrennt und hat die Eigenschaft, daß jede Hyperebene durch s , P und $n-2$ innere Punkte von V'_2 U' in einem inneren Punkte trifft. Die kleinere der beiden einseitigen Umgebungen V'_1 und V'_2 sei mit V' bezeichnet. Liegt P auf der Tangente von s , so setzen wir $V' = V'_1$. In beiden Fällen leistet V' das Verlangte.

Zum Beweis betrachte man die ebene Projektion C^2 der C^n aus irgend $n-2$ inneren Punkten von V' . Werden die übrigen Projektionen wie ihre Urbilder bezeichnet, so hat man: Die Gerade $P \bar{s}$ trifft U' in einem inneren Punkte. Die Gerade $P s$ ist entweder Tangente der C^2 in s oder trifft U' in einem inneren Punkte. Läuft der Punkt s' aus s in V' hinein, so trifft die Gerade $P s'$ die C^2 in einem weiteren stetig von s' abhängenden Punkte, der für jedes dem Punkte s hinreichend nahe s' im Innern von U' liegt. Er könnte U' nur durch s oder \bar{s} hindurch verlassen.

¹⁴⁾ Der Unterschied zwischen 5.2 und 5.3 besteht darin, daß der Punkt P in 5.3 auf der Hypertangente von s liegen darf. In 5.3 wird nur der zweite Satz von 5.2 verschärft; die entsprechende Verallgemeinerung des ersten Satzes ist falsch, also die Behauptung, daß unter den Voraussetzungen von 5.3 jede Umgebung U von s eine andere Umgebung V enthält, so daß jede V ($n-1$)-fach treffende Hyperebene durch $P U$ insgesamt n -fach trifft.

In beiden Fällen träge die Gerade $P s'$ die Kurve zweiter Ordnung C^2 der obigen Bemerkung zufolge mindestens dreifach.

5.4 Die Summe der Vielfachheiten der Treffpunkte der C^n mit einer Hyperebene ist n oder eine gerade Zahl weniger.

Dieser Satz, eine triviale Verschärfung des Satzes 2.1 für den Fall der C^n wird wie jener bewiesen.

5.5 Der Punkt P liege nicht auf der C^n . Liegt P nicht auf der Hypertangente von s , so spannt diese mit P zusammen eine Hyperebene auf, die die C^n nach 5.4 in genau einem weiteren Punkte $t_n(s)$ trifft. Liegt P auf der Hypertangente von s , so setzen wir $t_n(s) = s$. Die Fixpunkte der Abbildung $t_n(s)$ sind genau die Punkte, deren Schmieghyperebenen durch P gehen. Wegen 3.5 ist die Abbildung außerhalb der Fixpunkte stetig. Aus 5.3 folgt, daß sie in den Fixpunkten stetig und rückläufig ist.¹⁵⁾

5.6 C^n hat die Klasse n .

Es genügt zu zeigen, daß die Klasse von C^n höchstens gleich n ist. Die Behauptung ist klar für die C^2 ; sie sei für die C^{n-1} bewiesen. P sei ein beliebiger Punkt des R_n , aber nicht auf der C^n gelegen (vergl. 1.3). Dann folgt aus der Induktionsvoraussetzung, daß jeder Punkt t höchstens $n - 1$ Urbilder der in 5.5 betrachteten stetigen Abbildung $t_n(s)$ hat. Da diese Abbildung in den Fixpunkten rückläufig ist, hat sie höchstens n Fixpunkte, mit anderen Worten, es gehen höchstens n Schmieghyperebenen durch P .¹⁶⁾

5.7 Solange P keine Hypertangente überschreitet, ändert sich die Abbildung $t_n(s)$ stetig mit P .[†] Daher bleiben Umlaufszahl und Anzahl der Fixpunkte fest, also auch die Anzahl der Schmieghyperebenen durch P .

¹⁵⁾ Über die hier benutzten Begriffe vergl. FENCHEL [1].

¹⁶⁾ Es sei noch ein zweiter Beweis des Satzes 5.6 angedeutet, der 5.3 nicht benutzt. Die Behauptung, richtig für die C^2 , sei für die C^{n-1} bewiesen.

Liegt P auf der Hypertangente von s , so lassen wir die Abbildung $t_n(s)$, — vergl. 5.5 —, undefiniert. Die Fixpunkte der Abbildung $t_n(s)$ sind dann genau die Punkte, deren Schmieghyperebenen durch P gehen, deren Hypertangenten aber nicht. Die Abbildung $t_n(s)$ ist dann wegen 3.5, soweit definiert, außerhalb der Fixpunkte stetig. Aus 5.2 folgt, daß sie in den Fixpunkten stetig und rückläufig ist.

Der Punkt P liege auf keiner Hypertangente; dann ist die Abbildung $t_n(s)$ auf der ganzen C^n definiert und der Beweis 5.6 bleibt schlüssig. Jetzt möge es Hypertangenten durch P geben. Wir zeigen zunächst, daß nur endlich viele Schmieghyperebenen durch P gehen.

Aus der Induktionsvoraussetzung folgt durch Projektion aus einem beliebigen Kurvenpunkte, daß nur endlich viele Hypertangenten durch P gehen. Die Abbildung $t_n(s)$ ist also auf der ganzen C^n , ausgenommen endlich viele Punkte, definiert und stetig und in den Fixpunkten rückläufig. Da jeder Punkt t , wie aus der Induktionsvoraussetzung folgt, nur beschränkt viele Urbilder hat, folgt daraus, daß die Abbildung $t_n(s)$ nur endlich viele Fixpunkte besitzt. Die Gesamtzahl der Punkte, deren Schmieghyperebenen durch P gehen, ist gleich der Anzahl der Fixpunkte der Abbildung $t_n(s)$.

6. Die Abbildung $t_n(s)$.

In diesen Abschnitt seien einige Bemerkungen eingeschaltet über die in 5.5 eingeführte Abbildung $t_n(s)$ einer differenzierbaren Kurve C^n der n -ten Ordnung im R_n auf sich; in 7 werden nur Sonderfälle von 6.6 benötigt.

P sei ein fester Punkt des R_n , aber nicht auf der C^n gelegen.

6.1 s_0 sei ein fester Punkt der C^n . Die Gerade s_0P treffe die C^n nicht mehr. Dann induziert die Abbildung $t_{n-1}(s)$ der Projektion der C^n aus s_0 auf sich eine Abbildung der C^n auf sich, die wir gleichfalls mit $t_{n-1}(s)$ bezeichnen. $t_{n-1}(s)$ ist also derjenige Punkt, in dem die Hyperebene durch P , s_0 und $L_{n-3}^n(s)$ die C^n noch einmal trifft.¹⁷⁾ Liegen $L_{n-3}^n(s)$, P und s_0 auf einer Hypergeraden, so ist $t_{n-1}(s) = s$ zu setzen; $t_{n-1}(s_0) = t_n(s_0) = t_0$. Durch Projektion aus s_0 folgt aus 5.5, daß die Abbildung $t_{n-1}(s)$ auf der ganzen C^n stetig und in den Fixpunkten rückläufig ist. Ihre Fixpunkte sind gerade die Urbilder von s_0 bei der Abbildung $t_n(s)$.

6.2 Die Schmieghyperebene von s_0 gehe nicht durch P ; die Gerade s_0P treffe die Kurve C^n nicht mehr.

6.21 Liegt s hinreichend nahe bei s_0 und s' zwischen s und s_0 , so gilt:

- a) P , s_0 , s' und $L_{n-3}^n(s)$ liegen nicht in einer Hyperebene;
- b) P , t_0 , s' und $L_{n-3}^n(s)$ liegen nicht in einer Hyperebene;
- c) P , s' und $L_{n-3}^n(s)$ liegen nicht in einer Hypergeraden.

6.22 Liegt s hinreichend nahe bei s_0 , so liegen $t_n(s)$ und $t_{n-1}(s)$ auf derselben Seite von t_0 .

Beweis von 6.21: Wäre a) bzw. b) falsch, so gäbe es eine Folge von gegen s_0 konvergenten Punkten s und zu jedem s einen Punkt s' zwischen s und s_0 , so daß für jedes solche Paar s und s' $L_{n-3}^n(s)$, die Punkte P und s' und der Punkt s_0 bzw. t_0 in einer Hyperebene lägen. Wäre a) falsch, so konvergierte diese Hyperebene nach 3.4 gegen die Schmieghyperebene von s_0 , und diese ginge entgegen der Voraussetzung durch P . Wäre aber b) falsch, vermehrt um die Anzahl der Punkte, deren Hypertangenten durch P gehen, also endlich.

Die Gerade g durch P und einen Kurvenpunkt, dessen Schmieghyperebene nicht durch P geht, trifft, wie sich durch Projektion aus dem Kurvenpunkte ergibt, nur endlich viele Hypertangenten. Es kann also eine Umgebung von P auf g abgegrenzt werden, derart daß kein Punkt der Umgebung außer P selbst auf einer Hypertangente liegt.

Der Punkt s bewege sich stetig auf der Kurve C^n . Dann läuft der Schnittpunkt der Schmieghyperebene von s mit g stetig auf g . Jeder von P verschiedene Punkt der Umgebung wird höchstens n mal durchlaufen, P selbst nur endlich oft, also gleichfalls höchstens n mal.

¹⁷⁾ Diese Definition von $t_{n-1}(s)$ wird im ganzen Abschnitte 6 angenommen 6.21 beibehalten.

so hätte die zur Projektion der C^n aus t_0 gehörige Abbildung $t_{n-1}(s)$ einen Fixpunkt in s_0 , in dem sie nicht rückläufig wäre, im Widerspruch zu 5.5. (Daß die Gerade t_0P die C^n nicht mehr trifft, das folgt aus den Voraussetzungen.) c) folgt aus a) oder b).

Beweis von 6.22: s liege so nahe an s_0 , daß 6.21 erfüllt ist.

Die von $L_{n-3}^n(s)$, P und einem von s_0 nach s laufenden Punkte s' aufgespannte Hyperebene (vergl. 6.21 c) trifft die C^n in einem weiteren stetig von s' abhängigen Punkte, der für $s' = s_0$ nach $t_{n-1}(s)$, für $s' = s$ nach $t_n(s)$ fällt. Würden $t_{n-1}(s)$ und $t_n(s)$ durch s_0 und t_0 getrennt werden, so gäbe es einen Punkt s' zwischen s_0 und s , sodaß die Hyperebene durch $L_{n-3}^n(s)$, P und s' die C^n entweder in s_0 oder in t_0 träfe. Beides ist nach 6.21 unmöglich.

6.3 Ist s_0 Umkehrpunkt der Abbildung $t_n(s)$, so trifft die Hypergerade durch P und $L_{n-3}^n(s_0)$ die C^n in einem weiteren Punkte.¹⁸⁾

Beweis: Nach 6.22 und 5.5 ist s_0 höchstens dann Umkehrpunkt der Abbildung $t_n(s)$, wenn die Gerade s_0P die C^n noch einmal trifft, oder wenn s_0 Umkehrpunkt der Abbildung $t_{n-1}(s)$ ist. Hieraus folgt die Behauptung durch Induktion.

6.4 Die Sehne s_1s_2 gehe durch P . Ist n gerade bzw. ungerade, so gehen 0 oder 2 bzw. eine Schmieghyperebene durch P und die Abbildung $t_n(s)$ ist monoton mit der Umlaufzahl ± 1 bzw. hat s_2 und s_1 als einzige Umkehrpunkte und die Umlaufzahl 0.

Beweis: Zunächst ist klar, daß s_1 bzw. s_2 das einzige Urbild von s_2 bzw. s_1 ist. Der Punkt s_0 sei von s_1 und s_2 verschieden gewählt. Dann folgt aus 6.3, daß s_0 nicht Umkehrpunkt der Abbildung $t_n(s)$ ist.

Die Behauptung ist richtig für $n = 2$. Der Induktionsschritt von geradem $n - 1$ zu ungeradem n verläuft so: Durch Projektion aus s_0 folgt, daß s_0 0 oder 2 Urbilder hat (vergl. 6.1). Da s_1 und s_2 nur einander zu Urbildern haben, sind sie Umkehrpunkte, und die Abbildung $t_n(s)$ hat die Umlaufzahl 0 und einen Fixpunkt.

Ist n gerade, so erhalten wir durch Projektion aus s_0 , daß s_0 genau ein Urbild hat. Daher ist die Abbildung $t_n(s)$ eineindeutig, folglich monoton und hat die Umlaufzahl ± 1 , also 0 oder 2 Fixpunkte.

6.5 s_0 ist genau dann Umkehrpunkt der Abbildung $t_n(s)$, wenn es eine gerade Zahl $k \geq 2$ gibt, so daß die von P und $L_{n-1-k}^n(s_0)$ auf-

¹⁸⁾ Eine weitere einfache Folgerung aus Satz 6.22 ist: P liege nicht auf der Schmieghyperebene von s_0 ; die Hypergerade durch P und $L_{n-3}^n(s_0)$ treffe die C^n sonst nicht mehr. Dann ist die Abbildung $t_n(s)$ gleich- oder rückläufig in s_0 , je nachdem jede Hyperebene durch diese Hypergerade die C^n mindestens $(n - 1)$ -fach trifft oder nicht.

Der Induktionsbeweis mittels 6.22 ist trivial.

gespannte lineare Mannigfaltigkeit die C^n noch einmal trifft, die von P und $L_{n-2-k}^n(s_0)$ aufgespannte aber nicht.

Die Behauptung folgt für $n = 2$ aus 6.4. Sie sei bis $n - 1$ bewiesen. Geht die Schmieghyperebene von s_0 durch P , so ist die Behauptung richtig nach 5.5. Ist die Gerade $P s_0$ Sehne, so folgt die Behauptung aus 6.4. In allen übrigen Fällen ergibt sie sich aus 6.22 und der Induktionsvoraussetzung.

6.6 *Liegt P auf $L_{n-k}^n(s)$ aber nicht auf $L_{n-k-1}^n(s)$, so zählen wir $L_{n-1}^n(s)$ als k -fache Schmieghyperebene durch P . Dann gilt: Die Summe der Vielfachheiten der Schmieghyperebenen durch P ist n oder eine gerade Zahl weniger.*

Dieser Satz ist ein Analogon des Satzes 5.4. Zum Beweis zerlegen wir die Behauptung:

6.61 Die Summe der Vielfachheiten der Schmieghyperebenen durch P ist höchstens gleich n .

6.62 Die Summe der Vielfachheiten der Schmieghyperebenen durch P ist $\equiv n \pmod{2}$.

Beweis von 6.61. Der Punkt P liege auf $L_{n-k_i}^n(s_i)$, aber nicht auf $L_{n-1-k_i}^n(s_i)$ ($i = 1, \dots, r$; $k_i \geq 1$; die Punkte s_i paarweise verschieden). Die Punkte s_i zerlegen die Kurve C^n in r einander fremde Bögen. Da die Abbildung $t_n(s)$ in den Fixpunkten s_i rückläufig ist, hat ein von den s_i verschiedener Punkt t auf jedem der $r - 1$ Bögen, die t nicht enthalten, mindestens je ein Urbild der Abbildung. Die Urbilder s'_1, \dots, s'_{r-1} von t seien paarweise voneinander verschieden. Die Hyperebene durch $L_{n-2}^n(s'_i)$ und P geht also durch t , $L_{n-k_i}^n(s_i)$ durch P .

Die Projektion von C^n aus t sei mit C^{n-1} , ihre linearen Schmiegmannigfaltigkeiten mit L_k^{n-1} und die Projektion von P mit P' bezeichnet.

Die Hyperebene durch $L_{n-2}^n(s'_i)$, t und P projiziert sich aus t in die durch P' gehende Schmieghyperebene von s'_i . Es gehen also die zusammen mindestens $(r - 1)$ -fach zu zählenden Schmieghyperebenen $L_{n-2}^{n-1}(s'_i)$ von C^{n-1} durch P' ($i = 1, \dots, r - 1$).

Da P auf $L_{n-k_i}^n(s_i)$ liegt, geht $L_{n-k_i}^{n-1}(s_i)$ durch P' . Die k_i -fache Schmieghyperebene $L_{n-1}^n(s_i)$ durch P projiziert sich somit in die $(k_i - 1)$ -fache Schmieghyperebene $L_{n-2}^{n-1}(s_i)$ durch P' . Die Punkte s_1, \dots, s_r schicken also zusammen genau $\sum_1^r (k_i - 1)$ Schmieghyperebenen durch P' . Insgesamt gehen also mindestens

$$(r - 1) + \sum_1^r (k_i - 1) = \sum_1^r k_i - 1$$

Schmieghyperebenen von C^{n-1} durch P' .

Ist die für $n = 2$ richtige Behauptung mit $n - 1$ statt n bewiesen, so folgt aus der letzten Bemerkung $k_i - 1 \leq n - 1$ oder $k_i < n$, also die Behauptung für die C^n .

Beweis von 6.62. Wir schließen uns an den Beweis von 6.61 und seine Bezeichnungen an.

Die Punkte s_1 und s_2 mögen einen offenen Teilbogen B^n von C^n begrenzen, der keinen weiteren Punkt s_i enthält. Durch Projektion aus t ergibt sich mittels 5.6, daß t jedenfalls nur endlich viele Urbilder der Abbildung $t_n(s)$ auf C^n hat. Es seien s''_1, \dots, s''_m sämtliche Urbilder von t auf B^n (die s''_i paarweise verschieden). Die von P und $L_{n-1-k''_i}^n(s''_i)$ aufgespannte lineare Mannigfaltigkeit gehe durch t , aber nicht die von P und $L_{n-2-k''_i}^n(s''_i)$ aufgespannte ($i = 1, \dots, m; k''_i \geq 1$). Es geht also $L_{n-1-k''_i}^{n-1}(s''_i)$ durch P' aber nicht $L_{n-2-k''_i}^{n-1}(s''_i)$. Somit schickt die Projektion von B^n aus t genau $\sum_1^m k''_i$ Schmieghyperebenen durch P' . Es langt zu zeigen

$$\sum_1^m k''_i \equiv \begin{cases} 0 \pmod{2}, & \text{wenn } t \text{ auf } B^n \\ 1 \pmod{2}, & \text{wenn } t \text{ nicht auf } B^n; \end{cases} \quad *$$

denn dann geben die sämtlichen Urbilder von t bei der Abbildung $t_n(s)$ Anlaß zu Schmieghyperebenen der C^{n-1} durch P' , deren Gesamtvielfachheit $\equiv r - 1 \pmod{2}$ ist. Die Gesamtvielfachheit aller Schmieghyperebenen der C^{n-1} durch P' ist also

$$\equiv (r - 1) + \sum_1^r (k_i - 1) \equiv \sum_1^r k_i - 1 \pmod{2},$$

woraus die Behauptung wie oben durch Induktion folgt.

Die Formel * kann so eingesehen werden: s''_i ist nach 6.5 genau dann Umkehrpunkt der Abbildung $t_n(s)$, wenn k''_i gerade ist; die geraden k''_i liefern nur den Beitrag $0 \pmod{2}$ zur linken Seite von *.

Die Abbildung $t_n(s)$ ist rückläufig in s_1 und in s_2 . s laufe auf B^n von s_1 nach s_2 . Dann läuft $t_n(s)$ auf C^n von s_1 nach s_2 , ohne sonst mit s zusammenzufallen. Daher wird t von $t_n(s)$ ebenso oft in beiden Sinnen oder einmal mehr in dem einen Sinne durchlaufen als in dem anderen, je nachdem t auf B^n liegt oder nicht. $t_n(s)$ überschreitet also t im ganzen im ersten Falle eine gerade,

im zweiten eine ungerade Anzahl von Malen. Jedes hierzu gehörige k''_i liefert aber nach 6.5 den Beitrag 1 (mod 2) zur linken Seite von *, woraus diese Kongruenz folgt.¹⁹⁾

7. Ein Dualitätsprinzip für die C^n .

7.1 Eine Dualität führt die Gesamtheit der Schmieghyperebenen einer differenzierbaren Kurve n -ter Ordnung C^n im R_n nach 3.5 und 5.1 in eine stetige Kurve n -ter Ordnung \bar{C}^n über. Das Ziel dieses Abschnittes ist der Nachweis der Differenzierbarkeit von \bar{C}^n , genauer der Nachweis, daß die k -dimensionalen linearen Schmiegmannigfaltigkeiten von C^n durch die Dualität in die $(n - 1 - k)$ -dimensionalen von \bar{C}^n übergeführt werden ($k = 0, 1, \dots, n - 1$).

7.2 Offensichtlich genügt es, für jeden Punkt s_0 von C^n zu beweisen: Strebt s gegen s_0 , so konvergiert der Durchschnitt von $L_{n-1}^n(s)$ mit $L_k^n(s_0)$ gegen $L_{k-1}^n(s_0)$ ($0 \leq k < n$).

Diese Behauptung, für $k = 0$ trivial, sei bis $k - 1$ bewiesen. Ist $n = k$, so sind wir fertig. Es sei $n > k$.

Es sei $s_1 \neq s_0$. Nach 6.6 geht durch jeden der beiden Schnittpunkte $P(s_0)$ von $L_{k-1}^n(s_0)$ mit $L_{n-k+1}^n(s_1)$ und $P(s_1)$ von $L_k^n(s_0)$ mit $L_{n-k}^n(s_1)$ keine, durch jeden anderen Punkt der Schnittgeraden g von $L_k^n(s_0)$ mit $L_{n-k+1}^n(s_1)$ noch genau eine weitere Schmieghyperebene.

s_0 und s_1 zerlegen C^n in zwei Teilbögen. Läuft s auf einem von ihnen, so läuft der Schnittpunkt $P(s)$ von $L_{n-1}^n(s)$ mit g stetig auf einer der beiden Strecken, in die g durch $P(s_0)$ und $P(s_1)$ zerlegt wird. Nun wird, wenn s die beiden Teilbögen durchläuft, jeder Punkt dieser beiden Strecken einmal und nur einmal von $P(s)$ durchlaufen. Daraus folgt: s durchlaufe den einen der beiden Teilbögen. Dann durchläuft $P(s)$ stetig und monoton die eine der beiden Strecken, und zwar geht durch jeden Punkt dieser Strecke die Schmieghyperebene eines Punktes des Teilbogens.

s strebe auf dem Bogen gegen s_0 . Dann ist der letzten Bemerkung zufolge $P(s)$ konvergent, und zwar gegen einen der beiden Punkte $P(s_0)$ und $P(s_1)$. Hieraus und aus der Induktionsvoraussetzung folgt, daß der Durchschnitt $E_{k-1}^n(s)$ von $L_k^n(s_0)$ mit der Schmieghyperebene von s gegen eine $(k - 1)$ -dimensionale lineare Mannigfaltigkeit durch $L_{k-2}^n(s_0)$ und einen dieser beiden Punkte konvergiert, wenn s auf dem Bogen gegen s_0 strebt. Gibt es ein s_1 , so daß $P(s)$ gegen $P(s_0)$ konvergiert, so folgt hieraus

¹⁹⁾ Das in 5 und 6 benutzte Verfahren gestattet, wie ich an anderer Stelle auszuführen hoffe, die Diskussion der differenzierbaren Kurve $(n + 1)$ -ter Ordnung im R_n nach Anzahl und Art ihrer singulären Punkte.

weiter die Konvergenz von $E_{k-1}^n(s)$ gegen die von $L_{k-2}^n(s_0)$ und $P(s_0)$ aufgespannte lineare Mannigfaltigkeit, also gegen $L_{k-1}^n(s_0)$ (vergl. 2.3). Andernfalls folgte aber aus der Konvergenz von $E_{k-1}^n(s)$, daß die Punkte $P(s_1)$ für alle s_1 in einer festen $(k-1)$ -dimensionalen linearen Mannigfaltigkeit durch $L_{k-2}^n(s_0)$ gelegen wären; mit anderen Worten: Alle $L_{n-k}^n(s_1)$ inzidierten mit einer festen $(k-1)$ -dimensionalen linearen Mannigfaltigkeit durch $L_{k-2}^n(s_0)$, und man erhielte für die Projektion C^{n-k+1} der C^n aus $L_{k-2}^n(s_0)$: Die Schmieghyperebenen $L_{n-k}^{n-k+1}(s_1)$ gingen alle durch einen festen Punkt des R_{n-k+1} im Widerspruch zu 5.6.

7.3 Mittels des Dualitätsprinzips geht 5.4 in 6.6 über.

7.4 Aus dem Dualitätsprinzip folgt unmittelbar, daß der Durchschnitt von $L_k^n(s_0)$ mit der Gesamtheit aller $L_{n-k}^n(s)$ der C^n eine differenzierbare Kurve k -ter Ordnung C^k auf $L_k^n(s_0)$ bildet. Dies ist einfach das duale Analogon der Bemerkung, daß die Projektion der C^n aus $L_{n-k-1}^n(s_0)$ eine C^k ist.

7.5 Aus 3.4 und dem Dualitätsprinzip ergibt sich: Konvergieren $k+1$ Punkte der C^n gegen einen Kurvenpunkt s_0 , so konvergiert der Durchschnitt ihrer Schmieghyperebenen gegen $L_{n-1-k}^n(s_0)$. Diese Bemerkung bleibt gültig bei Einführung einer Vielfachheitszählung entsprechend 6.6.

7.6 Ein differenzierbarer Elementarbogen B^n im R_n wird durch eine Dualität wieder in einen differenzierbaren Elementarbogen übergeführt. Dabei gehen die k -dimensionalen linearen Schmieghyperebenen von B^n in die $(n-1-k)$ -dimensionalen des dualen Bogens über ($k=0, 1, \dots, n-1$).

Für B^n gelten also die sinngemäß abgeänderten Bemerkungen 7.4 und 7.5.

Beweis: Falls B^n abgeschlossen ist und der Sauterschen Fremdheitsbedingung 2.5 genügt, bzw. falls B^n offen ist, läßt sich B^n bzw. jeder abgeschlossene Teilbogen von B^n nach 4.3 zu einer differenzierbaren Kurve C^n ergänzen. In diesen beiden Fällen folgt die Behauptung aus 7.1.

B^n sei abgeschlossen und erfülle nicht das Fremdheitskriterium. Dann gilt die Behauptung wenigstens für jeden offenen Teilbogen von B^n . Daher gilt 7.2 für jeden inneren Punkt von B^n . Daß 7.2 auch in den Endpunkten von B^n gilt, folgt daraus, daß ein abgeschlossener Teilbogen von B^n , der den einen der beiden Endpunkte von B^n enthält, den anderen aber nicht, dem Fremdheitskriterium genügt.

Es ist noch zu zeigen, daß B^n die Klasse n hat. B^n wird durch eine Dualität in einen stetigen differenzierbaren Bogen \bar{B}^n

übergeführt, mit der Eigenschaft daß jeder offene Teilbogen von \bar{B}^n die Ordnung n hat. Es langt zu zeigen, daß \bar{B}^n selbst von der Ordnung n ist.

Eine Gerade, die den Bogen \bar{B}^2 in mehr als zwei Punkten träge, könnte durch eine passende kleine Änderung in eine Gerade übergeführt werden, die mehr als zwei innere Punkte mit \bar{B}^2 gemein hätte, was unmöglich ist. Die Behauptung sei für die \bar{B}^{n-1} bewiesen ($n > 2$). Eine Hyperebene, die \bar{B}^n in mehr als n Punkten träge, ginge durch wenigstens einen inneren Punkt. Durch Projektion von \bar{B}^n aus diesem Punkte ergibt sich ein Widerspruch gegen die Induktionsannahme.

7.7 Aus 7.6 folgt unmittelbar, daß ein elementarer Punkt auf einem differenzierbaren Bogen durch eine Dualität in einen Punkt der gleichen Art übergeführt wird.²⁰⁾

Literatur.

BONNESEN-FENCHEL [1]: Theorie der konvexen Körper. Ergebnisse der Math. 3, Heft 1.

DENK [1]: Über elementare Punkte höherer Ordnung auf Kurven im R_n . S.-B. phys.-med. Soz. Erlangen 67 (1935), S. 1 ff.

FENCHEL [1]: Elementare Beweise und Anwendungen einiger Fixpunktsätze. Matematisk Tidskrift B (1932) S. 66 ff.

HAUPT [1]: Über die Struktur reeller Kurven. Journ. reine ang. Math. 164 (1931), S. 50 ff.

[2]: Über Kontinua von beschränkter Ordnung. S.-B. Bayer. Akad. Wiss. (1931), S. 49 ff.

[3]: Strukturprobleme bei reellen Gebilden. S.-B. Bayer. Akad. Wiss. (1935), S. 183 ff.

[4]: Gestaltsprobleme bei reellen Gebilden. Mon. Hefte Math. Phys. 43 (1936), S. 261 ff.

HJELMSLEV [1]: Introduction à la théorie des suites monotones. Overs. over Danske Vid. Selsk. Forh. (1914) Heft 1, S. 68 ff.

JUEL [1]: Einleitung in die Theorie der ebenen Elementarkurven dritter und vierter Ordnung. Danske Vid. Selsk. Skr. (7) 11, 2 (1914), S. 113 ff.

[2]: Beispiele von Elementarkurven und Elementarflächen. Atti Congr. internaz. Matem. Bologna 4 (1928), S. 195 ff.

LINSMAN [1]: Sur les singularités des courbes élémentaires en géométrie finie. Bull. Acad. de Belgique (1936), S. 688 ff, 873 ff.

MONTEL [1]: Sur la géométrie finie et les travaux de M. C. Juel. Bull. sc. math. (2) 48 (1924); S. 109 ff.

²⁰⁾ Vergl. I, 1. Hat der eine der beiden Punkte die Charakteristik (a_0, a_1, \dots, a_n) , so der andere die Charakteristik $(a_{n-1}, \dots, a_1, a_0)$. Ein Beweis dieser für $n = 2$ und $n = 3$ von Herrn LINSMAN [1] stammenden Bemerkung werde bei anderer Gelegenheit gegeben. Aus diesem Satze folgt beispielsweise, daß die Klasse eines solchen Punktes gleich seiner Ordnung $A = a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1}$ ist. Unter der Klasse eines Punktes ist die Klasse einer hinreichend kleinen Umgebung des Punktes zu verstehen. Vergl. I, 3; I, 4.

V. NAGY [1]: Über die Raumkurven von Maximalindex (ungar. mit deutscher Zusammenfassung). Math. Nat. Anz. Ung. Akad. Wiss. 54 (1936), S. 685 ff.

SAUTER [1]: Über die Stetigkeit der Tangentialschmieghalbräume eines Bogens n -ter (Realitäts-) Ordnung im projektiven R_n . S.-B. phys. med. Soz. Erlangen 65 (1934), S. 189 f.

[2]: Zur Theorie der Bogen n -ter (Realitäts-) Ordnung im projektiven R_n (1. Mitteilung). Math. Zeitschr. 41 (1936), S. 507 ff.

*

O derivovatelných křivkách a obloucích.

II. Elementární oblouk a křivka n -tého řádu v R_n .

(Obsah předešlého článku.)

V této práci vyšetřuji reálné křivky n -tého řádu a elementární oblouky v n -rozměrném projektivním prostoru R_n ; to jsou oblouky a (uzavřené) křivky, které každá nadrovina protíná nejvýše v n bodech. Předpokládá se derivovatelnost — a to co možná nejslabší — vyšetřovaných útvarů.

Práce se rozpadá ve dva díly. První (1—4) shrnuje řadu výsledků, většinou známých z literatury, o derivovatelných elementárních obloucích B^n v R_n . Uvedme třeba: pro všechny otevřené a některé uzavřené B^n lze zavést násobnost jejich průsečíků s nadrovinou (2); lineární oskulační variety elementárních oblouků B^n jsou spojitě (3). V odst. 4 vyšetřuji, jak dva B^n lze složit v derivovatelnou křivku C^n n -tého stupně. Hlavní výsledek druhého dílu jest: dualita převádí každý B^n resp. C^n opět v B^n resp. v C^n . Z toho plyne, že třída elem. oblouků B^n resp. křivky C^n , t. j. maximální počet oskulačních nadrovin procházejících jedním bodem, je rovna číslu n .

**Über die angenäherte Lösung der Gleichung
 $x_1 \Theta_1 + \dots + x_n \Theta_n + x_0 = 0$ in ganzen Zahlen.**

Vojtěch Jarník, Praha.

(Eingegangen am 21. Jänner 1937.)

Herrn Prof. Dr. Edmund Landau zu seinem 60. Geburtstag am 14. Februar 1937 in Dankbarkeit gewidmet.

Kleine lateinische Buchstaben (ausser e) bedeuten ganze, griechische Buchst. bedeuten reelle Zahlen. Sind $\Theta_1, \dots, \Theta_n$ ($n > 0$) gegeben, so gelten bekanntlich folgende Sätze:

I. Für jedes $t > 0$ sind die Ungleichungen

$$0 < \text{Max} (|x_1|, \dots, |x_n|) \leq t, \quad \left| \sum_{i=1}^n x_i \Theta_i + x_0 \right| < t^{-n} \quad (1)$$

lösbar.

Also umsomehr:

II. Für unendlichviele $t > 0$ sind die Ungleichungen (1) lösbar.

I. und II. sind in folgendem Sinn scharf:

III. Zu jedem $n > 0$ gibt es ein $\gamma > 0$ und n Zahlen $\Theta_1, \dots, \Theta_n$, sodass aus

$$0 < \text{Max} (|x_1|, \dots, |x_n|) \leq t$$

folgt

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i \Theta_i + x_0 \right| > \gamma t^{-n}.$$

In (1) wird verlangt, dass *mindestens eine* von den Zahlen x_1, \dots, x_n von Null verschieden ist; wir wollen im folgenden die Frage beantworten, wie die Sätze I, II, III zu modifizieren sind, wenn man verlangt, dass *mindestens k* ($1 < k \leq n$) von den Zahlen x_1, \dots, x_n von Null verschieden sind. Dabei wollen wir uns auf solche Systeme $\Theta_1, \dots, \Theta_n$ beschränken, für welche aus $x_1 \Theta_1 + \dots + x_n \Theta_n + x_0 = 0$ folgt: $x_0 = x_1 = \dots = x_n = 0$. Solche Systeme wollen wir zur Abkürzung „*eigentliche Systeme*“ nennen.

Wir führen noch folgende Benennung ein: ist $0 < l \leq m$ und ist x_0, x_1, \dots, x_m ein geordnetes System von $m + 1$ Zahlen, so nennen wir dieses System ein l -System, wenn mindestens l von den Zahlen x_1, \dots, x_m von Null verschieden sind. Die Antwort auf unsere Frage ist in folgenden Sätzen enthalten:

Satz 1. *Es sei $1 < k \leq n$; $\Theta_1, \dots, \Theta_n$ sei ein eigentliches System. Dann gibt es zu jedem $t > 0$ ein k -System $x_0 = x_0(t), x_1 = x_1(t), \dots, x_n = x_n(t)$ mit*

$$\text{Max} (|x_1|, \dots, |x_n|) \leq t, \quad \sum_{i=1}^n x_i \Theta_i + x_0 = o\left(\frac{1}{t^{n-k+1}}\right)$$

(man beachte, dass die linke Seite eine Funktion von t ist).

Satz 2.¹⁾ *Es sei $1 < k \leq n$; für $\tau > 0$ sei $\varphi(\tau)$ positiv und wachsend, $\varphi(\tau) \rightarrow \infty$ für $\tau \rightarrow \infty$. Dann gibt es ein eigentliches System $\Theta_1, \dots, \Theta_n$ und eine wachsende Folge t_1, t_2, \dots mit folgender Eigenschaft: ist $l > 0$, so gibt es kein k -System x_0, x_1, \dots, x_n mit*

$$\text{Max} (|x_1|, \dots, |x_n|) \leq t_i, \quad \left| \sum_{i=1}^n x_i \Theta_i + x_0 \right| < \frac{1}{t_i^{n-k+1} \varphi(t_i)}. \quad (2)$$

Satz 3. *Es sei $1 < k \leq n$, $a(k, n) = (k + 2)(k + 1)^{n-k+2}$; $\Theta_1, \dots, \Theta_n$ sei ein eigentliches System. Dann gibt es eine wachsende Folge t_1, t_2, \dots mit folgender Eigenschaft: zu jedem $l > 0$ gibt es ein k -System x_0, x_1, \dots, x_n mit*

$$\text{Max} (|x_1|, \dots, |x_n|) \leq t_i, \quad \left| \sum_{i=1}^n x_i \Theta_i + x_0 \right| < \frac{a(k, n)}{t_i^{n-k+2}}. \quad (3)$$

Für $k = 2$ ist $n - k + 2 = n$; nach III ist also der Satz 3 für $k = 2$ scharf. Aber auch für $k > 2$ ist der Satz 3 mindestens in dem Sinne scharf, dass der Exponent $n - k + 2$ nicht vergrößert werden darf. Es gilt nämlich

Satz 4. *Es sei*

$$2 < k \leq n; \quad b = b(k, n) = (n - k + 3)(k - 1) + 3.$$

Dann gibt es ein eigentliches System $\Theta_1, \dots, \Theta_n$ und ein $t_0 > 0$ mit folgender Eigenschaft: ist $t > t_0$ und ist x_0, x_1, \dots, x_n ein k -System mit $\text{Max} (|x_1|, \dots, |x_n|) \leq t$, so ist

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i \Theta_i + x_0 \right| > \frac{1}{t^{n-k+2} \log^b t}.$$

Man beachte folgenden Unterschied zwischen den Sätzen I, II einerseits und den Sätzen 1, 3 andererseits: in den beiden Sätzen I, II hat man denselben scharfen Exponenten n ; in den analogen Sätzen 1, 3 hat man zwei verschiedene scharfe Exponenten $n - k + 1$,

¹⁾ Satz 2. zeigt die Schärfe des Satzes 1.

$n - k + 2$. Ich bemerke noch, dass man sehr leicht folgenden Satz beweisen kann: fast alle²⁾ Systeme $\Theta_1, \dots, \Theta_n$ haben folgende Eigenschaft: ist t hinreichend gross, so ist jedes System x_0, x_1, \dots, x_n , welches den Ungleichungen (1) genügt, ein n -System (also auch ein k -System für jedes k mit $1 \leq k \leq n$). Also: diejenigen Systeme $\Theta_1, \dots, \Theta_n$, die uns zwingen, den Exponenten n aus I, II in den Sätzen 1, 3, durch einen kleineren³⁾ zu ersetzen, bilden nur eine Menge vom Mass Null.

Es folgen jetzt die (leichten) Beweise der Sätze 1 bis 4.

Beweis des Satzes 1.

Da $\Theta_1, \dots, \Theta_n$ ein eigentliches System ist, so gibt es eine für $v > 0$ positive und wachsende Funktion $\varphi(v)$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\varphi(v) \rightarrow \infty$ für $v \rightarrow \infty$.
2. Aus

$$v > 0, \text{Max}(|x_1|, \dots, |x_n|) > 0, \left| \sum_{i=1}^n x_i \Theta_i + x_0 \right| < \frac{1}{v^{n-k+1}}$$

folgt

$$\text{Max}(|x_1|, \dots, |x_n|) > \varphi(v).$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $v^{-1} \varphi(v) \rightarrow 0$ für $v \rightarrow \infty$.

Es sei nun ein hinreichend grosses t gegeben. \mathfrak{A} sei die Menge aller Systeme (y_0, y_1, \dots, y_n) mit

$$0 \leq y_i \leq t \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad 0 \leq \sum_{i=1}^n y_i \Theta_i + y_0 < 1.$$

Da die Anzahl der Elemente von \mathfrak{A} gleich $(t+1)^n$ ist, so gibt es (Schubfachprinzip!) ein Intervall von der Länge $[t^{n-k+1} \varphi^{\frac{1}{2}}(t)]^{-1}$, in welchem mindestens $t^{k-1} \varphi^{-\frac{1}{2}}(t)$ von den Zahlen $y_1 \Theta_1 + \dots + y_n \Theta_n + y_0$ liegen; subtrahiert man eine von diesen Zahlen von den übrigen, so bekommt man eine Menge \mathfrak{B} von mindestens $t^{k-1} \varphi^{-\frac{1}{2}}(t) - 1 > \frac{1}{2} t^{k-1} \varphi^{-\frac{1}{2}}(t)$ Systemen x_0, x_1, \dots, x_n mit

$$0 < \text{Max}(|x_1|, \dots, |x_n|) \leq t, \quad \left| \sum_{i=1}^n x_i \Theta_i + x_0 \right| < \frac{2}{t^{n-k+1} \varphi^{\frac{1}{2}}(t)}. \quad (4)$$

Für $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{k-1} \leq n$ sei $\mathfrak{C}(i_1, \dots, i_{k-1})$ die Menge derjenigen Systeme (x_0, x_1, \dots, x_n) mit (4), für welche alle x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) ausser $x_{i_1}, \dots, x_{i_{k-1}}$ verschwinden (wobei aber auch einige von den letztgenannten $k-1$ Zahlen verschwinden können). Weiter sei \mathfrak{C} die Menge aller Systeme (x_0, x_1, \dots, x_n) mit (4), welche *keine* k -Systeme sind, also

²⁾ Im Sinne der Lebesgueschen Masstheorie.

³⁾ Im Satz 3 tritt diese Verkleinerung nur für $k > 2$ auf.

$$\mathfrak{C} = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{k-1} \leq n} \mathfrak{C}(i_1, \dots, i_{k-1}).$$

Ist also $c(i_1, \dots, i_{k-1})$ bzw. c die Anzahl der Elemente von $\mathfrak{C}(i_1, \dots, i_{k-1})$ bzw. von \mathfrak{C} , so ist

$$c \leq \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{k-1} \leq n} c(i_1, \dots, i_{k-1}). \quad (5)$$

Gesetzt, für geeignet gewählte i_1, i_2, \dots, i_{k-1} sei

$$c(i_1, \dots, i_{k-1}) > t^{k-1} \varphi^{-\frac{2}{3}}(t). \quad (6)$$

Setzt man $\Theta_{i_i} = \eta_i$, so ist $c(i_1, \dots, i_{k-1})$ die Anzahl aller Systeme $(y_0, y_1, \dots, y_{k-1})$ mit

$$0 < \text{Max} (|y_1|, \dots, |y_{k-1}|) \leq t, \quad \left| \sum_{i=1}^{k-1} y_i \eta_i + y_0 \right| < \frac{2}{t^{n-k+1} \varphi^{\frac{1}{3}}(t)}. \quad 4)$$

Daraus und aus (6) schliesst man (Schubfachschluss): unter diesen Systemen (y_0, \dots, y_{k-1}) gibt es zwei verschiedene (y'_0, \dots, y'_{k-1}) , $(y''_0, \dots, y''_{k-1})$ mit

$$\text{Max}_{i=1, \dots, k-1} |y'_i - y''_i| < \frac{3t}{t(\varphi(t))^{-\frac{2}{3(k-1)}}}.$$

Durch Differenzenbildung erhält man ein System $(x_0, x_1, \dots, x_{k-1})$ mit

$$0 < \text{Max} (|x_1|, \dots, |x_{k-1}|) < 3(\varphi(t))^{\frac{2}{3(k-1)}} < \varphi(t),$$

$$\left| \sum_{i=1}^{k-1} x_i \eta_i + x_0 \right| < \frac{4}{t^{n-k+1} \varphi^{\frac{1}{3}}(t)} < \frac{1}{t^{n-k+1}}.$$

was der Definition von $\varphi(v)$ widerspricht. Also ist (6) falsch und aus (5) folgt

$$c \leq \binom{n}{k-1} t^{k-1} \varphi^{-\frac{2}{3}}(t) < \frac{1}{2} t^{k-1} \varphi^{-\frac{1}{3}}(t).$$

Es gibt also ein System (x_0, x_1, \dots, x_n) aus \mathfrak{B} , welches nicht zu \mathfrak{C} gehört, d. h. es gibt ein k -System (x_0, x_1, \dots, x_n) mit (4).

Beweis des Satzes 3.

Es sei $1 < k \leq n$; $\Theta_1, \dots, \Theta_n$ sei ein eigentliches System. Nach I (für $k = 2$) bzw. nach Satz 1 (für $k > 2$) gibt es zu jedem $t > t_0$ ein $(k-1)$ -System x_0, x_1, \dots, x_n mit

$$\text{Max} (|x_1|, \dots, |x_n|) \leq t, \quad \left| \sum_{i=1}^n x_i \Theta_i + x_0 \right| < \frac{1}{t^{n-k+2}}.$$

4) Man beachte, dass y_0 durch y_1, \dots, y_{k-1} eindeutig bestimmt ist.

Wir unterscheiden zwei Fälle:

Erster Fall. Es gibt $k - 1$ Zahlen i_1, \dots, i_{k-1} ($1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{k-1} \leq n$), so dass es zu jedem hinreichend grossen t ein System x_0, x_1, \dots, x_n gibt mit

$$\left. \begin{aligned} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{k-1}} \neq 0, \text{ Max } (|x_1|, \dots, |x_n|) \leq t, \\ \left| \sum_{i=1}^n x_i \Theta_i + x_0 \right| < \frac{1}{t^{n-k+2}}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Zweiter Fall. Der erste Fall liegt nicht vor.

Wir behandeln zunächst den ersten Fall, wobei wir durch Umnummerierung erreichen, dass

$$i_1 = 1, i_2 = 2, \dots, i_{k-1} = k - 1 \quad (8)$$

ist. Es seien $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots$ die (irreduziblen) Näherungsbrüche der regelmässigen Kettenbruchentwicklung der Zahl Θ_1 ($q_l > 0$). Bekanntlich gilt:

1. ist $|x\Theta_1 - y| < \frac{1}{2|x|}$, $|x| \neq 0$, so ist $\frac{y}{x}$ einem $\frac{p_l}{q_l}$ gleich;

2. $\frac{1}{2q_{s+1}} < |q_s \Theta_1 - p_s| < \frac{1}{q_{s+1}}$.

Man setze $t = q_{s+1} - 1$; ist s hinreichend gross, so gibt es erstens Zahlen x_0, x_1, \dots, x_n mit (7), (8). Zweitens gibt es nach I $n - k + 3$ Zahlen $y_0, y_1, y_k, y_{k+1}, \dots, y_n$ mit

$$\begin{aligned} 0 < \text{Max } (|y_1|, |y_k|, |y_{k+1}|, \dots, |y_n|) \leq t, \\ \left| \Theta_1 y_1 + \sum_{i=k}^n \Theta_i y_i + y_0 \right| < \frac{1}{t^{n-k+2}}. \end{aligned}$$

Wäre $y_k = y_{k+1} = \dots = y_n = 0$, so wäre

$$y_1 \neq 0, \quad |\Theta_1 y_1 + y_0| < \frac{1}{t^{n-k+2}} \leq \frac{1}{|y_1| t^{n-k+1}} < \frac{1}{2|y_1|},$$

also $\frac{y_0}{y_1} = -\frac{p_l}{q_l}$ für ein $l \leq s$, also

$$|\Theta_1 y_1 + y_0| \geq |\Theta_1 q_l - p_l| > \frac{1}{2q_{l+1}} \geq \frac{1}{2q_{s+1}} > \frac{1}{3t} > \frac{1}{t^{n-k+2}}$$

— Widerspruch; also ist mindestens eine von den Zahlen y_k, y_{k+1}, \dots, y_n von Null verschieden.

Zu unserem t gibt es ein System x_0, x_1, \dots, x_n mit (7), (8). Ist x_0, x_1, \dots, x_n ein k -System, so sind wir fertig. Sonst ist $x_k = x_{k+1} = \dots = x_n = 0$; in diesem Falle bilde man den Ausdruck

$\Theta_1 x_1 + \dots + \Theta_n x_n + x_0 \pm (\Theta_1 y_1 + \Theta_k y_k + \dots + \Theta_n y_n + y_0)$, wobei das Vorzeichen so gewählt werde, dass $x_1 \pm y_1 \neq 0$ ist.

Wird noch $t' = 2t$ gesetzt, so bekommt man auf diese Weise offenbar ein k -System z_0, z_1, \dots, z_n mit

$$\text{Max} (|z_1|, \dots, |z_n|) \leq t', \left| \sum_{i=1}^n \Theta_i z_i + z_0 \right| < \frac{2}{t^{n-k+2}} < \frac{a(k, n)}{t'^{n-k+2}},$$

womit der erste Fall erledigt ist.

Es liege nun der zweite Fall vor. Dann gibt es ein System i_1, \dots, i_{k-1} ($1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{k-1} \leq n$) so, dass (7) für unendlichviele $t > 0$ lösbar und auch für unendlichviele $t > 0$ unlösbar ist; ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte (8). Es gibt also unendlichviele $t' > t_0$, sodass (7), (8) für $t = t'$ lösbar, für $t = t' + 1$ unlösbar ist. Es sei t' eine solche Zahl. Gibt es ein k -System x_0, x_1, \dots, x_n , sodass (7), (8) mit $t = t'$ erfüllt ist, so sind wir fertig. Sonst gibt es k Zahlen x_0, x_1, \dots, x_{k-1} mit

$$x_1 x_2 \dots x_{k-1} \neq 0, \text{Max} (|x_1|, \dots, |x_{k-1}|) \leq t', \\ \left| \sum_{i=1}^{k-1} x_i \Theta_i + x_0 \right| < \frac{1}{t'^{n-k+2}}.$$

Es gibt weiter ein $(k-1)$ -System y_0, y_1, \dots, y_n mit

$$\text{Max} (|y_1|, \dots, |y_n|) \leq t' + 1, \left| \sum_{i=1}^n y_i \Theta_i + y_0 \right| < \frac{1}{(t' + 1)^{n-k+2}}.$$

Nach der Wahl von t' ist $y_1 y_2 \dots y_{k-1} = 0$, also gibt es ein l mit $k \leq l \leq n$, $y_l \neq 0$. Für jedes i ($i = 1, 2, \dots, k-1$) gibt es wegen $x_i \neq 0$ höchstens ein a_i mit $x_i + a_i y_i = 0$; also kann man ein b mit $1 \leq b \leq k$ so finden, dass $x_i + b y_i \neq 0$ für $i = 1, 2, \dots, k-1$. Dann ist also, $z_i = x_i + b y_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$; $x_k = \dots = x_n = 0$) und $T = (k+1)(t'+1)$ gesetzt, für hinreichend grosse t'

$$\text{Max} (|z_1|, \dots, |z_n|) \leq T, \\ \left| \sum_{i=1}^n \Theta_i z_i + z_0 \right| < \frac{k+1}{t'^{n-k+2}} < \frac{a(k, n)}{T^{n-k+2}}$$

und z_0, z_1, \dots, z_n ist wegen $z_1 z_2 \dots z_{k-1} z_l \neq 0$ ein k -System.

Beweis des Satzes 2.

Es sei $1 < k \leq n$; $\varphi(\tau)$ sei positiv und wachsend für $\tau > 0$, für $\tau \rightarrow \infty$ sei $\varphi(\tau) \rightarrow \infty$. Man wähle unendlichviele Brüche

$$\frac{p_{s,l}}{q_{s,l}} \quad (s = 1, 2, \dots, n; l = 1, 2, \dots)$$

mit folgenden Eigenschaften: die $q_{s,l}$ sind Primzahlen,

$$2 < q_{1,l} < q_{2,l} < \dots < q_{n,l} < q_{1,l+1} \quad (l = 1, 2, \dots); \\ q_{s,l+1} > 2q_{s,l}; \quad q_{1,l+1} > 4nq_{1,l}q_{2,l} \dots q_{n,l} \cdot q_{k,l}; \quad q_{n,l} < 2q_{k,l};$$

$$\varphi\left(\frac{1}{2}q_{k,l}\right) > 2^{2(n-k+1)+1} \cdot q_{1,l}q_{2,l} \dots q_{k-1,l};$$

$$p_{s,l} \equiv 0 \pmod{q_{s,l}}; \left| \frac{p_{s,l}}{q_{s,l}} - \frac{p_{s,l+1}}{q_{s,l+1}} \right| \leq \frac{1}{q_{s,l+1}}.$$

Die Möglichkeit einer solchen Wahl ist klar, wenn man bedenkt, dass zwischen x und $2x$ für hinreichend grosse x mehr als $n - k$ Primzahlen liegen. Dann setze man für $s = 1, 2, \dots, n$

$$\Theta_s = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{p_{s,l}}{q_{s,l}}, \text{ also } \left| \Theta_s - \frac{p_{s,l}}{q_{s,l}} \right| < \frac{2}{q_{s,l+1}}. \quad (9)$$

$\Theta_1, \dots, \Theta_n$ ist ein eigentliches System; denn aus $x_1\Theta_1 + \dots + x_n\Theta_n + x_0 = 0$ folgt für wachsendes l

$$x_0 + x_1 \frac{p_{1,l}}{q_{1,l}} + \dots + x_n \frac{p_{n,l}}{q_{n,l}} = O\left(\frac{1}{q_{1,l+1}}\right) = o\left(\frac{1}{q_{1,l} \dots q_{n,l}}\right).$$

Für grosse l ist also die linke Seite gleich Null und durch Multiplikation mit $q_{1,l}q_{2,l} \dots q_{n,l}$ bekommt man für $s = 1, \dots, n$

$$x_s p_{s,l} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^n q_{i,l} \equiv 0 \pmod{q_{s,l}}, \text{ also } x_s \equiv 0 \pmod{q_{s,l}};$$

für hinreichend grosse l ist aber $q_{s,l} > |x_s|$, also $x_s = 0$ für $s = 1, \dots, n$, also auch $x_0 = 0$.

Man setze nun $t_l = q_{k,l} - 1 > \frac{1}{2}q_{k,l}$ für $l = 1, 2, \dots$ und man setze voraus, dass es zu einem $l > 0$ ein k -System x_0, x_1, \dots, x_n mit (2) gibt. Nach (2), (9) wäre

$$\left| x_1 \frac{p_{1,l}}{q_{1,l}} + \dots + x_n \frac{p_{n,l}}{q_{n,l}} + x_0 \right| < \frac{2nq_{k,l}}{q_{1,l+1}} + \frac{1}{\left(\frac{1}{2}q_{k,l}\right)^{n-k+1} \varphi\left(\frac{1}{2}q_{k,l}\right)} <$$

$$< \frac{1}{2q_{1,l} \dots q_{n,l}} + \frac{1}{2 \cdot (2q_{k,l})^{n-k+1} q_{1,l} \dots q_{k-1,l}} < \frac{1}{q_{1,l} \dots q_{n,l}},$$

also

$$x_1 \frac{p_{1,l}}{q_{1,l}} + \dots + x_n \frac{p_{n,l}}{q_{n,l}} + x_0 = 0.$$

Es sei c der grösste Index $s \leq n$ mit $x_s \neq 0$; dann wäre also $c \geq k$ und

$$x_1 \frac{p_{1,l}}{q_{1,l}} + \dots + x_c \frac{p_{c,l}}{q_{c,l}}$$

eine ganze Zahl, also

$$x_c p_{c,l} q_{1,l} q_{2,l} \dots q_{c-1,l} \equiv 0 \pmod{q_{c,l}}, \text{ also } x_c \equiv 0 \pmod{q_{c,l}};$$

andererseits aber $0 < |x_c| \leq t_l < q_{k,l} \leq q_{c,l}$ — Widerspruch.

Hilfssätze.

Zum Beweis des Satzes 4. brauchen wir drei Hilfssätze, die jetzt bewiesen werden sollen. Ich bemerke aber gleich, dass diese Hilfssätze nicht neu sind: Hilfssatz 1. ist trivial, Hilfssatz 2. kommt im Wesentlichen in einer Arbeit des Herrn A. Khintchine⁵⁾ vor, und den Hilfssatz 3. habe ich schon in einer anderen Arbeit⁶⁾ bewiesen und angewendet.

Hilfssatz 1. *Es sei gegeben:*

1. eine Zahl $s > 1$;
2. eine Zahl $h > 0$;
3. ein Punkt⁷⁾ $P = [\eta_1, \dots, \eta_s]$ mit rationalen Koordinaten;
4. ein endliches System

$$H_1, \dots, H_m \quad (10)$$

von $(s - 1)$ -dimensionalen Hyperebenen.

Dann gibt es eine Gerade G mit folgenden Eigenschaften:

A) G enthält den Punkt P ; G liegt in keiner Hyperebene des Systems (10).

B) Die Gleichungen von G lassen sich in der Form

$$y_i \Theta_1 + z_i \Theta_i + u_i = 0 \quad (i = 2, 3, \dots, s)$$

schreiben, wobei für jedes i ($i = 2, 3, \dots, s$)

$$(y_i, z_i, u_i) = 1, \quad y_i > h, \quad z_i \neq 0$$

gilt.

Beweis. Es gibt offenbar $s - 1$ Zahlen $\lambda_i \neq 0$ ($i = 2, \dots, s$), sodass die Gerade

$$(\Theta_1 - \eta_1) + \lambda_i (\Theta_i - \eta_i) = 0, \quad (i = 2, \dots, s)$$

die Eigenschaft A besitzt. Man kann dann zu jedem i ($i = 2, \dots, s$) zwei Zahlen p_i, q_i mit $p_i \neq 0, q_i > h, (p_i, q_i) = 1$ so wählen, dass auch die Gerade G mit den Gleichungen

$$(\Theta_1 - \eta_1) + \frac{p_i}{q_i} (\Theta_i - \eta_i) = 0 \quad (i = 2, \dots, s)$$

die Eigenschaft A besitzt. Ist $\eta_i = \frac{a_i}{b}$ ($b > 0$) für $i = 1, \dots, s$ so lassen sich die Gleichungen von G auch in der Gestalt

⁵⁾ A. Khintchine, Über eine Klasse linearer Diophantischer Approximationen, Palermo Rendiconti 50 (1926), 170—195, Hilfssatz 1.

⁶⁾ V. Jarník, Über einen Satz von A. Khintchine, Prace Mathem.—Fizyczne 43 (1936), 151—166, Hilfssatz 2.

⁷⁾ Im folgenden werden oft Zahlensysteme wie $[\eta_1, \dots, \eta_s]$ als Punkte des s -dimensionalen Cartesischen Raumes betrachtet. Ein „Würfel“ bedeutet stets einen achsenparallelen Würfel. μM bedeutet das äussere Lebesguesche Mass der Menge M .

$$bq_i\Theta_1 + bp_i\Theta_i + v_i = 0 \quad (i = 2, \dots, s)$$

schreiben; beachtet man, dass $q_i > h$, $bp_i \neq 0$, $(bq_i, bp_i, v_i) \leq \leq (bq_i, bp_i) = b$, so sieht man, dass G auch die Eigenschaft \bar{B} besitzt.

Hilfssatz 2. *Es sei $s > 1$; $\varphi(\tau)$ sei für $\tau \geq 0$ wachsend und stetig, $\varphi(0) = 0$; $\varphi(\tau) \rightarrow \infty$ für $\tau \rightarrow \infty$. Dann gibt es ein eigentliches System $\Theta_1, \dots, \Theta_s$ mit folgender Eigenschaft: zu jedem hinreichend grossen τ gibt es $3(s-1)$ Zahlen y_i, z_i, u_i ($i = 2, \dots, s$) mit folgenden Eigenschaften:*

$$y_i > 0, z_i \neq 0, (y_i, z_i, u_i) = 1, |y_i\Theta_1 + z_i\Theta_i + u_i| < \frac{1}{\tau}, \quad (i = 2, \dots, s)$$

$$\text{Max}(|y_2|, |y_3|, \dots, |y_s|, |z_2|, |z_3|, \dots, |z_s|) \leq \varphi(\tau).$$

Beweis.⁸⁾ Wir betrachten zunächst alle $(s-1)$ -dimensionalen Hyperebenen, welche mindestens einen Punkt des Würfels

$$E: 0 \leq \Theta_i < 1 \quad (i = 1, \dots, s)$$

enthalten und deren Gleichungen sich in der Form

$$\sum_{i=1}^s a_i\Theta_i + a_0 = 0, \quad (a_0, a_1, \dots, a_s) = 1 \quad (11)$$

schreiben lassen. Die ganze positive Zahl $\text{Max}(|a_1|, \dots, |a_s|)$ heisse der Rang der Hyperebene (11). Offenbar gibt es zu jedem $n > 0$ höchstens endlichviele Hyperebenen vom Rang n (da sie den Würfel E schneiden müssen). Es sei ψ die zu φ inverse Funktion.

Man konstruiere nun vier Folgen

$$G_1, G_2, \dots; m_1, m_2, \dots; P_1, P_2, \dots; W_1, W_2, \dots$$

mit folgenden Eigenschaften:

1. G_j ist eine Gerade, deren Gleichungen lauten:

$$y_{i,j}\Theta_1 + z_{i,j}\Theta_i + u_{i,j} = 0 \quad (i = 2, \dots, s);$$

dabei ist

$$y_{i,j} > 0, z_{i,j} \neq 0, (y_{i,j}, z_{i,j}, u_{i,j}) = 1 \quad (i = 2, \dots, s).$$

Ist $j > 1$, so liegt G_j in keiner Hyperebene vom Rang $< j$.

$$2. m_j = \text{Max}_{i=2, \dots, s} (y_{i,j}, |z_{i,j}|);$$

$$y_{i,j+1} > m_j \text{ für } i = 2, \dots, s; \text{ also } m_{j+1} > m_j.$$

3. P_j ist ein Punkt mit rationalen Koordinaten, der sowohl auf G_j als auch auf G_{j+1} liegt.

4. W_j ist ein abgeschlossener Würfel mit dem Mittelpunkt P_j , dessen Kante kleiner als

⁸⁾ Die Systeme $[\Theta_1, \dots, \Theta_s]$ werden als Punkte eines s -dimensionalen Raumes gedeutet.

$$\frac{1}{m_j \psi(m_{j+1})}$$

ist; ist $j > 1$, so enthält W_j keinen Punkt keiner Hyperebene vom Rang $< j$. Weiter ist $W_1 \subset E$, $W_{j+1} \subset W_j$.

Die Möglichkeit einer solchen Konstruktion sieht man durch Induktion ein:

G_1 sei die Gerade $\Theta_1 - \Theta_i = 0$ ($i = 2, \dots, s$), also $m_1 = 1$; $P_1 = [\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}]$. G_2 sei eine Gerade mit den Gleichungen

$$y_{i,2} \Theta_1 + z_{i,2} \Theta_i + u_{i,2} = 0 \quad (i = 2, \dots, s),$$

$$y_{i,2} > m_1, z_{i,2} \neq 0, (y_{i,2}, z_{i,2}, u_{i,2}) = 1 \quad (i = 2, \dots, s);$$

weiter möge G_2 den Punkt P_1 enthalten, aber in keiner Hyperebene vom Rang < 2 enthalten sein; das geht nach Hilfssatz 1. Dadurch ist $m_2 > m_1$ definiert. Endlich sei W_1 ein abgeschlossener Würfel mit dem Mittelpunkt P_1 und mit der Kantenlänge

$$< \frac{1}{m_1 \psi(m_2)}, \quad W_1 \subset E.$$

Gesetzt nun, für ein $n > 0$ seien G_1, \dots, G_{n+1} ; m_1, \dots, m_{n+1} ; P_1, \dots, P_n ; W_1, \dots, W_n den aufgezählten Bedingungen gemäss konstruiert; dann konstruiert man G_{n+2} , m_{n+2} , P_{n+1} , W_{n+1} folgendermassen: Man wähle einen Punkt P_{n+1} mit rationalen Koordinaten auf G_{n+1} und innerhalb W_n , der in keiner Hyperebene vom Rang $< n + 1$ liegt (das geht nach den Eigenschaften von G_{n+1}). Dann wähle man nach Hilfssatz 1 eine Gerade G_{n+2} durch den Punkt P_{n+1} , die in keiner Hyperebene vom Rang $< n + 2$ liegt und folgende Gleichungen hat:

$$y_{i,n+2} \Theta_1 + z_{i,n+2} \Theta_i + u_{i,n+2} = 0 \quad (i = 2, \dots, s),$$

$$y_{i,n+2} > m_{n+1}, z_{i,n+2} \neq 0, (y_{i,n+2}, z_{i,n+2}, u_{i,n+2}) = 1 \quad (i = 2, \dots, s).$$

Dadurch ist $m_{n+2} > m_{n+1}$ definiert. Schliesslich wähle man um den Mittelpunkt P_{n+1} einen abgeschlossenen Würfel $W_{n+1} \subset W_n$,

dessen Kante $< \frac{1}{m_{n+1} \psi(m_{n+2})}$ ist und der keinen Punkt keiner Hyperebene vom Rang $< n + 1$ enthält (das geht nach der Wahl von P_{n+1}). Damit ist die Möglichkeit der Konstruktion bewiesen.

Es sei $P = [\Theta_1, \dots, \Theta_s]$ der (eindeutig bestimmte) Punkt, der in allen W_j , also auch in E liegt. $\Theta_1, \dots, \Theta_s$ ist ein eigentliches System; denn sonst müsste P in einer Hyperebene von irgendeinem Rang j liegen und das geht nicht, da P in W_{j+1} liegt. Es sei weiter τ eine positive Zahl mit $\varphi(\tau) \geq 1 = m_1$; es gibt also ein $j > 0$ mit $m_j \leq \varphi(\tau) < m_{j+1}$, also $\tau < \psi(m_{j+1})$.

Da P in W_j liegt, so ist, $P_j = [\eta_1, \dots, \eta_s]$ gesetzt,

$$|\eta_i - \Theta_i| < \frac{1}{2m_j \psi(m_{j+1})} \quad (i = 1, \dots, s),$$

$y_{i,j} \eta_1 + z_{i,j} \eta_i + u_{i,j} = 0 \quad (i = 2, \dots, s),$
 $m_j \geq y_{i,j} > 0, m_j \geq |z_{i,j}| \neq 0, (y_{i,j}, z_{i,j}, u_{i,j}) = 1 \quad (i = 2, \dots, s),$
 also

$$|y_{i,j} \Theta_1 + z_{i,j} \Theta_i + u_{i,j}| < \frac{1}{\psi(m_{j+1})} < \frac{1}{\tau} \quad (i = 2, \dots, s)$$

und

$|y_{i,j}| \leq \varphi(\tau), |z_{i,j}| \leq \varphi(\tau), y_{i,j} > 0, |z_{i,j}| \neq 0 \quad (i = 2, \dots, s),$
 womit Hilfssatz 2 bewiesen ist.

Hilfssatz 3. Gegeben seien zwei Zahlen: $s > 1$ und Θ_1 . Es sei A die Menge derjenigen Punkte $[\Theta_2, \dots, \Theta_s]^9$ aus dem Einheitswürfel

$$W: 0 \leq \Theta_i < 1 \quad (i = 2, \dots, s),$$

welche folgende Eigenschaft haben: es gibt unendlichviele Systeme x_0, x_1, \dots, x_s mit

$$\text{Max}_{i=2,3,\dots,s} |x_i| > 0, \left| \sum_{i=1}^s x_i \Theta_i + x_0 \right| < \frac{1}{\text{Max}_{i=1,2,\dots,s} (|x_i|^s \log^2 (|x_i| + 3))}. \quad (12)$$

Behauptung: $\mu A = 0$.

Beweis. Bei gegebenen x_0, x_1, \dots, x_s mit $x' = \text{Max}_{i=2,3,\dots,s} |x_i| > 0$ sei $E(x_0, x_1, \dots, x_s)$ die Menge aller Punkte $[\Theta_2, \dots, \Theta_s]$ aus W mit (12); wird $x = \text{Max}_{i=1,2,\dots,s} |x_i|$ gesetzt, so ist offenbar

$$\mu E(x_0, x_1, \dots, x_s) \leq \frac{2}{x' x^s \log^2(x+3)}.$$

Bei gegebenen x_1, x_2, \dots, x_s gibt es höchstens $(2s+1)x'$ Werte von x_0 mit $E(x_0, x_1, \dots, x_s) \neq 0$. Die Reihe

$$\sum_{\substack{x_0, x_1, \dots, x_s \\ x' > 0}} \mu E(x_0, x_1, \dots, x_s) \quad (x' = \text{Max}_{i=2,3,\dots,s} |x_i|) \quad (13)$$

wird also konvergent sein, wenn die Reihe

$$\sum_{\substack{x_1, \dots, x_s \\ x > 0}} \frac{2(2s+1)}{x^s \log^2(x+3)} \quad (x = \text{Max}_{i=1,2,\dots,s} |x_i|)$$

konvergiert; und diese Reihe konvergiert tatsächlich; denn jedem Wert von x entsprechen $O(x^{s-1})$ Glieder der Reihe. Aus der Konvergenz der Reihe (13) folgt aber, dass diejenigen Punkte $[\Theta_2, \dots,$

⁹⁾ Wir arbeiten hier also im $(s-1)$ -dimensionalen Raum der Punkte $[\Theta_2, \Theta_3, \dots, \Theta_s]$.

$\Theta_s]$, die in unendlichvielen Mengen $E(x_0, x_1, \dots, x_s)$ mit $x' > 0$ liegen, eine Menge vom Mass Null bilden.¹⁰⁾

Beweis des Satzes 4.

Es sei $2 < k \leq n$. Man wähle die Funktion $\varphi(\tau)$ des Hilfssatzes 2 so, dass $\varphi(\tau) = \log \log \tau$ für hinreichend grosse τ ist und man wende Hilfssatz 2 mit $s = k - 1$ an. Es gibt also ein eigentliches System $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_{k-1}$ mit folgender Eigenschaft: zu jedem hinreichend grossen τ gibt es $3(k-2)$ Zahlen y_i, z_i, u_i ($i = 2, \dots, k-1$) mit

$$\left. \begin{aligned} y_i > 0, z_i \neq 0, (y_i, z_i, u_i) = 1, |y_i\Theta_1 + z_i\Theta_i + u_i| < 1/\tau \\ (i=2, \dots, k-1), \end{aligned} \right\} (14)$$

$$\text{Max} (|y_2|, \dots, |y_{k-1}|, |z_2|, \dots, |z_{k-1}|) \leq \log \log \tau.$$

Man wähle ein solches System $\Theta_1, \dots, \Theta_{k-1}$. Diejenigen Punkte $[\Theta_k, \dots, \Theta_n]$, für welche das System $\Theta_1, \dots, \Theta_n$ nicht eigentlich ist, bilden im $(n-k+1)$ -dimensionalen Raume eine Menge vom

Mass Null; denn aus $\sum_{i=1}^n a_i\Theta_i + a_0 = 0$, $\text{Max} (|a_1|, \dots, |a_n|) > 0$

folgt, dass mindestens eine von den Zahlen a_k, \dots, a_n von Null verschieden ist (denn $\Theta_1, \dots, \Theta_{k-1}$ ist ein eigentliches System); also sind die betrachteten Punkte $[\Theta_k, \dots, \Theta_n]$ auf abzählbarviele $(n-k)$ -dimensionalen Hyperebenen gebunden, bilden also tatsächlich eine Menge vom Mass Null. Nach Hilfssatz 3 (mit $s = n - k + 2$) kann man also $\Theta_k, \dots, \Theta_n$ so wählen, dass erstens das System $\Theta_1, \dots, \Theta_n$ eigentlich ist und dass zweitens die Ungleichungen

$$\text{Max}_{i=k, \dots, n} |v_i| > 0, |v_1\Theta_1 + \sum_{i=k}^n v_i\Theta_i + v_0| < \frac{1}{\text{Max}_{i=1, k, \dots, n} (|v_i|^{n-k+2} \log^2(|v_i| + 3))}$$

höchstens endlichviele Lösungen in $v_0, v_1, v_k, \dots, v_n$ haben. Daraus folgt, dass für hinreichend grosses λ die Ungleichungen

$$0 < \text{Max}_{i=k, \dots, n} |v_i| \leq \lambda, |v_1| \leq \lambda, |v_1\Theta_1 + \sum_{i=k}^n v_i\Theta_i + v_0| < \frac{1}{2\lambda^{n-k+2} \log^2 \lambda} \quad (15)$$

überhaupt keine Lösung in $v_0, v_1, v_k, \dots, v_n$ besitzen. Um den

¹⁰⁾ Beweis: Ist $\sum_{n=1}^{\infty} \mu N_n$ konvergent und ist N die Menge derjenigen Punkte, die in unendlichvielen Mengen N_n liegen, so ist $N \subset \sum_{n=k}^{\infty} N_n$, also $\mu N \leq \sum_{n=k}^{\infty} \mu N_n$ für jedes $k > 0$, also $\mu N = 0$.

Satz 6 zu beweisen, genügt es zu zeigen: ist t hinreichend gross, so gibt es kein k -System x_0, x_1, \dots, x_n mit

$$\text{Max} (|x_1|, \dots, |x_n|) \leq t, \quad \left| \sum_{i=1}^n x_i \Theta_i + x_0 \right| \leq \frac{1}{t^{n-k+2} \log^b t}. \quad (16)$$

Gesetzt, (16) sei für ein k -System x_0, x_1, \dots, x_n wahr; daraus wollen wir für hinreichend grosses t einen Widerspruch herleiten. Nach Voraussetzung gäbe es ein l mit $k \leq l \leq n$, $x_l \neq 0$. Man wähle ein System y_i, z_i, u_i ($i = 2, \dots, k-1$), sodass (14) mit $\tau = e^t$, also $\log \log \tau = \log t$ gilt (alles für hinreichend grosse t). Man multipliziere (16) mit $z_2 z_3 \dots z_{k-1}$ und benutze (14) (mit $\tau = e^t$); dadurch bekäme man

$$\begin{aligned} & \left| \Theta_1 \left(x_1 \prod_{j=2}^{k-1} z_j - \sum_{i=2}^{k-1} x_i y_i \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^{k-1} z_j \right) + \sum_{i=k}^n \Theta_i x_i \prod_{j=2}^{k-1} z_j + v_0 \right| \\ & < \frac{(k-2)t \log^{k-3} t}{e^t} + \frac{(\log t)^{k-2}}{t^{n-k+2} (\log t)^{(n-k+3)(k-1)+3}} \\ & < \frac{1}{t^{n-k+2} (\log t)^{(n-k+2)(k-1)+3}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Setzt man also

$$\lambda = t \log^{k-1} t > (k-1)t \log^{k-2} t,$$

und setzt man v_i ($i = 1, k, \dots, n$) gleich dem Koeffizienten von Θ_i im Ausdruck (17), so wäre erstens $v_l \neq 0$, zweitens

$$\begin{aligned} 0 < \text{Max}_{i=k, \dots, n} |v_i| & \leq \lambda, \quad |v_1| \leq \lambda, \quad \left| v_1 \Theta_1 + \sum_{i=k}^n v_i \Theta_i + v_0 \right| < \\ & < \frac{1}{\lambda^{n-k+2} \log^3 t} < \frac{1}{2\lambda^{n-k+2} \log^2 \lambda}, \end{aligned}$$

also wäre (15) wahr, was für hinreichend grosses t den gesuchten Widerspruch liefert.

*

O přibližném řešení rovnice $x_1 \Theta_1 + \dots + x_n \Theta_n + x_0 = 0$ celými čísly.

(Obsah předešlého článku.)

Malá latinská písmena necht' znamenají celá čísla. Jsou-li $\Theta_1, \dots, \Theta_n$ reálná čísla, potom platí, jak známo, tyto věty:

I. Pro každé $t > 0$ mají nerovnosti

$$0 < \text{Max} (|x_1|, \dots, |x_n|) \leq t, \quad \left| \sum_{i=1}^n x_i \Theta_i + x_0 \right| < t^{-n} \quad (1)$$

řešení.

Tedy tím spíše:

II. Pro nekonečně mnoho $t > 0$ mají nerovnosti (1) řešení.

Je známo, že exponent $-n$ nelze ani ve větě I ani ve větě II snížit.

V tomto článku vyšetřuji, jak je nutno modifikovati věty I, II, jestliže požadujeme, aby aspoň k čísel x_i ($1 \leq i \leq n$) bylo od nuly různých. Pro $k = 1$ máme věty I, II. Je-li $1 < k \leq n$, lze hlavní výsledek vysloviti zhruba asi takto: exponent $-n$ je nutno ve větě I nahraditi exponentem $-(n - k + 1)$ a ve větě II exponentem $-(n - k + 2)$; žádný z těchto exponentů nelze snížit. (Přesně je výsledek vysloven ve větách 1. až 4.)

Charakter množiny.

J. Novák, Brno.

(Došlo 11. prosince 1936).

V Mengerově Dimensionstheorie je uvedena poznámka, že charakter kompaktní množiny v separabilním prostoru je spočetný (str. 73). Pan Frankl, jenž tuto poznámku vyslovil, poznal, že u nekompaktních množin nemusí tomu tak býti. V tomto článku dokážeme nutnou a postačující podmínku, aby charakter podmnožiny metrického prostoru byl spočetný. Charakter bodu v Hausdorffově prostoru byl ponejprv definován P. Alexandrovem a P. Urysohnem (Mémoire sur les espaces topologiques compacts str. 2). Na definici charakteru množiny mne upozornil prof. Čech.

Okolím množiny A v topologickém prostoru rozumíme každou otevřenou množinu, jež obsahuje množinu A . Systém \mathfrak{S} okolí množiny A nazveme úplným, jestliže každé okolí množiny A obsahuje nějaké okolí ze systému \mathfrak{S} . Mezi úplnými systémy okolí množiny A existuje aspoň jeden o nejmenší mohutnosti. Tuto mohutnost nazveme charakterem množiny A a označíme ji $\chi(A)$. Je patrné, že $\chi(A) = 1$ tehdy, když množina A je otevřená. To je také jediný případ konečného charakteru. Nejbližší vyšší charakter je pak \aleph_0 .

V metrickém prostoru P platí tato věta:

Charakter množiny $M \subset P$ je spočetný (t. j. roven 1 nebo \aleph_0), když a jen když

$$M = K + G,$$

kde K je kompaktní a G je otevřená množina.

Tuto větu můžeme vysloviti také takto:

Charakter množiny $M \subset P$ je spočetný, když a jen když množina M má kompaktní břeh.¹⁾

Dokažme nejprve, že obě věty jsou ekvivalentní.

¹⁾ t. j. množina $M \cdot \bar{M} \cdot \overline{P - M}$; v. Čech, Bodové množiny I, str. 56.

Nechť

$$M = K + G$$

je rozklad množiny M na kompaktní a otevřenou část. Břeh $\mathbf{B}(M)$ je ta část hranice množiny M , jež náleží do M ; nemá tedy žádného bodu společného s otevřenou G . Proto $\mathbf{B}(M) = \overline{M} \cdot \overline{P - M} \cdot K$. Množina $\mathbf{B}(M)$ je tudíž kompaktní, neboť je průnikem uzavřené a kompaktní množiny.

Platí-li naopak věta druhá, pak rozklad množiny M vypadá takto:

$$M = \mathbf{B}(M) + (M - \mathbf{B}(M)).$$

Tím je ekvivalence obou vět dokázána.

Dokažme nyní první větu.

Je-li $M = \emptyset$, pak je věta zřejmá. Předpokládejme tedy, že množina M není prázdná.

Je-li $\chi(M) = 1$, pak množina M je otevřená a dá se takto rozložit na kompaktní a otevřenou část:

$$M = (x) + M, \quad x \in M.$$

Nechť nyní $\chi(M) = \aleph_0$. Bud'

$$\mathfrak{S} = G_1, G_2, G_3, \dots$$

spočetný úplný systém okolí množiny M . Dokažme, že břeh $\mathbf{B}(M)$ množiny M je kompaktní, tedy, že v každé posloupnosti bodů z $\mathbf{B}(M)$ existuje vybraná posloupnost, jež konverguje k některému bodu z břehu $\mathbf{B}(M)$.

Bud' $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodová posloupnost v $\mathbf{B}(M)$. Zvolme v komplementu $P - M$ posloupnost bodů $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, aby

$$y_n \in \prod_{i=1}^n G_i - M \text{ a vzdálenost } \rho(x_n, y_n) < \frac{1}{n}.$$

Takové body y_n existují, neboť v libovolné vzdálenosti od bodu x_n se nacházejí body z $\prod_{i=1}^n G_i - M$. Množina $\sum_{n=1}^{\infty} (y_n)$ není uzavřená,

neboť jinak by okolí $P - \sum_{n=1}^{\infty} (y_n)$ množiny M neobsahovalo žádné

okolí G_n , takže \mathfrak{S} by nebyl úplný systém okolí množiny M . Proto existuje²⁾ bod $y \in P$, jenž je limitou bodové posloupnosti $\{y_n\}_{i=1}^{\infty}$

vybrané z $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$. Těž bod je limitou posloupnosti $\{x_n\}_{i=1}^{\infty}$, takže $y \in \overline{M} \cdot \overline{P - M}$. Kdyby bod y nenáležel do množiny M , pak

by okolí $P - \sum_{i=1}^{\infty} (y_{n_i}) - (y)$ množiny M neobsahovalo žádné

okolí G_n , takže systém \mathfrak{S} by nebyl úplný. Proto $y \in M \cdot \overline{M} \cdot \overline{P - M} = \mathbf{B}(M)$. Množina $\mathbf{B}(M)$ je tudíž kompaktní.

²⁾ To vyplývá z věty 8·2·1, l. c. ¹⁾ str. 40.

Předpokládejme nyní, že množina M je součtem kompaktní a otevřené množiny $M = K + G$. Je-li $K = \emptyset$, pak M je otevřená a $\chi(M) = 1$. V opačném případě je systém

$$\mathfrak{S} = E_x[\varrho(x, K) < 1] + G, \quad E_x[\varrho(x, K) < \frac{1}{2}] + G, \\ E_x[\varrho(x, K) < \frac{1}{3}] + G, \dots$$

úplný systém okolí množiny M . Vskutku, je-li H okolím množiny M , pak je $K \subset H$ a protože H je otevřená, je $\overline{H} \cdot \overline{P - H} \cdot K = \emptyset$. Proto vzdálenost³⁾

$$\varrho(K, \overline{H} \cdot \overline{P - H}) = \delta > 0,$$

takže pro $m > \frac{1}{\delta}$ je $E_x\left[\varrho(x, K) < \frac{1}{m}\right] + G \subset H$.

Poznámka. Charakter množiny A je topologická vlastnost, neboť úplný systém okolí množiny A přejde homeomorfním zobrazením f zase v úplný systém okolí množiny $f(A)$; platí tedy uvedená věta v metrisovatelných prostorech, zejména také v prostoru, jež Menger nazval separabilním.

V metrickém prostoru P platí tyto dvě věty, které dokázal prof. Čech:

Charakter každé uzavřené podmnožiny prostoru P je spočetný, když a jen když

$$P = K + J,$$

kde K je kompaktní a J je izolovaná množina.

Jiné znění této věty je toto:

Charakter každé uzavřené podmnožiny prostoru P je spočetný, když a jen když derivace prostoru P je kompaktní.

Platí-li prvá věta, pak derivace prostoru P je částí množiny K , a, jakožto uzavřená, je také kompaktní. Má-li naopak prostor P kompaktní derivaci P' , dá se tento rozložit na kompaktní P' a izolovanou $P - P'$.

Dokažme větu v prvním tvaru.

Označme J množinu všech izolovaných bodů prostoru P a pro nepřímý důkaz předpokládejme, že v $P - J$ existuje bodová posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, z níž se nedá vybrat konvergentní. Uzavřená množina $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n)$ je pak svým vlastním břehem, jenž má podle předpokladu spočetný charakter. Podle předešlé věty je množina $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n)$ kompaktní. To je spor.

³⁾ L. c. 1) str. 107, věta 17·3·4.

Je-li nyní F uzavřená podmnožina prostoru $P = K + J$, pak její břeh, jenž je identický s její hranicí, náleží do množiny K , takže je kompaktní. Podle předešlé věty je charakter množiny F spočetný.

Charakter každé podmnožiny prostoru P je spočetný, když a jen když prostor má konečný počet hromadných bodů.

Důkaz. Nechť charakter každé podmnožiny prostoru P je spočetný. Pro nepřímý důkaz předpokládejme, že existuje nekonečně mnoho hromadných bodů. Může nastat jeden z obou těchto případů: buď se dá z těchto hromadných bodů vybrat konvergentní posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ s limitou $x \neq x_n$, ($n = 1, 2, 3, \dots$), nebo existuje posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ hromadných bodů, z níž se nedá vybrat konvergentní. V obou případech je množina $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n)$ svým vlastním břehem, jenž není kompaktní, takže podle první věty je charakter množiny $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n)$ nespočetný. To je spor.

Má-li naopak prostor P konečný počet hromadných bodů, pak břeh každé množiny M je konečný, tedy kompaktní. Charakter $\chi(M)$ je tudíž spočetný.

Brno, topologický seminář, 1936.

Über den Charakter von Mengen.

(Auszug aus dem vorangehenden Artikel.)

Ein System \mathfrak{S} bestehend aus Umgebungen einer Menge A in einem topologischen Raum nennt man vollständig, wenn jede Umgebung der Menge A eine Umgebung aus dem System \mathfrak{S} als Teilmenge enthält. Es gibt ein vollständiges System \mathfrak{S} mit der kleinsten Mächtigkeit. Diese Mächtigkeit heisst Charakter der Menge A .

In jedem metrisierbaren Raum P gilt folgender Satz:

Der Charakter einer Menge $M \subset P$ ist dann und nur dann abzählbar, wenn die Menge M einen kompakten Rand hat.

Herr Prof. Čech hat folgende zwei Korollare bewiesen:

Der Charakter jeder Teilmenge des Raumes P ist dann und nur dann abzählbar, wenn der Raum eine endliche Ableitung besitzt.

Der Charakter jeder abgeschlossenen Teilmenge des Raumes P ist dann und nur dann abzählbar, wenn der Raum P eine kompakte Ableitung hat.

Quadratische Transformationen und Kegelschnitt-Dreiecksnetze.

W. Schmid, Brünn.

(Eingegangen am 11. Juni 1936.)

1. Aus den geradlinigen Dreiecksnetzen einer Ebene π lassen sich Kegelschnitt-Dreiecksnetze einer Ebene π' ableiten, indem man π mittels einer quadratischen Punkt-Transformation auf π' abbildet. Den verschiedenen Typen der quadratischen Transformationen entsprechen verschiedene Klassen der so gewonnenen Kegelschnitt-Dreiecksnetze. Die quadratischen Transformationen zwischen zwei Ebenen sind entweder rational, also $(m, 1)$ -deutig, wobei m nur die Werte 1, 2, 3, 4 annehmen kann, oder nicht rational und dann $(2, 2)$ -deutig.¹⁾ Bei den rationalen Transformationen können die Fälle mit $m < 4$ als Sonderfälle des allgemeinen Falles $m = 4$ aufgefaßt werden. In den mir bekannt gewordenen Untersuchungen über ebene Kegelschnitt-Dreiecksnetze sind durchwegs solche behandelt worden, die sich mittels rationaler quadratischer Transformationen aus geradlinigen Dreiecksnetzen ableiten lassen. Ist nämlich die quadratische Transformation $\pi \rightarrow \pi'$ rational, so entspricht den Geraden von π' in π ein lineares Kegelschnitt-System zweiter Stufe B ; denn die allgemeine Transformation dieser Art kann geradezu dadurch bestimmt werden, daß man den Geraden von π' die Kegelschnitte eines Systems B von π kollinear zuordnet.²⁾ Den Geraden von π dagegen entspricht in π' ein im allgemeinen nicht lineares System von ∞^2 Kegelschnitten. Dieses System Γ ist eines der drei Systeme von je ∞^2 Kegelschnitten, die eine beliebige ebene Kurve dritter Klasse an je drei Stellen berühren. In dem linearen ∞^2 -System B sind nämlich ∞^1 zerfallende Kegelschnitte enthalten, deren Doppelpunkte die Hessesche Kurve dritter Ordnung h von B erfüllen. Ihnen entsprechen in π' ∞^1

¹⁾ R. Ragonesi, Catania Atti Acc. Gioenia (5) 18 (1931), Nr. XXIII.

²⁾ Siehe etwa R. Sauer, Math. Ann. 106 (1932), S. 725.

Geraden, welche eine Kurve c umhüllen. Diese Kurve c ist von der dritten Klasse.³⁾ Denn den Geraden eines Strahlenbüschels von π' entsprechen in π die Kegelschnitte eines Büschels von B , von welchen drei zerfallen. Eine beliebige Gerade g von π schneidet h in drei Punkten. Diesen entsprechen drei Berührungspunkte des der Geraden g in π' zugeordneten Kegelschnitts von Γ mit der Kurve c ⁴⁾ und es läßt sich auch zeigen, daß das System Γ tatsächlich mit einem der drei Berührungssysteme von c identisch ist.⁵⁾

Mittels der rationalen quadratischen Transformationen gelangt man demnach zu Dreiecksnetzen aus Kegelschnitten entweder eines linearen Systems zweiter Stufe B ⁶⁾ oder eines Berührungssystems Γ einer Kurve dritter Klasse.⁷⁾ Umgekehrt kann jedes in einem solchen System B oder Γ enthaltene Kegelschnitt-Dreiecksnetz durch eine rationale quadratische Transformation aus einem geradlinigen Dreiecksnetz gewonnen werden. Es geht dies aus den Arbeiten von R. Sauer⁶⁾ bzw. W. Schmid⁷⁾ hervor.

Die mittels der nicht rationalen, (2, 2)-deutigen quadratischen Transformationen \mathfrak{Q} zwischen zwei Ebenen aus geradlinigen Dreiecksnetzen ableitbaren Kegelschnitt-Dreiecksnetze sind Gegenstand der folgenden Untersuchung. Es wird zunächst das Kegelschnittssystem Σ charakterisiert, in welches das Geradenfeld einer Ebene durch eine solche Transformation \mathfrak{Q} übergeht. Die aus Kegelschnitten von Σ gebildeten Dreiecksnetze erweisen sich als reine Dreiecksnetze auf einer zweiblättrigen Fläche vom Zusammenhang einer Fläche zweiter Ordnung. Innerhalb des zweiparametrischen Systems Σ werden ferner die einparametrischen Systeme bestimmt, deren Kegelschnitte sich nach Dreiecksnetzen anordnen lassen, und schließlich werden Angaben über die von den Kegelschnitten eines solchen einparametrischen Systems eingehüllte Kurve gemacht.

2. Jede quadratische (2, 2)-deutige Punkt-Transformation zwischen zwei Ebenen π', π'' kann (bis auf Kollineationen und auf

³⁾ Bei R. Sauer, a. a. O. S. 729 ist die Gleichung dieser Kurve, die dort H^* heißt, bestimmt.

⁴⁾ Vergl. etwa R. Baldus, Math. Ann. 72 (1912), S. 9.

⁵⁾ Vergl. W. Schmid, Monatsh. f. Math. u. Phys., 45 (1936), S. 13—20.

⁶⁾ Über Dreiecksnetze aus Kegelschnitten eines linearen Systems zweiter Stufe siehe: O. Volk, Sitz.-Ber. d. Bayer. Ak. d. Wiss. 1929, S. 132—134. — R. Sauer, Math. Ann. 106 (1932), S. 729. — O. Baier, Jahresber. d. DMV 42 (1932), S. 30-31. — K. Strubecker, Monatsh. f. Math. u. Phys. 39 (1932), S. 395—398. — R. Sauer-O. Baier, Jahresber. d. DMV 43 (1933), S. 153—162. — W. Schmid, Monatsh. f. Math. u. Phys. 40 (1933), S. 411—417.

⁷⁾ Über Dreiecksnetze aus Kegelschnitten, welche eine Kurve dritter Klasse an je drei Stellen berühren, siehe: R. Sauer-O. Baier, a. a. O. S. 161-162. — W. Schmid, ⁵⁾.

unendlich viele Arten) mittels einer Fläche zweiter Ordnung φ hergestellt werden, die aus zwei Punkten $O_{1,2}$ auf die Ebenen π' bzw. π'' projiziert wird, worauf man solche Punkte von π' , π'' einander zuordnet, die Projektionen ein und desselben Punktes von φ aus O_1 bzw. O_2 sind.⁸⁾ Wären $\delta_{1,2}$ die Polarebenen von $O_{1,2}$ bezüglich φ , d ihre Schnittlinie, $u_{1,2}$ die Schnitte von φ mit $\delta_{1,2}$, so sind die Projektionen $u'_{1,2}$ von $u_{1,2}$ aus O_1 auf π' zwei Kegelschnitte, die sich an zwei Stellen berühren und der Riß O'_2 von O_2 ist der gemeinsame Pol der Berührungssehne d' bezüglich $u'_{1,2}$. Die Projektion irgend einer Geraden g'' von π'' aus O_2 auf φ ist ein Kegelschnitt g ; dessen Riß aus O_1 auf π' ist ein Kegelschnitt g' , welcher u'_1 an zwei Stellen berührt und in zweien seiner Schnittpunkte mit u'_2 Tangenten durch O'_2 besitzt. Sind umgekehrt $u'_{1,2}$ zwei vorgegebene Kegelschnitte von π' , die sich an zwei Stellen berühren, und ist O'_2 der gemeinsame Pol der Berührungssehne d' , so gibt es, wie man sich leicht überzeugt, ∞^2 Kegelschnitte g' , welche u'_1 an zwei Stellen berühren und in zweien ihrer Schnittpunkte mit u'_2 Tangenten durch O'_2 besitzen. Das System Σ dieser Kegelschnitte läßt sich stets durch eine quadratische, im allgemeinen (2, 2)-deutige Transformationen \mathfrak{Q} in das Geradenfeld einer Ebene π'' überführen. Soll nämlich eine hierzu geeignete Transformation \mathfrak{Q} bestimmt werden, so kann man den Punkt O_1 außerhalb von π' und eine Fläche zweiter Ordnung φ , welche dem Kegel (O_1, u'_1) längs u'_1 eingeschrieben ist, beliebig wählen. Der Kegel (O_1, u'_2) berührt dann φ an zwei Stellen, so daß sein Schnitt mit φ in zwei Kegelschnitte zerfällt. Von diesen ist einer als Kegelschnitt u_2 zu wählen. Ist δ_2 die Ebene von u_2, O_2 der Pol von δ_2 bezüglich φ , so ist O'_2 der Riß von O_2 aus O_1 . Der Kegel, der einen Kegelschnitt g' von Σ aus O_1 projiziert, berührt dann φ in zwei Punkten und sein Schnitt mit φ zerfällt in zwei Kegelschnitte $g_{1,2}$, deren Ebenen wegen der beiden Tangenten durch O_2 diesen Punkt enthalten. Wählt man dann als π'' etwa die Ebene δ_2 , so sind die Projektionen von $g_{1,2}$ aus O_2 auf π'' zwei Geraden $g''_{1,2}$, und es ist in der Tat eine Korrespondenz (2, 2) zwischen den Ebenen π', π'' hergestellt, bei welcher den Kegelschnitten von Σ die Geraden von π'' entsprechen. Es gilt demnach

Satz 1: „Sind $u'_{1,2}$ zwei Kegelschnitte der Ebene π' , die sich an zwei Stellen berühren, und ist O'_2 der Pol der Berührungssehne bezüglich $u'_{1,2}$, so bilden die Kegelschnitte g' von Σ , welche u'_1 an je zwei Stellen berühren und in zweien ihrer Schnittpunkte mit u'_2 Tangenten durch O'_2 besitzen, ein zweiparametrisches System Σ , welches durch eine quadratische, im allgemeinen (2, 2)-

⁸⁾ G. Marletta, Rendiconti di Palermo 17 (1903), S. 183.

deutige Transformation der Ebene π' in das Geradenfeld einer Ebene π'' übergeführt werden kann. Umgekehrt gehen bei jeder (2, 2)-deutigen quadratischen Transformation einer Ebene π'' in eine Ebene π' die Geraden von π'' in ein solches Kegelschnittssystem Σ über“.

Soll das Kegelschnittssystem Σ allgemein sein, d. h. nicht so degenerieren, daß es auch als Sonderfall des Typus B oder I' angesehen werden kann, also durch eine rationale quadratische Transformation aus einem Geradenfeld ableitbar ist, so müssen die Punkte $O_{1,2}$ von einander verschieden sein und es darf keiner von ihnen der Fläche φ angehören. Ferner darf O_1 nicht Punkt von π' , O_2 nicht Punkt von π'' sein. Die Fläche φ selbst muß eine eigentliche Fläche oder ein Kegel zweiter Ordnung sein, darf also nicht in zwei Ebenen zerfallen. Für die Kegelschnitte $u'_{1,2}$, durch welche das System Σ bestimmt ist, folgt hieraus: u'_1 muß entweder ein eigentlicher Kegelschnitt oder ein Geradenpaar, darf also nicht Doppelgerade sein. Bei nicht zerfallendem u'_1 muß u'_2 entweder ein ebenfalls nicht zerfallender Kegelschnitt oder eine Doppelgerade sein, welche aber als einfache Gerade nicht Tangente von u'_1 sein darf. Ist u'_1 ein Geradenpaar mit dem Doppelpunkt S' , so muß u'_2 entweder ein Geradenpaar mit demselben Doppelpunkt S' oder eine Doppelgerade durch S' sein.

3. Einem geradlinigen Dreiecksnetz der Ebene π'' entspricht bei der Projektion aus O_2 auf φ ein aus Kegelschnitten von φ gebildetes Dreiecksnetz. Dabei geht jeder Knotenpunkt des Dreiecksnetzes in π'' in zwei Knotenpunkte des Dreiecksnetzes auf φ über. Außer den Knotenpunkten weisen die an dem Dreiecksnetz beteiligten Kegelschnitte von φ keinerlei Schnittpunkte auf. Durch Projektion dieses Kegelschnitt-Dreiecksnetzes von φ aus O_1 nach π' gelangt man zu einem Dreiecksnetz aus Kegelschnitten von Σ . Da aber die Beziehung zwischen den Punkten von φ und ihren Projektionen aus O_1 auf π' (2, 1)-deutig ist, weisen die an dem Dreiecksnetz von Σ beteiligten Kegelschnitte außer den Knotenpunkten noch „scheinbare“ Schnittpunkte auf. Die Beziehung zwischen den Punkten von φ und π' läßt sich nun eineindeutig machen, indem man die Ebene π' mit zwei Blättern überdeckt, welche längs u'_1 in einem Rückkehrschnitt, also wie in einer Falte, zusammenhängen. Man kann diese zweiblättrige Fläche π' durch eine Deformation von φ erhalten, bei welcher jeder Punkt P von φ auf seinem Projektionsstrahl $O_1 P$ in das entsprechende Blatt der Bildebene π' hineinrückt. Die zweiblättrige Fläche π' ist demnach vom Zusammenhang der Fläche zweiter Ordnung φ . Auf der zweiblättrigen Fläche π' sind dann die durch die (2, 2)-deutige quadratische Transformation

gewonnenen Kegelschnitt-Dreiecksnetze reine „Sechseckgewebe“ im Sinne von W. Blaschke.⁹⁾ Es gilt demnach

Satz 2: „Durch eine (2, 2)-deutige quadratische Transformation zwischen zwei Ebenen π' , π'' gehen die geradlinigen Dreiecksnetze von π'' in Dreiecksnetze aus Kegelschnitten des zugehörigen Systems Σ von π' über. Auf der zweiblättrigen Fläche π' , deren Blätter längs des Kegelschnitts u'_1 in einem Rückkehrschnitt zusammenhängen, weisen die Kegelschnitte des Dreiecksnetzes keine Schnittpunkte auf außer den Knotenpunkten. Umgekehrt läßt sich jedes Dreiecksnetz aus Kegelschnitten eines Systems Σ der Ebene π' mittels einer (2, 2)-deutigen quadratischen Transformation aus einem geradlinigen Dreiecksnetz einer Ebene π'' herleiten“.

4. Aus den ∞^2 Kegelschnitten eines Systems Σ können gewisse einparametrische Systeme herausgegriffen werden, deren Kegelschnitte sich nach Dreiecksnetzen anordnen lassen, während umgekehrt die Kegelschnitte eines jeden in Σ enthaltenen Dreiecksnetzes einem von diesen einparametrischen Systemen angehören müssen. Denn die Kegelschnitt-Dreiecksnetze von Σ gehen nach Satz 2 durch eine Punkttransformation aus geradlinigen Dreiecksnetzen eines ebenen Feldes π'' hervor. Nach H. Graf und R. Sauer¹⁰⁾ aber umhüllen die an einem ebenen, geradlinigen Dreiecksnetz beteiligten Geraden stets eine Kurve dritter Klasse, die auch zerfallen kann, und umgekehrt lassen sich die Tangenten einer solchen Kurve stets nach Dreiecksnetzen anordnen. Die erwähnten einparametrischen Systeme entsprechen also den Tangenten der Kurven dritter Klasse von π'' . Es fragt sich nun, in welcher Weise sie sich innerhalb von Σ charakterisieren lassen. Es wäre zunächst der Kegelschnitt u'_2 nicht eine Doppelgerade. Dann kann dies am einfachsten durch Angabe der Kurven geschehen, welche Ort der Pseudo-Mittelpunkte der zu diesen Systemen gehörigen Kegelschnitte sind, wenn als pseudo-eigentliche Gerade von π' die Gerade durch O'_2 parallel d' gewählt wird. Denn jeder Punkt von π' ist dann Pseudo-Mittelpunkt eines einzigen Kegelschnitts von Σ . Einem einparametrischen Kegelschnittssystem von Σ , dessen Kegelschnitte sich nach Dreiecksnetzen anordnen lassen, entsprechen nun bei der Projektion aus O_1 ∞^1 Kegelschnitte von φ , deren Ebenen durch O_2 gehen, also einen Kegel κ umhüllen. Andererseits aber lassen sich die Spuren dieser Ebenen in π_1 nach Dreiecksnetzen anordnen. Nach dem oben angeführten Graf-Sauerschen Satz ist also dieser Kegel von der

⁹⁾ Math. Zeitschr. 28 (1928), S. 151.

¹⁰⁾ Vergl. H. Graf und R. Sauer, Sitz.-Ber. d. Bayer. Ak. d. Wiss. 1924, S. 128.

dritten Klasse. Von seinen Ebenen gelangt man nun in folgender Weise zu den Pseudo-Mittelpunkten der Kegelschnitte von Σ : Es wäre e die Schnittlinie einer Ebene ε des Kegels mit δ_2 . Dann ist also die Einhüllende (e) der Geraden e eine Kurve dritter Klasse. E wäre der Pol von e bezüglich u_2 . Der Ort (E) ist also eine Kurve dritter Ordnung. Dabei entsprechen drei Tangenten von (e), die durch einen Punkt gehen, drei Punkte von (E), die in einer Geraden liegen. Sei weiter O der gemeinsame Pseudo-Mittelpunkt von φ und $u_{1,2}$ für die Ebene durch O_1, O_2 parallel d als pseudo-uneigentliche Ebene. Dann ist der Pseudo-Mittelpunkt M des in der Ebene ε liegenden Kegelschnitts von φ der Schnittpunkt von e mit der Geraden OE . M entspricht daher dem Punkt E in einer involutorischen, birational-quadratischen Transformation von δ_2 , für welche O und die pseudouneigentlichen Punkte $U_{1,2}$ von u_2 die Fundamentalpunkte sind. Der Ort (M) von M ist demnach eine Kurve sechster Ordnung mit dreifachen Punkten in $O, U_{1,2}$. Sie ist wegen der eineindeutigen Beziehung auf die ebene Kurve dritter Ordnung (E) im Allgemeinen vom Geschlecht 1, kann aber auch zerfallen. Drei Punkten von (E), die in einer Geraden liegen, entsprechen dabei drei Punkte von (M), die auf einem Kegelschnitt durch die Fundamentalpunkte $O, U_{1,2}$ liegen. Die Projektion aus O_1 nach π' schließlich ist eine Pseudo-Parallelprojektion, bei welcher der Pseudo-Mittelpunkt eines Kegelschnitts in den des Bild-Kegelschnittes übergeht. Daher gilt

Satz 3: „In der Ebene des Kegelschnittsystems Σ , dessen Kegelschnitt u'_2 nicht in eine Doppelgerade zerfällt, werde die Gerade durch O'_2 parallel d' als pseudo-uneigentliche Gerade eingeführt. Der gemeinsame Pseudo-Mittelpunkt von $u'_{1,2}$ sei mit O' , die pseudo-uneigentlichen Punkte von u'_2 seien mit $U'_{1,2}$ bezeichnet. Die Kegelschnitte des Systems Σ , deren Pseudo-Mittelpunkte auf einer (nicht zerfallenden oder zerfallenden) Kurve sechster Ordnung liegen, welche die Punkte O' und $U'_{1,2}$ zu dreifachen Punkten besitzt, lassen sich nach Dreiecksnetzen anordnen. Umgekehrt liegen die Pseudo-Mittelpunkte der an einem Dreiecksnetz von Σ beteiligten Kegelschnitte stets auf einer solchen Kurve. Die Pseudo-Mittelpunkte dreier Kegelschnitte des Dreiecksnetzes, die sich in einem seiner Knotenpunkte schneiden, liegen dabei stets auf einem Kegelschnitt durch $O', U'_{1,2}$ “.

Tritt der in Satz 3 ausgeschlossene Fall ein, daß u'_2 die doppelt zählende Gerade d' ist, so fallen die Pseudo-Mittelpunkte der Kegelschnitte von Σ alle auf diese Gerade. Dagegen bleibt die Pseudo-Mittelpunkts-Konfiguration der den Kegelschnitt-Drei-

ecksnetzen von Σ auf φ entsprechenden Dreiecksnetze in der Ebene δ_2 erhalten. Sie kann in einfacher Weise nach π' projiziert werden, wenn als Zentrum dieser Hilfsprojektion einer der beiden auf O_1, O_2 gelegenen Eckpunkte des vollständigen Vierseits gewählt wird, dessen übrige vier Eckpunkte die in der Ebene O, O_1, O_2 liegenden Punkte von $u_{1,2}$ sind.

5. Der Kurve r'' 3. Klasse und im allgemeinen 6. Ordnung und vom Geschlecht 1, welche von den Geraden des Dreiecksnetzes in π'' eingehüllt wird, entspricht in π' eine von den Kegelschnitten des Dreiecksnetzes (außer dem Kegelschnitt u'_1) eingehüllte Kurve r' , welche auf der zweiblättrigen Fläche π' jene Gebiete von einander trennt, durch deren Punkte es drei reelle bzw. einen reellen und zwei konjugiert imaginäre Kegelschnitte von Σ gibt, deren Pseudo-Mittelpunkte auf der Pseudo-Mittelpunktskurve des Dreiecksnetzes liegen. Die Projektion von r'' aus O_2 auf φ ist eine Raumkurve r 12. Ordnung mit 18 Rückkehrpunkten, welche den 9 Rückkehrpunkten von r'' entsprechen. Die Anzahl der scheinbaren Doppelpunkte von r läßt sich direkt bestimmen und es ergibt sich, wie hier nicht ausgeführt werden soll, daß die Hüllkurve r' des Dreiecksnetzes von Σ im allgemeinen 12. Ordnung, 18. Klasse und vom Geschlecht 7 ist, 30 Doppelpunkte und 18 Rückkehrpunkte besitzt.

*

Kvadratické transformace a trojúhelníkové sítě kuželoseček.

(Obsah předešlého článku.)

Ze známých přímkových trojúhelníkových sítí rovin π lze odvoditi trojúhelníkové sítě kuželoseček v rovině π' , když rovinu π zobrazíme na rovinu π' kvadratickou transformací. Různým typům kvadratických transformací odpovídají různé třídy takto získaných trojúhelníkových sítí kuželoseček. Pokud jest mi známo, byly vyšetřovány pouze takové typy trojúhelníkových sítí kuželoseček, které lze z přímkových odvoditi racionálními kvadratickými transformacemi. Předmětem tohoto pojednání jsou trojúhelníkové sítě kuželoseček, které lze odvoditi z přímkových kvadratickými transformacemi nikoliv racionálními, tedy $(2, 2)$ -značnými.

Úvahy jsou uvedeny prostorově tak, že se kvadratická $(2, 2)$ -značná transformace vytvoří kvadrikou φ , která se promítá ze dvou bodů O_1, O_2 na roviny π', π'' , načež jsou k sobě přiřazeny ony body rovin π', π'' , které jsou průměty jednoho a téhož bodu kvadriky φ z bodů O_1, O_2 . Touto transformací přecházejí přímkové trojúhelníkové sítě roviny π'' v trojúhelníkové sítě kuželoseček, které patří k jistému systému Σ o dvou parametrech v rovině π' .

Tento systém lze charakterisovati takto: Jsou-li u'_1, u'_2 dvě kuželosečky v rovině π' dvojnásobně se dotýkající a O'_2 pól tětiny d' , určené dotyčnými body, vzhledem k oběma kuželosečkám, tvoří kuželosečky g' v rovině π' , které se dotýkají kuželosečky u'_1 ve dvou bodech a jejichž tečny ve dvou průsečících s kuželosečkou u'_2 jdou bodem O'_2 , takový systém Σ . V tomto systému lze určití systémy o jednom parametru, jejichž kuželosečky lze seřaditi v trojúhelníkové síti. Za tím účelem zavedme v rovině systému Σ přímkou jdoucí bodem O'_2 a rovnoběžnou s d' jako pseudonevlastní (pseudo-uneigentliche) přímkou. Společný pseudo-střed (Pseudo-Mittelpunkt) kuželoseček u'_1, u'_2 značme O' , pseudonevlastní body kuželosečky u'_2 pak U'_1, U'_2 . Kuželosečky systému Σ , jejichž pseudostředy tvoří sextiku (jež se může rozpadnouti), která má body O', U'_1, U'_2 za body trojnásobné, lze seřaditi v trojúhelníkové síti a naopak. Pseudostředy tří kuželoseček trojúhelníkové sítě, které se protínají v jednom z jejích uzlových bodů, leží vždy na kuželosečce, jdoucí body O', U'_1, U'_2 .

Představme si rovinu π' dvojnásobně pokrytou, při čemž oba listy splývají podél kuželosečky u'_1 způsobem v článku popsaným. Potom kuželosečky trojúhelníkové sítě na dvojnásobně pokryté ploše nemají průsečíků mimo uzly sítě. Práce končí několika poznámkami o křivce, která jest obálkou kuželoseček zmíněného systému o jednom parametru.

ČÁST FYSIKÁLNÍ.

Conditions for discharge in the ionic tube.

V. Dolejšek and B. Janíček, Praha.

(Received December 21, 1936.)

Influence of cathode-sputtering on discharge. Use of Copper and Iron cathodes at high current-densities. Influence of impurities in the material of the cathode. Study of the distribution of load on the cathode surface with the Copper cathode employed. Conditions for normal discharge with Copper and Iron cathodes. Disadvantages of pure Aluminium.

In the neighbourhood of the longer wavelengths, round about 100 Å slight traces of impurities always begin to appear in the spectrum, which greatly increase the difficulty of classifying new lines. On the other hand it is well known that all materials that may be used as electrodes will distill off more or less in a vacuum when affected by heat. A certain heating effect on at least part of the electrodes during the discharge cannot be avoided, hence it follows that, without considering here the effects of cathode-sputtering, a layer of the material of the cathode will always be formed on the anticathode.

On the average, we found that the contamination of this region of the spectrum by impurities was least, in our work on absorption edges with the ionic tube¹⁾ when using a directly-cooled aluminium cathode and a tungsten anticathode.

It is important to mention here that, even with these electrodes, and under the optimum working conditions, as found by Dráb²⁾ and Kunzl,³⁾ the lines of aluminium from the cathode always appeared, though with a relatively weak intensity.

¹⁾ V. Dolejšek-B. Janíček, *Nature* **132** (1933), 443; J. Bačkovský-V. Dolejšek, *Zs. f. Phys.* **99** (1936), 48; V. Dolejšek-V. Kunzl, *Zs. f. Phys.* **74** (1932), 565, *Časopis* **61** (1932), 242.

²⁾ K. Dráb, *Časopis* **2** (1933), 31; V. Dolejšek-K. Dráb, *C. R.* **196** (1933), 334.

³⁾ V. Kunzl, *Acta physica polonica* **2** (1934), 447, *Zs. f. Phys.* **99** (1936), 42.

We attempted to remove the above-mentioned traces of aluminium from the cathode by a method analogous to that employed by Dauvillier when working with an electronic tube. This method consists in using an incandescent cathode made of the material whose spectrum we wish to obtain, so that, during the discharge, the anticathode is continuously covered, by sputtering, with fresh layers of material from the cathode. Therefore to obtain the Copper or Iron lines we substituted for the Aluminium cathode in our ionic tube a cathode of Copper or Iron respectively. The Aluminium cathode having been replaced by one of Copper or Iron, all other conditions for obtaining the discharge with normal cathode potential were left the same as when the Aluminium cathode was used. We found, however, that in this case the character of the discharge in the ionic tube is changed, and becomes anomalous, which form is not effective for the generation of X-rays. In order to secure the normal discharge, as obtained with the Aluminium cathode, we tried altering the above-mentioned conditions, such as the pressure, distance between electrodes, etc.

We also investigated how the discharge in the tube depended upon the purity of the material of the cathode. We found that at high current-densities, such as were employed in our ionic tube, it was quite impossible to use cathodes of e. g. pure Copper, as will be mentioned later. The most resistant material found for the cathode was Copper, cast in vacuo and containing a certain percentage of Silicon, the presence of the latter element being determined from the appearance of the Si K_{α} -doublet in the spectrum. With this material, as also with certain varieties of Iron (pure Iron was not examined), and with certain distances apart of the electrodes, we were able to obtain the normal discharge, and the normal L-series spectrum of Copper and Iron. The photographs however were no better than those obtained with the Aluminium cathode, and brought to light no new spectral data.

It is important to state here that, while with 1200 Volts and 250 MA. on the Aluminium cathode the optimum pressure was about 0,2 mm of mercury, when using the Iron cathode it was necessary to increase the pressure to over 1 mm of mercury to obtain the same conditions of discharge. Unless unexpected difficulties turn up, it should be possible to apply these results to the method of obtaining the emission spectra of gases with the ionic tube, as put forward by J. Bačkovský.⁴⁾

⁴⁾ J. Bačkovský-V. Dolejšek, *Nature* **136** (1933), 643; J. Bačkovský, *C. R.* **202** (1936), 1671.

The use of Copper as a cathode also enabled us to learn how regularly different parts of the cathode surface are loaded. It was shown that copper was sputtered more from those parts of the cathode that were bombarded by positive ions. It appears that the intensity of the surface loading, for a given curvature, varies with the distance from the centre, which is in accordance with the results of Dráb (loc. cit.), while it further appears that with lessening curvature the loading of points farther from the centre is increased. This was particularly apparent when using a cathode that had different curvature in two dimensions mutually at right angles. The parts furthest from the centre in the direction of least curvature, forming an annular space about 2 mm wide close to the edge of the cathode, were so heavily bombarded by positive ions that after a few hours use the cathode in these regions appeared carved into sharp edges, so that the discharge became completely irregular. On the other hand in the direction of the greater curvature the edges were far less affected. The distribution of load over the whole surface of the cathode could be determined by the amount of Copper removed at any point.

In the case of the Copper cathode its surface remains very pure, even throughout a prolonged discharge, and it is obvious that it is well possible to use such a surface bombarded by positive ions as a source of radiation in any method where it is not necessary to screen the rays, but an extended source may be employed. This is the case in e. g. certain focussing methods, in which the source may be of considerable area, and may have much the same size as our cathode. It is scarcely possible to decrease the surface of the cathode, since this is to increase the specific loading of the cathode surface, which the material will not stand.

It should be stated here that, as we have already mentioned in connection with Copper, extremely pure materials are not at all suitable for electrodes under heavy surface loading, or, at least, they may greatly change the conditions for optimum discharge. Thus for example we used Copper from various sources, among them also Copper from the firm of Haereus, and from the Bureau of Standards, which last was kindly presented to us by Professor A. Šimek of Brno. Cathodes made from this extraordinarily pure copper gave a completely different character to the discharge, since they produced extraordinarily strong sputtering, and it was quite impossible to concentrate electrons on the anticathode or to obtain a clear focus. The whole anticathode became covered with a black film. Under these circumstances the spectrum lines either did not appear at all, or else were very feeble. As we have stated, when we used as cathode material

Copper containing certain impurities (e. g. traces of Silicon) such as is used in the manufacture of electrodes for Röntgen tubes, the cathode sputtering greatly decreased, and the black film on the anticathode did not appear. In the same way we also used chemically pure Aluminium from the Bureau of Standards, again provided by the kindness of Prof. A. Šimek, and compared the discharge from a cathode of this Aluminium with that from ordinary commercial Aluminium. In this case the difference was not so marked, nevertheless it was easily seen that pure Aluminium is not such a suitable cathode material as commercial Aluminium.

It was not possible to determine precisely and quantitatively the optimum conditions for discharge, especially the pressure for a given intensity, given voltage, or given distance or size of electrodes, since this involves the simultaneous variation of a number of other factors, which cannot be evaluated.

The difference in the character of the discharge obtained with Aluminium and Copper cathodes is not surprising, since Copper suffers enormously greater cathode sputtering than Aluminium. It is thus quite understandable that with high current densities, as in our case, even with good cathode cooling, there should be considerable differences in the character and conditions of the discharge. On the other hand, the great difference between the character of the discharge from a Copper cathode and an Iron cathode must be explained by the great difference in the thermal conductivity of the cathode material, Iron, as a far worse heat-conductor, permitting the existence of a very large temperature difference between the cooled interior of the cathode and the layer immediately beneath the surface. As has been shown by the work of previous authors, in order to maintain a normal potential fall across an X-ray tube, the cathode must be maintained below a certain critical temperature, above which the discharge becomes anomalous. From this it may be judged that, in order to get a normal discharge it is necessary to increase the surface of the Iron cathode so as to decrease the specific loading. Thus it should only be possible to use Iron cathodes for those methods which allow of the use of an extended source of radiation.

When examining the connection between the size of the focus and the distance of the electrodes, it was found alike with Aluminium, Copper, and Iron cathodes that if the distance of the electrodes was increased above a certain minimum value the size of the focal spot increased, at another given distance a maximum was obtained, and a further increase of the distance between

the electrodes again caused the size of the focus to decrease. For example, with the Aluminium cathode and electrodes of the normal size, the size of the focal spot was a minimum at distances of 22,5 and 25,0 mm. and a maximum at a distance of 23,0 mm. We did not examine whether with still smaller or greater distances the size of the focal spot again increased, since at these distances the surface of the anticathode becomes fouled. At the maximum size of focus between the two minima the focus is clearest, i. e. the discharge is most suitable, the focus produces the least layer of impurities on the anticathode, and it is under these conditions that one may best obtain the true spectrum of the anticathode.

The results obtained under these conditions of absorption were published in *Nature* (loc. cit.) and continued therein by J. Bačkovský (loc. cit.). Besides the absorption edges we have obtained some new lines in the emission spectrum. Since we had not a precision spectrograph at hand with a plane grating, and since in certain positions of the grating it was necessary to determine the angles of deviation entirely from dispersion curves, it has not been possible mutually to compare the wave-lengths of all the lines photographed; for this reason we prefer not to give them here.

Spectroscopical Institute of the Charles' University of Prague.

*

Podmínky pro výboj v iontové trubici.

(Obsah předchozího článku.)

Tepelné namáhání elektrod, zvláště katody, při výboji ve vakuu způsobuje, že se vždy vypaří něco materiálu elektrod. Toto vypařování nedá se nikdy při větších hustotách proudových zcela odstraniti a působí rušivě zvláště v oboru vlnových délek v okolí 100 Å.

Autoři zkoušeli, zda lze použití v iontové trubici tohoto fakta k získání X-spekter způsobem, jakého použil Dauvillier v trubici elektronové. Konali měření s katodami Cu a Fe. Při tom se ukázalo, že na př. čisté mědi (pocházející z Bureau of Standards, nebo od firmy Haeraeus) nelze vůbec při větších intenzitách v iontové trubici použití. Obecně lze říci, že čisté kovy jako Cu, Fe a Al jsou pro výboj méně vhodné než kovy s určitými přísadami, i když lze některých takových kovů čistých (na př. čistého aluminia) použití.

Měděná katoda s příměšinou silicia se neukázala výhodnou k získání dlouhovlnného X-spektra Cu, naopak intenzivnějších

spekter bylo dosaženo s aluminiovou katodou, jak ukázáno v již publikovaných pracích autorů.

Užití Cu jako katody ukázalo však rozdělení zatížení tepelného na povrchu katody. Z nastalých změn destilací na povrchu bylo zřejmo, že při určité křivosti, při níž jsou elektrony nejlépe fokusovány, jsou pozitivními ionty nejvíce atakována místa těsně u okraje katody na ploše mezikruží povrchu katody o rozdílu poloměrů asi 2 mm. Celkové rozdělení zatížení povrchu katody je v soulasu s výsledky Drábovými získanými na aluminiové katodě cestou fotografickou.

Elektromagnetische Wellen an dielektrischen Röhren.

Stanislav Láška, Praha.

(Eingegangen am 12. Jänner 1937.)

Die Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen an dielektrischen Röhren hat Zachoval¹⁾ theoretisch untersucht. Die Ergebnisse dieser Theorie hat Liška²⁾ experimentell nach-

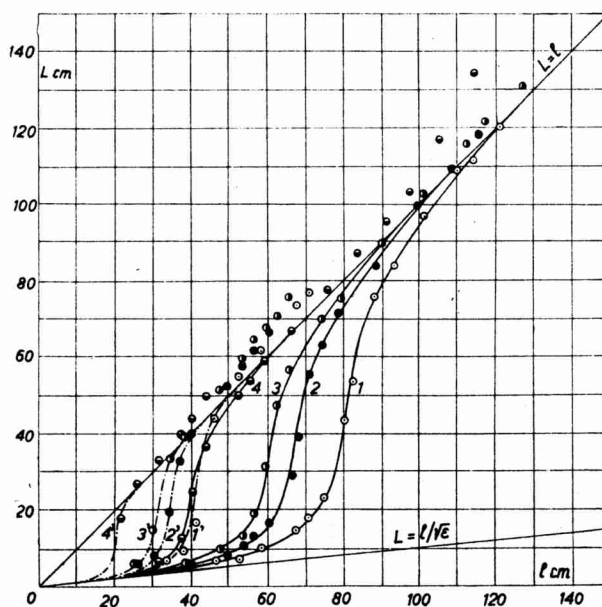


Fig. 1. Wellen erster und zweiter Ordnung für $p = 0,2$: — Wellen erster Ordnung; - - - Wellen zweiter Ordnung. Für die Kurven 1 und 1' ist $\rho_1^{(1)} = 60$ mm, für die Kurven 2 und 2' ist $\rho_1^{(2)} = 50$ mm, für die Kurven 3 und 3' ist $\rho_1^{(3)} = 45$ mm, für die Kurven 4 und 4' ist $\rho_1^{(4)} = 30$ mm.

¹⁾ L. Zachoval, Rozpravy České Akademie, **42** (1932), č. 34.

²⁾ J. Liška, Čas. pro přest. mat. a fys., **63** (1934), 97.

geprüft; in seiner Arbeit findet man auch die theoretischen Ergebnisse kurz zusammengefasst. Aus der Theorie ergeben sich für die freie Welle l und für die Welle L an der dielektrischen Röhre folgende Beziehungen

$$l = 2\pi\varrho_1 f(\varrho_2/\varrho_1) \quad L = 2\pi\varrho_1 g(\varrho_2/\varrho_1)$$

$$\frac{L}{l} = \frac{g(\varrho_2/\varrho_1)}{f(\varrho_2/\varrho_1)}$$

wobei ϱ_1 den äusseren, ϱ_2 den inneren Radius der dielektrischen Röhre bedeutet.

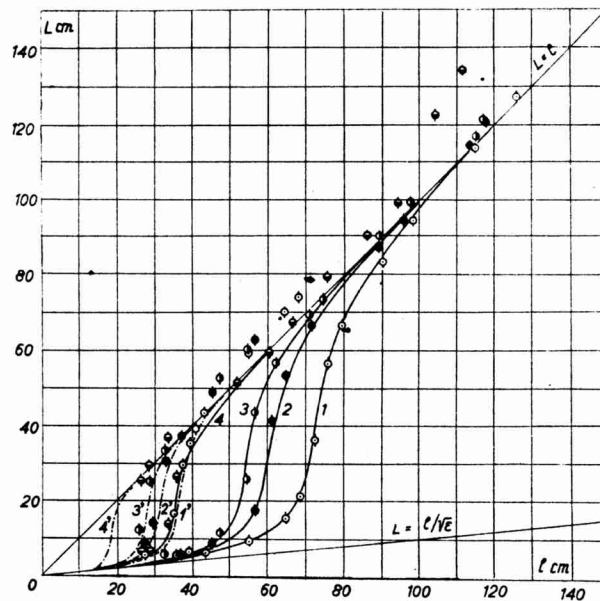


Fig. 2. Wellen erster und zweiter Ordnung für $p = 0,3$: ——— Wellen erster Ordnung; - - - - - Wellen zweiter Ordnung. Für die Kurven 1 und 1' ist $\varrho_1^{(1)} = 60$ mm, für die Kurven 2 und 2' ist $\varrho_1^{(2)} = 50$ mm, für die Kurven 3 und 3' ist $\varrho_1^{(3)} = 45$ mm, für die Kurven 4 und 4' ist $\varrho_1^{(4)} = 30$ mm.

Liška hat den Verlauf der Welle L an der dielektrischen Röhre in Abhängigkeit von der freien Welle l aus technischen Gründen nur für einen einzigen Wert ($\varrho_1 = 55$ mm) des äusseren Radius untersucht, d. h. er hat diese Abhängigkeit bei konstantem ϱ_1 und bei verschiedenen Werten des Verhältnisses $p = \varrho_2/\varrho_1$ gemessen.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit besteht darin, die erwähnte Beziehung bei verschiedenen Werten von ϱ_1 des äusseren

Radius der dielektrischen Röhre für dieselben Werte des Verhältnisses p zu untersuchen. Die für verschiedene Werte des äusseren Radius ϱ_1 bei demselben Werte von p ermittelte Kurven sind von demselben Charakter, d. h. diese Kurven können auf eine einzige Kurve reduziert werden.

Die Apparatur, die zur experimentellen Nachprüfung der angegebenen Beziehungen verwendet wurde, war identisch mit derjenigen von Liška; auch der Gang der einzelnen Messungen

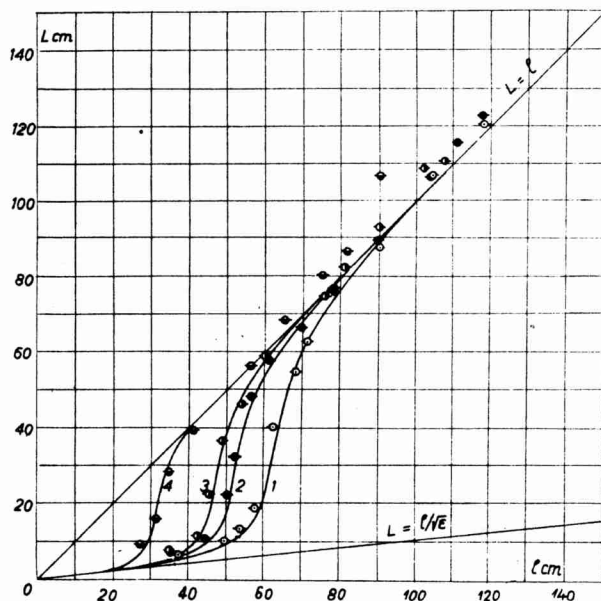


Fig. 3. Wellen erster Ordnung für $p = 0,4$. Für die Kurve 1 ist $\varrho_1^{(1)} = 60$ mm, für die Kurve 2 ist $\varrho_1^{(2)} = 50$ mm, für die Kurve 3 ist $\varrho_1^{(3)} = 45$ mm, für die Kurve 4 ist $\varrho_1^{(4)} = 30$ mm.

war derselbe, wie bei den Messungen von Liška, sodass es sich erübrigt, auf diese Punkte näher einzugehen.

Experimentelle Ergebnisse.

Auf dieselbe Weise, die ausführlich in der Arbeit von Liška beschrieben ist, wurde der Verlauf der Welle L an der dielektrischen Röhre in Abhängigkeit von der freien Welle l des Senders für $p = 0,2$, $p = 0,3$, $p = 0,4$ untersucht; die Messungen wurden für denselben Verhältnis von p bei vier verschiedenen äusseren

Radien $\varrho_1^{(1)} = 60$ mm, $\varrho_1^{(2)} = 50$ mm, $\varrho_1^{(3)} = 45$ mm, $\varrho_1^{(4)} = 30$ mm ausgeführt. Die für die angegebenen Werte von p ermittelte Kurven sind in den Fig. 1, 2, 3 dargestellt. Die vollgezogenen Linien geben den theoretischen Verlauf der Kurven an, die gemessenen Werte sind durch die einzelnen Punkte dargestellt. Alle Kurven sind tatsächlich von demselben Charakter und lassen sich auf eine einzige Kurve für $\varrho_1^{(1)} = 60$ mm durch Multiplikation

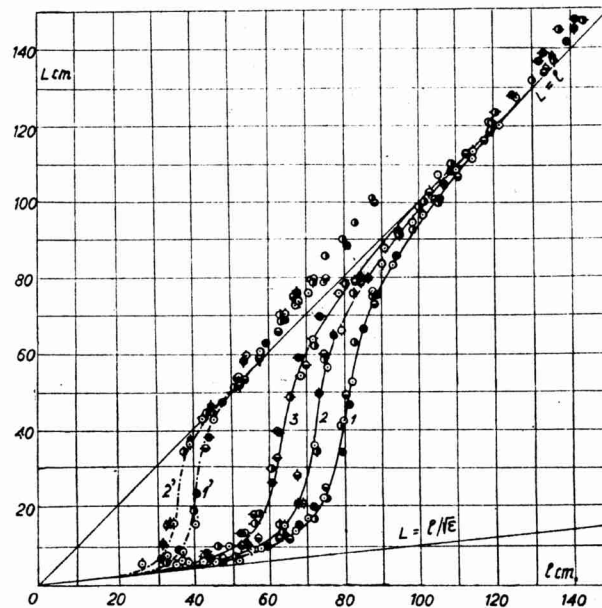


Fig. 4. Reduzierte Kurven für Wellen erster und zweiter Ordnung; — Wellen erster Ordnung; - - - Wellen zweiter Ordnung. Für die Kurven 1 und 1' ist $p=0,2$, für die Kurven 2 und 2' ist $p=0,3$, für die Kurve 3 ist $p = 0,4$.

der Koordinaten der einzelnen Punkte mit dem Wert von $\varrho_1^{(1)}/\varrho_1^{(n)}$ reduzieren, wie aus der Fig. 4 ersichtlich ist.

Über alle Messungen gelten dieselben Bemerkungen, die Liška in seiner Arbeit gemacht hatte. Besonders möchte ich nur darauf aufmerksam machen, dass man auch bei meinen Messungen an dielektrischen Röhren solche Wellen beobachten könnte, die sich mit Überlichtgeschwindigkeit ausbreiten und welche in den Figuren durch oberhalb der Gerade $L = l$ liegende Punkte dargestellt sind.

Physikalisches Institut der Karls-Universität.

Elektromagnetické vlny na dielektrických trubcích.

(Obsah předešlého článku.)

Liška studoval závislost vlny L na dielektrické trubici na volné vlně l z technických důvodů pouze pro jedinou hodnotu ($a_1 = 55$ mm) vnějšího poloměru dielektrické trubice, t. j. měřil tuto závislost při $a_1 = \text{konst.}$ a při různých hodnotách poměru $p = a_2/a_1$.

Úkolem této práce bylo doplnit práci Liškovu v tom smyslu, že uvedená závislost byla studována při různých hodnotách a_1 vnějšího poloměru dielektrické trubice pro tytéž hodnoty poměru p . Křivky získané pro různé hodnoty vnějšího poloměru a_1 při téže hodnotě p mají též charakter (Fig. 1, 2, 3), t. j. křivky takto získané mohou být redukovány na křivku jedinou, jak patrně z obr. 4. (Fig. 4.)

Fyzikální ústav Karlovy university.

České učebnice podle osnov z r. 1933.

ARITMETIKA

- I. tř. střed. škol: Červenka, Aritmetika, I., 7. v., 11,— (109)
II. tř. střed. škol: Červenka, Aritmetika, II., 8. v., 13,60 (110)
III. tř. střed. škol: Červenka, Aritmetika, III., 7. v., 10,— (111)
IV. tř. střed. škol: Bydžovský - Teplý - Vyčichlo, Aritmetika, IV., 6. v., 12,60 (105)
V.-VII. tř.: Bydžovský - Teplý - Vyčichlo, Aritmetika, V.-VII., 6. v., 24,80 (106)
IV.-VIII. tř.: Bydžovský - Vojtěch - Teplý - Vyčichlo, Sbirka úloh, 4. v., 24,— (108)
V.-VIII. tř.: Valouch - Valouch, Tabulky log., 9. v., 17,— (133)
VII.-VIII. tř.: Tomší, Sbirka matem. příkl., 2. v., 14,— (115)

GEOMETRIE

- I. tř. střed. škol: Valouch - Špaček, Měřictví, I., 7. v., 8,— (139)
II. tř. střed. škol: Valouch - Špaček, Měřictví, II., 7. v., 7,20 (140)
III. tř. střed. škol: Valouch - Špaček, Měřictví, III., 7. v., 7,— (141)
IV. tř. střed. škol: Vojtěch, Geometrie, IV., 6. v., 10,40 (131)
V. tř. g. vš. typů: Vojtěch, Geometrie, V. g., 6. v., 13,60 (142)
reálék: Vojtěch, Geometrie, V. r., 6. v., 18,— (134)
VI. tř. g. vš. typů: Vojtěch, Geometrie, VI. g., 5. v., 13,60 (143)
reálék: Vojtěch, Geometrie, VI. r., 5. v., 17,20 (135)
VII. tř. g. a r. g.: Vojtěch, Geometrie, VII. g., 5. v., 13,20 (144)
r. a r. r. g.: Vojtěch, Geometrie, VII. r., 5. v., 19,50 (136)
r.: Tomší, Sbirka matur. příkl., 2. v., 14,— (115)
VIII. tř. r. r. g.: Vojtěch, Geometrie, VII. r., 5. v., 19,50 (136)
g. vš. typů: Tomší, Sbirka matur. příkl., 2. v., 14,— (115)
IV.-VIII. tř.: Bydžovský - Vojtěch - Teplý - Vyčichlo, Sbirka úloh, 4. v., 24,— (108)
V.-VIII. tř.: Valouch - Valouch, Tabulky log., 9. v., 17,— (133)

DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE A RÝSOVÁNÍ

- III.-IV. tř. g. a r. g.: Klíma - Ingriš, Rýsování, g., 8,— (107)
r. a r. r. g.: Klíma - Ingriš, Rýsování, r., 10,— (118)
V. tř. r.: Klíma - Ingriš, Deskr. geom., V. r., 13,60 (119)
VI. tř. r.: Klíma - Ingriš, Deskr. geom., VI.-VII. r., 22,80 (120) nebo Pithardt - Seifert, Deskr. geometrie, VI.-VII. r., 4. v., 16,20 (128)
VII. tř. r. g. a r. r. g.: Klíma - Ingriš, Deskr. geom., r. g., 19,— (145)
r.: Klíma - Ingriš, Deskr. geom., VI.-VII. r., 22,80 (120) nebo Pithardt - Seifert, Deskr. geometrie, VI.-VII. r., 4. v., 16,20 (128), v níž chybějí jen proniky hranolů, obsažené v téže učebnici pro V. r. (127)
VIII. tř. r. g. a r. r. g.: Klíma - Ingriš, Deskr. geom., r. g., 19,— (145)

FYSIKA

- III.-IV. tř. stř. škol: Petíra - Šmok, Fysika, 7. v., 28,60 (125) nebo Ryšavý, Fysika, 21,80 (137)
VI. tř. r.: Devorecký - Šmok, Fysika, I., 18,80 (146)
Mašek - Jeništa - Nachtikal - Štěpánek - Wanger, Fysika, I., 7. v., 18,60 (122)
VII. tř. g. vš. typů: tytéž

- VII. tř. r.: Devorecký - Šmok, Fysika, II., 26,— (147)
 Mašek - Jeništa - Nachtikal - Štěpánek - Wangler, Fysika, II., 7. v., 22,60 (123)
- VIII. tř. g. vš. typů: tytéž

Slovenské učebnice podle osnov z r. 1933.

ARITMETIKA

- I. tř. střed. škol: Červenka - Bučan, Aritmetika, I., 3. v., 12,20 (163)
 II. tř. střed. škol: Červenka - Bučan, Aritmetika, II., 3. v., 14,80 (164)
 III. tř. střed. škol: Červenka - Bučan, Aritmetika, III., 2. v., 11,— (165)
 IV. tř. střed. škol: Bydžovský - Teplý - Vyčichlo - Ondruš, Aritmetika, IV., 2. v., 12,60 (160)
 V.-VII. tř. střed. škol: Bydžovský - Teplý - Vyčichlo - Fischer, Aritmetika, V.-VII., 2. v., 24,80 (161)

GEOMETRIE

- I. tř. střed. škol: Valouch - Špaček - Říman, Meroveda, I., 3. v., 8,40 (169)
 II. tř. střed. škol: Valouch - Špaček - Říman, Meroveda, II., 3. v., 7,60 (170)
 III. tř. střed. škol: Valouch - Špaček - Říman, Meroveda, III., 3. v., 7,40 (171)
 IV. tř. střed. škol: Vojtěch - Bučan, Geometria, IV., 2. v., 11,60 (174)
 V. tř. g. vš. typů: Vojtěch - Vanovič, Geometria, V. g., 2. v., 14,— (175)
 r.: Vojtěch - Vanovič, Geometria, V. r., 2. v., 18,60 (181)
 VI. tř. střed. škol: Vojtěch - Vanovič, Geometria, VI., 13,60 (176)
 r.: Vojtěch - Vanovič, Sferická trigonometria, VI. r., 4,40 (182) jako doplněk 176
 VII. tř. g. a r. g.: Vojtěch - Vanovič, Geometria, VII. g., 13,60 (177)
 r. a r. r. g.: Vojtěch - Vanovič, Geometria, VII. r., 20,— (183)
 VIII. tř. r. r. g.: Vojtěch - Vanovič, Geometria, VII. r., 20,— (183)

DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE A RÝSOVÁNÍ

- III. tř. g. a r. g.: Klíma - Ingriš - Říman, Rysovanie, g., 8,80 (172)
 r. a r. r. g.: Klíma - Ingriš - Říman, Rysovanie, r., 10,80 (173)
 IV. tř.: tytéž
 VII.-VIII. tř. r. g. Klíma - Ingriš - Fischer, Deskript. geometria, r. g., a r. r. g.: 19,— (168)

FYSIKA

- III.-IV. tř. stř. škol: Petíra - Šmok - Říman, Fyzika, 3. v., 30,— (167)
 VI. tř. r.: Devorecký - Šmok - Fischer, Fyzika, I., 20,— (179)
 VII. tř. g. vš. typů: táž
 VII. tř. r.: Devorecký - Šmok - Fischer, Fyzika, II., připravuje se (180)
 VIII. tř. g. vš. typů: táž

V závorce je uvedeno orientační číslo učebnice. Prosíme, aby při každé objednávce bylo číslo to uvedeno, neboť se tím zabrání omylu. Scházející slovenské učebnice dlužno zatím nahraditi českými.

Vydává a nakládá Jednota československých matematiků a fysiků v Praze. Redakce a administrace v Praze II, Žitná 25. Telefon 29308. Denně od 8½—12½ a od 14—18 hod. kromě soboty odpo., neděle a svátku. — Účet poštovní spořitelny v Praze 13103. — Knihotiskárna Prometheus v Praze VIII, Na Rokosce 94. Telefon RR 8139, RR 8107. — Novinová sazba povolena red. pošt a telegrafů 18. listopadu 1933, čís. 288249/VII. Podací úřad Praha 25.