

Werk

Label: Article

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311028X_0066|log50

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

Rozdělení teploty v omezeném kruhovém válci, je-li dáno časově proměnlivé rozdělení teploty na jeho povrchu.

Napsal Filip Bock, Brno.

(Došlo 20. října 1936.)

Budiž dán omezený kruhový válec o výšce $2h$ a poloměru a . Osový řez položíme tak do soustavy válcových souřadnic z, r, φ , jak ukazuje obr. 1. Tento kruhový válec je vnořen do časově proměnlivého tepelného pole, při čemž teplota na povrchu válce je periodickou funkcí času t ; na souřadnicích nezávisí.

Příklad: volně stojící betonový sloup vystavený vlivům teplotních výkyvů. Tážeme se, jak vnikají tepelná kolísání do válce a jak probíhají.

Diferenciální rovnice tepelného proudu

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa^2 \Delta u$$

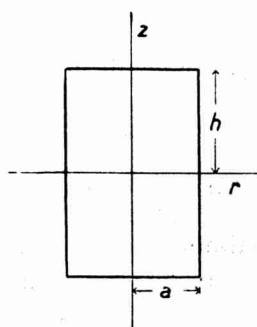
uvnitř válce nabývá v případě osové souměrnosti tvaru

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (1)$$

kdež u značí teplotu, t jest čas, r a z mají význam patrný z obr. 1. Na úhlu φ teplota u nezávisí. Rovnici (1) řešíme známým způsobem. Partikulární řešení pro u píšeme v komplexním tvaru

$$u = R(r) e^{i\omega t} \cos \lambda z \quad (2)$$

a smluvíme, že reálná část komplexní veličiny u , tedy $\Re u$, představuje teplotu. Pro souměrnost válce vůči rovině $z = 0$ bude patrně u sudou funkcí proměnné z ; proto jsme zvolili pro závislost na z funkci $\cos z$. Zavedeme-li nyní integrál (2) do diferenciální rovnice (1), obdržíme pro R diferenciální rovnici



Obr. 1.

$$R'' + \frac{1}{r} R' - \left(\lambda^2 + \frac{i\nu}{\kappa^2} \right) R = 0. \quad (3)$$

Integrál této rovnice jest

$$R = c J_0 \left[r \sqrt{-\left(\frac{i\nu}{\kappa^2} + \lambda^2 \right)} \right]; \quad (4)$$

$J_0(x)$ jest Besselova funkce argumentu x a indexu nula.¹⁾ Pro partikulární řešení plyne pak

$$u = e^{i\nu t} \cdot \cos \lambda z \cdot J_0 \left[r \sqrt{-\left(\frac{i\nu}{\kappa^2} + \lambda^2 \right)} \right].$$

Ve vnějším prostoru jest teplota závislá na času a mění se s danou kruhovou frekvencí ν . Amplitudu tepelných změn, která je také známa, označíme A a předpokládáme, že se střední teplota rovná nule.²⁾ Podmínky, které mají býti splněny na povrchu válce, pak znějí

$$u = A e^{i\nu t} \quad \text{pro } r = a \quad (5)$$

a

$$u = A e^{i\nu t} \quad \text{pro } z = \pm h. \quad (6)$$

Řešení provedeme takto³⁾: Nejdříve stanovíme funkci u_1 , která vyhovuje těmto krajovým podmínkám

$$u_1 = A e^{i\nu t} \quad \text{pro } r = a \quad (7)$$

a

$$u_1 = 0 \quad \text{pro } z = \pm h, \quad (8)$$

pak určíme druhou funkci u_2 , která hová podmínkám

$$u_2 = 0 \quad \text{pro } r = a \quad (9)$$

a

$$u_2 = A e^{i\nu t} \quad \text{pro } z = \pm h. \quad (10)$$

Potom jistě splňuje

$$u = u_1 + u_2$$

podmínky (5) a (6).

Podmínka (8) dává hodnoty pro λ , neboť z rovnice

$$u \Big|_{z=\pm h} = e^{i\nu t} \cos \lambda h \cdot J_0 \left[r \sqrt{-\left(\frac{i\nu}{\kappa^2} + \lambda^2 \right)} \right] = 0$$

¹⁾ Obecný integrál vlastně zní:

$$R = c J_0(x) + c_1 Y_0(x),$$

$Y_0(x)$ jest Neumannova funkce. Pro $x = 0$ roste $Y_0(x)$ přes všechny meze, takže c_1 nutno zvoliti rovno nule, abychom zamezili vzrůstu funkce R a tím též teploty u na nekonečně velkou hodnotu.

²⁾ Vhodnou volbou nulového bodu dá se toho vždy dosáhnouti.

³⁾ Na možnost rozkladu $u = u_1 + u_2$ upozornil mne p. prof. Weyrich.

vyplývá $\cos \lambda h = 0$ a tedy

$$\lambda = (n + \frac{1}{2}) \frac{\pi}{h}.$$

Pro u_1 se tak obdrží

$$u_1 = e^{i\nu t} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n + \frac{1}{2}) \frac{z}{h} \pi \cdot J_0 \left[r \sqrt{-\left(\frac{i\nu}{\kappa^2} + (n + \frac{1}{2})^2 \frac{\pi^2}{h^2}\right)} \right].$$

Veličiny a_n jsou prozatím libovolné konstanty; určíme je z podmínek (7), jež nabývá tvaru

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n + \frac{1}{2}) \frac{z}{h} \pi \cdot J_0 \left[a \sqrt{-\left(\frac{i\nu}{\kappa^2} + (n + \frac{1}{2})^2 \frac{\pi^2}{h^2}\right)} \right]. \quad (11)$$

Konstanty a_n dostaneme známou metodou; obě strany rovnice (11) násobíme

$$\cos(n + \frac{1}{2}) \frac{z}{h} \pi \, dz$$

a integrujeme dle z v mezích od $-h$ do h . Počet dává

$$a_n = \frac{2(-1)^n A}{(n + \frac{1}{2}) \pi J_0 \left[a \sqrt{-\left(\frac{i\nu}{\kappa^2} + (n + \frac{1}{2})^2 \frac{\pi^2}{h^2}\right)} \right]}.$$

Tím konečně vznikne pro u_1 výraz:

$$u_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n A e^{i\nu t} \cos(n + \frac{1}{2}) \frac{z}{h} \pi \cdot J_0 \left[r \sqrt{-\left(\frac{i\nu}{\kappa^2} + (n + \frac{1}{2})^2 \frac{\pi^2}{h^2}\right)} \right]}{(n + \frac{1}{2}) \pi J_0 \left[a \sqrt{-\left(\frac{i\nu}{\kappa^2} + (n + \frac{1}{2})^2 \frac{\pi^2}{h^2}\right)} \right]}. \quad (12)$$

Řešení pro u_2 nalezneme podobným způsobem. Podmínka (9) dává

$$J_0 \left[a \sqrt{-\left(\frac{i\nu}{\kappa^2} + \lambda^2\right)} \right] = 0.$$

Jsou-li j_m ($m = 1, 2, 3, \dots$) kořeny rovnice⁴⁾ $J_0(x) = 0$, je

$$a \sqrt{-\left(\frac{i\nu}{\kappa^2} + \lambda^2\right)} = j_m$$

a z toho

$$\lambda = \sqrt{-\left(\frac{j_m^2}{a^2} + \frac{i\nu}{\kappa^2}\right)}.$$

⁴⁾ Kořeny této rovnice jsou tabelovány. Srv. Jahnke-Emde, Funkti-
onentafeln, Lipsko 1928, str. 122.

Lze tedy u_2 dáti tvar

$$u_2 = \sum_{m=0}^{\infty} b_m e^{i\omega t} \cos z \sqrt{-\left(\frac{j_m^2}{a^2} + \frac{i\nu}{\kappa^2}\right)} \cdot J_0\left(j_m \frac{r}{a}\right).$$

Zbývá ještě poslední krajní podmínka (10)

$$u_2 \Big|_{z=\pm h} = A e^{i\omega t},$$

z ní plyne

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} b_m \cos h \sqrt{-\left(\frac{j_m^2}{a^2} + \frac{i\nu}{\kappa^2}\right)} \cdot J_0\left(j_m \frac{r}{a}\right).$$

Konstanty b_m dostaneme, násobíme-li předešlou rovnici

$$r J_0\left(j_m \frac{r}{a}\right)$$

a integrujeme-li podle r v mezích od 0 do a .

Integrace dává nejprve

$$A \frac{a}{j_m} \left| r J_1\left(\frac{j_m}{a} r\right) \right|_0^a = b_m \cos h \sqrt{-\left(\frac{j_m^2}{a^2} + \frac{i\nu}{\kappa^2}\right)} \left[J_0^2(j_m) + J_1^2(j_m) \right] \frac{a^2}{2}$$

a se zřetelem k

$$J_0(j)_m = 0$$

zjednoduší se výraz a pro b_m plyne

$$b_m = \frac{2A}{j_m J_1(j_m) \cos h \sqrt{-\left(\frac{j_m^2}{a^2} + \frac{i\nu}{\kappa^2}\right)}},$$

takže konečně u_2 nabývá tvaru

$$u_2 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2A e^{i\omega t} J_0\left(j_m \frac{r}{a}\right) \cos z \sqrt{-\left(\frac{j_m^2}{a^2} + \frac{i\nu}{\kappa^2}\right)}}{j_m J_1(j_m) \cos h \sqrt{-\left(\frac{j_m^2}{a^2} + \frac{i\nu}{\kappa^2}\right)}}. \quad (13)$$

Hledané rozdělení teploty skládá se aditivně z těchto částečných řešení u_1 a u_2 , takže

$$u = u_1 + u_2, \quad (14)$$

čímž řešení dané úlohy jest úplně určeno.

Pro numerické počítání bude výhodnější, napíšeme-li výrazy (12) a (13) v trochu pozměněném tvaru, který nám zároveň objasní fyzikální smysl nalezeného řešení. Dále zavedeme nová označení. Vypočteme reálné části veličin u_1 a u_2 , o které konečně jde, asi takto.

Označíme (12)

$$\left| \left\{ \frac{i\nu}{\kappa^2} + (n + \frac{1}{2})^2 \frac{\pi^2}{h^2} \right\} \right| = p_n$$

a

$$\frac{\nu}{\kappa^2(n + \frac{1}{2})^2 \frac{\pi^2}{h^2}} = \operatorname{tg} \varphi_n,$$

potom jest

$$\sqrt{-p_n e^{i\varphi_n}} = \sqrt{p_n} \cdot e^{i\left(\frac{\varphi_n}{2} + \frac{\pi}{2}\right)}. \quad (15)$$

Dosadíme do výrazu

$$J_0 \left(r \sqrt{\frac{i\nu}{\kappa^2} + (n + \frac{1}{2})^2 \frac{\pi^2}{h^2}} \right)$$

hodnotu (15) a obdržíme

$$J_0 \left[r \sqrt{p_n} \exp i \left(\frac{\varphi_n}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \right] = M_n e^{i\varphi_n}$$

a podobně

$$J_0 \left[h \sqrt{p_n} \exp i \left(\frac{\varphi_n}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \right] = \bar{M}_n e^{i\bar{\varphi}_n}.$$

Číselné hodnoty těchto funkcí lze přehlédnouti z tabulky,⁵⁾ při čemž veličina ψ jest funkcí proměnné r . Reálná část $\Re u_1$ dá se tudíž vyjádřiti výrazem

$$\Re u_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n A \cos(n + \frac{1}{2}) \frac{z}{h} \pi M_n}{(n + \frac{1}{2}) \pi \bar{M}_n} \cos(\nu t + \psi_n - \bar{\psi}_n)$$

a představuje, jak se dalo očekávati, vlnu, která směrem poloměru postupuje a ve směru osy z nabývá charakteru stojaté vlny.

Abychom vypočetli reálnou část $\Re u_2$, zavedeme nejprve tato označení:

$$\cos z \sqrt{-\left(\frac{j_m^2}{a^2} + \frac{i\nu}{\kappa^2}\right)} = c_m e^{i\nu_m}$$

a

$$\cos h \sqrt{-\left(\frac{j_m^2}{a^2} + \frac{i\nu}{\kappa^2}\right)} = \bar{c}_m e^{i\bar{\nu}_m}.$$

⁵⁾ K. Hayasi, Fünfstellige Funktionentafeln, Berlin 1930, str. 145.