Cartanova geometrie na ploše kulové.

Milan Mikan, Praha.

(Došlo dne 19. října 1936.)

Na ploše kulové zřiďme přenos tak, aby jednotkové vektory ve směru rovnoběžek a meridiánů byly autoparallelní, při čemž délky měří se klasicky. Tento přenos je integrovatelný, polosymetrický-metrický a je-li R poloměr kulové plochy, ξ^1 zeměpisná délka, ξ^2 zeměpisná šířka ($|\xi^2| < \frac{1}{2}\pi$ pokud není výslovně jinak stanoveno), jakožto v radiantech dané geografické souřadnice, je differenciál oblouku[1]):

$$\mathrm{d}s^2 \overset{\times}{=} R^2 \cos^2 \xi^2 \,\mathrm{d}\xi^1 \,\mathrm{d}\xi^1 + R^2 \,\mathrm{d}\xi^2 \,\mathrm{d}\xi^2, \tag{1}$$

fundamentální tensor má složky $a_{11} = R^2 \cos^2 \xi^2$, $a_{22} = R^2$, $a_{12} = a_{21} = 0$, a jednotkové vektory ve směru „východ" a „sever" jsou: $\underset{1}{i}^1 = \frac{1}{R \cos \xi^2}$, $\underset{1}{i}^2 = 0$; $\underset{2}{i}^1 = 0$, $\underset{2}{i}^2 = \frac{1}{R}$. Jest $\Gamma_{21}^1 = -\operatorname{tg} \xi^2$, ostatní $\Gamma_{\mu\lambda}^{\nu} = 0$, $S_{12}^{\cdot\cdot 1} = -S_{12}^{\cdot\cdot 1} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \xi^2$, $S_2 = -\operatorname{tg} \xi^2$, ostatní $S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu} = 0$ a $R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} = 0$.

(Schouten-Struik, Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie, str. 127, 179 a 180, úloha 11.9.)

Pro kovariantní křivost k libovolné křivky M jest:

$$k = \begin{vmatrix} j^1 & j^2 \\ Dj^1 & Dj^2 \end{vmatrix} \sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2},$$

(Dr. V. Hlavatý: Differenciální geometrie křivek a ploch a tensorový počet (v tisku).)

je-li j^ν tangenciální versor křivky, $j^\nu = \frac{\mathrm{d}\xi^\nu}{\mathrm{d}s}$, $Dj^\mu = j^\nu D_\nu j^\mu$ a D_ν symbol kovariantní derivace podle ξ^ν.

[1]) V následujícím se omezíme vesměs na reálné hodnoty všech proměnných, parametrů a funkcí, pokud není jinak výslovně stanoveno.

Dosazením vyplývá, je-li C libovolná konstanta, $k\,\mathrm{d}\xi^2 = \mathrm{d}\left(\cos\xi^2 \frac{\mathrm{d}\xi^1}{\mathrm{d}s} - C\right)$, odkudž, je-li β úhel, v němž M protíná meridiány,

$$Rk = \frac{\mathrm{d}(\sin\beta - RC)}{\mathrm{d}\xi^2} = \frac{\mathrm{d}\sin\beta}{\mathrm{d}\xi^2}. \tag{2}$$

Rovnice (2) je integrovatelná v takovém oboru proměnných $\sin\beta$, ξ^2 (po případě β, ξ^2), ve kterém je k funkcí buď obou proměnných $\sin\beta$, ξ^2 (po případě ve kterém je $\frac{k}{\cos\beta}$ funkcí obou proměnných β, ξ^2) nebo jedné z nich a to vždy funkcí spojitou, mající spojitou (nebo nule rovnou) parciální derivaci podle $\sin\beta$ (po případě β), nebo je-li k konstantou.

Integrací rovnice (2) získáváme, je-li k konstantou,

$$\frac{\sin\beta}{R} = k\xi^2 + C, \tag{3}$$

jakožto rovnici křivek konstantní křivosti.[2]) Vzhledem k proměnným ξ^1, ξ^2 tato rovnice zní:

$$\mathrm{d}\xi^1 = \frac{R(k\xi^2 + C)}{\sqrt{1 - R^2(k\xi^2 + C)^2\cos\xi^2}}\,\mathrm{d}\xi^2. \tag{4}$$

Poněvadž na pravé straně koefficient differenciálu $\mathrm{d}\xi^2$ je spojitou funkcí proměnné ξ^2 v každém intervalu, v němž $|\xi^2| < \frac{1}{2}\pi$, $|\sin\beta| = |R(k\xi^2 + C)| < 1$, má tato differenciální rovnice pro libovolně dané hodnoty parametrů k, C soustavu partikulárních integrálů, interpretovaných v tomto oboru na kulové ploše vesměs shodnými křivkami, tvořícími jednoparametrovou soustavu, invariantní vzhledem k rotaci kolem osy plochy kulové. V dalším ukážeme, že rovnice (4) má řešení dokonce i v intervalu, v němž $|\xi^2| < \frac{1}{2}\pi$, $|R(k\xi^2 + C)| \leqq 1$. Nazývejme tuto soustavu rotační, proměnné $\sin\beta$, ξ^2 rotačními souřadnicemi a označujme křivky konstantní křivosti písmenou K. Jsou určitou analogií kružnic klasické geometrie. Jejich rotační soustavu označme (K).

Loxodromy ($k = 0$), včetně meridiánů a rovnoběžek, jsou autoparallelní.

---

[2]) Rovnice $\frac{\sin\beta}{R} = k\xi^2 + C$ značí soustavu křivek K, $\frac{\sin\gamma}{R} = -k\eta^2 - C$ soustavu, jejíž křivky $\overline{K}$ jsou s předešlými totožné, ale, vzhledem k $\sin\beta = -\sin\gamma$ pro $\eta^2 = \xi^2$ opačně orientované, $\frac{\sin\delta}{R} = -k\zeta^2 + C$ značí soustavu, jejíž křivky $\widetilde{K}$ jsou, vzhledem k $\zeta^2 = -\xi^2$ pro $\sin\delta = \sin\beta$ ke křivkám K pravoúhle souměrné podle roviny rovníku.

Je-li dána rovnice $m\xi^2 + C = \dfrac{\sin\beta}{R}$, $m =$ konst., vyplývá dosazením z rovnice (2) $k = m$, t. j. křivky K a jen tyto mají vzhledem k rotačním souřadnicím $\sin\beta$, ξ^2 lineární rovnici. RC je sinus úhlu, ve kterém K protíná meridián na rovníku.

$$K \begin{cases} \text{protíná rovník reálně} \\ \text{dotýká se rovníku} \\ \text{protíná rovník imaginárně} \end{cases} \text{je-li } |\,RC\,| \begin{cases} < 1 \\ = 1. \\ > 1 \end{cases}$$

Vzhledem ke vztahu $\frac{v}{R} = l\,\mathrm{tg}\,(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\xi^2)$ je rovnice křivky K_1 jakožto Mercatorova obrazu křivky K

$$\mathrm{sech}\,\frac{v}{R} = \cos\left(\frac{\sin\beta - RC}{Rk}\right). \tag{5}$$

Pro libovolnou křivku M jest $\dfrac{R\,\mathrm{d}\xi^2}{\mathrm{d}s} = \cos\beta = \dfrac{\mathrm{d}\sin\beta}{\mathrm{d}\beta}$, tudíž vzhledem k (2):

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}s} = k.$$

Tato rovnice je zcela analogická vzorci pro křivost klasické geometrie. Pro $k =$ konst. jest:

$$\frac{\beta}{k} = s + \text{konst.}, \tag{7}$$

jakožto analogie vzorce pro kružnici klasické geometrie.

Rovnice (5) je rovnicí soustavy křivek K_1, invariantních vzhledem k translaci ve směru rovnoběžek na Mercatorově mapě (pro určitou hodnotu parametrů k, C je tato soustava jednoparametrová, tyto křivky jsou vzájemně shodné a tvoří translační soustavu). Proměnné $\sin\beta$, v nazývejme translačními souřadnicemi.

Translační soustava kružnic L_1 o poloměru r, t. j. klasické křivosti $\varkappa = \dfrac{1}{r}$ má v translačních souřadnicích rovnici

$$\sin\beta = \varkappa v + B, \quad (B \text{ konst.}), \tag{8}$$

což je úplná analogie rovnice (3) křivek K daných v souřadnicích rotačních. Kružnice L jsou Mercatorovými obrazy křivek L_1 na kulové ploše, jakožto ortogonálních trajektorií svazků loxodrom. procházejících body, jejichž obrazy na mapě jsou středy kružnic L, Tím získána druhá analogie kružnic na ploše kulové. Křivky L_1 mají rovnici:

$$\sin\beta = \varkappa\,.\,Rl\,\mathrm{tg}\,(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\xi^2) + B. \tag{9}$$

Jejich kovariantní křivost je

$$k = \frac{\varkappa}{R \cos \xi^2} = \frac{1}{R r \cos \xi^2}. \tag{10}$$

(10) je rovnicí všech křivek L, zobrazených na mapě kružnicemi $\underset{1}{L}$ o témž poloměru r.

Na mapě je bodem a přímkou jím procházející vytknut (Lie-ův) element o souřadnicích u, v, β, zobrazující bodem a příslušnou loxodromou jím procházející vytknutý element na ploše kulové o souřadnicích $R\xi^1 = u$, $\xi^2 = 2 \operatorname{arctg} e^{\frac{v}{R}} - \frac{1}{2}\pi$, β. Volme na meridiánech n. př. směr „sever" jakožto kladný, orientujme též daný element vytknutím kladného směru a vytkněme ještě jakožto kladnou orientaci úhlu β, který je sevřen kladným směrem elementu s kladným směrem meridiánu n. př. požadavkem, aby na mapě tato orientace byla zobrazena kladným smyslem úhlu β.

Přikážeme-li proměnným v, β na mapě a proměnným ξ^2, β na ploše kulové určité hodnoty, získáváme na mapě translační soustavu elementů, na ploše kulové rotační soustavu elementů. Je to jiný druh rotačních a translačních souřadnic. Naproti tomu v předchozím poprvé užité rotační a translační souřadnice $\sin \beta, \xi^2$; $\sin \beta, v$ vzhledem ke vztahu $\sin \beta = \sin (\pi - \beta)$ stanoví dvě rotační a dvě translační soustavy elementů, jejichžto soustavy loxodrom na ploše kulové a přímek na Mercatorově mapě jsou vzájemně podle meridiánů souměrné, orientace těchto loxodrom (přímek) však jsou souměrné vždy podle rovnoběžky. Nazývejme tyto dvě vždy k sobě vzhledem k uvažované souměrnosti příslušné soustavy elementů soustavami sdruženými a označme je $(\sin \beta, \xi^2)$, po př. $(\sin \beta, v)$.

Budiž nyní dána rovnice:

$$\sin \beta = F(\xi^2), \tag{11}$$

kde $$\sin \beta = \frac{\cos \xi^2}{\overset{+}{(-)} \left| \sqrt{\cos^2 \xi^2 (\mathrm{d}\xi^1)^2 + (\mathrm{d}\xi^2)^2} \right|} \mathrm{d}\xi^1 = \sin (\pi - \beta). \tag{11'}$$

a kde $F(\xi^2)$ je spojitá, spojitě differencovatelná a pro $|F(\xi^2)| \leqq 1$ jednoznačná funkce v intervalu $-\frac{1}{2}\pi \leqq \xi^2 \leqq +\frac{1}{2}\pi$, v němž všude $\frac{\mathrm{d}F(\xi^2)}{\mathrm{d}\xi^2} \neq 0$ a buď $\xi^2 = \Phi(\sin \beta)$ její inversní funkce. Budiž $-\frac{1}{2}\pi < \underset{0}{\xi^2} < \underset{1}{\xi^2} < \frac{1}{2}\pi$, $\underset{0}{\xi^2} = \Phi(\sin \underset{0}{\beta}) = \Phi(\sin(\pi - \underset{0}{\beta}))$, $\underset{1}{\xi^2} = \Phi(\sin \underset{1}{\beta}) = \Phi(\sin(\pi - \underset{1}{\beta}))$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{\cos \xi^2 \, \mathrm{d}\xi^1}{\mathrm{d}\xi^2} = \frac{F(\xi^2)}{+\left|\sqrt{1 - (F(\xi^2))^2}\right|}$, $\operatorname{tg} (\pi - \beta) = \frac{F(\xi^2)}{-\left|\sqrt{1 - (F\xi^2)^2}\right|}$.

Rovnicí (11), differenciální vzhledem k proměnným ξ^1, ξ^2 je dána rotační soustava (M) křivek M, interpretujících příslušné partikulární integrály. Interval $(\underset{0}{\xi^2}, \underset{1}{\xi^2})$ budiž ještě volen tak, aby funkce $\dfrac{F(\xi^2)}{{}_{(\overset{+}{-})}\sqrt{1-(F(\xi^2))^2}}$, alespoň od jedné hodnoty $\underset{2}{\xi^2}$ v tomto intervalu počínaje, byla stále kladná nebo stále záporná. Potom integrál

$$\int\limits_{\underset{0}{\xi^2}}^{\underset{1}{\xi^2}} \frac{F(\xi^2)\,\mathrm{d}\xi^2}{\sqrt{1-(F(\xi^2))^2\cos\xi^2}} \tag{12}$$

má určitou konečnou hodnotu i tenkráte, existuje-li reálná hodnota $\underset{\times}{\xi^2} = \Phi({}_{(\overset{+}{-})}\sin\frac{1}{2}\pi)$, $F(\underset{\times}{\xi^2}) = {}_{(\overset{+}{-})}1$, $|\underset{\times}{\xi^2}| < \frac{1}{2}\pi$ a volíme-li $\underset{1}{\xi^2} = \underset{\times}{\xi^2}$, poněvadž již pro $\frac{1}{2} < n < 1$ je $\lim\limits_{\xi^2=\underset{\times}{\xi^2}} \dfrac{F(\xi^2)\,(\xi^2-\underset{\times}{\xi^2})^n}{\sqrt{1-(F(\xi^2))^2\cos\xi^2}} = 0.$[3])

Probíhá-li ξ^2 interval $(\underset{0}{\xi^2}, \underset{3}{\xi^2})$, kde $\underset{3}{\xi^2}$ je libovolná hodnota v intervalu $(\underset{0}{\xi^2}, \underset{1}{\xi^2})$, probíhá současně $\overset{3}{\beta}$ jednak interval $(\underset{0}{\beta}, \underset{3}{\beta})$ a vytvořena je rotační soustava $(\overset{1}{V})$ větví $\overset{1}{V}$, jednak interval $(\pi-\underset{0}{\beta}, \pi-\underset{3}{\beta})$ a tím je vytvořena rotační soustava $(\overset{2}{V})$ větví $\overset{2}{V}$. Na prvé je rozdíl zeměpisných délek krajních bodů $a = \underset{3}{\xi^1} - \underset{0}{\xi^1} = \displaystyle\int\limits_{\underset{0}{\xi^2}}^{\underset{3}{\xi^2}} \frac{F(\xi^2)\,\mathrm{d}\xi^2}{+\left|\sqrt{1-(F(\xi^2))^2}\right|\cos\xi^2}$, na druhé $b = \underset{5}{\xi^1} - \underset{4}{\xi^1} = \displaystyle\int\limits_{\underset{4}{\xi^2}=\underset{0}{\xi^2}}^{\underset{5}{\xi^2}=\underset{3}{\xi^2}} \frac{F(\xi^2)\,\mathrm{d}\xi^2}{-\left|\sqrt{1-(F(\xi^2))^2}\right|\cos\xi^2}$, $a = -b$, t. j. větve $\overset{1}{V}, \overset{2}{V}$ jsou navzájem souměrné vždy podle určité meridiánové roviny. Existuje-li však alespoň jedna reálná hodnota $\underset{3}{\xi^2} = \underset{1}{\xi^2} = \Phi({}_{(\overset{+}{-})}\sin\frac{1}{2}\pi)$, $F(\underset{1}{\xi^2}) = {}_{(\overset{+}{-})}1$, $|\underset{1}{\xi^2}| < \frac{1}{2}\pi$, existuje ke každé větvi $\overset{1}{V}$ soustavy $(\overset{1}{V})$ vždy taková větev $\overset{2}{V}$ soustavy $(\overset{2}{V})$, pro niž $\underset{1}{\xi^1} = \underset{5}{\xi^1}$, obě větve tvoří souvislou větev V křivky M, pravoúhle souměrnou podle roviny meridiánu $\underset{1}{\xi^1} = \underset{5}{\xi^1}$ a tato větev je protťata každou rovnoběžkou buď ve dvou bodech, nebo (omezíme-li se na reálné body) vůbec

[3]) O určení zda předložený omezený integrál má konečnou hodnotu, viz n. př.: K. Petr, Počet integrální.

není proťata, kdežto rovnoběžka n. př. $\underset{1}{\xi^2}$ se této větve dotýká ve společném bodě větví $\overset{1}{V}, \overset{2}{V}$.

Křivky konstantní křivosti K sestávají, jak z rovnice (3) patrno ($F(\xi^2)$ je v tomto případě lineární funkcí) z takovýchto podle meridiánů vzájemně souměrných větví $\overset{1}{V}, \overset{2}{V}$ a mají-li jednu tečnu (nebo více tečen) || s rovinou rovníku, sestávají z jedné nebo určitého množství větví V, z nichž každá je podle roviny určitého meridiánu souměrná a jsou proto souměrné podle jedné nebo určitého množství meridiánových rovin. Níže shledáme, že v případě $\underset{\times}{\xi^2} = \underset{1}{\xi^2}$, $|\underset{1}{\xi^2}| < \frac{1}{2}\pi$ jeden nebo druhý případ nastává, je-li křivka K tvořena jedinou uzavřenou větví podél níž β probíhá hodnoty n. př. od $-\frac{1}{2}\pi + q\pi$ do $+\frac{3}{2}\pi + q\pi$ pro q celé (pro $C = 0$), nebo množstvím větví, z nichž na každé β probíhá tytéž hodnoty, ale z nichž ani jedna není sama o sobě uzavřenou (pro $C \neq 0$).

Rovnicí $\beta = f(\xi^2)$, kde $f(\xi^2)$ je spojitá a spojitě differencovatelná jednoznačná funkce je naproti tomu dána rotační soustava křivek $\overset{1}{M}$, které obecně nejsou podle meridiánových rovin souměrné. Soustava (rotační) křivek $\overset{2}{M}$ k prvým podle těchto rovin souměrných je dána rovnicí $\beta = \pi - f(\xi^2)$. Obě soustavy jsou současně dány společnou rovnicí $\sin\beta = \sin(f(\xi^2))$ a je-li $\frac{1}{2}\pi = f(\underset{1}{\xi^2})$, $\underset{1}{\xi^2}$ reálné a $|\xi^2| < \frac{1}{2}\pi$ lze střídavě z větví $\overset{1}{V}, \overset{2}{V}$ křivek $\overset{1}{M}, \overset{2}{M}$ vytvořiti větve V určitých křivek $\underset{1}{M}$, souměrné podle meridiánových rovin, podél nichž se β spojitě mění.

Prve doplňme však ještě úvahy o křivosti odvozením vztahu kovariantní křivosti k křivky M a klasické křivosti $\varkappa$ jejího obrazu $\underset{1}{M}$ na Mercatorově mapě.

Buďtež opět na mapě zřízeny souřadnice $\frac{u}{R} = \xi^1$, $\frac{v}{R} = l\,\mathrm{tg}\,(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\xi^2)$. I jest:

$$\varkappa = \frac{\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}v^2}}{\left(1 + \left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = \mathrm{tg}\,\beta = \frac{\cos\xi^2\,\mathrm{d}\xi^1}{\mathrm{d}\xi^2}.$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}v^2} = \frac{\mathrm{d}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}}{\mathrm{d}v} = \frac{\mathrm{d}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}}{\mathrm{d}\xi^2} \cdot \frac{\mathrm{d}\xi^2}{\mathrm{d}v} = \frac{\mathrm{d}\beta \,.\, \cos\xi^2}{\cos^2\xi^2\,\mathrm{d}\xi^2}, \quad \varkappa = \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\xi^2}\cos\beta\cos\xi^2,$$

a vzhledem k rovnici (2):

$$\varkappa = Rk \cos \xi^2, \tag{13}$$

což použito na křivky L dává rovnici (10).

Poněvadž v bodě vratu (obratu) křivky $\underset{1}{M}$ je $1/\varkappa = 0$, $(\varkappa = 0)$, je vzhledem k rovnici (13) a $|\,\xi^2\,| < \frac{1}{2}\pi$ v příslušném bodě křivky M: $1/k = 0$, $(k = 0)$; nazývejme takovéto body křivky M také body vratu (obratu). Křivky K a jejich obrazy $\underset{1}{K}$ nemají ani bodů vratu ani bodů obratu. Křivka K mající v určitém bodě s křivkou M týž úhel β a totéž k je analogií oskulační kružnice. V bodě obratu je (vzhledem ke $k = 0$) takovouto oskulační křivkou K loxodroma. Dvě křivky M mající v určitém bodě totéž β a k mají v onom bodě tutéž oskulační křivku K.

Uvažujme nyní opět křivku konstantní křivosti K danou rovnicí (3). V bodě A svírej K s meridiánem úhel $\underset{A}{\beta}$, $-\frac{1}{2}\pi \leq \underset{A}{\beta} < 0$, v B úhel $\underset{B}{\beta} = 0$, v E úhel $\underset{E}{\beta} = -\underset{A}{\beta}$. I jest

$$\underset{A}{\xi^1} - \underset{B}{\xi^1} = \frac{1}{Rk} \int_0^{\underset{A}{\beta}} \frac{\sin\beta \, d\beta}{\cos\left(\dfrac{\sin\beta - RC}{Rk}\right)} = \frac{1}{Rk} \int_0^{-\underset{E}{\beta}} \frac{\sin\beta \, d\beta}{\cos\left(\dfrac{\sin\beta - RC}{Rk}\right)}, \tag{14}$$

$$\underset{E}{\xi^1} - \underset{B}{\xi^1} = \frac{1}{Rk} \int_0^{\underset{E}{\beta}} \frac{\sin\beta \, d\beta}{\cos\left(\dfrac{\sin\beta - RC}{Rk}\right)}; \tag{14'}$$

Na pravých stranách rovnic jsou trigonometrické formy integrálu, analogického integrálu (12), rozdíly zeměpisných délek jsou tu parametricky vyjádřeny, zeměpisná šířka je, jak známo, vyjádřena rovnicí $\xi^2 = \dfrac{\sin\beta - RC}{Rk}$ a probíhá-li β intervaly resp. $(\underset{B}{\beta}, \underset{A}{\beta})$, $(\underset{B}{\beta}, \underset{E}{\beta})$, nechať je opět vždy $-\frac{1}{2}\pi < \xi^2 < \frac{1}{2}\pi$; potom integrály (14), (14′) mají konečnou hodnotu.

Podél oblouku $\widehat{BA}$ ve smyslu od B do A položme $-\beta = \gamma$, $\sin(-\beta) = \sin\gamma$, $d(-\beta) = d\gamma$, $\underset{A}{\gamma} = -\underset{A}{\beta} = \underset{E}{\beta}$ tudíž $\underset{A}{\xi^1} - \underset{B}{\xi^1} =$

$$= \frac{1}{Rk} \int_0^{\underset{A}{\gamma}} \frac{\sin\gamma \, d\gamma}{\cos\left(\dfrac{-\sin\gamma - RC}{Rk}\right)} = \frac{1}{Rk} \int_0^{\underset{E}{\beta}} \frac{\sin\beta \, d\beta}{\cos\left(\dfrac{-\sin\beta - RC}{Rk}\right)}.$$

V intervalu $0 < |\beta| \leqq \frac{1}{2}\pi$ je v kterémkoli bodě vždy $\cos\left(\frac{\sin\beta - RC}{Rk}\right)$. $\begin{Bmatrix}\neq\\=\end{Bmatrix} \cos\left(\frac{-\sin\beta - RC}{Rk}\right)$, tudíž $\underset{A}{\xi^1} - \underset{B}{\xi^1} \begin{Bmatrix}\neq\\=\end{Bmatrix} \underset{E}{\xi^1} - \underset{B}{\xi^1}$. je-li $C \begin{Bmatrix}\neq\\=\end{Bmatrix} 0$. Existuje-li tudíž $-\frac{1}{2}\pi < \underset{A}{\xi^2} < +\frac{1}{2}\pi$ pro něž $\underset{A}{\beta} = -\frac{1}{2}\pi$ a $-\frac{1}{2}\pi < \underset{E}{\xi^2} < +\frac{1}{2}\pi$ pro něž $\underset{E}{\beta} = +\frac{1}{2}\pi$, t. j. je-li resp. $\left|\frac{1 - RC}{Rk}\right| < \frac{1}{2}\pi$. $\left|\frac{1 + RC}{Rk}\right| < \frac{1}{2}\pi$ a bod E tedy bodem maximálního (minimálního) ξ^2, A bodem minimálního (maximálního) ξ^2 a je-li $C \neq 0$, neleží body A, E na témž meridiánu, čehož další důsledek je, že (reálná) větev křivky K od $\beta = -\frac{1}{2}\pi$ do $\beta = +\frac{3}{2}\pi$ není uzavřenou, je však, jak z předchozí úvahy vyplývá, pravoúhle souměrnou podle roviny meridiánu procházejícího bodem E. V bodě A přechází K ve druhou větev, na níž β probíhá, hodnoty od $-\frac{1}{2}\pi$ do $-\frac{3}{2}\pi$; atd. Také větev n. př. na níž β probíhá hodnoty od $-\frac{3}{2}\pi$ do $\frac{1}{2}\pi$ je souměrnou podle meridiánu procházejícího bodem A atd. Je-li však $C = 0$ $\left(\text{a ovšem opět } \left|\frac{1 - RC}{Rk}\right| < \frac{1}{2}\pi,\ \left|\frac{1 + RC}{Rk}\right| < \frac{1}{2}\pi\right)$, leží body A, E na témž meridiánu, z čehož dále vyplývá, že body A, D, v nichž resp. $\beta = -\frac{1}{2}\pi$, $\beta = +\frac{3}{2}\pi$ se ztotožňují a křivka K je tvořena jedinou uzavřenou větví.

Naproti tomu jestliže $\left|\frac{1 - RC}{Rk}\right| \geqq \frac{1}{2}\pi$, po případě $\left|\frac{1 + RC}{Rk}\right| \geqq \frac{1}{2}\pi$, sestává křivka K, jak z Mercatorovy mapy patrno, z jedné dvojice nebo z množství dvojic větví, z nichž vždy dvě větve v téže dvojici jsou pravoúhle souměrné podle roviny určitého meridiánu a k jednomu nebo oběma pólům se asymptoticky blíží — vyjímaje případ, kdy, jak níže uvedeno, $|\overset{+}{(-)} Rk\,\frac{1}{2}\pi + RC| = 0$ — na způsob loxodrom.

Asymptotické blížení se křivky K k pólům pro $0 < |\overset{+}{(-)} Rk\,\frac{1}{2}\pi + RC| \leqq 1$, $\left|\frac{1\,(\mp)\,RC}{Rk}\right| \geqq \frac{1}{2}\pi$ vysvítá i z toho, že limita integrálu (jakožto funkce jeho horní meze)

$$\int_{\xi^2_0}^{\xi^2} \frac{(Rk\xi^2 + RC)\,\mathrm{d}\xi^2}{\sqrt{1 - (Rk\xi^2 + RC)^2 \cos\xi^2}} \tag{15}$$

(což je jiná forma integrálu (14, 14′) daného v trigonometrické formě), majícího konečnou hodnotu pro $|\overset{0}{\xi^2}| < \frac{1}{2}\pi$, $|R k \overset{0}{\xi^2} + RC| \leqq 1$, $|\xi^2| < \frac{1}{2}\pi$,[4]) pro $\lim \xi^2 = \overset{+}{(-)} \frac{1}{2}\pi$ roste nade všechny meze, neboť

$$\lim_{\xi = \frac{1}{2}\pi} \frac{(Rk\xi^2 + RC)\,(\frac{1}{2}\pi - |\xi^2|)^n}{\sqrt{1 - (Rk\xi^2 + RC)^2} \cos \xi^2} \tag{16}$$

je konečná toliko pro $n \geqq 1$, je-li $0 < |\overset{+}{(-)} Rk \frac{1}{2}\pi + RC| < 1$ a je-li $|\overset{+}{(-)} Rk \frac{1}{2}\pi + RC| = 1$ dokonce toliko pro $n \geqq \frac{3}{2}$. Úvahu lze zobecniti i pro křivky M, jejichž rotační soustava (M) je dána rovnicí (11). Naproti tomu integrál (15) má pro $|\xi^2| = \frac{1}{2}\pi$, $|\pm Rk \frac{1}{2}\pi + RC| = 0$ konečnou hodnotu, poněvadž v tomto případě limita (16) je $= 0$ pro každé n kladné, tedy již pro $0 < n < 1$. Větve $\overset{1}{V}$, $\overset{2}{V}$ křivky K se přibližují k sobě v pólu, aniž by se k pólu blížily asymptoticky.

Mají-li soustavy (K) křivek $K \ldots \dfrac{\sin \beta}{R} = k\xi^2 + C$ společné sdružené rotační soustavy elementů η^2, $\sin \gamma = \sin (\pi - \gamma)$, (kde η^2, $\sin \gamma$ jsou dané konstanty), jest:

$$\frac{\sin \beta}{R} = k\xi^2 + \frac{\sin \gamma}{R} - \eta^2 k, \text{ t. j. } C = \frac{\sin \gamma}{R} - \eta^2 k. \tag{17}$$

Tyto křivky konstantní křivosti tvoří rotační soustavu jednoparametrových soustav, majících společný dotyk podél elementů obou vzájemně sdružených soustav $(\eta^2, \sin \gamma)$. Nazývejme tuto (dvojparametrovou) soustavu křivek K dotykovou soustavou rotační. Obecně dvojparametrová soustava křivek K, jakožto rotační soustava jednoparametrových nerotačních soustav daná rovnicí $\dfrac{\sin \beta}{R} = k\xi^2 + \Psi(k)$, (kdež pro každou hodnotu k dostáváme určitou jednoparametrovou soustavu rotační) není dotyková: Každou danou dvojicí sdružených rotačních soustav elementů $\left(\zeta^2, \dfrac{\sin \delta}{R}\right)$ prochází tolik rotačních jednoparametrových soustav (K), kolik kořenů pro k má rovnice

$$k\zeta^2 + \Psi(k) = \frac{\sin \delta}{R}.$$

Aby rotační soustava jednoparametrových nerotačních soustav křivek K byla dotyková, k tomu je nutné a stačí, aby $\Psi(k)$ byla celistvou lineární funkcí parametru k: $\Psi(k) = ak + b$, pro reálný dotyk $|Rb| = |\sin \gamma| < 1$, $|a| = |\eta^2| < \frac{1}{2}\pi$.

[4]) Srovnejme s úvahou o integrálu (12).

V tom případě každou další dvojicí sdružených rotačních soustav elementů $\left(\zeta^2, \frac{\sin\delta}{R}\right)$ prochází jediná rotační soustava (K) křivek K a její rovnice jest:

$$\begin{vmatrix} \sin\beta & \xi^2 & 1 \\ \sin\gamma & \eta^2 & 1 \\ \sin\delta & \zeta^2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ t. j. } \sin\beta = \frac{\sin\gamma - \sin\delta}{\eta^2 - \zeta^2}\xi^2 - \frac{\zeta^2\sin\gamma - \eta^2\sin\delta}{\eta^2 - \zeta^2}$$

To je rovnice jednoparametrové rotační soustavy (K) procházející danými dvěma dvojicemi sdružených rotačních soustav elementů $(\eta^2, \sin\gamma)$; $(\zeta^2, \sin\delta)$.

Vzhledem k tomu, že — jak z předchozích úvah vyplývá — křivka K protínající danou rovnoběžku η^2 v úhlu ϱ protíná ji též v úhlu $-\varrho$, možno vysloviti větu:

Křivky konstantní křivosti K protínající dvě dané rovnoběžky resp. η^2, ζ^2 v úhlech daných resp. ϱ, σ jsou shodné; mají kovariantní křivost

$$k = \frac{\cos\varrho - \cos\sigma}{R(\eta^2 - \zeta^2)}$$

a jsou obsaženy v téže rotační soustavě (K).

Dvěma sousedními elementy na dvou sousedních rovnoběžkách je dána určitá křivka konstantní křivosti. Křivka K ke křivce M v daném bodě oskulační má s ní v tomto bodě dva sousední elementy společné (a naopak). Dvě v daném bodě oskulující se křivky M, N mají v tomto bodě dva sousední elementy společné (a naopak).

Rovnicí

$$\sin\beta = F(\xi^2) \tag{18}$$

je dána jednoparametrová soustava rotační (M) křivek M.

Budiž kromě toho dána rotační soustava (N) křivek N rovnicí:

$$\sin\gamma = \Phi(\xi^2). \tag{19}$$

Je-li některá z křivek N isogonální trajektorií soustavy (M), jest: $\gamma = \beta + a$, a konst. a je-li m kovariantní křivost této křivky N, $m = \frac{\cos\gamma\, d\gamma}{R\, d\xi^2}$, jest v průsečících křivky N s křivkami M:

$$\frac{k}{\cos\beta} = \frac{m}{\cos\gamma} \tag{20}$$

čili:

$$\frac{k}{m} = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} = \frac{\cos\beta}{\cos(\beta + a)}, \quad \frac{k}{\cos\beta} = \frac{m}{\cos(\beta + a)}. \tag{21}$$

Potom je však také každá další křivka soustavy (19) isogonální trajektorií soustavy (18), neboť je-li pro jednu z křivek N

$$\sin \gamma = \sin (\beta + a) = \Phi(\xi^2) = F(\xi^2) \cos a + \sqrt{1 - (F(\xi^2))^2} \sin a,$$

je tato rovnice platná pro každou křivku N soustavy (N) dané rovnicí (19) a je-li v platnosti (20), jest $\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}\xi^2} = \dfrac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\xi^2}$, $\gamma = \beta + a$, a konst., při čemž a je vzhledem k tomu, že soustavy (M), (N) jsou rotační, pro každou dvojici křivek M, N totéž.

Isogonální trajektorie rotační soustavy (M) tvoří zase rotační soustavu (N). Aby soustavy (M), (N) byly takovýmito vzájemnými soustavami isogonálních trajektorií, k tomu je nutnou a postačující podmínkou (20) *nebo* (21).

Isogonální trajektorie rotační soustavy loxodrom jsou zase loxodromy a každé dvě rotační soustavy loxodrom jsou vzájemně soustavami isogonálních trajektorií.

Kromě toho z podmínky (21) vyplývá:

Isogonální trajektorie rotační soustavy (K) křivek konstantní křivosti jsou tenkráte a jen tenkráte zase křivkami konstantní křivosti, jsou-li (K) loxodromami. Ony isogonální trajektorie jsou potom též loxodromami.

K objasnění některých dosud odvozených výsledků lze také použíti — kromě zobrazení Mercatorova — ještě jiných zobrazení rotačních soustav. Nanášíme-li na vodorovnou osu B jakožto úsečky hodnoty úhlů β, na svislou osu X jakožto pořadnice hodnoty zeměpisných šířek ξ^2 (po volbě libovolných délek jakožto jednotkových), zobrazí se rotační soustava elementů (ξ^2, β) bodem, ležícím vzhledem k $|\xi^2| < \frac{1}{2}\pi$ uvnitř rovinného pásu omezeného přímkami P, Q ve vzdálenostech $+\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi$ rovnoběžných s osou B, rotační soustava křivek M daná rovnicí $\beta = f(\xi^2)$ určitým obloukem uvnitř tohoto pásu. Rotační soustava isogonálních trajektorií (N) rotační soustavy (M) zobrazuje se obloukem $(\underset{2}{N})$, vzniklým pošinutím oblouku $(\underset{2}{M})$ o délku a ve směru osy B, $(\underset{2}{K})$ se zobrazují sinusoidami, rotační soustavy loxodrom o daném úhlu β svislou přímkou ve vzdálenosti β od osy X. Osa X zobrazuje všechny meridiány, body osy B zobrazují všechny elementy na ploše kulové, jejichž body leží na rovníku, body rovnoběžky s osou B všechny elementy, jejichž body leží na určité rovnoběžce plochy kulové.

Průsek dvou oblouků $(\underset{2}{M})$, $(\underset{2}{N})$ je obrazem dotyku dvou rotačních soustav (M), (N) podél jedné rotační soustavy elementů, dotyk takovýchto oblouků, jak z předešlého patrno, je obrazem oskulace těchto soustav (M), (N) podél příslušné rotační soustavy elementů.

Na hranici pásu P, Q není zobrazení jednoznačné (ve smyslu: bod v obraze — rotační soustava elementů na ploše kulové). Protíná-li však oblouk (M) reálně resp. P, Q, v bodech, jejichž $\beta \neq \frac{1}{2}\pi + q\pi$, q celé, značí to, že křivky M soustavy (M) se asymptoticky blíží resp. k severnímu, k jižnímu pólu a zároveň k oněm loxodromám tvořícím rotační soustavu, jejichž β je rovno vzdálenosti oněch průsečíků od X.

Jiné zobrazení získáváme, naneseme-li na svislou osu X hodnotu zeměpisné šířky, na vodorovnou osu S hodnotu $\sin \beta$. Jednotlivé sdružené rotační soustavy (reálních) elementů (jejichž $|\xi^2| < \frac{1}{2}\pi$) jsou zobrazeny body uvnitř pravoúhelníku $abcd$, jehož vrcholy mají souřadnice: $a\,(-\frac{1}{2}\pi, -1)$, $b\,(-\frac{1}{2}\pi, +1)$, $c\,(+\frac{1}{2}\pi, +1)$, $d\,(+\frac{1}{2}\pi, -1)$. Určitá soustava (K) je zobrazena úsečkou $(K) \equiv \overline{mn}$ uvnitř $abcd$, jejíž body na obvodu $abcd$ jsou m, n. Probíháme-li množství elementů na křivkách K podél větví $\overset{1}{V}$, $\overset{2}{V}$ vzájemně podle meridiánových rovin souměrných[5]) je současně úsečka $\overline{mn}$ proběhnuta v obou smyslech $\overline{mn}$ a $\overline{nm}$.

V rovnici (11) vyskytující se funkce $F(\xi^2)$ proměnné ξ^2, pro $|F(\xi^2)| \leqq 1$ jednoznačná v intervalu $-\frac{1}{2}\pi \leqq \xi^2 \leqq +\frac{1}{2}\pi$, k níž přísluší na ploše kulové soustava (M), je uvnitř pravoúhelníku $abcd$ interpretována obloukem (M), proťatým každou přímkou $\parallel S$ v jediném bodě. Neprotíná-li tento oblouk reálně úsečky $\overline{ab}$, $\overline{cd}$, nepřibližují se M pólům. Protíná-li však reálně resp. $\overline{ab}$, $\overline{cd}$, blíží se M asymptoticky k jednomu nebo oběma pólům, jak patrno ze zobecnění úvahy o integrálu (15). Rotační soustava loxodrom, zobrazená nyní opět rovnoběžkou s X procházející vždy jedním z oněch průsečíků je soustavou asymptot křivek M. Protíná-li však (M) obvod pravoúhelníka v některém z vrcholů, přibližují se v pólu k sobě podle meridiánové roviny souměrné větve křivek M, aniž by se M k tomuto pólu blížily asymptoticky. Proběhneme-li v obou směrech oblouk (M), probíháme současně množství elementů na obou soustavách větví $\overset{1}{V}\overset{2}{V}$ na ploše kulové, z nichž sestává soustava (M) křivek M a jež jsou vzájemně podle meridiánových rovin souměrné.[6])

---

[5]) Při tom zachováváme tutéž orientaci podél větví $V = \overset{1}{V} + \overset{2}{V}$ křivek K i úhlu β. Změníme-li orientaci, zobrazí se (K) úsečkou $\overline{m'n'}$ vzniklou zrcadlením $\overline{mn}$ na X.

[6]) Změna orientace jeví se v obraze zrcadlením na X.

Úsečky $(\underset{3}{K})$ procházející bodem $(0, 0)$ zobrazují křivky K, jejichž $C = 0$ poněvadž vzdálenost průsečíku S $(\underset{3}{K})$ od bodu $(0, 0)$ je rovna sinusu úhlu, v němž K protíná meridián na rovníku, pro $C = 0$ protíná K rovník v pravém úhlu. Pro libovolnou křivku M je $Rk = \dfrac{\mathrm{d} \sin \beta}{\mathrm{d}\xi^2} = \operatorname{tg} \alpha$, je-li α úhel, který svírá $(\underset{3}{M})$ s pořadnicí. Průsek oblouků $(\underset{3}{M})$, $(\underset{3}{N})$ je obrazem dotyku soustav (M), (N) podél sdružených soustav elementů na ploše kulové, svazek úseček $(\underset{3}{K})$ o společném bodě je obrazem rotační soustavy dotykových soustav křivek K na ploše kulové, dotyk oblouků $(\underset{3}{M})$, $(\underset{3}{N})$ je obrazem oskulace soustav (M), (N) podél příslušných sdružených soustav elementů. (Totéž vzhledem k rovnici (13) lze vysloviti o translačních soustavách $(\underset{1}{M})$, $(\underset{1}{N})$ na Mercatorově mapě.)

Partikulární integrály Clairautovy rovnice vzhledem k proměnným $\sin \beta$, ξ^2 v oboru, jemuž přísluší část roviny omezená pravoúhelníkem $(abcd)$: $\sin \beta = \dfrac{\mathrm{d} \sin \beta}{\mathrm{d}\xi^2}\, \xi^2 + f\left(\dfrac{\mathrm{d} \sin \beta}{\mathrm{d}\xi^2}\right)$ čili vzhledem k rovnici (2)

$$\sin \beta = Rk\xi^2 + f(Rk) \tag{22}$$

jsou, jak ze zobrazení v pravoúhelníku $(abcd)$ patrno, na ploše kulové interpretovány soustavami (K), oskulujícími určitou soustavu (M) jakožto interpretaci singulárního integrálu rovnice (22).

Z tvaru oblouku $(\underset{3}{M})$ uvnitř $(abcd)$ možno přímo posouditi některé vlastnosti křivek M soustavy $(\underset{3}{M})$: Na př. existuje-li k $(\underset{3}{M})$ uvnitř $(abcd)$ tečna $\parallel S$, roste v dotyčném bodě k nade všechny meze, křivky M mají na příslušné rovnoběžce body vratu, existuje-li však uvnitř $(abcd)$ tečna $\parallel X$, je příslušné $k = 0$, křivky M mají body obratu. Je-li v některém bodě oblouku $(\underset{3}{M})$ $\dfrac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\xi^2} = 0$, má k v tomto bodě extrém, $(\underset{3}{M})$ bod obratu, příslušné body křivek M možno nazývati vrcholy, poněvadž křivky $\underset{1}{M}$ vskutku v takovýchto bodech mají vrcholy. Vzhledem k souměrnosti křivek M (a $\underset{1}{M}$) vzhledem k meridiánovým rovinám (a k meridiánům), dány-li jejich rovnice ve tvaru (11), jsou též body, v nichž je $\beta = \frac{1}{2}\pi + q\pi$, q celé, vrcholy.

Analogické úvahy lze provésti s některými změnami vzhledem ke zobrazení o osách X, B jsou-li rotační soustavy křivek dány rovnicemi typu $\beta = f(\xi^2)$.

Aby rotační soustava (M) daná rovnicí

$$\beta = f(\xi^2) \text{ čili } \frac{d\xi^1}{d\xi^2}\cos\xi^2 = \operatorname{tg} f(\xi^2) \tag{23}$$

připouštěla infinitesimální transformaci, jejíž symbol je

$$a\left[(\operatorname{tg}\varphi(\xi^2))\frac{\partial\Phi}{\partial\xi^1} + \cos\xi^2\frac{\partial\Phi}{\partial\xi^2}\right], \tag{24}$$

kde a je libovolná konečná konstanta $\neq 0$, při čemž se omezíme na takový obor proměnných ξ^1, ξ^2, $|\xi^2| < \frac{1}{2}\pi$, ve kterém $\operatorname{tg} f(\xi^2)$, $\operatorname{tg}\varphi(\xi^2)$, $\Phi(\xi^1, \xi^2)$ jsou spojité funkce, mající alespoň první derivace spojité, k tomu je nutná a postačující podmínka

$$\frac{d\varphi(\xi^2)}{\cos^2\varphi(\xi^2)\,d\xi^2} = \frac{d\,f(\xi^2)}{\cos^2 f(\xi^2)\,d\xi^2}\,^{7)} \tag{25}$$

aneb, položíme-li $\gamma = \varphi(\xi^2)$

$$\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg} b, \tag{26}$$

kde b je libovolná konstanta, nebo

$$\frac{\sin(\gamma - \beta)}{\cos\gamma\cos\beta} = \operatorname{tg} b. \tag{27}$$

Je-li k kovariantní křivost kterékoli z křivek M (podél M obecně proměnná) a položíme-li $m = \frac{d\sin\varphi(\xi^2)}{R\,d\xi^2}$, lze uvésti podmínku na tvar

$$\frac{m}{\cos^3\gamma} = \frac{k}{\cos^3\beta} \quad \text{nebo} \quad \frac{k}{m} = \left(\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right)^3. \tag{28}$$

Rovnice (25), (26), (27), (28) jsou ekvivalentní a jsou vesměs souměrné vzhledem k veličinám vyskytujícím se v rovnicích soustav (M) a $(N)\ldots\gamma = \varphi(\xi^2)$. Dráhy infinitesimální transformace (24) tvoří rotační soustavu (N), jejíž rovnice je

$$\frac{d\xi^1}{d\xi^2}\cos\xi^2 = \operatorname{tg}\varphi(\xi^2) \tag{29}$$

čili

$$\gamma = \varphi(\xi^2) \tag{30}$$

a kovariantní křivost m křivek N vyhovuje rovnici (28).

Naopak, soustava (N) připouští infinitesimální transformaci, jejíž symbol je

$$c\left[(\operatorname{tg} f(\xi^2))\frac{\partial\Phi}{\partial\xi^1} + \cos\xi^2\frac{\partial\Phi}{\partial\xi^2}\right], \tag{31}$$

c) libovolná konečná konstanta $\neq 0$).

---

[7]) Pro srovnání n. př. J. A. Serret-G. Scheffers, Lehrbuch d. Differential u. Integralrechnung, III. (Lipsko 1909), str. 199 a další.

Její dráhy jsou křivky M soustavy (M), t. j. vztah obou soustav je reciproký.

Kdyby místo transformace (24) byla dána transformace

$$a\varrho\left[(\operatorname{tg}\varphi(\xi^2)\frac{\partial\Phi}{\partial\xi^1}+\cos\xi^2\frac{\partial\Phi}{\partial\xi^2}\right], \tag{32}$$

kde ϱ je spojitou funkcí proměnných ξ^1, ξ^2 (nebo alespoň jedné z nich), mající v uvažovaném oboru spojité parciální derivace alespoň prvého řádu, byla by podmínka (25) nahražena podmínkou

$$\varrho\left(\frac{\mathrm{d}\,\varphi(\xi^2)}{\cos^2\varphi(\xi^2)\,\mathrm{d}\xi^2}-\frac{\mathrm{d}\,f(\xi^2)}{\cos^2 f(\xi^2)\,\mathrm{d}\xi^2}\right)+$$
$$+(\operatorname{tg}f(\xi^2)-\operatorname{tg}\varphi(\xi^2))\left(\operatorname{tg}f(\xi^2)\frac{\partial\varrho}{\partial\xi^1}+\cos\xi^2\frac{\partial\varrho}{\partial\xi^2}\right)=0. \tag{33}$$

Transformace (32) je, jak patrno, nejobecnější transformací, jejíž dráhy tvoří rotační soustavu. Je to soustava (N), daná rovnicí tvaru (30), při čemž funkce $\varphi(\xi^2)$ vyhovuje podmínce (33).

Tato podmínka (33) je symetrická vzhledem k funkcím f, φ, je-li buď $\operatorname{tg}f(\xi^2)=\operatorname{tg}\varphi(\xi^2)$, t. j. triviální transformace, při níž $(M)\equiv(N)$, nebo $\dfrac{\partial\varrho}{\partial\xi^1}=0$, t. j. ϱ je toliko funkcí proměnné ξ^2, $\dfrac{\partial\varrho}{\partial\xi^2}=\dfrac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}\xi^2}$, načež soustava (N) připouští infinitesimální transformaci

$$c\varrho\left(\operatorname{tg}f(\xi^2)\frac{\partial\Phi}{\partial\xi^1}+\cos\xi^2\frac{\partial\Phi}{\partial\xi^2}\right), \tag{34}$$

a je-li také $\dfrac{\partial\varrho}{\partial\xi^2}=0$, jedná se o transformace (24), (31). Nebo konečně, je-li $\operatorname{tg}f(\xi^2)\dfrac{\partial\varrho}{\partial\xi^1}+\cos\xi^2\dfrac{\partial\varrho}{\partial\xi^2}=0$, t. j. je-li $\varrho=$ konst. integrálem rovnice (23), t. j. rovnicí soustavy (M). Podmínka (33) přechází v podmínku (28), při čemž soustava (N) připouští infinitesimální transformaci

$$c\sigma\left[(\operatorname{tg}f(\xi^2))\frac{\partial\Phi}{\partial\xi^1}+\cos\xi^2\frac{\partial\Phi}{\partial\xi^2}\right], \tag{35}$$

je-li $\sigma=$ konst. integrálem differenciální rovnice (29). Obecně možno říci: Kterákoli z rovnic (25), (26), (27), (28) je nutnou a postačující podmínkou, aby rotační soustava (M) daná differenciální rovnicí (23) připouštěla infinitesimální transformaci

$$a\varrho^p\left[(\operatorname{tg}\varphi(\xi^2))\frac{\partial\Phi}{\partial\xi^1}+\cos\xi^2\frac{\partial\Phi}{\partial\xi^2}\right] \tag{36}$$

a rotační soustava (N) daná differenciální rovnicí (29) infinitesimální transformaci

$$c\sigma^q\left[(\operatorname{tg} f(\xi^2))\frac{\partial\Phi}{\partial\xi^1} + \cos\xi^2\frac{\partial\Phi}{\partial\xi^2}\right], \tag{37}$$

jsou-li $\varrho = \text{konst.}$, $\sigma = \text{konst.}$ integrály rovnic resp. (23), (29), při čemž p, q může býti též $= 0$. Naopak, aby byla splněna kterákoli z podmínek (25), (26), (27), (28), k tomu je nutné a stačí, aby uvažované infinitesimální transformace měly symboly (36), (37) a aby $\frac{\partial\varrho}{\partial\xi^1} \neq 0$. A toliko v případě $\frac{\partial\varrho}{\partial\xi^1} = 0$ je pro $\frac{\partial\varrho}{\partial\xi^2} = \frac{d\varrho}{d\xi^2} \neq 0$ podmínka (33) souměrná a jiná než (28).

Z rovnice (27) plyne pro transformaci (24):

Je-li soustava (N) soustavou isogonálních trajektorií soustavy (M), tu vzhledem k rovnici (21) buď identicky $\beta = \gamma$ a úhel $\alpha = 0$, t. j. triviální transformace, nebo vzhledem k (20) $k = m = 0$, t. j. rotační soustava invariantní netriviálních infinitesimálních transformací (24) je tenkráte a jen tenkráte soustavou isogonálních trajektorií rotační soustavy drah této transformace, jsou-li obě soustavy soustavami loxodrom (potom ovšem $\frac{d\, f(\xi^2)}{d\xi^2} = \frac{d\, \varphi(\xi^2)}{d\xi^2} = 0$).

Dráhy každé infinitesimální transformace, již připouští rotační soustava (M), netvoří však vždy rotační soustavu v našem slova smyslu. Příkladem toho je na př. rotace kolem osy plochy kulové, jejíž dráhy (rovnoběžky) sice zůstávají invariantními vzhledem k rotaci (je to jejich triviální transformace), nepříslušejí však uvažované kategorii infinitesimálních transformací, poněvadž pro ně je vesměs $\gamma = \frac{1}{2}\pi$, t. j. tg γ roste nade všechny meze. Symbol této transformace jest:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\xi^2}.$$

Příslušná podmínka, aby (M) připouštěla rotaci je ovšem identicky splněna pro každou rotační soustavu (M).[8])

Na Mercatorově mapě mějtež dráhy grupy infinitesimálních transformací rovnice $u = \varphi(\underset{0}{u}, \underset{0}{v}, t)$, $v = \psi(\underset{0}{u}, \underset{0}{v}, t)$, je-li t parametr jednotlivých transformací, $\underset{0}{u}, \underset{0}{v}$ hodnoty funkcí φ, ψ pro $t = 0$, a tyto funkce jsou spojité a spojitě differencovatelné, a směrnice libovolného elementu se transformuje podle rovnice

$$v' = \frac{\psi_{\underset{0}{u}} + \psi_{\underset{0}{v}}\, \underset{0}{v}'}{\varphi_{\underset{0}{u}} + \varphi_{\underset{0}{v}}\, \underset{0}{v}'},\quad v' = \frac{dv}{du},\quad \varphi_u = \frac{\partial\varphi}{\partial u},\ \text{atd., při čemž} \begin{vmatrix}\varphi_u, & \varphi_v\\ \psi_u, & \psi_v\end{vmatrix} = 0.^{9)}$$

[8]) Dosaďme n. př. do rovnice (4) na str. 198, Serret-Scheffers, Lehrbuch d. Differential u. Integralrechnung, III.

[9]) Tamtéž, str. 213.