Werk

Label: Periodical issue

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311028X_0066|log35

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

ROČNÍK 66. SEŠIT 2.

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ

MATEMATIKY A FYSIKY

Redaktoři:

VOJTĚCH JARNÍK a FRANTIŠEK ZÁVIŠKA

Redakční rada:

BOH. BYDŽOVSKÝ, E. ČECH, V. DOLEJŠEK, V. HLAVATÝ, B. HOSTINSKÝ, M. KÖSSLER, K. RYCHLÍK, V. ŠTECH, M. A. VALOUCH, FR. VYČICHLO, AL. WANGLER, AUG. ŽÁČEK.

VYDÁVÁ VLASTNÍM NÁKLADEM

JEDNOTA ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

za podpory ministerstva školství a národní osvěty.

JČ
MF

PRAHA 1937.

Ročně 4 sešity. Předplatné (pro nečleny) 120 Kč.

Journal Tchécoslovaque de Mathématiques et de Physique.
Éditeur: Jednota čsl. matematiků a fysiků, Praha II-609, Tchécoslovaquie.
Abonnement pour un an 120 Kč. Chèques postaux: Praha 13103.

Année 66 **Fascicule 2** **1936/37**

Obsah. — Sommaire.

ČÁST VĚDECKÁ.

Část matematická — Travaux mathématiques

Karel Petr, Praha II, U Karlova 3: Über die Reduzibilität eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten nach einem Primzahlmodul — O rozložitelnosti mnohočlenů s celistvými součiniteli dle modulu p, kde p jest prvočíslo 85

Max Pinl, Praha VII, Sochařská 13: W-Projektionen totalisotroper Flächen I — W-projekce totálně isotropních ploch I..... 95

Milan Mikan, Praha II, Karlovo nám. 14: Cartanova geometrie na ploše kulové — La géométrie de Cartan sur la sphère..... 103

Část fysikální — Travaux de physique

Reinhold Fürth, Praha II, Viničná 3: Zur Theorie der Diffusion radioaktiver Stoffe — K teorii difuse radioaktivních látek.... 123

Zdeněk Horák, Praha II, Karlovo nám. 14: Détermination expérimentale du coefficient apparent de restitution tangentielle — Experimentální určení zdánlivého koeficientu smykové restituce 131

Ludvík Honty, Praha II, U Karlova 5: A Multiplication Method for the measurement of the absorption of light in thin layers — Multiplikační methoda pro měření absorpce světla v tenkých vrstvách 152

Filip Bock, Brno, Štěpánská 8: Rozdělení teploty v omezeném kruhovém válci, je-li dáno časově proměnlivé rozdělení teploty na jeho povrchu — The distribution of temperature in a limited circular cylinder the surface temperatur of which is a harmonic function of the time 159

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY A FYSIKY

ČÁST MATEMATICKÁ

Über die Reduzibilität eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten nach einem Primzahlmodul.*)

Karel Petr, Praha.

(Eingegangen am 12. Oktober 1936.)

In dieser Arbeit werden Polynome $c_0x^n + c_1x^{n-1} + \ldots + c_n$ mit ganzen rationalen Koeffizienten $c_0, c_1, \ldots, c_n$ betrachtet. Man nennt ein solches Polynom reduzibel nach dem Primzahlmodul p, wenn es ein Polynomprodukt

$$(d_0x^r + d_1x^{r-1} + \ldots + d_r)\,(e_0x^s + e_1x^{s-1} + \ldots + e_s), \quad r > 0, \quad s > 0$$

mit ganzen rationalen Koeffizienten gibt, dessen Koeffizienten den Koeffizienten gleichen Grades des ursprünglichen Polynoms kongruent (mod p) sind; d. h. wenn

$$c_0x^n + c_1x^{n-1} + \ldots + c_n \equiv$$
$$\equiv (d_0x^r + d_1x^{r-1} + \ldots + d_r)\,(e_0x^s + e_1x^{s-1} + \ldots + e_s) \pmod{p}.$$

Um die Darstellung möglichst einfach zu gestalten, setzen wir voraus, daß die Koeffizienten c_0, d_0, e_0 durch p nicht teilbar sind. Dann ist das gegebene Polynom ein Polynom n-ten Grades und die Polynome der Zerlegung sind vom r-ten bzw. s-ten Grade, wobei $r + s = n$; r, s sind selbstverständlich ganze positive Zahlen.

Die Definition der Reduzibilität eines Polynoms (mod p) läßt sich einfacher aussprechen, wenn man Polynome einführt, deren Koeffizienten Elemente des zur Primzahl p gehörigen Primkörpers K_p (des Körpers der Restklassen (mod p)) sind. Hier können die Koeffizienten $c_0, c_1, \ldots, c_n$ als Repräsentanten der zugehörigen Restklassen mod p betrachtet werden und das gleiche gilt auch von den d_k, e_j. Dann heißt das Polynom $c_0x^n + c_1x^{n-1} + \ldots + c_n$ reduzibel, im Körper K_p, wenn es sich schreiben läßt als Produkt zweier Polynome der Gerade r bzw. s,

*) Die folgenden Entwickelungen wurden im wesentlichen vor einigen Jahren in „Jednota Českoslov. Mat. à Fysiků“ (Sitzung vom 9. V. 1934) vorgetragen.

$r > 0$, $s > 0$ mit den Koeffizienten aus K_p (kurz: zweier Polynome in K_p).

Wenn ein Polynom eine solche Darstellung als Produkt nicht zuläßt, so heißt es irreduzibel in K_p.

In dieser Arbeit bezeichnen x, y, z, u, t Unbestimmte; a, b, c, d, e Restklassen (mod p) (Elemente aus K_p); 0 bezeichnet die Nullklasse (die Menge aller ganzen durch p teilbaren Zahlen); $i, j, k, l, m, n, p, q, r, s$ sollen ganze rationale Zahlen bedeuten, mit p wird immer eine Primzahl gemeint.

I.

Die vorliegende Arbeit hat das Ziel Kriterien für die Reduzibilität eines Polynoms in K_p aufzustellen und Aufschluß über die irreduziblen Bestandteile zu geben. Es genügt, sich auf Polynome mit dem höchsten Koeffizienten 1 (Einsklasse (mod p)) zu beschränken. Sei also

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n$$

ein solches Polynom in K_p. $f(x)$ hat in einer passenden Erweiterung von K_p, die durch Adjunktion der sogenannten Galoisschen Imaginären zu K_p entsteht, n Wurzeln. Diese Wurzeln sind alle voneinander verschieden, wenn die Diskriminante von $f(x)$ ungleich Null ist (d. h. wenn die Diskriminante nicht durch die Nullklasse (mod p) gegeben ist). Wäre die Diskriminante von $f(x)$ gleich Null, so hätte $f(x)$ mehrfache Wurzeln und dann ließe sich $f(x)$ auf bekannte Weise in ein Produkt von Polynomen in K_p zerlegen, deren Diskriminanten alle von Null verschieden sind.

Wir werden also voraussetzen, daß $f(x)$ *eine von Null verschiedene Diskriminante* besitzt. Die Wurzeln von $f(x)$ genügen der Gleichung

$$x^n = -a_1 x^{n-1} - a_2 x^{n-2} - \ldots - a_n.$$

Wenn wir diese Gleichung mit x multiplizieren und dann das Glied $-a_1 x^n$ mittels der vorigen Gleichung durch $a_1^2 x^{n-1} + a_1 a_2 x^{n-2} + a_1 a_3 x^{n-3} + \ldots + a_1 a_n$ ersetzen, so bekommen wir die folgende Gleichung

$$x^{n+1} = a'_1 x^{n-1} + a'_2 x^{n-2} + \ldots + a'_n$$

mit $$a'_1 = a_1^2 - a_2,\ a'_2 = a_1 a_2 - a_3, \ldots,$$

der wieder alle Wurzeln von $f(x)$ genügen. Auf diese Weise fortschreitend sehen wir, daß sich die Potenzen $x^n, x^{n+1}, x^{n+2}, \ldots$ in K_p linear durch $x^0, x^1, x^2, \ldots, x^{n-1}$ ausdrücken lassen, falls x eine Wurzel von $f(x)$ ist. Für das folgende sind besonders wichtig die linearen Ausdrücke für folgende Potenzen:

$$x^{0 \cdot p}, x^{1 \cdot p}, x^{2 \cdot p}, \ldots, x^{(n-1)p}.$$

Nach Durchführung der betreffenden Rechnungen bekommen wir folgende n Gleichungen:

$$x^{kp} = c_{k,0} + c_{k,1}x + c_{k,2}x^2 + \ldots + c_{k,n-1}x^{n-1} \qquad (A)$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

die für jede Wurzel von $f(x)$ giltig sind. Hier ist $c_{00} = 1$, $c_{0j} = 0$ für $j = 1, 2, \ldots, n-1$; ähnlich ist, falls $p < n$, $c_{1p} = 1$, alle übrigen $c_{1j} = 0$. Die Gleichungen (A) drücken die Elemente $1, x^p, x^{2p}, \ldots, x^{(n-1)p}$ linear durch die Elemente $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$ aus. Die lineare Substitution von n Unbestimmten mit den Koeffizienten c_{kj} hat folgende Gestalt:

$$X_k = c_{k0}x_0 + c_{k1}x_1 + \ldots + c_{k,n-1}x_{n-1} \qquad (A')$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Die Eigenschaften dieser Substitution werden uns Auskunft über die Reduzibilität des Polynomes $f(x)$ geben.

Um die erwähnten Eigenschaften zu ermitteln, werden wir die Substitution (A') auf eine einfache Gestalt bringen. Zu diesem Zwecke suchen wir, wie sich durch die Substitution (A) gewisse passend gewählte lineare Ausdrücke in $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$ transformieren. Um unnötige Länge der Formeln zu vermeiden, setzen wir voraus, daß sich $f(x)$ in drei *irreduzible* Polynome $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ der Grade q, r, s zerlegen läßt:

$$f(x) = f_1(x)\, f_2(x)\, f_3(x), \quad q > 0, \; r > 0, \; s > 0$$
$$q + r + s = n.$$

α soll nun eine festgewählte Wurzel von $f_1(x)$, β von $f_2(x)$, γ von $f_3(x)$ bezeichnen. Wenn wir den Körper K_p durch α zu $K_p(\alpha)$ erweitern, so liegen bekanntlich alle Wurzeln von $f_1(x)$ in $K_p(\alpha)$ und sind durch die Folge

$$\alpha, \; \alpha^p, \; \alpha^{p^2}, \ldots, \alpha^{p^{q-1}}, \; \alpha^{p^q} = \alpha$$

gegeben. Ähnlich lassen sich alle Wurzeln von $f_2(x)$ bzw. $f_3(x)$ durch die Potenzen von β bzw. γ in $K_p(\beta)$ bzw. $K_p(\gamma)$ ausdrücken. Wir führen noch die Bezeichnung

$$\alpha_k = \alpha^{p^k}, \; \beta_k = \beta^{p^k}, \; \gamma_k = \gamma^{p^k}$$

ein. Wir bilden nun folgende Ausdrücke

$$\frac{f(x)}{x-\alpha} = y_0, \quad \frac{f(x)}{x-\alpha_1} = y_1, \ldots, \frac{f(x)}{x-\alpha_{q-1}} = y_{q-1}, \qquad (+)$$

die *linear in* $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$ mit Koeffizienten aus $K_p(\alpha)$ sind. Formal ganz gleiche Ausdrücke, die nur linear in $1, x^p, x^{2p}, \ldots, x^{(n-1)p}$ sind, erhalten wir, wenn wir in (+) x durch x^p ersetzen:

$$\frac{f(x^p)}{x^p - \alpha} = Y_0, \quad \frac{f(x^p)}{x^p - \alpha_1} = Y_1, \ldots, \frac{f(x^p)}{x^p - \alpha_{q-1}} = Y_{q-1}.$$

Es läßt sich auf folgende Weise leicht finden, wie sich die Ausdrücke $y_0, y_1, \ldots, y_{q-1}$ in $Y_0, Y_1, \ldots, Y_{q-1}$ transformieren, und zwar mittels der Gleichungen (A), die für alle Wurzeln von $f(x)$ gelten. Der Ausdruck Y_0 wird Null für alle Wurzeln des Polynoms $f(x)$ mit einer Ausnahme. Diese wird gebildet von der Wurzel der Gleichung $x^p - \alpha = 0$ oder, was dasselbe ist, der Gleichung $x^p - \alpha^{p^q}$ d. h. von der Wurzel α_{q-1}. Dasselbe gilt aber von dem Ausdruck y_{q-1}.

Es ist also, falls x eine Wurzel des Polynoms $f(x)$ und folglich infolge der Gl. (A) Y_0 linear in $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$ ist:

$$Y_0 = \delta_0 y_{q-1} \text{ und ähnlich}$$
$$Y_1 = \delta_1 y_0, \; Y_2 = \delta_2 y_1, \ldots, Y_{q-1} = \delta_{q-1} y_{q-2}.$$

$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{q-1}$ sind Elemente des Körpers $K_p(\alpha)$ und es ist

$$\delta_0 = \frac{f'(\alpha)}{f'(\alpha_{q-1})}, \quad \delta_1 = \frac{f'(\alpha_1)}{f'(\alpha)}, \quad \delta_2 = \frac{f'(\alpha_2)}{f'(\alpha_1)}, \ldots, \delta_{q-1} = \frac{f'(\alpha_{q-1})}{f'(\alpha_{q-2})}.$$

Es gilt also für die $\delta_0, \delta_1, \ldots$ die Beziehung

$$\delta_0 \delta_1 \delta_2 \ldots \delta_{q-1} = 1. \qquad (-)$$

Außer den $y_0, y_1, \ldots, y_{q-1}$ können wir noch folgende lineare Ausdrücke in $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$ bilden:

$$z_i = \frac{f(x)}{x - \beta_i}, \quad u_j = \frac{f(x)}{x - \gamma_j} \quad \begin{matrix} i = 0, 1, \ldots, r-1 \\ j = 0, 1, \ldots, s-1 \end{matrix}. \qquad (+')$$

Wenn wir hier wieder x durch x^p ersetzen, so erhalten wir Ausdrücke, die den Y_i ähnlich gebaut sind und die wir durch Z_i, U_j bezeichnen werden. Zwischen den Z_i und z_i, bzw. U_j und u_j gelten analoge lineare Beziehungen wie zwischen den Y_k und y_k. Die in $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$ linearen Ausdrücke y_k, z_i, u_j sind untereinander linear unabhängig und ihre Anzahl ist gleich $n = q + r + s$. Führen wir in (A') anstatt der $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ die Unbestimmten y_k, z_i, u_j, die durch (+) und (+') als lineare Formen der $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ gegeben sind (es genügt in (+), (+') x_k statt x^k zu setzen), ein und führen wir weiter anstatt der $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$ die ähnlich gebauten Y_k, Z_i, U_j ein, so geht das System der n Gleichungen (A') in das folgende einfache System von n Gleichungen

$$Y_k = \delta_k y_{k-1}, \; Z_i = \varepsilon_i z_{i-1}, \; U_j = \eta_j u_{j-1} \qquad (B)$$
$$k = 0, 1, \ldots, q-1, \; i = 0, 1, \ldots, r-1, \; j = 0, 1, \ldots, s-1$$

über. Es läßt sich also die lineare Substitution (A') auf die einfache Gestalt (B) transformieren.

Die lineare Substitution (B) ist aus drei linearen Substitutionen zusammengestellt. Jede von diesen drei Substitutionen bezieht sich nur auf eine Gruppe von Unbestimmten: die erste auf die Unbestimmten (y_k, Y_k), die zweite auf (z_i, Z_i), die dritte auf (u_j, U_j). Die linke Seite der annullierten charakteristischen Gleichung von (B) und damit auch diejenige von (A′) läßt sich also in ein Produkt von drei Faktoren zerlegen. Diese Faktoren sind die linken Seiten der charakteristischen Gleichungen der drei Substitutionen, in welche die Substitution (B) zerlegt ist. Diese linken Seiten lassen sich leicht ausrechnen. Für die lineare Substitution zwischen den y_k und Y_k bekommen wir so, wenn wir $q = 5$ setzen, als linke Seite der charakteristischen Gleichung:

$$\begin{vmatrix} -\lambda, & 0, & 0, & 0, & \delta_0 \\ \delta_1, & -\lambda, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & \delta_2, & -\lambda, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & \delta_3, & -\lambda, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & \delta_4, & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^5 + \delta_0\delta_1\delta_2\delta_3\delta_4 = -\lambda^5 + 1.$$

Die charakteristische Gleichung der Substitution (B) hat also die Gestalt

$$(\lambda^q - 1)(\lambda^r - 1)(\lambda^s - 1) = 0.$$

Wenn sich allgemein $f(x)$ im Körper K_p in l irreduzible Faktoren von Graden $q_1, q_2, \ldots, q_l$ zerlegen läßt, so hat die charakteristische Gleichung der Substitution (A′) die Gestalt:

$$(\lambda^{q_1} - 1)(\lambda^{q_2} - 1)(\lambda^{q_3} - 1) \ldots (\lambda^{q_l} - 1) = 0,$$
$$q_1 + q_2 + \ldots + q_l = n.$$

Die linke Seite dieser Gleichung charakterisiert umgekehrt für unsere Zwecke genügend die Substitution (A′), folgende zwei Fälle ausgenommen:

a) falls eine oder mehrere unter den Zahlen $q_1, q_2, \ldots$ durch p teilbar sind,

b) falls wenigstens p von den Zahlen $q_1, q_2, \ldots, q_l$ einander gleich sind.

In diesen Fällen ist nämlich die Gestalt, die man der charakteristischen Gleichung geben kann, vieldeutig. Wenn zum Beispiel q_1 durch p teilbar ist $q_1 = pq'_1$, gilt in K_p folgende *Gleichheit*

$$(\lambda^{q_1} - 1) = (\lambda^{q'_1} - 1)^p \text{ in } K_p.$$

Diese Ausnahmen können nicht zutreffen, wenn p genug groß ist, zum Beispiel wenn $p > n$. Wenn $p = n$, so findet Zweideutigkeit bei den charakteristischen Gleichungen

$$(\lambda - 1)^n = 0, \quad (\lambda^n - 1) = 0$$

statt, die zusammenfallen. Für $p = n - 1$ gibt es gleichfalls eine

Zweideutigkeit:

$$(\lambda - 1)^n = (\lambda^{n-1} - 1)(\lambda - 1)$$

und s. w.

Die Ergebnisse, die wir so gewonnen haben, kann man in dem folgenden Satze zusammenfassen: *Eine notwendige Bedingung dafür, daß das Polynom n-ten Grades $f(x)$ mit ganzen rationalen Koeffizienten im Restklassenkörper* (mod p) *in ein Produkt von in K_p irreduziblen Polynomen der Grade $q_1, q_2, \ldots, q_l$ zerlegbar sei, ist, daß sich die linke Seite der annullierten charakteristischen Gleichung der linearen Substitution* (A') *in K_p in der Gestalt*

$$(\lambda^{q_1} - 1)(\lambda^{q_2} - 1) \ldots (\lambda^{q_l} - 1)$$

schreiben lasse.

Diese Bedingung ist auch hinreichend, falls keine identische Gleichheit

$$(\lambda^{q_1} - 1)(\lambda^{q_2} - 1) \ldots (\lambda^{q_l} - 1) = (\lambda^{q'_1} - 1)(\lambda^{q'_2} - 1) \ldots (\lambda^{q'_{l'}} - 1)$$

in K_p besteht, in der die Menge der ganzen Zahlen $(q_1, q_2, \ldots, q_l)$ nicht mit der Menge $(q'_1, q'_2, \ldots, q'_{l'})$ identisch ist. Insbesondere trifft dies ein, wem $p > n$. Da ist die angegebene Bedingung notwedig und hinreichend.

II.

Einige Beispiele. 1. Man soll feststellen, ob $x^2 - a$ in K_p reduzibel sei; p sei > 2. Für $x^2 - a = 0$ gilt auch

$$x^p = a^{\frac{p-1}{2}} x$$

und die Gleichungen (A) lauten:

$$x^{0.p} = 1$$

$$x^{1.p} = 0 + a^{\frac{p-1}{2}} x.$$

Die charakteristische Gleichung ist dann:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda, & 0 \\ 0, & a^{\frac{p-1}{2}} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ d. h.}$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - a^{\frac{p-1}{2}}) = 0.$$

Die Gleichung kann in K_p für $a \neq 0$ nur eine von diesen zwei Formen $(\lambda - 1)^2 = 0$, $\lambda^2 - 1 = 0$ haben. Es ist also entweder $a^{\frac{p-1}{2}} = +1$ oder $a^{\frac{p-1}{2}} = -1$. Im ersten Fall ist die Gleichung in zwei lineare Faktoren zerlegbar, im zweiten Fall ist sie irreduzibel. Dieses Ergebnis ist aus den Anfängen der Zahlentheorie

bekannt und wird durch den Satz ausgesprochen: a ist quadratischer Rest oder Nichtrest (mod p), je nachdem

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv +1 \text{ oder } \equiv -1 \pmod{p} \text{ ist.}$$

2. Untersuchen wir die Gleichung

$$x^p - ax - b = 0$$

in K_p. Hier ist

$$\begin{aligned} x^p &= b + ax \\ x^{2p} &= b^2 + 2abx + a^2x^2 \\ x^{3p} &= b^3 + 3ab^2x + 3a^2bx^2 + a^3x^3 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \qquad (\times)$$

Die linke Seite der charakteristischen Gleichung hat hier die Form:

$$(\lambda - 1)(\lambda - a)(\lambda - a^2) \ldots (\lambda - a^{p-1}).$$

Wir müssen $a \neq 0$ in K_p voraussetzen, sonst hätte die gegebene Gleichung n gleiche Wurzeln. (Auch die linke Seite der charakteristischen Gleichung hätte dann eine ganz andere, von der oben angeführten abweichende Gestalt.)

Wenden wir uns zuerst dem Fall $a = 1$ zu. Die linke Seite der charakteristischen Gleichung hat die Gestalt

$$(\lambda - 1)^p$$

und das ist in K_p dem Ausdruck $(\lambda^p - 1)$ gleich.

Daraus folgt, daß die gegebene Gleichung in K_p entweder in p lineare Faktoren zerlegbar oder irredizubel ist. Der erste Fall tritt aber dann und nur dann ein, falls die Gleichungen $(\times)$ folgende Gestalt haben:

$$x^p = x,\ x^{2p} = x^2,\ x^{3p} = x^3, \ldots,$$

d. h. falls die Substitution (A′) die identische Substitution ist. Das trifft nur für $b = 0$ zu. Wenn also $a = 1$, $b \neq 0$ ist, so ist die untersuchte Gleichung in K_p irreduzibel.

Es soll nun a zum Exponenten r gehören, (d. h. $a^r = 1$, $a^{r'} \neq 1$ für $0 < r' < r$). Man kann dann die linke Seite der charakteristischen Gleichung in der Form

$$(\lambda - 1)(\lambda^r - 1)^{\frac{p-1}{2}}$$

schreiben. Offensichtlich ist hier das Polynom $x^p - ax - b$ in $\frac{p-1}{r}$ irreduzible Faktoren r-ten Grades und in einen linearen Faktor in K_p zerlegbar.

3. Nehmen wir weiter das Polynom

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 7x + 4$$

in K_5. Es gilt in jedem K_p für $f(x) = 0$

$$\begin{aligned} x^4 &= 2x^3 - 3x^2 + 7x - 4 \\ x^5 &= x^3 + x^2 + 10x - 8 \\ x^6 &= 3x^3 + 7x^2 - x - 4. \end{aligned}$$

In K_5 gilt nun

$$x^5 = x^3 + x^2 + 2,$$

und daraus durch Potenzieren bekommt man

$$\begin{aligned} x^{10} &= x^3 + x \\ x^{15} &= -x^3 + 3x - 1. \end{aligned}$$

Die linke Seite der charakteristischen Gleichung ist also

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda, & 0, & 0, & 0 \\ 2, & -\lambda, & 1, & 1 \\ 0, & 1, & -\lambda, & 1 \\ -1, & 3, & 0, & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - 1.$$

Folglich ist $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 7x + 4$ in K_5 irreduzibel.

4. Als letztes Beispiel nehme ich das Polynom $f(x) = x^5 + 7x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 11x + 24$. Ich werde zuerst seine Reduzibilität in K_3 untersuchen. In K_3 zerfällt $f(x)$ augenscheinlich in das Produkt von x und dem Polynom 4. Grades $x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 6x - 11 = g(x)$. Für $g(x) = 0$ gilt in K_3

$$\begin{aligned} x^4 &= -x^3 - x^2 - 1 \\ x^5 &= x^2 - x + 1 \\ x^6 &= x^3 - x^2 + x \\ x^9 &= -x + 1 \end{aligned}$$

Die Gleichungen (A) haben also für $g(x) = 0$ die Gestalt:

$$x^0 = 1,\ x^3 = x^3,\ x^6 = x - x^2 + x^3,\ x^9 = 1 - x$$

und die linke Seite der charakteristischen Gleichung ist

$$(1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda, & 0, & 1 \\ 1, & -1-\lambda, & 1 \\ -1, & 0, & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - 1$$

Folglich ist $g(x)$ in K_3 irreduzibel und $f(x)$ zerfällt in das Produkt eines linearen Polynoms und eines irreduziblen Polynoms 4. Grades.

Untersuchen wir weiter die Reduzibilität von $f(x)$ in K_5, wo man

$$\begin{aligned} x^5 &= -2x^4 + 2x^3 - x^2 + x + 1 \\ x^{10} &= 2x^4 + 2x^3 + x^2 + 1 \\ x^{15} &= x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1 \\ x^{20} &= -2x^3 - x - 1 \end{aligned}$$

schreiben kann. Die linke Seite der charakteristischen Gleichung ist

$$(1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda, & -1, & 2, & -2 \\ 0, & 1-\lambda, & 2, & 2 \\ 2, & -1, & -2-\lambda, & 1 \\ -1, & 0, & -2, & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda^4-1)$$

Foglich zerfällt $f(x)$ in K_5 ebenfalls in das Produkt eines irreduziblen Polynoms 4. Grades und eines linearen Polynoms.

III.

Wenn wir die Gleichung (A) zur p-ten Potenz erheben, so erhalten wir (in K_p) die Beziehung

$$x^{kp^2} = c_{k,0} + c_{k,1}x^p + c_{k,2}x^{2p} + \ldots + c_{k,n-1}x^{(n-1)p}.$$

Wenn wir auf der rechten Seite dieser Gleichung für die Potenzen x^{kp}, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ die Ausdrücke auf der rechten Seite von (A) einführen, so bekommen wir

$$x^{kp^2} = c_{k0}^{(1)} + c_{k1}^{(1)}x + c_{k,2}^{(1)}x^2 + \ldots + c_{k,n-1}^{(1)}x^{n-1} \qquad (A_1)$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Wir wollen jetzt die Substitution (A′) symbolisch

$$X = S(x) \qquad (A')$$

schreiben. Durch das Wiederholen der Substitution (A′) bekommen wir ihr Quadrat und die zugehörigen Beziehungen wollen wir in der Form

$$X^{(1)} = S^2(x) \qquad (A_1^1)$$

schreiben. Wenn wir hier auf der rechten Seite x_k durch x^k ersetzen, so ist, falls x eine Wurzel von $f(x)$ ist, nach dem vorhergesagten $X_k^{(1)}$ gleich x^{kp^2}. Auf ähnliche Weise erhalten wir Ausdrücke für x^{kp^3}, x^{kp^4}, ..., wenn wir die Substitutionen $S^3, S^4, \ldots$ benützen. Wir wollen die Koeffizienten dieser Substitutionen durch $c_{kl}^{(2)}$, $c_{kl}^{(3)}$, ... bezeichnen.

Betrachten wir nun zum Beispiel die Gleichung

$$x^{p^3} = c_{10}^{(2)} + c_{11}^{(2)}x + c_{12}^{(2)}x^2 + \ldots + c_{1,n-1}^{(2)}x^{n-1}$$

welche für alle Wurzeln des Polynoms $f(x)$ gilt. Wenn $f(x)$ einen irreduziblen Teiler dritten Grades besitzt, so gilt für die Wurzeln dieses Teilers gleichzeitig die Beziehung $x^{p^3} = x$. Daraus folgt, daß für diejenigen Wurzeln von $f(x)$, die gleichzeitig Wurzeln des irreduziblen Polynoms dritten Grades sind, die Beziehung

$$c_{10}^{(2)} + (c_{11}^{(2)} - 1)\,x + c_{12}^{(2)}\,x^2 + \ldots + c_{1,n-1}^{(2)}x^{n-1} = 0 \qquad (.)$$

gilt. Der größte gemeinschaftliche Teiler der linken Seite der letzten Gleichung und des Polynoms $f(x)$ ist das Produkt aller

irreduziblen Bestandteile dritten und ersten Grades von $f(x)$ (das letzte, weil die Wurzeln der linearen Bestandteile von $f(x)$ ebenfals der Gleidung $x^{p^3} = x$ genügen).

Auf solche Weise bekommen wir durch sukzessives Dividieren, zuerst das Produkt aller linearen Teiler von $f(x)$, dann das Produkt aller irreduziblen Teiler zweiten, dritten und s. w. Grades. Falls die Gleichung (.) eine identische Gleichung ist (d. h. für jedes x erfüllt ist: $c_{10}^{(2)} = 0, c_{11}^{(2)} = 1, c_{12}^{(2)} = 0, \ldots$), so besteht $f(x)$ nur aus irreduziblen Faktoren dritten und ersten Grades. Die Substitution $X^{(2)} = S^3(x)$ ist die identische Substitution.

*

O rozložitelnosti mnohočlenů s celistvými součiniteli dle modulu p, kde p jest prvočíslo.

(Obsah předešlého článku.)

V článku jest vyložena metoda, kterou lze nalézti pro daný polynom $f(x)$ n-tého stupně s celými racionálními součiniteli, v kolik ireducibilních faktorů se tento polynom rozpadá mod p, a jaké mají tyto faktory stupně. Autor sestrojuje pomocí součinitelů polynomu $f(x)$ jistou lineární substituci o n proměnných. Charakteristická rovnice této substituce má v tělese K_p vždy tvar:

$$(\lambda^{q_1} - 1)\ (\lambda^{q_2} - 1) \ldots (\lambda^{q_l} - 1) = 0.$$

Každý faktor $(\lambda^{q_i} - 1)$ odpovídá jednoznačně určitému ireducibilnímu faktoru mod p stupně q_i-tého polynonu $f(x)$ mimo tyto případy:

1) když jedno neb více z čísel q_i jest dělitelno p,
2) když nejméně p z čísel q_i jest si navzájem rovno.

W-Projektionen totalisotroper Flächen I.

M. Pinl, Prag.

(Eingegangen am 18. März 1936.)

Die Theorie der sogenannten totalisotropen Mannigfaltigkeiten[1]) ist im komplexen n-dimensionalen Raum R_n identisch mit der Theorie der μ-dimensionalen Integralmannigfaltigkeiten V_μ der Mongeschen Differentialgleichung:

$$dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2 = 0 \qquad \mu = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]. \tag{1}$$

Im Sonderfall $\mu = 2$ wurde diese Theorie in neuerer Zeit mit Vorzug innerhalb der Dimensionszahlen $n = 4, 5, 6$ als Theorie totalisotroper Flächen genauer entwickelt und alle Typen totalisotroper Flächen in den Räumen R_4, R_5, R_6 aufgestellt.[2])

Im folgenden sollen nunmehr diese Ergebnisse, einer Anregung des Herrn A. Winternitz folgend, eine ebenso naheliegende wie neuartige Deutung erfahren, die wir hier zunächst für allgemeine Dimensionszahlen μ und n formulieren (§ 1), um sie weiterhin für die Dimensionszahlen $\mu = 2$, $n = 4, 5, 6$ genauer zu behandeln (§ 2—§ 4).

§ 1. W-Projektionen und B-Projektionen.

V_μ sei eine μ-dimensionale Integralmannigfaltigkeit der Mongeschen Gleichung (1). Ihre Parameterdarstellung sei durch die Gleichungen:

$$\begin{gathered} x_1 = x_1(u_1, u_2, \ldots, u_\mu), \ldots, x_{n-\mu} = x_{n-\mu}(u_1, \ldots, u_\mu), \\ x_{n-\mu+1} = iu_1, \ldots, x_n = iu_\mu \end{gathered} \tag{2}$$

[1]) Vgl. J. Lense, Jahresber. D. M. V. **35** (1926), 280—294; Wiener Berichte **135** (1926), 29—32; **136** (1927), 81—85; Math. Z. **29** (1928), 87—95, **34** (1932), 721—736.

[2]) Vgl. M. Pinl, Proceedings Amsterdam **35** (1932), 1181—1188, **36** (1933), 550—557, **38** (1935), 171—180; J. Lense, Über vollisotrope Flächen, Monatshefte f. Math. u. Phys. **43** (1936), 177—186.

gegeben,[3]) worin die n Funktionen $x_k(u_1, \ldots, u_\mu)$ [der Vektor $\mathfrak{x}(u_1, \ldots, u_\mu)$] als analytische Funktionen ihrer Argumente mit gemeinsamen Existenzbereich vorausgesetzt werden.[4]) Dann befriedigen die Funktionen (2) die Gleichung (1) und man erhält:

$$dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx^2_{n-\mu} \equiv du_1^2 + \ldots + du^2_\mu, \; \{u_1, \ldots, u_\mu\} \quad (3)$$

bzw. für $\mu = 2$:

$$dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx^2_{n-2} \equiv du_1^2 + du_2^2 \; \{u_1, u_2\}. \quad (4)$$

Mitanderen Worten: das Integrationsproblem (1) der Bestimmung aller totalisotropen V_μ des R_n ist gemäß (3) der Bestimmung aller euklidischen μ-dimensionalen Mannigfaltigkeiten im $(n-\mu)$-dimensionalen Projektionsraum der (kartesischen) Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_{n-\mu}$ der W-Projektionen der totalisotropen V_μ des R_n äquivalent.

Insbesondere entspricht so für $\mu = 2$ jedem Typus totalisotroper Flächen des R_n ein euklidischer Flächentypus des R_{n-2} und umgekehrt.

Der Fall gerader Dimension $n = 2m$ der euklidischen Einbettungsräume läßt noch eine andere Deutung zu. Man substituiere:

$$x_{m+1} = iy_1, \ldots, x_{2m} = iy_m \; (i = \sqrt{-1}). \quad (5)$$

Dann entsteht aus (1):

$$dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_m^2 \equiv dy_1^2 + dy_2^2 + \ldots + dy_m^2. \quad (6)$$

Da die Dimensionszahl μ einer totalisotropen V_μ des R_n nach J. Lense durch $\left[\frac{n}{2}\right]$ beschränkt ist,[5]) liegt darin folgende auf W. Blaschke zurückgehende Deutung des Integrationsproblems (1) für den Fall gerader Dimensionszahlen $n = 2m$: die Bestimmung aller totalisotropen V_μ des R_{2m} erscheint durch B-Projektionen (5) auf die Bestimmung aller Isometrien (6) des R_m zurückgeführt.

Eine genauere Untersuchung solcher B-Projektionen, sowie die ihrer Verallgemeinerungen im Sinne des Äquivalenzproblems:

$$dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_k^2 \equiv dy_{k+1}^2 + dy_{k+2}^2 + \ldots + dy_n^2 \quad (7)$$

(„A-Projektionen“)

für alle möglichen Werte μ, k, n soll an anderer Stelle gegeben werden.

---

[3]) Vgl. Duschek-Mayer, Lehrbuch der Differentialgeometrie II, 201, Leipzig 1930.

[4]) Vgl. E. Study, Trans. Amer. Math. Soc. **10** (1909), 1—49.

[5]) Vgl. [1]).

§ 2. $\mu = 2$, $n < 6$, die trivialen Fälle.

Die Existenz totalisotroper Flächen beginnt im komplexen R_4. Hier erhält man aus (1) eine einzige Flächenklasse, die totalisotropen Ebenen.[6]) Ihre W-Projektion in den R_2 der Koordinaten x_1, x_2 fällt mit (einem Stück) dieser Koordinatenebene zusammen und liefert so wiederum nur eine einzige Realisierung für das binäre euklidische Bogenelement (4). Dagegen enthält der komplexe R_5 bereits zwei totalisotrope Flächenklassen: totalisotrope Ebenen und totalisotrope Torsen d. h. die Tangentenflächen:

$$\begin{gathered}\mathfrak{x}(u_1, u_2) = \mathfrak{y}(u_1) + u_2\,\mathfrak{y}'(u_1), \quad \mathfrak{y}'^2 \equiv \mathfrak{y}''^2 \equiv 0, \\ (\mathfrak{y}', \mathfrak{y}'', \mathfrak{y}''', \mathfrak{y}^{\mathrm{IV}}, \mathfrak{y}^{\mathrm{V}},) \not\equiv 0, \quad \{u_1\}\end{gathered} \tag{8}$$

der zweifach isotropen Kurven dieses Raumes $\mathfrak{y}$. Nach Voraussetzung ist dabei die Matrix:

$$\| \mathfrak{y}', \mathfrak{y}'', \mathfrak{y}''', \mathfrak{y}^{\mathrm{IV}}, \mathfrak{y}^{\mathrm{V}} \|, \tag{9}$$

vom Rang fünf, die Matrix $\| \mathfrak{y}', \mathfrak{y}'', \mathfrak{y}''' \|$ daher vom Rang drei und es existiert mindestens ein Koordinaten-R_3, in dem die Projektion der Gratlinie $\mathfrak{y}$ nicht in eine ebene Kurve ausartet, in dem also die W-Projektion von (8) wiederum eine Torse darstellt. Diese Projektionstorse ist notwendig anisotrop, da andernfalls zwei Zeilen der Matrix (9) proportional wären. Sie stellt somit die Realisierung eines euklidischen binären Bogenelementes dar.

Versteht man ferner unter $g_{\alpha\beta\gamma\delta} = \mathfrak{x}_{\alpha\beta} \cdot \mathfrak{x}_{\gamma\delta}$ den biquadratischen Fundamentaltensor der totalisotropen Torse (8), so fallen bekanntlich die zweifach isotropen Kurven der Fläche (8) d. h. die Nullinien:

$$g_{\alpha\beta\gamma\delta}\, du^\alpha\, du^\beta\, du^\gamma\, du^\delta = 0, \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2 \tag{10}$$

in der einparametrigen Schar der Tangenten der Gratlinie $\mathfrak{y}$ zusammen. Ihnen entsprechen durch W-Projektion die (euklidischen!). Tangenten der Projektionsgratlinie d. h. die einparametrige Schar der Asymptotengeraden.

§ 3. $\mu = 2$, $n = 6$; komplexe euklidische Regelflächen in R_4.

Die totalisotropen Flächen des R_6 zerfallen in vier Typen: Ebenen, Torsen, Regelflächen und harmonische Flächen.[7]) Entsprechend sind im R_4 vier Typen euklidischer Flächen zu erwarten darunter insbesondere komplexe euklidische (krümmungsfreie) Regelflächen, die keine Torsen sind.[8]) Im Gegensatz zu den tota-

[6]) Vgl. 1); der Beweis ergibt sich unmittelbar aus der Identität $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{\alpha\beta}, \mathfrak{v})^2 \equiv 0\ \{\mathfrak{v}\}$ (unter Berücksichtigung von $\mathfrak{x}_1^2 = \mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2 = \mathfrak{x}_2^2 = 0$).

[7]) Vgl. [2]) **35**, 1184—1185, J. Lense [2]), 181.

[8]) Vgl. C. L. E. Moore, E. B. Wilson, Proceedings of the Amer. Acad. **52** (1916), auf S. 338 schließen die Verf. aus dem Verschwinden der Gauß'-

lisotropen Torsen ist der von den Vektoren $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{11}, \mathfrak{x}_{12}, \mathfrak{x}_{22}\ (=0)$ aufgespannte Schmiegraum totalisotroper Regelflächen:

$$\begin{gathered}\mathfrak{x} = \mathfrak{y}(u_1) + u_2\,\mathfrak{z}(u_1),\\ \mathfrak{y}_1^2 \equiv \mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_2 \equiv \mathfrak{z}_2^2 \equiv \mathfrak{y}_1\mathfrak{z} \equiv \mathfrak{z}\mathfrak{z}_2 \equiv \mathfrak{z}^2 \equiv 0 \qquad \{u_1, u_2\}\end{gathered} \tag{11}$$

vierdimensional.[9]) Die Matrix $\| \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2 \|$ ist nach Voraussetzung vom Rang zwei. Somit existiert mindestens eine Darstellung der Fläche (11) von der Form:

$$x^{(1)} = x^{(1)}(u_1, u_2), \ldots, x^{(4)} = x^{(4)}(u_1, u_2),\ x^{(5)} = iu_1,\ x^{(6)} = iu_2, \tag{12}$$

wo unter $x^{(k)}$ die sechs Komponenten des Vektors $\mathfrak{x}$ zu verstehen sind. Bezeichnet man Ableitungen (wie bei Vektoren) mit unteren Indizes, so ist die Matrix:

$$\left\| \begin{array}{cccccc} x_1^{(1)}, & x_1^{(2)}, & x_1^{(3)}, & x_1^{(4)}, & i, & 0 \\ x_2^{(1)}, & x_2^{(2)}, & x_2^{(3)}, & x_2^{(4)}, & 0, & i \\ x_{\alpha\beta}^{(1)}, & x_{\alpha\beta}^{(2)}, & x_{\alpha\beta}^{(3)}, & x_{\alpha\beta}^{(4)}, & 0, & 0 \\ x_{\gamma\delta}^{(1)}, & x_{\gamma\delta}^{(2)}, & x_{\gamma\delta}^{(3)}, & x_{\gamma\delta}^{(4)}, & 0, & 0 \end{array} \right\| \qquad (\alpha, \beta) \neq (\gamma, \delta) \tag{13}$$

für (mindestens) eine bestimmte Indexgruppe notwendig vom Rang vier. Setzt man jetzt zur Abkürzung:

$$\begin{gathered}\mathfrak{x}_1^* = \{x_1^{(1)}, \ldots, x_1^{(4)}\},\ \mathfrak{x}_2^* = \{x_2^{(1)}, \ldots, x_2^{(4)}\},\\ \mathfrak{x}_{\alpha\beta}^* = \{x_{\alpha\beta}^{(1)}, \ldots, x_{\alpha\beta}^{(4)}\}, \ldots,\end{gathered} \tag{14}$$

so ergibt sich für die Matrix $\| \mathfrak{x}_1^*, \mathfrak{x}_2^*, \mathfrak{x}_{\alpha\beta}^*, \mathfrak{x}_{\gamma\delta}^* \|$ wiederum der Rang vier. Andernfalls bestünde die lineare Relation:

$$\lambda_1\mathfrak{x}_1^* + \lambda_2\mathfrak{x}_2^* + \lambda_{\alpha\beta}\mathfrak{x}_{\alpha\beta}^* + \lambda_{\gamma\delta}\mathfrak{x}_{\gamma\delta}^* = 0, \tag{15}$$

aus der wegen:

$$\mathfrak{x}_\alpha^*\mathfrak{x}_\beta^* = -\delta_{\alpha\beta},\ \mathfrak{x}_{\alpha\beta}^* = \mathfrak{x}_{\alpha\beta},\ \mathfrak{x}_\alpha^*\mathfrak{x}_{\beta\gamma}^* = 0 \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2. \tag{16}$$

durch skalare Multiplikation mit $\mathfrak{x}_1^*$ bzw. $\mathfrak{x}^*{}_2$:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \mathfrak{x}_{\alpha\beta}^* = \varrho\mathfrak{x}_{\gamma\delta}^*,\ \mathfrak{x}_{\alpha\beta} = \varrho\mathfrak{x}_{\gamma\delta}, \tag{17}$$

hervorgeht. Dann wäre aber die Matrix (13) entgegen der Voraussetzung vom Rang drei. Daher ist auch der von den Vektoren $\mathfrak{x}_1^*, \mathfrak{x}_2^*, \mathfrak{x}_{\alpha\beta}^*, \mathfrak{x}_{\gamma\delta}^*$ aufgespannte Schmiegraum der W-Projektion $\mathfrak{x}^*$ wiederum vierdimensional und $\mathfrak{x}^*$ selbst keine Torse. Gemäß (16) reduzieren sich ferner die Skalarprodukte der zur Basis $\mathfrak{x}_1^*, \mathfrak{x}_2^*, \mathfrak{x}_{\alpha\beta}^*$ bzw. $\mathfrak{x}_1^*, \mathfrak{x}_2^*, \mathfrak{x}_{\gamma\delta}^*$ gebildeten Trivektoren auf die biquadratischen Fundamentalkomponenten $g_{\alpha\beta\gamma\delta}$ von $\mathfrak{x}$:

---

schen Krümmung der Regelfläche $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}(u_1) + u_2\mathfrak{z}\,(u_1)$ auf das Verschwinden von $[\mathfrak{y}', \mathfrak{z}, \mathfrak{z}']^2$ und daraus auf den Torsencharakter der Fläche. Dies gilt nur für reelle Flächen im Gegensatz zu den hier vorliegenden Fällen isotroper Trivektoren $[\mathfrak{y}', \mathfrak{z}, \mathfrak{z}']$; entsprechend ist auch der auf S. 342 ausgesprochene Satz zu ergänzen.

[9]) Der Schmiegraum einer Torse wird bereits von den Vektoren $\mathfrak{y}'$, $\mathfrak{y}''$, $\mathfrak{y}'''$ aufgespannt.

$$g_{\alpha\beta\gamma\delta}{}^* = [\mathfrak{x}_1{}^*, \mathfrak{x}_2{}^*, \mathfrak{x}_{\alpha\beta}{}^*] \cdot [\mathfrak{x}_1{}^*, \mathfrak{x}_2{}^*, \mathfrak{x}_{\gamma\delta}{}^*] =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{x}_{\alpha\beta}{}^*\mathfrak{x}_{\gamma\delta}{}^* \end{vmatrix} = \mathfrak{x}_{\alpha\beta}\mathfrak{x}_{\gamma\delta} = g_{\alpha\beta\gamma\delta} \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2. \tag{18}$$

Das bedeutet: der zweite Fundamentaltensor $g^*_{\alpha\beta\gamma\delta}$ der W-Projektion $\mathfrak{x}^*$ (Tensor von Voss-Bompiani[10]) ist mit dem biquadratischen Fundamentaltensor von $\mathfrak{x}$ identisch; dieselbe Differentialgleichung:

$$g_{\alpha\beta\gamma\delta}\, du^\alpha\, du^\beta\, du^\gamma\, du^\delta = 0, \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2 \tag{19}$$

definiert auf $\mathfrak{x}$ das Netz der zweifach isotropen Kurven[11]) und auf $\mathfrak{x}^*$ Isotropen zweiter Art nach E. Bompiani insbesondere die Asymptoten.[12]) Dabei besteht das Netz der zweifach isotropen Kurven aus den isotropen Erzeugenden und einer nichtlinearen Schar, das Asymptotennetz der W-Projektion desgleichen aus den Projektionsgeraden der Erzeugenden und einer entsprechenden nichtlinearen Schar.

Ein Beispiel für Flächen dieser Art verdankt man Herrn J. Lense[13]):

$$x^1 = -\frac{u^3}{12} - v\frac{1}{u}, \quad x^2 = -\frac{iu^3}{12} + v\frac{i}{u}, \quad x^3 = \frac{u}{2} + v\frac{1}{2},$$

$$x^4 = -\frac{iu}{2} + v\frac{i}{2}, \quad x^5 = \frac{u^2}{4} - v\frac{1}{u}, \quad x^6 = -\frac{iu^2}{4} - v\frac{i}{u}. \tag{20}$$

Durch Einführen neuer Parameter u_1, u_2:

$$u_1 = -\tfrac{1}{2}i\,(u + v), \quad u_2 = -\tfrac{1}{2}\,(u - v),$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial u_2}{\partial v} - \frac{\partial u_1}{\partial v}\frac{\partial u_2}{\partial u} = -\frac{i}{2} \neq 0 \tag{21}$$

und W-Projektion gemäß:

$$x^{*1} = x^1, \quad x^{*2} = x^2, \quad x^{*3} = x^5, \quad x^{*4} = x^6, \quad x^3 = iu_1, \quad x^4 = iu_2 \tag{22}$$

in den R_4 der $x_1{}^*, \ldots, x_4{}^*$ entsteht die (Mongesche!) Regelfläche:

[10]) Vgl. A. Voss, Zur Theorie der Transformation quadratischer Differentialausdrücke und der Krümmung höherer Mannigfaltigkeiten, Math. Ann. **16** (1880); E. Bompiani, Invarianti e covarianti metrici nelle deformazioni di specie superiore, Rend. Accad. d. Lincei (5), **28** (1919_{II}), **29** (1920_I), Atti Ist. Veneto **80** (1921), 1113—1145.

[11]) Vgl. [2]) **35**, 1183.

[12]) Vgl. E. Bompiani, Geometrie riemanniane di specie superiore, parte IV p. 447—448, Roma 1935.

[13]) Vgl. [1]) J. Lense, Math. Z. **34** (1932), 735—736; [2]) M. Pinl, **35**, 1185.

$$x^{*1} = -\frac{u^3}{12} - \frac{v}{u^2}, \quad x^{*3} = \frac{u^2}{4} - v\frac{1}{u}$$

$$x^{*2} = -\frac{iu^3}{12} + v\frac{i}{u^2}, \quad x^{*4} = -\frac{iu^2}{4} - v\frac{i}{u}$$

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial x^{*i}}{\partial u} \\ \frac{\partial x^{*i}}{\partial v} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} -\frac{u^2}{4} + \frac{2v}{u^3}, & -\frac{iu^2}{4} - \frac{2iv}{u^3}, & \frac{u}{2} + \frac{v}{u^2}, & -\frac{iu}{2} + \frac{iv}{u^2} \\ -\frac{1}{u^2}, & \frac{i}{u^2}, & -\frac{1}{u}, & -\frac{i}{u} \end{matrix} \right\| \tag{23}$$

mit den konstanten Fundamentalkomponenten:

$$g_{11}^* = 0, \; g_{12}^* = -\tfrac{1}{2}, \; g_{22}^* = 0, \; |g_{\alpha\beta}^*| = -\tfrac{1}{4}. \tag{24}$$

Somit ist (23) euklidisch und (20) totalisotrop:

$$g_{11} = g_{11}^* + (\tfrac{1}{2})^2 + (-\tfrac{1}{2}i)^2 = 0, \; g_{12} = g_{12}^* + (\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{1}{2})^2 = 0, \; g_{22} = g_{22}^* + (\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{1}{2}i)^2 = 0. \tag{25}$$

§ 4. $\mu = 2$, $n = 6$; harmonische euklidische Flächen in R_4.

Wir betrachten den zweidimensionalen (reellen!) Torus:

$$\mathfrak{x}^* = \{\cos u \cos v, \; \cos u \sin v, \; \sin u \cos v, \; \sin u \sin v,\} \tag{26}$$

mit den Fundamentalkomponenten:

$$g_{11}^* = 1, \; g_{12}^* = 0, \; g_{22}^* = 1. \tag{27}$$

Wegen (27) ist (26) euklidisch und demnach W-Projektion der totalisotropen Fläche:

$$\mathfrak{x} = \{\cos u \cos v, \; \cos u \sin v, \; \sin u \cos v, \; \sin u \sin v, \; iu, \; iv\} \tag{28}$$

eines komplexen R_6 mit den quadratischen bzw. biquadratischen Fundamentalkomponenten:

$$g_{11} = g_{11}^* + i^2 = 0, \; g_{12} = g_{12}^* = 0, \; g_{22} = g_{22}^* + i^2 = 0, \tag{29}$$

$$g_{1111} = g_{1111}^* = 1, \; g_{1112} = g_{1112}^* = 0, \; g_{1122} = g_{1122}^* = 1, \; g_{1222} = g_{1222}^* = 0, \; g_{2222} = g_{2222}^* = 1, \tag{30}$$

$$\Theta_2 = \begin{vmatrix} g_{1111}, g_{1112}, g_{1122} \\ g_{1112}, g_{1122}, g_{1222} \\ g_{1122}, g_{1222}, g_{2222} \end{vmatrix} = 0. \tag{31}$$

Wegen (30) ist $\mathfrak{x}$ Minkowskischer Natur[14]), wegen (31) harmonisch[15]). Daher ist $\mathfrak{x}$ nach einem bekannten Ergebnis[16]) eine Schiebfläche. Dies zeigt eine einfache Parametertransformation:

[14]) Vgl. [2]) **36**, 555—556, **38**, 176.
[15]) Vgl. [2]) **35**, 1185.
[16]) Vgl. [2]) **36**, 555—556.

$$u_1 = u + v,\ u_2 = u - v,\ u = \frac{u_1 + u_2}{2},\ v = \frac{u_1 - u_2}{2}. \tag{32}$$

Sie ergibt:

$$2\mathfrak{x}^* = \{\cos u_1 + \cos u_2, \sin u_1 - \sin u_2, \sin u_1 + \sin u_2, -\cos u_1 + \cos u_2\} \tag{33}$$

$$2\mathfrak{x} = \{\cos u_1 + \cos u_2, \sin u_1 - \sin u_2, \sin u_1 + \sin u_2, -\cos u_1 + \cos u_2, i(u_1 + u_2), i(u_1 - u_2)\} \tag{34}$$

und man hat das Resultat: der euklidische Torus (26) ist W-Projektion einer Minkowskischen harmonischen totalisotropen Schiebfläche (28), die von den zwei Scharen $u_1 = \text{const.}$ bzw. $u_2 = \text{const.}$ transzendenter isotroper Schrauben erzeugt wird:

$$2\mathfrak{x} = \mathfrak{y}(u_1) + \mathfrak{z}(u_2), \quad \begin{gathered} \mathfrak{y} = \{\cos u_1, \sin u_1, \sin u_1, -\cos u_1, iu_1, iu_1\}, \\ \mathfrak{y}_1^2 = 0 \\ \mathfrak{z} = \{\cos u_2, -\sin u_2, \sin u_2, \cos u_2, iu_2, -iu_2\}, \\ \mathfrak{z}_2^2 = 0; \end{gathered} \tag{35}$$

diese Erzeugenden $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ verwandeln sich durch die W-Projektion in (nichtisotrope) hypersphärische Kurven $\mathfrak{y}^*$ und $\mathfrak{z}^*$, welche die Torusschiebfläche $\mathfrak{x}^*$ erzeugen:

$$2\mathfrak{x}^* = \mathfrak{y}^*(u_1) + \mathfrak{z}^*(u_2), \quad \begin{gathered} \mathfrak{y}^* = \{\cos u_1, \sin u_1, \sin u_1, -\cos u_1\}, \\ \tfrac{1}{2}\mathfrak{y}^{*}_1{}^2 = 1, \qquad \mathfrak{x}^{*2} = 1. \\ \mathfrak{z}^* = \{\cos u_2, -\sin u_2, \sin u_2, \cos u_2\}, \\ \tfrac{1}{2}\mathfrak{z}^{*}_2{}^2 = 1, \end{gathered} \tag{36}$$

Allgemein erhält man aus harmonischen totalisotropen Flächen $\mathfrak{x}$ des R_6 durch W-Projektion harmonische euklidische Flächen $\mathfrak{x}^*$ in R_4, da wegen $g_{\alpha\beta\gamma\delta} = g^*_{\alpha\beta\gamma\delta}$ auch $\Theta_2 = \Theta_2{}^*$ gilt. Somit besteht auf $\mathfrak{x}^*$ in geeigneten Parametern:

$$\begin{gathered} \mathfrak{x}_a{}^* \mathfrak{x}_\beta{}^* = \text{Const.}, \quad \mathfrak{x}_a{}^* \mathfrak{x}_{\beta\gamma}{}^* = 0, \\ [\mathfrak{x}_1{}^*, \mathfrak{x}_2{}^*, \mathfrak{x}_{\alpha\beta}{}^*] \cdot [\mathfrak{x}_1{}^*, \mathfrak{x}_2{}^*, \mathfrak{x}_{\gamma\delta}{}^*] = C_{\mathfrak{x}_{\alpha\beta}{}^* \mathfrak{x}_{\gamma\delta}{}^*] = C_{\mathfrak{x}_{\alpha\beta}\mathfrak{x}_{\gamma\delta}} \end{gathered} \tag{37}$$

und dieselbe Differentialgleichung:

$$g_{\alpha\beta\gamma\delta}\, du^\alpha\, du^\beta\, du^\gamma\, du^\delta = 0, \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2 \tag{38}$$

bestimmt wiederum die zweifach isotropen Kurven auf $\mathfrak{x}$ wie die Asymptotenkurven auf $\mathfrak{x}^*$. Das bedeutet mit Rücksicht auf $\Theta_2 = \Theta_2{}^* = 0$: die W-Projektionen $\mathfrak{x}^*$ der harmonischen totalisotropen Flächen $\mathfrak{x}$ des R_6 sind die euklidischen Flächen des R_4, deren Isotrope zweiter Art nach E. Bompiani bzw. deren Asymptotenkurven auf der Fläche ein harmonisches Netz bilden.

Für $n > 6$ ist eine Klassifizierung der allgemeinen totalisotropen Flächen mit fünfdimensionalen Schmiegraum (Vektorraum der Ableitungen $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{11}, \mathfrak{x}_{12}, \mathfrak{x}_{22}$, von Standpunkt einer Einbettungstheorie dieser Flächen in den euklidischen R_n ($n > 6$) noch ausständig. In einer weiteren Untersuchung soll unter Benutzung bekannter Ergebnisse über euklidische Flächen des R_n[17]) versucht werden, umgekehrt aus der Theorie euklidischer Flächen des R_5 und R_6 mit möglicherweise fünfdimensionalem Schmiegraum die noch unbekannte Theorie der totalisotropen Flächen des R_7 und R_8 mit möglicherweise fünfdimensionalem Schmiegraum zu gewinnen. Da die allgemeinste Integralfläche der Mongeschen Gleichung (1) ($n \geqq 5$) von $n - 5$ willkürlichen analytischen Funktionen zweier Parameter abhängt[18]) gleich wie der allgemeinste binäre biquadratische Fundamentaltensor $g_{\alpha\beta\gamma\delta}$,[19]) wird man die Existenz allgemeinster totalisotroper Flächen erst im R_8, diejenige der restlichen aus der Klassifizierung des biquadratischen Fundamentaltensors $g_{\alpha\beta\gamma\delta}$ her bekannten Typen solcher Flächen mit äquianharmonischen bzw. dreifachem bzw. zweifachem[20]) Netz zweifachisotroper Flächenkurven bereits im R_7 erwarten können.

*

W-projekce totálně isotropních ploch I.

(Obsah předešlého článku).

Teorie totálně isotropních ploch v komplexním euklidickém n-dimensionálním prostoru R_n t. j. dvojdimensionálních integrálů Monge-ovy diferencialní rovnice:

$$dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2 = 0$$

jest teorií všech rozvinutelných (euklidických) binárních elementů oblouku v prostoru R_{n-2} ve smyslu: „W-projekce“:

$$x_1 = x_1,\ x_2 = x_2, \ldots,\ x_{n-2} = x_{n-2},\ x_{n-1} = iu_1,\ x_n = iu_2,\ i = \sqrt{-1}.$$

Známé výsledky pro $4 \leqq n \leqq 6$ z teorie totálně isotropních ploch lze tímto způsobem nově interpretovati v prostorech o dimensi $n - 2$, kdež $2 \leqq n - 2 \leqq 4$.

---

[17]) Vgl. [8]).
[18]) Vgl. [2]) (J. Lense, insbesondere S. 180).
[19]) Vgl. [2]) **36**, 551, **38**, §§ 7, 9.
[20]) Vgl. [2]) **35**, § 2.

Cartanova geometrie na ploše kulové.

Milan Mikan, Praha.

(Došlo dne 19. října 1936.)

Na ploše kulové zřiďme přenos tak, aby jednotkové vektory ve směru rovnoběžek a meridiánů byly autoparallelní, při čemž délky měří se klasicky. Tento přenos je integrovatelný, polosymetrický-metrický a je-li R poloměr kulové plochy, ξ^1 zeměpisná délka, ξ^2 zeměpisná šířka ($|\,\xi^2\,| < \frac{1}{2}\pi$ pokud není výslovně jinak stanoveno), jakožto v radiantech dané geografické souřadnice, je differenciál oblouku[1]):

$$ds^2 \overset{\times}{=} R^2 \cos^2 \xi^2\, d\xi^1\, d\xi^1 + R^2\, d\xi^2\, d\xi^2, \tag{1}$$

fundamentální tensor má složky $a_{11} = R^2 \cos^2 \xi^2$, $a_{22} = R^2$, $a_{12} = a_{21} = 0$, a jednotkové vektory ve směru „východ" a „sever" jsou: $\overset{1}{i}{}^1 = \dfrac{1}{R \cos \xi^2}$, $\overset{1}{i}{}^2 = 0$; $\overset{2}{i}{}^1 = 0$, $\overset{2}{i}{}^2 = \dfrac{1}{R}$. Jest $\Gamma^1_{21} = -\operatorname{tg} \xi^2$, ostatní $\Gamma^\nu_{\mu\lambda} = 0$, $S_{12}^{\cdot\cdot 1} = -S_{12}^{\cdot\cdot 1} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \xi^2$, $S_2 = -\operatorname{tg} \xi^2$, ostatní $S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu} = 0$ a $R_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} = 0$.

(Schouten-Struik, Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie, str. 127, 179 a 180, úloha 11.9.)

Pro kovariantní křivost k libovolné křivky M jest:

$$k = \begin{vmatrix} j^1 & j^2 \\ Dj^1 & Dj^2 \end{vmatrix} \sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2},$$

(Dr. V. Hlavatý: Differenciální geometrie křivek a ploch a tensorový počet (v tisku).)

je-li j^ν tangenciální versor křivky, $j^\nu = \dfrac{d\xi^\nu}{ds}$, $Dj^\mu = j^\nu D_\nu j^\mu$ a D_ν symbol kovariantní derivace podle ξ^ν.

[1]) V následujícím se omezíme vesměs na reálné hodnoty všech proměnných, parametrů a funkcí, pokud není jinak výslovně stanoveno.

Dosazením vyplývá, je-li C libovolná konstanta, $k\,\mathrm{d}\xi^2 = \mathrm{d}\left(\cos\xi^2 \frac{\mathrm{d}\xi^1}{\mathrm{d}s} - C\right)$, odkudž, je-li β úhel, v němž M protíná meridiány,

$$Rk = \frac{\mathrm{d}\,(\sin\beta - RC)}{\mathrm{d}\xi^2} = \frac{\mathrm{d}\sin\beta}{\mathrm{d}\xi^2}. \tag{2}$$

Rovnice (2) je integrovatelná v takovém oboru proměnných $\sin\beta$, ξ^2 (po případě β, ξ^2), ve kterém je k funkcí buď obou proměnných $\sin\beta$, ξ^2 (po případě ve kterém je $\frac{k}{\cos\beta}$ funkcí obou proměnných β, ξ^2) nebo jedné z nich a to vždy funkcí spojitou, mající spojitou (nebo nule rovnou) parciální derivaci podle $\sin\beta$ (po případě β), nebo je-li k konstantou.

Integrací rovnice (2) získáváme, je-li k konstantou,

$$\frac{\sin\beta}{R} = k\xi^2 + C, \tag{3}$$

jakožto rovnici křivek konstantní křivosti.[2]) Vzhledem k proměnným ξ^1, ξ^2 tato rovnice zní:

$$\mathrm{d}\xi^1 = \frac{R(k\xi^2 + C)}{\sqrt{1 - R^2(k\xi^2 + C)^2}\cos\xi^2}\,\mathrm{d}\xi^2. \tag{4}$$

Poněvadž na pravé straně koefficient differenciálu $\mathrm{d}\xi^2$ je spojitou funkcí proměnné ξ^2 v každém intervalu, v němž $|\,\xi^2\,| < \frac{1}{2}\pi$, $|\sin\beta| = |\,R(k\xi^2 + C)\,| < 1$, má tato differenciální rovnice pro libovolně dané hodnoty parametrů k, C soustavu partikulárních integrálů, interpretovaných v tomto oboru na kulové ploše vesměs shodnými křivkami, tvořícími jednoparametrovou soustavu, invariantní vzhledem k rotaci kolem osy plochy kulové. V dalším ukážeme, že rovnice (4) má řešení dokonce i v intervalu, v němž $|\,\xi^2\,| < \frac{1}{2}\pi$, $|\,R(k\xi^2 + C)\,| \leqq 1$. Nazývejme tuto soustavu rotační, proměnné $\sin\beta$, ξ^2 rotačními souřadnicemi a označujme křivky konstantní křivosti písmenou K. Jsou určitou analogií kružnic klasické geometrie. Jejich rotační soustavu označme (K).

Loxodromy ($k = 0$), včetně meridiánů a rovnoběžek, jsou autoparallelní.

---

[2]) Rovnice $\frac{\sin\beta}{R} = k\xi^2 + C$ značí soustavu křivek K, $\frac{\sin\gamma}{R} = -k\eta^2 - C$ soustavu, jejíž křivky $\overline{K}$ jsou s předešlými totožné, ale, vzhledem k $\sin\beta = -\sin\gamma$ pro $\eta^2 = \xi^2$ opačně orientované, $\frac{\sin\delta}{R} = -k\zeta^2 + C$ značí soustavu, jejíž křivky $\widetilde{K}$ jsou, vzhledem k $\zeta^2 = -\xi^2$ pro $\sin\delta = \sin\beta$ ke křivkám K pravoúhle souměrné podle roviny rovníku.

Je-li dána rovnice $m\xi^2 + C = \frac{\sin\beta}{R}$, m = konst., vyplývá dosazením z rovnice (2) $k = m$, t. j. křivky K a jen tyto mají vzhledem k rotačním souřadnicím $\sin\beta$, ξ^2 lineární rovnici. RC je sinus úhlu, ve kterém K protíná meridián na rovníku.

$$K\left\{\begin{array}{l}\text{protíná rovník reálně}\\ \text{dotýká se rovníku}\\ \text{protíná rovník imaginárně}\end{array}\right\}\text{ je-li }|RC|\left\{\begin{array}{l}<1\\ =1.\\ >1\end{array}\right.$$

Vzhledem ke vztahu $\frac{v}{R} = l\,\mathrm{tg}\,(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\xi^2)$ je rovnice křivky K_1 jakožto Mercatorova obrazu křivky K

$$\mathrm{sech}\,\tfrac{v}{R} = \cos\left(\frac{\sin\beta - RC}{Rk}\right). \tag{5}$$

Pro libovolnou křivku M jest $\frac{R\,\mathrm{d}\xi^2}{\mathrm{d}s} = \cos\beta = \frac{\mathrm{d}\sin\beta}{\mathrm{d}\beta}$, tudíž vzhledem k (2):

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}s} = k.$$

Tato rovnice je zcela analogická vzorci pro křivost klasické geometrie. Pro k = konst. jest:

$$\frac{\beta}{k} = s + \text{konst.}. \tag{7}$$

jakožto analogie vzorce pro kružnici klasické geometrie.

Rovnice (5) je rovnicí soustavy křivek K, invariantních vzhledem k translaci ve směru rovnoběžek na M_1ercatorově mapě (pro určitou hodnotu parametrů k, C je tato soustava jednoparametrová, tyto křivky jsou vzájemně shodné a tvoří translační soustavu). Proměnné $\sin\beta$, v nazývejme translačními souřadnicemi.

Translační soustava kružnic L_1 o poloměru r, t. j. klasické křivosti $\varkappa = \frac{1}{r}$ má v translačních souřadnicích rovnici

$$\sin\beta = \varkappa v + B, \quad (B \text{ konst.}), \tag{8}$$

což je úplná analogie rovnice (3) křivek K daných v souřadnicích rotačních. Kružnice L jsou Mercatorovými obrazy křivek L na kulové ploše, jakožto $_1$ortogonálních trajektorií svazků loxodrom. procházejících body, jejichž obrazy na mapě jsou středy kružnic L, Tím získána druhá analogie kružnic na ploše kulové. Křivky L_1 mají rovnici:

$$\sin\beta = \varkappa \,.\, Rl\,\mathrm{tg}\,(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\xi^2) + B. \tag{9}$$

Jejich kovariantní křivost je

$$k = \frac{\varkappa}{R \cos \xi^2} = \frac{1}{Rr \cos \xi^2}. \tag{10}$$

(10) je rovnicí všech křivek L, zobrazených na mapě kružnicemi L_1 o témž poloměru r.

Na mapě je bodem a přímkou jím procházející vytknut (Lie-ův) element o souřadnicích u, v, β, zobrazující bodem a příslušnou loxodromou jím procházející vytknutý element na ploše kulové o souřadnicích $R\xi^1 = u$, $\xi^2 = 2 \operatorname{arctg} c^{\frac{v}{R}} - \frac{1}{2}\pi$, β. Volme na meridiánech n. př. směr „sever" jakožto kladný, orientujme též daný element vytknutím kladného směru a vytkněme ještě jakožto kladnou orientaci úhlu β, který je sevřen kladným směrem elementu s kladným směrem meridiánu n. př. požadavkem, aby na mapě tato orientace byla zobrazena kladným smyslem úhlu β.

Přikážeme-li proměnným v, β na mapě a proměnným ξ^2, β na ploše kulové určité hodnoty, získáváme na mapě translační soustavu elementů, na ploše kulové rotační soustavu elementů. Je to jiný druh rotačních a translačních souřadnic. Naproti tomu v předchozím poprvé užité rotační a translační souřadnice $\sin \beta, \xi^2$; $\sin \beta, v$ vzhledem ke vztahu $\sin \beta = \sin (\pi - \beta)$ stanoví dvě rotační a dvě translační soustavy elementů, jejichžto soustavy loxodrom na ploše kulové a přímek na Mercatorově mapě jsou vzájemně podle meridiánů souměrné, orientace těchto loxodrom (přímek) však jsou souměrné vždy podle rovnoběžky. Nazývejme tyto dvě vždy k sobě vzhledem k uvažované souměrnosti příslušné soustavy elementů soustavami sdruženými a označme je $(\sin \beta, \xi^2)$, po př. $(\sin \beta, v)$.

Budiž nyní dána rovnice:

$$\sin \beta = F(\xi^2), \tag{11}$$

kde $$\sin \beta = \frac{\cos \xi^2}{\overset{+}{(-)} \left| \sqrt{\cos^2 \xi^2 (\mathrm{d}\xi^1)^2 + (\mathrm{d}\xi^2)^2} \right|} \mathrm{d}\xi^1 = \sin (\pi - \beta). \tag{11'}$$

a kde $F(\xi^2)$ je spojitá, spojitě differencovatelná a pro $|F(\xi^2)| \leqq 1$ jednoznačná funkce v intervalu $-\frac{1}{2}\pi \leqq \xi^2 \leqq +\frac{1}{2}\pi$, v němž všude $\frac{\mathrm{d}F(\xi^2)}{\mathrm{d}\xi^2} \neq 0$ a buď $\xi^2 = \Phi(\sin \beta)$ její inversní funkce. Budiž $-\frac{1}{2}\pi < \underset{0}{\xi^2} < \underset{1}{\xi^2} < \frac{1}{2}\pi$, $\underset{0}{\xi^2} = \Phi(\underset{0}{\sin \beta}) = \Phi(\sin(\pi - \underset{0}{\beta}))$, $\underset{1}{\xi^2} = \Phi(\underset{1}{\sin \beta}) = \Phi(\sin(\pi - \underset{1}{\beta}))$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{\cos \xi^2 \, \mathrm{d}\xi^1}{\mathrm{d}\xi^2} = \frac{F(\xi^2)}{+\left| \sqrt{1 - (F(\xi^2))^2} \right|}$, $\operatorname{tg} (\pi - \beta) = \frac{F(\xi^2)}{-\left| \sqrt{1 - (F\xi^2)^2} \right|}$.

Rovnicí (11), differenciální vzhledem k proměnným ξ^1, ξ^2 je dána rotační soustava (M) křivek M, interpretujících příslušné partikulární integrály. Interval $(\overset{0}{\xi^2}, \overset{1}{\xi^2})$ budiž ještě volen tak, aby funkce $\dfrac{F(\xi^2)}{\overset{+}{(-)}\sqrt{1-(F(\xi^2))^2}}$, alespoň od jedné hodnoty $\overset{2}{\xi^2}$ v tomto intervalu počínaje, byla stále kladná nebo stále záporná. Potom integrál

$$\int_{\overset{0}{\xi^2}}^{\overset{1}{\xi^2}} \frac{F(\xi^2)\,\mathrm{d}\xi^2}{\sqrt{1-(F(\xi^2))^2\cos\xi^2}} \tag{12}$$

má určitou konečnou hodnotu i tenkráte, existuje-li reálná hodnota $\overset{\times}{\xi^2} = \Phi(\overset{+}{(-)}\sin\tfrac{1}{2}\pi)$, $F(\overset{\times}{\xi^2}) = \overset{+}{(-)}1$, $|\overset{\times}{\xi^2}| < \tfrac{1}{2}\pi$ a volíme-li $\overset{1}{\xi^2} = \overset{\times}{\xi^2}$, poněvadž již pro $\tfrac{1}{2} < n < 1$ je $\lim\limits_{\xi^2=\overset{\times}{\xi^2}} \dfrac{F(\xi^2)\,(\overset{\times}{\xi^2}-\xi^2)^n}{\sqrt{1-(F(\xi^2))^2\cos\xi^2}} = 0$.[3])

Probíhá-li ξ^2 interval $(\overset{0}{\xi^2}, \overset{3}{\xi^2})$, kde ξ^2 je libovolná hodnota v intervalu $(\overset{0}{\xi^2}, \overset{3}{\xi^2})$, probíhá současně $\overset{3}{\beta}$ jednak interval $(\overset{0}{\beta}, \overset{3}{\beta})$ a vytvořena je rotační soustava $(\overset{1}{V})$ větví $\overset{1}{V}$, jednak interval $(\pi - \overset{0}{\beta}, \pi - \overset{3}{\beta})$ a tím je vytvořena rotační soustava $(\overset{2}{V})$ větví $\overset{2}{V}$. Na prvé je rozdíl zeměpisných délek krajních bodů $a = \overset{3}{\xi^1} - \overset{0}{\xi^1} = \int_{\overset{0}{\xi^2}}^{\overset{3}{\xi^2}} \dfrac{F(\xi^2)\,\mathrm{d}\xi^2}{+\left|\sqrt{1-(F(\xi^2))^2}\right|\cos\xi^2}$, na druhé $b = \overset{5}{\xi^1} - \overset{4}{\xi^1} = \int_{\overset{4}{\xi^2}=\overset{0}{\xi^2}}^{\overset{5}{\xi^2}=\overset{3}{\xi^2}} \dfrac{F(\xi^2)\,\mathrm{d}\xi^2}{-\left|\sqrt{1-(F(\xi^2))^2}\right|\cos\xi^2}$, $a = -b$, t. j. větve $\overset{1}{V}, \overset{2}{V}$ jsou navzájem souměrné vždy podle určité meridiánové roviny. Existuje-li však alespoň jedna reálná hodnota $\overset{3}{\xi^2} = \overset{1}{\xi^2} = \Phi(\overset{+}{(-)}\sin\tfrac{1}{2}\pi)$, $F(\xi^2) = \overset{+}{(-)}1$, $|\xi^2| < \tfrac{1}{2}\pi$, existuje ke každé větvi $\overset{1}{V}$ soustavy $(\overset{1}{V})$ vždy taková větev $\overset{2}{V}$ soustavy $(\overset{2}{V})$, pro niž $\overset{1}{\xi^1} = \overset{5}{\xi^1}$, obě větve tvoří souvislou větev V křivky M, pravoúhle souměrnou podle roviny meridiánu $\overset{1}{\xi^1} = \overset{5}{\xi^1}$ a tato větev je proťata každou rovnoběžkou buď ve dvou bodech, nebo (omezíme-li se na reálné body) vůbec

[3]) O určení zda předložený omezený integrál má konečnou hodnotu, viz n. př.: K. Petr, Počet integrální.

není proťata, kdežto rovnoběžka n. př. $\xi^2 = \overset{\times}{\xi}{}^2_1$ se této větve dotýká ve společném bodě větví $\overset{1}{V}, \overset{2}{V}$.

Křivky konstantní křivosti K sestávají, jak z rovnice (3) patrno ($F(\xi^2)$ je v tomto případě lineární funkcí) z takovýchto podle meridiánů vzájemně souměrných větví $\overset{1}{V}, \overset{2}{V}$ a mají-li jednu tečnu (nebo více tečen) $\parallel$ s rovinou rovníku, sestávají z jedné nebo určitého množství větví V, z nichž každá je podle roviny určitého meridiánu souměrná a jsou proto souměrné podle jedné nebo určitého množství meridiánových rovin. Níže shledáme, že v případě $\xi^2 = \overset{\times}{\xi}{}^2_1$, $|\xi^2_1| < \frac{1}{2}\pi$ jeden nebo druhý případ nastává, je-li křivka K tvořena jedinou uzavřenou větví podél níž β probíhá hodnoty n. př. od $-\frac{1}{2}\pi + q\pi$ do $+\frac{3}{2}\pi + q\pi$ pro q celé (pro $C = 0$), nebo množstvím větví, z nichž na každé β probíhá tytéž hodnoty, ale z nichž ani jedna není sama o sobě uzavřenou (pro $C \neq 0$).

Rovnicí $\beta = f(\xi^2)$, kde $f(\xi^2)$ je spojitá a spojitě differencovatelná jednoznačná funkce je naproti tomu dána rotační soustava křivek $\overset{1}{M}$, které obecně nejsou podle meridiánových rovin souměrné. Soustava (rotační) křivek $\overset{2}{M}$ k prvým podle těchto rovin souměrných je dána rovnicí $\beta = \pi - f(\xi^2)$. Obě soustavy jsou současně dány společnou rovnicí $\sin\beta = \sin(f(\xi^2))$ a je-li $\frac{1}{2}\pi = f(\overset{1}{\xi}{}^2)$, $\overset{1}{\xi}{}^2$ reálné a $|\overset{1}{\xi}{}^2| < \frac{1}{2}\pi$ lze střídavě z větví $\overset{1}{V}, \overset{2}{V}$ křivek $\overset{1}{M}, \overset{2}{M}$ vytvořiti větve V určitých křivek M, souměrné podle meridiánových rovin, podél nichž se β spojitě mění.

Prve doplňme však ještě úvahy o křivosti odvozením vztahu kovariantní křivosti k křivky M a klasické křivosti $\varkappa$ jejího obrazu $\overset{1}{M}$ na Mercatorově mapě.

Buďtež opět na mapě zřízeny souřadnice $\frac{u}{R} = \xi^1$, $\frac{v}{R} = l\,\mathrm{tg}\,(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\xi^2)$. I jest:

$$\varkappa = \frac{\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}v^2}}{\left(1 + \left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = \mathrm{tg}\,\beta = \frac{\cos\xi^2\,\mathrm{d}\xi^1}{\mathrm{d}\xi^2}.$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}v^2} = \frac{\mathrm{d}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}}{\mathrm{d}v} = \frac{\mathrm{d}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}}{\mathrm{d}\xi^2} \cdot \frac{\mathrm{d}\xi^2}{\mathrm{d}v} = \frac{\mathrm{d}\beta\,.\cos\xi^2}{\cos^2\xi^2\,\mathrm{d}\xi^2}, \qquad \varkappa = \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\xi^2}\cos\beta\cos\xi^2,$$

a vzhledem k rovnici (2):

$$\varkappa = Rk \cos \xi^2, \tag{13}$$

což použito na křivky L dává rovnici (10).

Poněvadž v bodě vratu (obratu) křivky M je $1/\varkappa = 0$, $(\varkappa = 0)$, je vzhledem k rovnici (13) a $|\xi^2| < \frac{1}{2}\pi$ v příslušném bodě křivky M: $1/k = 0$, $(k = 0)$; nazývejme takovéto body křivky M také body vratu (obratu). Křivky K a jejich obrazy K nemají ani bodů vratu ani bodů obratu. Křivka K mající v určitém bodě s křivkou M týž úhel β a totéž k je analogií oskulační kružnice. V bodě obratu je (vzhledem ke $k = 0$) takovouto oskulační křivkou K loxodroma. Dvě křivky M mající v určitém bodě totéž β a k mají v onom bodě tutéž oskulační křivku K.

Uvažujme nyní opět křivku konstantní křivosti K danou rovnicí (3). V bodě A svírej K s meridiánem úhel $\underset{A}{\beta}$, $-\frac{1}{2}\pi \leqq \underset{A}{\beta} < 0$, v B úhel $\underset{B}{\beta} = 0$, v E úhel $\underset{E}{\beta} = -\underset{A}{\beta}$. I jest

$$\xi^1_A - \xi^1_B = \frac{1}{Rk}\int_0^{\underset{A}{\beta}} \frac{\sin\beta\,\mathrm{d}\beta}{\cos\left(\dfrac{\sin\beta - RC}{Rk}\right)} = \frac{1}{Rk}\int_0^{-\underset{E}{\beta}} \frac{\sin\beta\,\mathrm{d}\beta}{\cos\left(\dfrac{\sin\beta - RC}{Rk}\right)}, \tag{14}$$

$$\xi^1_E - \xi^1_B = \frac{1}{Rk}\int_0^{\underset{E}{\beta}} \frac{\sin\beta\,\mathrm{d}\beta}{\cos\left(\dfrac{\sin\beta - RC}{Rk}\right)}; \tag{14'}$$

Na pravých stranách rovnic jsou trigonometrické formy integrálu, analogického integrálu (12), rozdíly zeměpisných délek jsou tu parametricky vyjádřeny, zeměpisná šířka je, jak známo, vyjádřena rovnicí $\xi^2 = \dfrac{\sin\beta - RC}{Rk}$ a probíhá-li β intervaly resp. $(\underset{B}{\beta}, \underset{A}{\beta})$, $(\underset{B}{\beta}, \underset{E}{\beta})$, nechať je opět vždy $-\frac{1}{2}\pi < \xi^2 < \frac{1}{2}\pi$; potom integrály (14), (14') mají konečnou hodnotu.

Podél oblouku $\widehat{BA}$ ve smyslu od B do A položme $-\beta = \gamma$, $\sin(-\beta) = \sin\gamma$, $\mathrm{d}(-\beta) = \mathrm{d}\gamma$, $\underset{A}{\gamma} = -\underset{A}{\beta} = \underset{E}{\beta}$ tudíž $\xi^1_A - \xi^1_B =$

$$= \frac{1}{Rk}\int_0^{\underset{A}{\gamma}} \frac{\sin\gamma\,\mathrm{d}\gamma}{\cos\left(\dfrac{-\sin\gamma - RC}{Rk}\right)} = \frac{1}{Rk}\int_0^{\underset{E}{\beta}} \frac{\sin\beta\,\mathrm{d}\beta}{\cos\left(\dfrac{-\sin\beta - RC}{Rk}\right)}.$$ V inter-

valu $0 < |\beta| \leqq \frac{1}{2}\pi$ je v kterémkoli bodě vždy $\cos\left(\frac{\sin\beta - RC}{Rk}\right)$. $\left\{\begin{matrix}+\\=\end{matrix}\right\} \cos\left(\frac{-\sin\beta - RC}{Rk}\right)$, tudíž $\underset{A}{\xi^1} - \underset{B}{\xi^1} \left\{\begin{matrix}+\\=\end{matrix}\right\} \underset{E}{\xi^1} - \underset{B}{\xi^1}$. je-li $C \left\{\begin{matrix}+\\=\end{matrix}\right\} 0$. Existuje-li tudíž $-\frac{1}{2}\pi < \underset{A}{\xi^2} < +\frac{1}{2}\pi$ pro něž $\underset{A}{\beta} = -\frac{1}{2}\pi$ a $-\frac{1}{2}\pi < \underset{E}{\xi^2} < +\frac{1}{2}\pi$ pro něž $\underset{E}{\beta} = +\frac{1}{2}\pi$, t. j. je-li resp. $\left|\frac{1 - RC}{Rk}\right| < \frac{1}{2}\pi$, $\left|\frac{1 + RC}{Rk}\right| < \frac{1}{2}\pi$ a bod E tedy bodem maximálního (minimálního) ξ^2, A bodem minimálního (maximálního) ξ^2 a je-li $C \neq 0$, neleží body A, E na témž meridiánu, čehož další důsledek je, že (reálná) větev křivky K od $\beta = -\frac{1}{2}\pi$ do $\beta = +\frac{3}{2}\pi$ není uzavřenou, je však, jak z předchozí úvahy vyplývá, pravoúhle souměrnou podle roviny meridiánu procházejícího bodem E. V bodě A přechází K ve druhou větev, na níž β probíhá, hodnoty od $-\frac{1}{2}\pi$ do $-\frac{5}{2}\pi$; atd. Také větev n. př. na níž β probíhá hodnoty od $-\frac{3}{2}\pi$ do $\frac{1}{2}\pi$ je souměrnou podle meridiánu procházejícího bodem A atd. Je-li však $C = 0$ (a ovšem opět $\left|\frac{1 - RC}{Rk}\right| < \frac{1}{2}\pi$, $\left|\frac{1 + RC}{Rk}\right| < \frac{1}{2}\pi$), leží body A, E na témž meridiánu, z čehož dále vyplývá, že body A, D, v nichž resp. $\beta = -\frac{1}{2}\pi$, $\beta = +\frac{3}{2}\pi$ se ztotožňují a křivka K je tvořena jedinou uzavřenou větví.

Naproti tomu jestliže $\left|\frac{1 - RC}{Rk}\right| \geqq \frac{1}{2}\pi$, po případě $\left|\frac{1 + RC}{Rk}\right| \geqq \frac{1}{2}\pi$, sestává křivka K, jak z Mercatorovy mapy patrno, z jedné dvojice nebo z množství dvojic větví, z nichž vždy dvě větve v téže dvojici jsou pravoúhle souměrné podle roviny určitého meridiánu a k jednomu nebo oběma pólům se asymptoticky blíží — vyjímaje případ, kdy, jak níže uvedeno, $|\overset{+}{(-)} Rk\,\frac{1}{2}\pi + RC| = 0$ — na způsob loxodrom.

Asymptotické blížení se křivky K k pólům pro $0 < |\overset{+}{(-)} Rk\,\frac{1}{2}\pi + RC| \leqq 1$, $\left|\frac{1\,(\mp)\,RC}{Rk}\right| \geqq \frac{1}{2}\pi$ vysvítá i z toho, že limita integrálu (jakožto funkce jeho horní meze)

$$\int_0^{\xi^2} \frac{(Rk\xi^2 + RC)\,\mathrm{d}\xi^2}{\sqrt{1 - (Rk\xi^2 + RC)^2}\cos\xi^2} \tag{15}$$

(což je jiná forma integrálu (14, 14') daného v trigonometrické formě), majícího konečnou hodnotu pro $|\xi^2| < \frac{1}{2}\pi$, $|Rk\xi^2 + RC| \leqq 1$, $|\xi^2| < \frac{1}{2}\pi$,[4]) pro $\lim \xi^2 = \overset{+}{(-)}\,\overset{0}{\frac{1}{2}\pi}$ roste nade všechny meze, neboť

$$\lim_{\xi=\frac{1}{2}\pi} \frac{(Rk\xi^2 + RC)\,(\frac{1}{2}\pi - |\xi^2|)^n}{\sqrt{1 - (Rk\xi^2 + RC)^2 \cos \xi^2}} \tag{16}$$

je konečná toliko pro $n \geqq 1$, je-li $0 < |\overset{+}{(-)}\, Rk\,\frac{1}{2}\pi + RC| < 1$ a je-li $|\overset{+}{(-)}\, Rk\,\frac{1}{2}\pi + RC| = 1$ dokonce toliko pro $n \geqq \frac{3}{2}$. Úvahu lze zobecniti i pro křivky M, jejichž rotační soustava (M) je dána rovnicí (11). Naproti tomu integrál (15) má pro $|\xi^2| = \frac{1}{2}\pi$, $|\pm Rk\,\frac{1}{2}\pi + RC| = 0$ konečnou hodnotu, poněvadž v tomto případě limita (16) je $= 0$ pro každé n kladné, tedy již pro $0 < n < 1$. Větve $\overset{1}{V}$, $\overset{2}{V}$ křivky K se přibližují k sobě v pólu, aniž by se k pólu blížily asymptoticky.

Mají-li soustavy (K) křivek $K \ldots \dfrac{\sin\beta}{R} = k\xi^2 + C$ společné sdružené rotační soustavy elementů η^2, $\sin\gamma = \sin(\pi - \gamma)$, (kde η^2, $\sin\gamma$ jsou dané konstanty), jest:

$$\frac{\sin\beta}{R} = k\xi^2 + \frac{\sin\gamma}{R} - \eta^2 k, \text{ t. j. } C = \frac{\sin\gamma}{R} - \eta^2 k. \tag{17}$$

Tyto křivky konstantní křivosti tvoří rotační soustavu jednoparametrových soustav, majících společný dotyk podél elementů obou vzájemně sdružených soustav $(\eta^2, \sin\gamma)$. Nazývejme tuto (dvojparametrovou) soustavu křivek K dotykovou soustavou rotační. Obecně dvojparametrová soustava křivek K, jakožto rotační soustava jednoparametrových nerotačních soustav daná rovnicí $\dfrac{\sin\beta}{R} = k\xi^2 + \Psi(k)$, (kdež pro každou hodnotu k dostáváme určitou jednoparametrovou soustavu rotační) není dotyková: Každou danou dvojicí sdružených rotačních soustav elementů $\left(\zeta^2, \dfrac{\sin\delta}{R}\right)$ prochází tolik rotačních jednoparametrových soustav (K), kolik kořenů pro k má rovnice

$$k\zeta^2 + \Psi(k) = \frac{\sin\delta}{R}.$$

Aby rotační soustava jednoparametrových nerotačních soustav křivek K byla dotyková, k tomu je nutné a stačí, aby $\Psi(k)$ byla celistvou lineární funkcí parametru k: $\Psi(k) = ak + b$, pro reálný dotyk $|Rb| = |\sin\gamma| < 1$, $|a| = |\eta^2| < \frac{1}{2}\pi$.

[4]) Srovnejme s úvahou o integrálu (12).

V tom případě každou další dvojicí sdružených rotačních soustav elementů $\left(\zeta^2, \frac{\sin\delta}{R}\right)$ prochází jediná rotační soustava (K) křivek K a její rovnice jest:

$$\begin{vmatrix} \sin\beta & \xi^2 & 1 \\ \sin\gamma & \eta^2 & 1 \\ \sin\delta & \zeta^2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ t. j. } \sin\beta = \frac{\sin\gamma - \sin\delta}{\eta^2 - \zeta^2}\xi^2 - \frac{\zeta^2\sin\gamma - \eta^2\sin\delta}{\eta^2 - \zeta^2}$$

To je rovnice jednoparametrové rotační soustavy (K) procházející danými dvěma dvojicemi sdružených rotačních soustav elementů $(\eta^2, \sin\gamma)$; $(\zeta^2, \sin\delta)$.

Vzhledem k tomu, že — jak z předchozích úvah vyplývá — křivka K protínající danou rovnoběžku η^2 v úhlu ϱ protíná ji též v úhlu $-\varrho$, možno vysloviti větu:

Křivky konstantní křivosti K protínající dvě dané rovnoběžky resp. η^2, ζ^2 v úhlech daných resp. ϱ, σ jsou shodné; mají kovariantní křivost

$$k = \frac{\cos\varrho - \cos\sigma}{R(\eta^2 - \zeta^2)}$$

a jsou obsaženy v téže rotační soustavě (K).

Dvěma sousedními elementy na dvou sousedních rovnoběžkách je dána určitá křivka konstantní křivosti. Křivka K ke křivce M v daném bodě oskulační má s ní v tomto bodě dva sousední elementy společné (a naopak). Dvě v daném bodě oskulující se křivky M, N mají v tomto bodě dva sousední elementy společné (a naopak).

Rovnicí

$$\sin\beta = F(\xi^2) \tag{18}$$

je dána jednoparametrová soustava rotační (M) křivek M.

Budiž kromě toho dána rotační soustava (N) křivek N rovnicí:

$$\sin\gamma = \Phi(\xi^2). \tag{19}$$

Je-li některá z křivek N isogonální trajektorií soustavy (M), jest: $\gamma = \beta + a$, a konst. a je-li m kovariantní křivost této křivky N, $m = \frac{\cos\gamma\,\mathrm{d}\gamma}{R\,\mathrm{d}\xi^2}$, jest v průsečících křivky N s křivkami M:

$$\frac{k}{\cos\beta} = \frac{m}{\cos\gamma} \tag{20}$$

čili:

$$\frac{k}{m} = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} = \frac{\cos\beta}{\cos(\beta + a)}, \quad \frac{k}{\cos\beta} = \frac{m}{\cos(\beta + a)}. \tag{21}$$

Potom je však také každá další křivka soustavy (19) isogonální trajektorií soustavy (18), neboť je-li pro jednu z křivek N

$$\sin\gamma = \sin(\beta + a) = \Phi(\xi^2) = F(\xi^2)\cos a + \sqrt{1 - (F(\xi^2))^2}\,\sin a,$$

je tato rovnice platná pro každou křivku N soustavy (N) dané rovnicí (19) a je-li v platnosti (20), jest $\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}\xi^2} = \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\xi^2}$, $\gamma = \beta + a$, a konst., při čemž a je vzhledem k tomu, že soustavy (M), (N) jsou rotační, pro každou dvojici křivek M, N totéž.

Isogonální trajektorie rotační soustavy (M) tvoří zase rotační soustavu (N). Aby soustavy (M), (N) byly takovýmito vzájemnými soustavami isogonálních trajektorií, k tomu je nutnou a postačující podmínkou (20) *nebo* (21).

Isogonální trajektorie rotační soustavy loxodrom jsou zase loxodromy a každé dvě rotační soustavy loxodrom jsou vzájemně soustavami isogonálních trajektorií.

Kromě toho z podmínky (21) vyplývá:

Isogonální trajektorie rotační soustavy (K) křivek konstantní křivosti jsou tenkráte a jen tenkráte zase křivkami konstantní křivosti, jsou-li (K) loxodromami. Ony isogonální trajektorie jsou potom též loxodromami.

K objasnění některých dosud odvozených výsledků lze také použíti — kromě zobrazení Mercatorova — ještě jiných zobrazení rotačních soustav. Nanášíme-li na vodorovnou osu B jakožto úsečky hodnoty úhlů β, na svislou osu X jakožto pořadnice hodnoty zeměpisných šířek ξ^2 (po volbě libovolných délek jakožto jednotkových), zobrazí se rotační soustava elementů (ξ^2, β) bodem, ležícím vzhledem k $|\xi^2| < \frac{1}{2}\pi$ uvnitř rovinného pásu omezeného přímkami P, Q ve vzdálenostech $+\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi$ rovnoběžných s osou B, rotační soustava křivek M daná rovnicí $\beta = f(\xi^2)$ určitým obloukem uvnitř tohoto pásu. Rotační soustava isogonálních trajektorií (N) rotační soustavy (M) zobrazuje se obloukem (N), vzniklým pošinutím oblouku (M) o délku a ve směru osy B, (K) se zobrazují sinusoidami, rotační soustavy loxodrom o daném úhlu β svislou přímkou ve vzdálenosti β od osy X. Osa X zobrazuje všechny meridiány, body osy B zobrazují všechny elementy na ploše kulové, jejichž body leží na rovníku, body rovnoběžky s osou B všechny elementy, jejichž body leží na určité rovnoběžce plochy kulové.

Průsek dvou oblouků (M), (N) je obrazem dotyku dvou rotačních soustav (M), (N) podél jedné rotační soustavy elementů, dotyk takovýchto oblouků, jak z předešlého patrno, je obrazem

oskulace těchto soustav (M), (N) podél příslušné rotační soustavy elementů.

Na hranici pásu P, Q není zobrazení jednoznačné (ve smyslu: bod v obraze — rotační soustava elementů na ploše kulové). Protíná-li však oblouk (M) reálně resp. P, Q, v bodech, jejichž $\beta \neq \frac{1}{2}\pi + q\pi$, q celé, značí to, že křivky M soustavy (M) se asymptoticky blíží resp. k severnímu, k jižnímu pólu a zároveň k oněm loxodromám tvořícím rotační soustavu, jejichž β je rovno vzdálenosti oněch průsečíků od X.

Jiné zobrazení získáváme, naneseme-li na svislou osu X hodnotu zeměpisné šířky, na vodorovnou osu S hodnotu $\sin\beta$. Jednotlivé sdružené rotační soustavy (reálních) elementů (jejichž $|\xi^2| < \frac{1}{2}\pi$) jsou zobrazeny body uvnitř pravoúhelníku $abcd$, jehož vrcholy mají souřadnice: $a\,(-\frac{1}{2}\pi, -1)$, $b\,(-\frac{1}{2}\pi, +1)$, $c\,(+\frac{1}{2}\pi, +1)$, $d\,(+\frac{1}{2}\pi, -1)$. Určitá soustava (K) je zobrazena úsečkou $(K) \equiv \overline{mn}$ uvnitř $abcd$, jejíž body na obvodu $abcd$ jsou m, n. Probíháme-li množství elementů na křivkách K podél větví $\overset{1}{V}, \overset{2}{V}$ vzájemně podle meridiánových rovin souměrných[5]) je současně úsečka $\overline{mn}$ proběhnuta v obou smyslech $\overline{mn}$ a $\overline{nm}$.

V rovnici (11) vyskytující se funkce $F(\xi^2)$ proměnné ξ^2, pro $|F(\xi^2)| \leqq 1$ jednoznačná v intervalu $-\frac{1}{2}\pi \leqq \xi^2 \leqq +\frac{1}{2}\pi$, k níž přísluší na ploše kulové soustava (M), je uvnitř pravoúhelníku $abcd$ interpretována obloukem (M), proťatým každou přímkou $\| S$ v jediném bodě. Neprotíná-li tento oblouk reálně úsečky $\overline{ab}, \overline{cd}$, nepřibližují se M pólům. Protíná-li však reálně resp. $\overline{ab}, \overline{cd}$, blíží se M asymptoticky k jednomu nebo oběma pólům, jak patrno ze zobecnění úvahy o integrálu (15). Rotační soustava loxodrom, zobrazená nyní opět rovnoběžkou s X procházející vždy jedním z oněch průsečíků je soustavou asymptot křivek M. Protíná-li však (M) obvod pravoúhelníka v některém z vrcholů, přibližují se v pólu k sobě podle meridiánové roviny souměrné větve křivek M, aniž by se M k tomuto pólu blížily asymptoticky. Proběhneme-li v obou směrech oblouk (M), probíháme současně množství elementů na obou soustavách větví $\overset{1}{V}\overset{2}{V}$ na ploše kulové, z nichž sestává soustava (M) křivek M a jež jsou vzájemně podle meridiánových rovin souměrné.[6])

[5]) Při tom zachováváme tutéž orientaci podél větví $V = \overset{1}{V} + \overset{2}{V}$ křivek K i úhlu β. Změníme-li orientaci, zobrazí se (K) úsečkou $\overline{m'n'}$ vzniklou zrcadlením $\overline{mn}$ na X.

[6]) Změna orientace jeví se v obraze zrcadlením na X.

Úsečky (K) procházející bodem $(0, 0)$ zobrazují křivky K, jejichž $C = 0$ poněvadž vzdálenost průsečíku $S\,(K)$ od bodu $(0, 0)$ je rovna sinusu úhlu, v němž K protíná meridián na rovníku, pro $C = 0$ protíná K rovník v pravém úhlu. Pro libovolnou křivku M je $Rk = \frac{\mathrm{d} \sin \beta}{\mathrm{d}\xi^2} = \operatorname{tg} \alpha$, je-li α úhel, který svírá (M) s pořadnicí. Průsek oblouků (M), (N) je obrazem dotyku soustav (M), (N) podél sdružených soustav elementů na ploše kulové, svazek úseček (K) o společném bodě je obrazem rotační soustavy dotykových soustav křivek K na ploše kulové, dotyk oblouků (M), (N) je obrazem oskulace soustav (M), (N) podél příslušných sdružených soustav elementů. (Totéž vzhledem k rovnici (13) lze vysloviti o translačních soustavách (M), (N) na Mercatorově mapě.)

Partikulární integrály Clairautovy rovnice vzhledem k proměnným $\sin \beta$, ξ^2 v oboru, jemuž přísluší část roviny omezená pravoúhelníkem $(abcd)$: $\sin \beta = \frac{\mathrm{d} \sin \beta}{\mathrm{d}\xi^2}\, \xi^2 + f\left(\frac{\mathrm{d} \sin \beta}{\mathrm{d}\xi^2}\right)$ čili vzhledem k rovnici (2)

$$\sin \beta = Rk\xi^2 + f(Rk) \tag{22}$$

jsou, jak ze zobrazení v pravoúhelníku $(abcd)$ patrno, na ploše kulové interpretovány soustavami (K), oskulujícími určitou soustavu (M) jakožto interpretaci singulárního integrálu rovnice (22).

Z tvaru oblouku (M) uvnitř $(abcd)$ možno přímo posouditi některé vlastnosti křivek M soustavy (M): Na př. existuje-li k (M) uvnitř $(abcd)$ tečna $\parallel S$, roste v dotyčném bodě k nade všechny meze, křivky M mají na příslušné rovnoběžce body vratu, existuje-li však uvnitř $(abcd)$ tečna $\parallel X$, je příslušné $k = 0$, křivky M mají body obratu. Je-li v některém bodě oblouku (M) $\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\xi^2} = 0$, má k v tomto bodě extrém, (M) bod obratu, příslušné body křivek M možno nazývati vrcholy, poněvadž křivky M vskutku v takovýchto bodech mají vrcholy. Vzhledem k souměrnosti křivek M (a M) vzhledem k meridiánovým rovinám (a k meridiánům), dány-li jejich rovnice ve tvaru (11), jsou též body, v nichž je $\beta = \frac{1}{2}\pi + q\pi$, q celé, vrcholy.

Analogické úvahy lze provésti s některými změnami vzhledem ke zobrazení o osách X, B jsou-li rotační soustavy křivek dány rovnicemi typu $\beta = f(\xi^2)$.

Aby rotační soustava (M) daná rovnicí

$$\beta = f(\xi^2) \text{ čili } \frac{\mathrm{d}\xi^1}{\mathrm{d}\xi^2}\cos\xi^2 = \operatorname{tg} f(\xi^2) \tag{23}$$

připouštěla infinitesimální transformaci, jejíž symbol je

$$a\left[(\operatorname{tg}\varphi(\xi^2))\frac{\partial\Phi}{\partial\xi^1} + \cos\xi^2\frac{\partial\Phi}{\partial\xi^2}\right], \tag{24}$$

kde a je libovolná konečná konstanta $\neq 0$, při čemž se omezíme na takový obor proměnných ξ^1, ξ^2, $|\xi^2| < \frac{1}{2}\pi$, ve kterém $\operatorname{tg} f(\xi^2)$, $\operatorname{tg}\varphi(\xi^2)$, $\Phi(\xi^1, \xi^2)$ jsou spojité funkce, mající alespoň první derivace spojité, k tomu je nutná a postačující podmínka

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(\xi^2)}{\cos^2\varphi(\xi^2)\,\mathrm{d}\xi^2} = \frac{\mathrm{d}f(\xi^2)}{\cos^2 f(\xi^2)\,\mathrm{d}\xi^2}\ ^{7}) \tag{25}$$

aneb, položíme-li $\gamma = \varphi(\xi^2)$

$$\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg} b, \tag{26}$$

kde b je libovolná konstanta, nebo

$$\frac{\sin(\gamma - \beta)}{\cos\gamma\cos\beta} = \operatorname{tg} b. \tag{27}$$

Je-li k kovariantní křivost kterékoli z křivek M (podél M obecně proměnná) a položíme-li $m = \dfrac{\mathrm{d}\sin\varphi(\xi^2)}{R\,\mathrm{d}\xi^2}$, lze uvésti podmínku na tvar

$$\frac{m}{\cos^3\gamma} = \frac{k}{\cos^3\beta} \quad \text{nebo} \quad \frac{k}{m} = \left(\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right)^3. \tag{28}$$

Rovnice (25), (26), (27), (28) jsou ekvivalentní a jsou vesměs souměrné vzhledem k veličinám vyskytujícím se v rovnicích soustav (M) a $(N)\ldots\gamma = \varphi(\xi^2)$. Dráhy infinitesimální transformace (24) tvoří rotační soustavu (N), jejíž rovnice je

$$\frac{\mathrm{d}\xi^1}{\mathrm{d}\xi^2}\cos\xi^2 = \operatorname{tg}\varphi(\xi^2) \tag{29}$$

čili

$$\gamma = \varphi(\xi^2) \tag{30}$$

a kovariantní křivost m křivek N vyhovuje rovnici (28).

Naopak, soustava (N) připouští infinitesimální transformaci, jejíž symbol je

$$c\left[(\operatorname{tg} f(\xi^2)\frac{\partial\Phi}{\partial\xi^1} + \cos\xi^2\frac{\partial\Phi}{\partial\xi^2}\right], \tag{31}$$

c) libovolná konečná konstanta $\neq 0$).

[7]) Pro srovnání n. př. J. A. Serret-G. Scheffers, Lehrbuch d. Differential u. Integralrechnung, III. (Lipsko 1909), str. 199 a další.

Její dráhy jsou křivky M soustavy (M), t. j. vztah obou soustav je reciproký.

Kdyby místo transformace (24) byla dána transformace

$$a\varrho\left[(\operatorname{tg}\varphi(\xi^2)\frac{\partial\Phi}{\partial\xi^1}+\cos\xi^2\frac{\partial\Phi}{\partial\xi^2}\right], \tag{32}$$

kde ϱ je spojitou funkcí proměnných ξ^1, ξ^2 (nebo alespoň jedné z nich), mající v uvažovaném oboru spojité parciální derivace alespoň prvého řádu, byla by podmínka (25) nahražena podmínkou

$$\varrho\left(\frac{\mathrm{d}\,\varphi(\xi^2)}{\cos^2\varphi(\xi^2)\,\mathrm{d}\xi^2}-\frac{\mathrm{d}\,f(\xi^2)}{\cos^2 f(\xi^2)\,\mathrm{d}\xi^2}\right)+$$

$$+(\operatorname{tg}f(\xi^2)-\operatorname{tg}\varphi(\xi^2))\left(\operatorname{tg}f(\xi^2)\frac{\partial\varrho}{\partial\xi^1}+\cos\xi^2\frac{\partial\varrho}{\partial\xi^2}\right)=0. \tag{33}$$

Transformace (32) je, jak patrno, nejobecnější transformací, jejíž dráhy tvoří rotační soustavu. Je to soustava (N), daná rovnicí tvaru (30), při čemž funkce $\varphi(\xi^2)$ vyhovuje podmínce (33).

Tato podmínka (33) je symetrická vzhledem k funkcím f, φ, je-li buď $\operatorname{tg}f(\xi^2)=\operatorname{tg}\varphi(\xi^2)$, t. j. triviální transformace, při níž $(M)\equiv(N)$, nebo $\frac{\partial\varrho}{\partial\xi^1}=0$, t. j. ϱ je toliko funkcí proměnné ξ^2, $\frac{\partial\varrho}{\partial\xi^2}=\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}\xi^2}$, načež soustava (N) připouští infinitesimální transformaci

$$c\varrho\left(\operatorname{tg}f(\xi^2)\frac{\partial\Phi}{\partial\xi^1}+\cos\xi^2\frac{\partial\Phi}{\partial\xi^2}\right), \tag{34}$$

a je-li také $\frac{\partial\varrho}{\partial\xi^2}=0$, jedná se o transformace (24), (31). Nebo konečně, je-li $\operatorname{tg}f(\xi^2)\frac{\partial\varrho}{\partial\xi^1}+\cos\xi^2\frac{\partial\varrho}{\partial\xi^2}=0$, t. j. je-li $\varrho=$ konst. integrálem rovnice (23), t. j. rovnicí soustavy (M). Podmínka (33) přechází v podmínku (28), při čemž soustava (N) připouští infinitesimální transformaci

$$c\sigma\left[(\operatorname{tg}f(\xi^2))\frac{\partial\Phi}{\partial\xi^1}+\cos\xi^2\frac{\partial\Phi}{\partial\xi^2}\right], \tag{35}$$

je-li $\sigma=$ konst. integrálem differenciální rovnice (29). Obecně možno říci: Kterákoli z rovnic (25), (26), (27), (28) je nutnou a postačující podmínkou, aby rotační soustava (M) daná differenciální rovnicí (23) připouštěla infinitesimální transformaci

$$a\varrho^p\left[(\operatorname{tg}\varphi(\xi^2))\frac{\partial\Phi}{\partial\xi^1}+\cos\xi^2\frac{\partial\Phi}{\partial\xi^2}\right] \tag{36}$$

a rotační soustava (N) daná differenciální rovnicí (29) infinitesimální transformaci

$$c\sigma^q \left[(\operatorname{tg} f(\xi^2)) \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^1} + \cos \xi^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^2} \right], \tag{37}$$

jsou-li $\varrho = \text{konst.}$, $\sigma = \text{konst.}$ integrály rovnic resp. (23), (29), při čemž p, q může býti též $= 0$. Naopak, aby byla splněna kterákoli z podmínek (25), (26), (27), (28), k tomu je nutné a stačí, aby uvažované infinitesimální transformace měly symboly (36), (37) a aby $\frac{\partial \varrho}{\partial \xi^1} \neq 0$. A toliko v případě $\frac{\partial \varrho}{\partial \xi^1} = 0$ je pro $\frac{\partial \varrho}{\partial \xi^2} = \frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}\xi^2} \neq 0$ podmínka (33) souměrná a jiná než (28).

Z rovnice (27) plyne pro transformaci (24):

Je-li soustava (N) soustavou isogonálních trajektorií soustavy (M), tu vzhledem k rovnici (21) buď identicky $\beta = \gamma$ a úhel $\alpha = 0$, t. j. triviální transformace, nebo vzhledem k (20) $k = m = 0$, t. j. rotační soustava invariantní netriviálních infinitesimálních transformací (24) je tenkráte a jen tenkráte soustavou isogonálních trajektorií rotační soustavy drah této transformace, jsou-li obě soustavy soustavami loxodrom (potom ovšem $\frac{\mathrm{d} f(\xi^2)}{\mathrm{d}\xi^2} = \frac{\mathrm{d}\,\varphi(\xi^2)}{\mathrm{d}\xi^2} = 0$).

Dráhy každé infinitesimální transformace, již připouští rotační soustava (M), netvoří však vždy rotační soustavu v našem slova smyslu. Příkladem toho je na př. rotace kolem osy plochy kulové, jejíž dráhy (rovnoběžky) sice zůstávají invariantními vzhledem k rotaci (je to jejich triviální transformace), nepříslušejí však uvažované kategorii infinitesimálních transformací, poněvadž pro ně je vesměs $\gamma = \frac{1}{2}\pi$, t. j. $\operatorname{tg}\gamma$ roste nade všechny meze. Symbol této transformace jest:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi^2}.$$

Příslušná podmínka, aby (M) připouštěla rotaci je ovšem identicky splněna pro každou rotační soustavu (M).[8])

Na Mercatorově mapě mějtež dráhy grupy infinitesimálních transformací rovnice $u = \varphi(u, v, t)$, $v = \psi(u, v, t)$, je-li t parametr jednotlivých transformací, $\overset{0}{u}, \overset{0}{v}$ hodnoty funkcí φ, ψ pro $t = 0$, a tyto funkce jsou spojité a spojitě differencovatelné, a směrnice libovolného elementu se transformuje podle rovnice

$$v' = \frac{\psi_{\overset{0}{u}} + \psi_{\overset{0}{v}} v'}{\varphi_{\overset{0}{u}} + \varphi_{\overset{0}{v}} v'}, \quad v' = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}, \quad \varphi_u = \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \text{ atd., při čemž } \begin{vmatrix} \varphi_u, & \varphi_v \\ \psi_u, & \psi_v \end{vmatrix} = 0.[9])$$

[8]) Dosaďme n. př. do rovnice (4) na str. 198, Serret-Scheffers, Lehrbuch d. Differential u. Integralrechnung, III.

[9]) Tamtéž, str. 213.

Jsou-li těmito drahami loxodromy, jest $u = \overset{0}{u} + t\cos\alpha$, $v = \overset{0}{v} + t\sin\alpha$, $\psi_u = 0$, $\psi_v = 1$, $\varphi_u = 1$, $\varphi_v = 0$, $v' = \overset{0}{v}'$.

Tudíž možno vysloviti větu:

Infinitesimální transformace na ploše kulové, jejíž dráhy tvoří libovolnou jednoparametrovou (obecně nerotační) soustavu loxodrom, má tu vlastnost, že integrální křivky každé differenciální rovnice, jež uvažovanou infinitesimální transformaci připouštějí, svírají s každou jednotlivou loxodromickou drahou úhel, který je konstantní vždy vzhledem ke všem transformacím příslušné grupy.

Jedná-li se o rotační soustavy loxodromických drah, jsou ovšem příslušnými integrálními křivkami, jak již dokázáno prve, opět loxodromy.

*

La géométrie de Cartan sur la sphère.

(Extrait de l'article précédent.)

Sur la sphère nous construisons une connexion de sorte que les vecteurs unitaires dans la direction des méridiens et des parallèles soient autoparallèles, les longueurs étant mésurées classiquement. Cette connexion est intégrable, demi-symétrique, métrique, et si R est le rayon de la sphère, ξ^1 la longueur géographique, ξ^2 la largeur géographique ($|\xi^2| < \frac{1}{2}\pi$ sauf l'avis contraire), la différentielle de l'arc est donnée par l'équation (1). Soit β l'angle d'un méridien et d'une courbe au point d'intersection. Les courbes K à courbure covariante constante k sont données par l'équation (3), où C est une constante arbitraire, c'est-à-dire par l'équation (4), différentielle par rapport aux variables ξ^1, ξ^2. Cette équation a des intégrales dans un intervalle, dans lequel $|R(k\xi^2 + C)| \leqq 1$, $|\xi^2| < \frac{1}{2}\pi$. (Nous nous bornons aux paramètres et valeurs réels.) Les courbes K constituent une analogie aux cercles de la géométrie classique, et de plus, elles se réduisent, pour $k = 0$ aux loxodrômes (c'est-à-dire aux droites de la géométrie loxodromique). Les loxodrômes, et seulement celles-ci, sont courbes autoparallèles.

Si nous appelons les variables $\sin\beta$, ξ^2 „les coordonnées de révolution" on voit, qu'il n'y a que des courbes K qui ont, par rapport aux coordonnées de révolution, l'équation linéaire. Pour une valeur déterminée des constantes C, k nous obtenons un système (K) des courbes K, invariant par rapport à la rotation autour de l'axe de la sphère.

Nous appelons ce système un système de révolution. La

représentation (K) de Mercator de ce système est donnée par l'équation (5) en coordonnées (de translation) $\sin\beta$, v. En général, une équation arbitraire en coordonnées $\sin\beta$, ξ^2 est une équation d'un système de révolution (M) des courbes M, et pour leur courbure covariante k (en général variable le long de M), nous avons l'équation (6), parfaitement analogue à l'équation correspondante de la géométrie classique. Nous obtenons une autre analogie aux cercles en considérant des courbes L, dont la représentation de Mercator est constituée par les cercles L. Elles sont les trajectoires orthogonales aux réseaux de loxodrômes passant par un point sur la sphère et leurs équations sont resp. (9), (10).

On peut démontrer, que des courbes données par les équations en coordonnées $\sin\beta$, ξ^2, sont orthogonalement symétriques par rapport aux certains plans des méridiens; en particulier, les courbes K jouissent de cette propriété. D'autre côté, en introduisant autres coordonnées de révolution, à savoir β, ξ^2, les équations en ces coordonnées représentent des courbes qui ne sont pas en général symétriques par rapport aux plans des méridiens, mais on peut toujours construire 1. d'autres équations, dont les courbes correspondantes sont symétriques aux courbes précédentes, et de plus, 2. des équations communes, en coordonnées $\sin\beta$, ξ^2, de ces deux espèces des courbes. L'équation (13) nous donne le rapport de la courbure classique $\varkappa$ de la représentation de Mercator M et de la courbure covariante k des courbes M. En passant, on voit, que les images K n'ont ni des points d'inflexion, ni des points de rebroussement. La courbe K, ayant, dans un point, avec une courbe M les mêmes β et k est une analogie au cercle osculateur de la géométrie classique.

Nous démontrons de plus, que, si $\left|\frac{1-RC}{Rk}\right|<\frac{1}{2}\pi$, $\left|\frac{1+RC}{Rk}\right|<\frac{1}{2}\pi$, les courbes consistent ou d'un seul arc fermé (pour $C=0$), ou d'une multitude des arcs, pas du tout fermés (pour $C\neq 0$). Au contraire, si $\left|\frac{1-RC}{Rk}\right|\geqq\frac{1}{2}\pi$ ou $\left|\frac{1+RC}{Rk}\right|\geqq\frac{1}{2}\pi$ la courbe K consiste de deux arcs, (ou d'un nombre pair d'arcs en général) s'approchant asymptotiquement vers l'un, ou vers tous les deux pôles, comme on voit, en considérant l'intégrale (15).

Étant donné un système de révolution (M), ses trajectoires isogonales N forment aussi un système de révolution (N). Les équations équivalentes (20), (21) expriment le rapport de ces deux systèmes, si m est la courbure covariante, γ l'angle, formé par n'importe quelle courbe N et le méridien à un point d'intersection.

Si l'on se sert d'une représentation, en portant la variable $\sin\beta$ sur l'axe B, ξ^2 sur l'axe X, $B \perp X$, on voit facilement, que l'image d'un système (M) (si nous nous bornons aux valeurs réelles) est un certain arc (M) situé dans le rectangle, pour lequel $|\sin\beta| \leqq 1$, $|\xi^2| \leqq \frac{1}{2}\pi$, l'image d'un système (K) est un segment (K) d'une droite. Deux arcs (M), (N) tangents représentent deux systèmes (M), (N), osculateurs le long d'une parallèle, et l'équation (22) de Clairaut (par rapport aux variables $\sin\beta$, ξ^2) donne des intégrales particulières, interprétées sur la sphère par des systèmes (K), osculants le système (M), c'est-à-dire l'intégrale singulière de l'équation (22).

La condition nécessaire et suffisante pour que le système (M) donné par l'équation (23) admette la transformation infinitésimale au symbole (24) est (25); les conditions (25), (26), (27), (28) sont équivalentes, si les courbes N du système (N) donné par l'équation (30), sont des trajectoires de la transformation considérée. Ces conditions sont symétriques par rapport aux valeurs, figurant dans les équations des systèmes (M), (N). De plus, on démontre le théorème: Le groupe des transformations infinitésimales sur la sphère, dont les trajectoires forment un système (en général non de révolution) des loxodrômes, jouit de la propriété, que les courbes intégrales de n'importe quelle équation différentielle, admettant le groupe considéré, forment un angle constant avec chacune trajectoire loxodrômique particulière.

ČÁST FYSIKÁLNÍ.

Zur Theorie der Diffusion radioaktiver Stoffe.

Reinhold Fürth, Prag.

Aus dem physikalischen Institut der deutschen Universität in Prag.

(Eingegangen am 1. Dezember 1936.)

Bringt man eine dünne Schicht einer radioaktiven, α-strahlenden Substanz A auf die Oberfläche einer Platte aus einer inaktiven, festen Substanz B, dann kann die Diffusion von A in B durch die Messung der zeitlichen Abnahme der Intensität der α-Strahlung über der Platte mittels einer Zählvorrichtung für α-Teilchen oder mittels einer Ionisationskammer untersucht werden. Die Theorie dieser von Hevesy und seinen Mitarbeitern angewendeten Methode wird entwickelt. Eine zweite Methode beruht darauf, daß in der Platte B eine langlebige, radioaktive Substanz C gleichmäßig verteilt ist, die ein kurzlebiges aktives Zerfallsprodukt A liefert; die Menge des aus der Plattenoberfläche ins Vakuum diffudierenden Substanz A wird gemessen. Auch für diese Versuchsanordnung wird die Theorie entwickelt, sodaß man aus den erwähnten Messungen den Diffusionskoeffizienten von A in B berechnen kann.

1.

Der Untersuchung der Diffusion radioaktiver in nicht aktive Stoffe kommt deshalb eine große Bedeutung zu, weil die Messung der Strahlungsintensität ein sehr bequemes und einfaches Hilfsmittel zur genauen Bestimmung sehr kleiner Konzentrationen der diffundierenden Substanz darstellt. Es kann daher insbesondere dann Verwendung finden, wenn die Diffusion sehr langsam erfolgt, sodaß in solchen Entfernungen von der Ausgangsschicht, die der Messung zugänglich sind, in Diffusionszeiten brauchbarer Länge die Konzentration der diffundierenden Substanz viel zu klein wäre, als daß sie mit den sonst in der Diffusionsmesstechnik üblichen Methoden gemessen werden könnte. Dieser Fall liegt bei der Diffusion in festen Körpern bei normalen Temperaturen vor. Gerade hier ist nun die experimentelle Bestimmung von Diffusionskoeffizienten und ihrer Abhängigkeit von der Temperatur von großer Bedeutung, da sich hieraus auf die Bindungsverhältnisse der Atombausteine im Krystallgitter des Festkörpers schließen läßt. Daher ist die Diffusion in festen Körpern in neuerer Zeit sehr häufig von verschiedenen Forschern untersucht worden. Hevesy

und seine Mitarbeiter[1]) haben mit großem Erfolg solche Untersuchungen mit radioaktiven Körpern als diffundierenden Substanzen ausgeführt. Dabei hat man auch noch den Vorteil durch Verwendung eines radioaktiven Isotops des inaktiven Festkörpers als diffundierende Substanz den Koeffizienten der „Selbstdiffusion" seiner Atome messen zu können.

Auf Ersuchen von Herrn Hevesy und seiner Mitarbeiter habe ich zum Teil bereits vor einigen Jahren, zum Teil in neuerer Zeit die Theorie für verschiedene Meßanordnungen ausgebaut, die zur Messung des Diffusionskoeffizienten bei den erwähnten Versuchen dienen können und sich zum Teil auch schon sehr gut bewährt haben. Sie mögen im Folgenden kurz mitgeteilt werden.

2.

Die radioaktivite α-strahlende Substanz A werde in einer sehr dünnen Schicht auf die Oberfläche einer Platte aus der zu untersuchenden inaktiven Substanz B gebracht. Die Reichweite der α-Strahlen von A in B sei gleich a. Mit einer geeigneten Szintillations- oder Zählrohrvorrichtung läßt sich die Anzahl n der α-Teilchen zählen, die pro Zeiteinheit aus der Flächeneinheit der Platte nach oben austreten. Da die radioaktiven Atome durch Diffusion allmählich in die Platte eindringen, wird n im Laufe der Zeit abnehmen, da diejenigen α-Teilchen vom Zähler nicht registriert werden, die in B eine größere Strecke als a zurücklegen müssten. Wir wollen die Funktion $n(t)$ ermitteln.

Befindet sich ein Atom von A zur Zeit seines Zerfalles in einer Tiefe x unter der Plattenoberfläche, dann wird das von ihm ausgeschleuderte α-Teilchen offenbar nur dann die Plattenoberfläche verlaßen können, wenn die beiden Ungleichungen

$$x \leqq a, \quad \cos\varphi \leqq x/a \tag{1}$$

erfüllt sind, worin φ den Winkel zwischen der α-Strahlrichtung und der Plattennormalen bedeutet. Da die Strahlung, die von einem kleinen Volumenelement $\mathrm{d}V$ ausgeht, nach allen Richtungen gleich stark ist, bedeutet die zweite der obigen Ungleichungen, daß von der Gesamtstrahlung aus $\mathrm{d}V$ nur der Bruchteil

$$\varepsilon = \frac{2\pi a\,(a - x)}{4\pi a^2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{a}\right) \tag{2}$$

in die Zählvorrichtung gelangt. Für ein Volumenelement an der Plattenoberfläche gilt

$$\varepsilon_0 = \tfrac{1}{2}. \tag{2'}$$

Auf Grund einer bekannten Formel der Diffusionstheorie ist die Menge $c(x, t)\,\mathrm{d}x$ von A, die in einer Schicht von der Fläche

Eins und der Dicke dx in der Tiefe x unter der Plattenoberfläche zur Zeit t enthalten ist, bezogen auf die Substanzmenge auf der Flächeneinheit der Oberfläche zur Zeit Null gleich

$$c(x, t)\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi D t}}\, e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\,dx, \tag{3}$$

worin D den Diffusionskoeffizienten von A in B bedeutet. Hiebei ist schon berücksichtigt, daß die Diffusion aus der Oberflächenschicht nur einseitig nach unten aber nicht nach oben erfolgen kann.

Da die Gesamtstrahlung aus dem Volumenelement dV der Größe c proportional ist, folgt wegen (1), (2), (2′) und (3)

$$f(t) = \frac{n(t)}{n(0)} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^a \varepsilon \,.\, c(x, t)\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi D t}}\int_0^a \left(1 - \frac{x}{a}\right) e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\,dx. \tag{4}$$

Führt man die Größe

$$\xi = \frac{a}{2\sqrt{Dt}} \tag{5}$$

ein, sowie die Gaußche Fehlerfunktion

$$\psi(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^y e^{-u^2}\,du, \tag{6}$$

dann erhält man nach einfacher Rechnung aus (4)

$$f = \psi(\xi) - \frac{1}{\xi\sqrt{\pi}}\,(1 - e^{-\xi^2}). \tag{7}$$

Nach (7) kann f als Funktion von ξ graphisch oder tabellarisch dargestellt werden. Ist dann f durch Messung bekannt, dann kann hieraus ξ und damit nach (5) bei bekanntem a das gesuchte D bestimmt werden.

Die Theorie kann offensichtlich auch dann angewendet werden, wenn nach Hevesy statt der α-Strahlung die „Rückstoßstrahlung" von A gemessen wird, indem die aus der Plattenoberfläche austretenden Rückstoßatome durch ein elektrisches Feld gesammelt werden und ihre Menge durch die von ihnen ausgehende α- oder β-Strahlung ermittelt wird.

3.

Wir wollen nun annehmen, daß die aus der Platte austretenden α-Teilchen nicht einzeln gezählt, sondern die Ionisation gemessen wird, die sie in dem Gasraum oberhalb der Platte hervorrufen.

Wir müssen dann zunächst berechnen, wieviele Ionen durch einen α-Strahl gebildet werden, der aus der Tiefe x unter der Plattenoberfläche unter dem Winkel φ gegen die Plattennormale abgeschossen wurde.

Es sei $\nu(z)\,\mathrm{d}z$ die Ionenzahl, die auf der Strecke zwischen z und $z + \mathrm{d}z$ vom Beginn der α-Strahlbahn gerechnet, erzeugt wird. Dabei soll das Stück der α-Strahlbahn, das im Gasraum verläuft, auf eine aequivalente Strecke in der Substanz B umgerechnet sein (durch Multiplikation mit dem Verhältnis der entsprechenden Reichweiten). Da die in B zurückgelegte Strecke gleich ist $x/\cos\varphi$, so ist die gesuchte Ionenzahl gleich

$$\int_{x/\cos\varphi}^{a} \nu(z)\,\mathrm{d}z = F(a) - F\left(\frac{x}{\cos\varphi}\right), \tag{8}$$

worin zur Abkürzung die Funktion

$$F(y) = \int_{0}^{y} \nu(z)\,\mathrm{d}z \tag{9}$$

eingeführt ist.

Da wieder die Bedingung (1) in Geltung ist, folgt mit Benützung von (8) an Stelle von (2)

$$\begin{aligned} \varepsilon(x) &= 2\pi \int_{0}^{\arccos\frac{x}{a}} \sin\varphi \left[F(a) - F\left(\frac{x}{\cos\varphi}\right)\right] \mathrm{d}\varphi : 4\pi \,.\, F(a) = \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{a}\right) - \frac{x}{2F(a)} \int_{x}^{a} \frac{1}{y^2} \,.\, F(y)\,\mathrm{d}y, \end{aligned} \tag{10}$$

während (2′) natürlich in Geltung bleibt. An Stelle von (4) folgt daher

$$f = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{0}^{a} \varepsilon(x) \,.\, c(x, t)\,\mathrm{d}x = \frac{4\xi}{a\sqrt{\pi}} \int_{0}^{a} \varepsilon(x)\, e^{-\frac{x^2}{a^2}\xi^2}\,\mathrm{d}x, \tag{11}$$

worin für ε aus (10) einzusetzen ist.

Ist die Funktion $\nu(z)$ bekannt, dann läßt sich zunächst aus (9) die Funktion $F(y)$ und daraus weiter nach (10) die Funktion $\varepsilon(x)$ auf numerischem oder graphischem Wege ermitteln. Aus (11) läßt sich dann schließlich die Funktion $f(\xi)$ auf die gleiche Weise berechnen und graphisch oder tabellarisch darstellen. Der weitere Vorgang ist dann der gleiche wie oben unter 2.

Eine besondere Vereinfachung der Formel (11) ergibt sich, wenn ν von z unabhängig ist (was im allgemeinen allerdings nicht der Fall sein wird). Aus (9) wird dann

$$F(y) = \nu \,.\, y \tag{9'}$$

und aus (10)

$$\varepsilon(x) = \tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2a} \log \frac{x}{a}, \tag{10'}$$

sodaß an Stelle von (11) gilt

$$f = \psi(\xi) - \frac{1}{\xi\sqrt{\pi}}\left[(1 - e^{-\xi^2})\,(1 + \log \xi) - \varphi(\xi)\right], \tag{12}$$

worin φ die transzendente Funktion

$$\varphi(\xi) = \tfrac{1}{2}\int_0^{\xi^2} \log u \,.\, e^{-u}\, du \tag{13}$$

bedeutet.

4.

Um die Rechenarbeit zu vermeiden, die mit der Auswertung der Resultate mittels der unter 3. entwickelten Formeln verbunden ist, kann der Versuch so abgeändert werden, daß durch ein geeignetes Blendensystem von allen aus der Platte austretenden Strahlen nur die in die Ionisationskammer eintreten können, die die Platte nahezu normal zu ihr verlaßen haben. Die Eintrittsblende in die Kammer habe die Entfernung b von der Platte (wiederum in aequivalentem Maß gemessen).

An Stelle von (10) gilt dann einfacher

$$\frac{\varepsilon(x)}{\varepsilon_0} = \frac{F(a) - F(x + b)}{F(a) - F(b)},$$

sodaß statt (11) die folgende Beziehung herauskommt

$$f = \frac{1}{F(a) - F(b)}\left\{F(a) \,.\, \psi(\xi) - \frac{2\xi}{a\sqrt{\pi}}\int_0^a F(x + b)\, e^{-\frac{x^2}{a^2}\xi^2}\, dx\right\}, \tag{15}$$

die eine leichtere Auswertung ermöglicht.

5.

Während bei den im Vorhergehenden behandelten Fällen die Diffusion einer radioaktiven Substanz aus einer Oberflächenschicht ins Innere eines inaktiven Festkörpers untersucht wurde, soll nun die Diffusion einer radioaktiven Substanz aus dem Festkörper betrachtet werden. Der feste Körper B bestehe aus einer

Platte, deren eine ebene Begrenzungsfläche an ein Vakuum angrenze, in das hinein die Diffusion des Stoffes A erfolge. Durch eine entsprechende Umhüllung der Platte an den anderen Begrenzungsflächen sei dafür gesorgt, daß durch diese keine Diffusion von A erfolgen kann. Die Dicke der Platte sei so groß gewählt, daß während der Beobachtungszeit praktisch keine Änderung der Konzentration von A an der vom Vakuum abgewendeten Seite der Platte zu beobachten ist. Gemessen werde die Menge Q von A, die aus der Flächeneinheit der Begrenzungsfläche der Platte in der Zeiteinheit ins Vakuum diffundiert. Die Substanz A soll dauernd aus einer dritten Substanz C entstehen, die den Körper B mit konstanter Konzentration erfüllt. Es werde angenommen, daß die Zerfallszeit von C gegenüber der von A sehr groß sei, sodaß während der Beobachtungszeit keine Änderung in der gleichmäßigen Verteilung von C zu bemerken ist. Es findet demnach auch keine Diffusion von C in A statt.

Entsprechend den oben formulierten Bedingungen wollen wir annehmen, daß der Körper A den positiven Halbraum vollkommen erfülle und an der Ebene $x = 0$ an das Vakuum angrenze. Die konstante Konzentration von C sei C, die variable Konzentration von A sei $c(x, t)$. Die Zerfallskonstante von C sei Λ, die von A sei λ. Das Verhältnis der Atomgewichte von A und C sei gleich α.

In einer unendlich dünnen Schicht von der Dicke $\mathrm{d}x$ und der Fläche Eins beträgt der Massenzuwachs von A infolge des Zerfalls von C in der Zeit $\mathrm{d}t$: $\Lambda\alpha C \,.\, \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$ und der Massenverlust infolge seines eigenen Zerfalles: $\lambda c\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$. Der Massenzuwachs von A infolge seiner Diffusion beträgt, wie aus der Diffusionstheorie bekannt ist, da c nur von einer Koordinate x abhängt: $D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$. Der gesamte Massenzuwachs von A ist also schließlich

$$\left(D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \alpha\Lambda C - \lambda c\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \tag{16}$$

Anderseits muß dieser auch gleich sein:

$$\frac{\partial c}{\partial x}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \tag{17}$$

Durch Gleichsetzen der Ausdrücke (16) und (17) ergibt sich die Differentialgleichung

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \alpha\Lambda C - \lambda c, \tag{18}$$

die unter der Randbedingung

$$c = 0 \text{ für } x = 0 \tag{17}$$

zu integrieren ist.

Wir wollen uns mit der stationären Lösung dieser Gleichung begnügen, die sich ohneweiteres auf die zu behandelnde Aufgabe anwenden läßt, wenn man mit der Messung von Q so lange wartet, bis sich stationäre Verhältnisse eingestellt haben. Es gilt dann an Stelle von (18) die Gleichung

$$D\frac{\mathrm{d}^2c}{\mathrm{d}x^2} + \alpha\Lambda C - \lambda c = 0, \tag{20}$$

deren allgemeine Lösung lautet

$$c = Ae^{\sqrt{\frac{\lambda}{D}}x} + Be^{-\sqrt{\frac{\lambda}{D}}x} + \frac{\alpha\Lambda C}{\lambda}. \tag{21}$$

Da c sicherlich überall endlich sein muß, gilt zunächst $A = 0$ und weiter wegen der Randbedingung (10): $B = -\frac{\alpha\Lambda C}{\lambda}$. Aus (21) wird daher

$$c = \frac{\alpha\Lambda C}{\lambda}(1 - e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{D}}x}). \tag{22}$$

Das gesuchte Q, die Diffusionsstromdichte an der Ebene $x = 0$ ergibt sich aus

$$Q = D\left(\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}\right)_{x=0} \tag{23}$$

mit Benützung von (22) zu

$$Q = \frac{\alpha\Lambda C}{\sqrt{\lambda}} \cdot \sqrt{D}. \tag{24}$$

Da α, λ, Λ und C bekannt sind, läßt sich durch Messung von Q auch der gesuchte Diffusionskoeffizient D bestimmen.

Prag, im November 1936.

*

K teorii difuse radioaktivních látek.

(Obsah předešlého článku.)

Vpravíme-li tenkou vrstvu nějaké radioaktivní látky A, vysílající záření α, na povrch desky z neaktivní pevné látky B, pak můžeme vyšetřovati průběh difuse A do B tím, že měříme časové klesání intensity záření α nad deskou buď nějakým zařízením

pro počítání částic α nebo ionisační komorou. Této metody užil Hevesy a jeho spolupracovníci; její teorie je předmětem předešlého článku. Jiná metoda záleží v tom, že se v celé desce B rozdělí stejnoměrně nějaká dlouhodobá radioaktivní látka C, jejímž rozpadem vzniká aktivní produkt A, který se rychle rozpadá; měří se množství látky A difundující z jedné rovinné stěny desky do okolního vakua. Také teorie tohoto pokusu je podána, takže možno z těchto měření vypočísti koeficient difuse látky A do B.

Détermination expérimentale du coefficient apparent de restitution tangentielle.

Zdeněk Horák, Praha.

(Reçu le 16 décembre 1936.)

Dans le travail *Théorie générale du choc dans les systèmes matériels*,[1]) j'ai établi les lois générales du choc qui entraînent comme conséquence l'existence théorique de quelques phénomènes nouveaux.[2]) Il s'en suit que, dans le cas du choc de deux corps en même temps élastiques et parfaitement rugueux, non seulement la composante normale de la vitesse relative des points de contact des deux corps, mais aussi la composante tangentielle, changent de signe et diminuent dans un certain rapport ce qui est en contradiction avec la supposition habituelle que la composante tangentielle après le choc doit être nulle. J'appelle *coefficient de restitution tangentielle* le rapport, dans lequel diminue la composante tangentielle, pour le distinguer du coefficient de restitution de Newton que je désigne comme *coefficient de restitution normale.*

Dans le présent travail, je déduis à nouveau d'une manière simple les formules (2), (3), (6), (7) que j'ai données primitivement dans le travail cité plus haut (voir p. 63 et 61). Les équations (2) définissent le mouvement après le choc d'un marteau sur un disque tournant autour d'un axe fixe; les formules (3), (6), (7) donnent celui d'un disque circulaire après le choc sur un plan horizontal fixe dans le cas où le disque se meut, avant le choc, dans un plan vertical fixe, l'axe du disque ayant une direction horizontale constante. On suppose, en outre, que les deux corps sont parfaitement rugueux, leur élasticité étant, en général, imparfaite. C'est sur les formules (3), (6), (7) que j'ai fondé une méthode de mesure du coefficient de restitution tangentielle. La façon de procéder

[1]) Journal de l'Ecole Polytechnique, 2e série, **28** (1931), 15—64.

[2]) Voir aussi mes travaux: *Les principes d'une théorie générale du choc*, Comptes rendus Acad. Sc. Paris, **188** (1929), 226—228 et *L'effet du frottement de pivotement sur le choc des corps élastiques*, Comptes rendus Acad. Sc. Paris, **200** (1935), 897—899.

est la suivante: On abandonne le disque à l'action de la pesanteur après l'avoir fait tourner autour de son axe horizontal. Le disque heurte verticalement une plaque horizontale bien fixée, en tournant avec la vitesse angulaire ω_0 (la verticalité du mouvement de chute a été garantie en s'aidant d'un appareil spécialement construit pour faire tourner le disque et pour l'abandonner ensuite à l'action de la pesanteur sans lui donner une impulsion inadmissible). Après le choc, le disque rebondit avec une certaine vitesse dans une direction oblique, sa vitesse angulaire ω_1 étant donnée par l'expression

$$\omega_1 = \frac{\frac{R^2}{a^2} - e}{\frac{R^2}{a^2} + 1} \omega_0,$$

où e désigne le coefficient apparent de restitution tangentielle, a étant le rayon géométrique du disque et R son rayon de giration. Donc le rapport ω_1/ω_0 est de même signe que la différence $R^2/a^2 - e$ ce qui rend possible de procéder comme il suit: On change, d'une manière convenable, la répartition de la masse du disque — et par conséquent aussi la quantité R — jusqu'à ce que l'on trouve deux valeurs du rayon de giration R_1 et R_2 peu différentes pour lesquelles le rapport ω_1/ω_0 prend deux valeurs de signe contraire ce qu'on établit par l'observation. En raison de l'équation ci-dessus, il en est de même avec la différence $R^2/a^2 - e$ ce qui veut dire que la valeur du coefficient e est comprise entre R_1^2/a^2 et R_2^2/a^2. On peut donc poser approximativement

$$e = \frac{1}{2a^2}(R_1^2 + R_2^2)$$

et l'on est sûr que l'écart entre cette valeur moyenne et la valeur réelle de e est inférieur à

$$\left| \frac{R_2^2 - R_1^2}{2a^2} \right|.$$

Le changement du rayon de giration a été effectué de deux manières différentes, suivant que e était inférieur ou supérieur à 0,5, car le rapport R^2/a^2 est, pour un disque homogène, égal à 0,5. Dans le premier cas, il fallait diminuer R, en mettant sur l'axe du disque des plaques circulaires en laiton plus ou moins faibles et de différents diamètres (naturellement toujours plus petites que le disque). En cas contraire, où $e > 0{,}5$, il était nécessaire d'agrandir R, en découpant autour du centre du disque une ouverture circulaire. On obtenait ainsi des anneaux de plus en plus petites

étroits dont la largeur était diminuée jusqu'à ce que la rotation après le choc devienne de sens contraire à celle d'avant le choc.

Il faut remarquer que nos formules ont été déduites, en supposant que le disque et la plaque étaient parfaitement rugueux. Donc les conclusions précédentes ne sont vraies que pour ce cas limite de corps parfaitement rugueux qui n'existent point en réalité. Cependant, il faut prétendre quelles restent valables — au moins approximativement — dans le cas de corps assez rugueux pour lesquels le glissement pendant le choc est négligeable. Dans ce cas, on peut s'attendre à ce que la composante tangentielle de la vitesse du point de contact du disque après le choc soit également de signe contraire à celle d'avant le choc, mais qu'elle diminue dans une plus forte proportion que si le coefficient de frottement était infini. Par conséquent, la quantité e éprouve une diminution apparente qui sera évidemment d'autant plus faible que la vitesse angulaire du disque avant le choc sera plus petite et que la hauteur de chute et le coefficient de frottement de glissement seront plus grands. Conformément à la dernière de ces trois conditions, j'ai choisi comme une des substances, constituant le disque et la plaque, pour toutes les expériences, le liège ou la gomme élastique, l'autre étant bois, laiton, ébonite etc. Les pourtours des disques ont été — suivant le besoin — rendus assez rugueux au moyen d'un limage approprié. Dans ces conditions, on peut supposer que les valeurs de e que j'ai obtenues par la mesure et que j'appelle coefficients apparents de restitution tangentielle, ne diffèrent pas beaucoup des valeurs limites, correspondant aux corps parfaitement rugueux.

En appliquant la méthode, que je viens d'exposer, en plus de vingt cas, j'ai obtenu pour le coefficient apparent de restitution tangentielle des valeurs intermédiaires entre 0,2 et 0,7. J'ai réuni les résultats individuels dans les deux tableaux **A** et **B** où j'ai indiqué: les substances et les dimensions du disque et de la plaque, les valeurs R_1^2/a^2, R_2^2/a^2 et le coefficient apparent e'.

En somme, les résultats obtenus montrent qu'il y a accord complet entre les prévisions de ma théorie et l'expérience et que par conséquent la supposition habituelle, mentionnée plus haut, n'est pas correcte. Dans la généralité des cas, les coefficients apparents de restitution tangentielle obtenus sont exacts de 1 à 4% près, ce qui est une précision satisfaisante en raison de la simplicité de notre méthode et de ce fait que ces valeurs dépendent de la rugosité des corps expérimentés. Il faut, en outre, souligner que les valeurs publiées dans le présent travail sont les premiers résultats expérimentaux quantitatifs de ce genre.

1. Théorie élémentaire de la méthode de mesure.

Dans ma théorie du choc, j'ai établi quelques lois générales relatives au choc dans les systèmes matériels lesquelles, interprétées dans l'hyperespace (variété) riemannien des configurations du système, ont une forme analogue aux lois valables pour le choc d'un point matériel sur un plan. Les conséquences de ces lois générales du choc se trouvent, dans le cas de corps parfaitement mous ou de ceux parfaitement polis, en accord complet avec toutes nos connaissances théoriques et expérimentales. Cependant, pour le choc de corps en même temps élastiques et parfaitement rugueux, j'obtiens des résultats qui sont en contradiction avec la supposition habituelle qu'après le choc de deux corps parfaitement rugueux, la composante tangentielle de la vitesse relative des points de contact des deux corps est *nulle*. Dans la suite, je vais montrer que cette supposition n'est pas fondée, je vais la remplacer par une hypothèse plus générale et ensuite je déduirai, par des raisonnements élémentaires, les lois du choc correspondantes.

Si deux surfaces rugueuses de deux solides se rencontrent en un point, la vitesse relative de leurs points de contact n'étant pas perpendiculaire au plan tangentiel commun, la percussion, qu'éprouvent les deux solides, n'est plus perpendiculaire à ce plan. Lors du choc prend donc naissance, outre une déformation normale (compression) une déformation tangentielle des deux solides. Quant à la compression, elle s'accroît jusqu'à ce que la composante normale de la vitesse relative des points de contact s'annulle, puis les deux corps commencent à reprendre progressivement leur forme primitive. Au cours de cette restitution, les deux corps continuent leur action mutuelle, de sorte que la composante normale de la vitesse relative change de signe. Il en est de même avec la composante tangentielle de la vitesse relative des points de contact. A mesure que la compression se poursuit, la pression normale entre les corps croît, ainsi que la force tangentielle, due au frottement de glissement. Cela entraîne comme conséquence une déformation tangentielle progressive des deux corps, laquelle fait naître des forces tangentielles, agissant sur les solides, de sorte que la composante tangentielle de la vitesse relative diminue. Si le frottement est assez grand, la dite composante s'annulle pendant la durée du contact, avant la fin du choc. Dès ce moment, les deux solides commencent à reprendre leur forme primitive ce que j'appelle *restitution tangentielle*. Au cour de cette restitution, les solides sont encore en contact ce qui a pour conséquence, que la composante tangentielle de la vitesse relative des points de contact prend — à la fin du choc — une direction opposée à celle d'avant le choc. Donc, la supposition habituelle que les points de contact des

deux corps parfaitement rugueux ont — après le choc — la même vitesse tangentielle ne peut être vraie que si les corps sont parfaitement mous. Dans tous les autres cas, où il n'est pas permis de négliger l'élasticité tangentielle, elle apparaît fausse.

Le cas, où le frottement est assez faible pour que la composante tangentielle de la vitesse relative ne s'annulle pas avant la fin du choc, constitue un problème assez compliqué dont je ne parlerai pas dans ce qui suit. Au contraire, je supposerai d'abord que le coefficient de frottement est, mathématiquement parlant, infini. Cela veut dire que le glissement d'un corps contre l'autre lors du choc est infiniment petit. Cette supposition faite, on est sûr que la composante tangentielle de la vitesse relative s'annulle pendant la durée du choc et, en raison de la restitution tangentielle, change de signe après le choc. Or, on sait que la composante normale de la vitesse relative, d'après la règle connue de Newton, change de signe et diminue dans un certain rapport, appelé coefficient de restitution. On peut s'attendre à ce que, dans le cas de corps parfaitement rugueux, l'effet du choc sur la composante tangentielle soit analogue.

Cela me conduit à énoncer l'hypothèse que *la composante tangentielle de la vitesse relative des points de contact des deux corps parfaitement rugueux change de signe, après le choc, et se réduit dans un certain rapport que j'appelle coefficient de restitution tangentielle*, ou simplement *coefficient tangentiel*, en désignant celui de Newton comme *coefficient de restitution normale* (ou bien *coefficient normal*).

Comme on sait, la valeur du coefficient normal dépend non seulement des substances des corps se heurtant mais aussi de leur forme, de leurs dimensions et de leur vitesse relative avant le choc. Cela conduit à penser qu'il en est de même pour le coefficient tangentiel ce qui impose d'admettre qu'en général les deux coefficients de restitution ont des valeurs différentes.

Le cas limite des corps parfaitement rugueux ne peut pas être réalisé physiquement que d'une façon approchée. Si le frottement des corps suffit pour arrêter le glissement de l'un corps contre l'autre en un temps assez court, la composante tangentielle changera évidemment de signe, mais elle se réduira, à cause d'une perte d'énergie mécanique, dans une plus grande mesure que si les corps étaient parfaitement rugueux. Par conséquent, la valeur du coefficient tangentiel éprouve une diminution apparente et, dans le cas considéré du choc de corps imparfaitement rugueux, je vais donc appeler le rapport des grandeurs absolues des composantes tangentielles de la vitesse relative après et avant le choc *coefficient apparent de restitution tangentielle*. Je désignerai comme coefficient *vrai* sa valeur limite, correspondant au cas idéal de la rugosité parfaite. La différence entre les coefficients vrai et apparent sera d'autant

plus petite que la percussion normale entre les deux corps sera plus grande et que la composante tangentielle de la vitesse relative, au commencement du choc, sera plus faible. De plus, on s'assure aisément que la valeur du coefficient tangentiel apparent dépend aussi de la préparation mécanique des surfaces des deux corps (qui commande le coefficient de frottement) et de la composante normale de la vitesse relative des points de contact.

Pour faire bien connaître la signification physique de notre idée fondamentale, je traiterai, comme première application, le cas très simple du *choc d'un marteau à face plane sur un disque à axe fixe*, où le phénomène essentiel est particulièrement marqué. Supposons l'axe du disque fixé dans l'espace et imaginons un marteau tournant autour d'un axe fixe, parallèle à celui du disque. De plus, le plan de la face de choc du marteau contient l'axe de rotation du marteau, de façon que la vitesse du marteau, au moment du choc, soit dirigée vers le centre du disque. On peut vérifier la correction de ce montage, en constatant que le choc du marteau sur le disque en repos ne produit aucune rotation du disque. Faisons alors tourner le disque avec la vitesse angulaire ω_0 et supposons que le marteau heurte le disque avec la vitesse angulaire Ω_0. Donc les composantes normale v_0 et tangentielle u_0 de la vitesse relative des points de contact s'écrivent:

$$v_0 = b\Omega_0, \quad u_0 = a\omega_0,$$

où b désigne la distance du point de contact à l'axe du marteau, a étant le rayon géométrique du disque. Si les deux corps sont parfaitement rugueux, les raisonnements précédents entraînent les relations:

$$v_1 = -fv_0, \quad u_1 = -eu_0, \tag{1}$$

où f et e sont les coefficients normal et tangentiel de restitution, les indices 0 et 1 désignant respectivement les vitesses avant et après le choc. Il s'en suit

$$\Omega_1 = -f\Omega_0, \quad \omega_1 = -e\omega_0. \tag{2}$$

Donc le marteau rebondit après le choc et de même le disque commence à tourner en sens inverse avec la vitesse réduite dans le rapport e. C'est déjà en 1928 que j'ai confirmé ce résultat théorique par une expérience faite sur un disque en gomme élastique et un marteau en bois dur (Voir fig. 1), comme je l'ai mentionné dans le travail cité plus haut (p. 64[1]). Malheureusement, à cause du frottement inévitable dans le coussinet de l'axe du disque, ce cas simple ne se prête guère à la détermination expérimentale du coefficient tangentiel.

Je vais donc considérer le *choc imparfaitement élastique d'un disque circulaire à axe libre sur un plan parfaitement rugueux.*

Le cas général d'un tel choc se trouve déja résolu dans mon travail antérieur, que je viens de citer (no 11[1]) et je me borne alors au cas particulier où le disque de rayon a et de masse m se meut dans un plan vertical fixe, son axe gardant une direction horizontale fixe (perpendiculaire au dit plan vertical). La masse du disque est distribuée d'une manière symétrique par rapport à son axe, de sorte que son centre de gravité est situé sur cet axe. Prenons le point de contact O du disque avec le plan horizontal

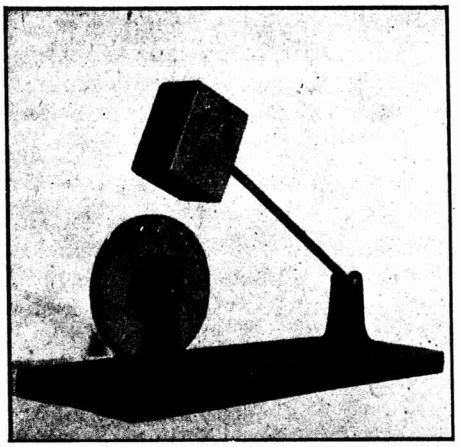


Fig. 1. Appareil pour l'étude du choc d'un marteau sur un disque à axe fixe.

Fig. 2. Appareil A pour l'expérimentation des disques.

fixe, au moment du choc, pour l'origine du système de coordonnées rectangulaires OXY. Les deux axes OX et OY sont situés dans le plan vertical du disque, l'axe OY étant orienté vers le haut. Par suite, l'axe OX se confond avec la ligne d'intersection du plan du disque avec celui que le disque va choquer. Les composantes horizontale et verticale de la vitesse de translation du centre G du disque sont, avant le choc, u_0 et v_0. Si l'on désigne de plus par ω_0 la vitesse angulaire de la rotation du disque autour de son axe avant le choc, et par u_1, v_1, ω_1 les mêmes quantités après le choc, la composante normale de la vitesse du point de contact après le choc s'écrit, en vertu de la règle de Newton,

$$v_1 = -fv_0 \qquad (3)$$

et notre hypothèse entraîne pour la composante tangentielle une relation analogue

$$u_1 + a\omega_1 = -e\,(u_0 + a\omega_0). \tag{4}$$

Ces deux équations ne suffisent pas naturellement pour déterminer les trois inconnues u_1, v_1, ω_1 et il faut chercher la troisième relation nécessaire; pour la trouver, on raisonne ainsi: Le point d'application de toutes les forces de percussion, agissant sur le disque lors du choc, se trouve au point de contact. Alors, le moment de la percussion résultante par rapport au point de contact est nul. Or, d'après un théorème bien connu, la quantité de mouvement perdue pendant une percussion et la percussion appliquée sont en équilibre et par suite le moment de la quantité de mouvement du disque par rapport au point de contact ne change pas par le choc. En exprimant que le moment de la quantité de mouvement du disque par rapport à son point de contact (c'est-à-dire l'origine de coordonnées O) après le choc est égal à celui avant le choc, nous obtiendrons la relation cherchée. On s'assure aisément qu'en désignant par L le moment d'inertie du disque relatif à son axe de rotation, cette relation est la suivante

$$L\omega_1 - mau_1 = L\omega_0 - mau_0, \tag{5}$$

car le moment de la quantité de mouvement, due à la rotation du disque autour de son axe, est le même par rapport à toutes les droites parallèles à cet axe et donc égal à celui calculé par rapport à l'axe de rotation du disque elle-même. En résolvant les équations (4) et (5), on obtient

$$u_1 = \frac{(ma^2 - Le)\,u_0 - La\,(1+e)\,\omega_0}{L + ma^2}, \tag{6}$$

$$\omega_1 = \frac{-ma\,(1+e)\,u_0 + (L - ma^2e)\,\omega_0}{L + ma^2}. \tag{7}$$

Les trois relations (3), (6), (7) déterminent les composantes de la vitesse du centre de gravité et la vitesse angulaire du disque à la fin du choc. Elles concordent parfaitement avec les équations que j'ai déduites, pour le cas envisagé, sur la base de ma théorie générale.[3]) Dans les équations (6) et (7) intervient la masse du disque m qui peut être éliminée, en introduisant le rayon de giration

$$R = \sqrt{\frac{L}{m}},$$

ce qui donne

$$u_1 = \frac{(a^2 - R^2e)\,u_0 - R^2\,(1+e)\,a\omega_0}{R^2 + a^2}, \tag{8}$$

[3]) Voir [1]) p. 61. Il n'y a qu'une différence de notation: Pour arriver aux équations, que j'ai données dans le travail cité, il suffit dans (3), (6), (7) de remplacer u, v, ω par ξ, η, $\dot{\varphi}$.

$$\omega_1 = \frac{-(1+e)\,au_0 + (R^2 - a^2e)\,\omega_0}{R^2 + a^2}. \tag{9}$$

Les relations (3), (8), (9) définissent le mouvement du disque immédiatement après le choc, dans le cas particulier que nous avons considéré. Tandis que la relation (3) traduit le résultat bien connu, celles (8) et (9) diffèrent essentiellement des équations habituelles qui correspondent à la supposition que la restitution tangentielle n'existe pas. On obtient évidemment les équations habituelles, si l'on pose, dans (8) et (9), $e = 0$ d'où l'on tire les relations

$$u_1 = \frac{a^2u_0 - R^2a\omega_0}{R^2 + a^2}, \qquad \omega_1 = \frac{-au_0 + R^2\omega_0}{R^2 + a^2} \tag{10}$$

qui avec (3) expriment les lois du choc conformes à l'ancienne théorie.

2. Déscription de la méthode.

Le coefficient de restitution tangentielle n'a pas été mesuré, jusqu'à présent, il faut alors chercher d'abord une méthode convenable, pour y avenir. Il n'y a pas naturellement de corps parfaitement rugueux et il ne peut donc s'agir que d'une mesure du coefficient *apparent*. Nos formules ont été établies pour le cas limite d'une rugosité parfaite, elles restent néanmoins valables encore pour le mouvement réel du disque, si l'on y remplace le coefficient vrai de restitution tangentielle par celui apparent et si les conditions d'expérience sont, bien entendu, aussi voisines que possible de celles que j'ai fixées au no **1**. Sous ces réserves, nous pouvons donc considérer les formules (3), (8), (9) comme exactes et les utiliser pour la mesure du coefficient apparent de restitution tangentielle que je vais désigner par e'. Ces formules, en général assez compliquées, se simplifient notablement par le choix convenable d'un mouvement particulier du disque avant le choc. A savoir: si le disque se meut, sans tourner, dans une direction oblique, on a

$$\omega_0 = 0, \quad u_0 \neq 0$$

et les formules (8) et (9) se réduisent aux suivantes:

$$u_1 = \frac{a^2 - R^2e'}{R^2 + a^2}\,u_0, \tag{11}$$

$$\omega_1 = -\frac{1+e'}{R^2 + a^2}au_0. \tag{12}$$

Si, au contraire, on abandonne le disque à l'action de la pesanteur, après l'avoir fait tourner autour de son axe horizontal, il va heurter verticalement le plan, en tournant avec la vitesse ω_0. On a donc

$$u_0 = 0, \ \omega_0 \neq 0$$

et les équations (8) et (9) prennent la forme:

$$u_1 = -\frac{1+e'}{R^2+a^2} R^2 a \omega_0, \tag{13}$$

$$\omega_1 = \frac{R^2 - a^2 e'}{R^2 + a^2} \omega_0. \tag{14}$$

Les formules (11), (12) et (13), (14) sont du même type et pour juger, lequel des deux cas est préférable à l'autre, il faut se rendre compte que, pour un disque réel, on a toujours

$$R < a, \ e' < 1. \tag{15}$$

Donc, en raison de (11) et (12)

$$\frac{u_1}{u_0} > 0, \quad \frac{\omega_1}{u_0} < 0,$$

c'est-à-dire qu'au premier cas ni la composante tangentielle de la vitesse de translation ni celle de rotation ne peut s'annuler après le choc. On voit également que d'après (13), dans le second cas

$$\frac{u_1}{\omega_0} < 0,$$

tandis que l'équation (14), que l'on peut mettre sous la forme

$$\omega_1 = \frac{\frac{R^2}{a^2} - e'}{\frac{R^2}{a^2} + 1} \omega_0, \tag{16}$$

montre qu'il suffit de remplir la condition

$$\frac{R^2}{a^2} = e' \tag{17}$$

pour faire disparaître la rotation du disque après le choc. Or, cette condition est, en raison des relations (15), bien réalisable, car on a

$$0 < \frac{R^2}{a^2} < 1, \ 0 < e' < 1.$$

On voit de plus que d'après (16)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\omega_1}{\omega_0} > 0 \text{ lorsque } \frac{R^2}{a^2} > e', \\ &\frac{\omega_1}{\omega_0} < 0 \text{ lorsque } \frac{R^2}{a^2} < e'. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Pour un disque circulaire homogène

$$R = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

et donc la rotation après le choc est de même signe que celle d'avant le choc, si le coefficient tangentiel

$$e' < \tfrac{1}{2};$$

si au contraire

$$e' > \tfrac{1}{2},$$

le disque tourne, après le choc, en sens inverse à celui d'avant le choc. Si enfin

$$e' = \tfrac{1}{2},$$

la rotation disparaît et le disque homogène rebondit, après le choc, dans une direction oblique, tout en restant dans le même plan. D'une manière analogue, dans le cas général d'un disque quelconque, dont on connaît le rayon de giration, la grandeur et le sens de la rotation après le choc nous permettent de déduire la grandeur de e', comme nous allons le montrer.

Si l'on pourrait changer le rayon de giration R d'un disque, sans changer son rayon géométrique a, d'une manière continue, il suffirait de modifier la répartition de sa masse jusqu'à ce que le disque, après la chute verticale sur une plaque horizontale, rebondisse sans tourner et cela fait, calculer simplement le coefficient e' d'après l'équation (17). En realité, il est évidemment impossible de produire une variation du moment d'inertie aussi petite que l'on désire et, de plus, on ne saurait distinguer une rotation très faible du mouvement purement translatoire. Au surplus, le procédé mentionné ne donne pas la possibilité de juger la précision de mesure.

Il a donc fallu baser la méthode de mesure du coefficient apparent de restitution tangentielle sur les relations (18) et j'ai choisi le procédé suivant: On donne au disque une rotation faible initiale et on l'abandonne à l'action de la pesanteur, de sorte que le disque frappe verticalement une plaque horizontale, et l'on observe le sens de sa rotation après le rebondissement. Pour éliminer l'influence d'une dissimétrie éventuelle, comme par exemple une légère inclinaison de la plaque ou une incidence légèrement oblique, on repète l'expérience, en changeant le sens de la rotation initiale du disque. Enfin, on détermine le moment d'inertie ou bien directement le rayon de giration du disque dont je parlerai ultérieurement. Lorsqu'on observe le changement du sens de la rotation après le rebondissement (et cela dans les deux cas), on est sûr, en vertu des relations (18), que

$$\frac{R^2}{a^2} < e'.$$

Dans ces circonstances, on modifie la répartition de la masse du disque de telle sorte que son rayon de giration augmente et l'on reprend l'étude. On continue pareillement jusqu'à ce que le rapport ω_1/ω_0 change de signe, c'est-à-dire devienne positif. Par ce procédé, nous obtiendrons deux valeurs du rayon de giration R_1 et R_2 telles qu'en raison de (18), on ait:

$$\frac{R_1^2}{a^2} < e' < \frac{R_2^2}{a^2}. \tag{19}$$

Sous la supposition que ces deux valeurs soient suffisamment voisines, on peut prendre pour e' leur moyenne

$$e' = \frac{R_1^2 + R_2^2}{2a^2} \tag{20}$$

et l'on est sûr que l'écart entre la valeur juste de e' et cette moyenne est inférieur à

$$\frac{R_2^2 - R_1^2}{2a^2}.$$

Au surplus, si les vitesses des deux rotations après le choc sont approximativement égales entre elles, on peut admettre avec vraisemblance que la valeur réelle de e' est plus voisine de la moyenne arithmétique que d'une des valeurs limites, intervenant dans l'inégalité (19). On peut donc apprécier l'erreur probable ε de la détermination de e' au quart de la différence des valeurs limites, c'est-à-dire

$$\varepsilon = \pm \frac{R_2^2 - R_1^2}{4a^2}. \tag{21}$$

Le raisonnement que nous venons de faire a été développé en supposant que la rotation du disque après le choc soit de sens opposé à celle d'avant le choc. Dans le cas contraire, lorsque le disque tourne, après le rebondissement, dans le sens primitif, on sait qu'en vertu de (18)

$$\frac{R^2}{a^2} > e'$$

et il est donc nécessaire de diminuer son rayon de giration jusqu'à ce que la rotation après le choc change de sens. Cela fait, on aura, en raison de (18),

$$\frac{R^2}{a^2} < e',$$

de sorte qu'on aboutit encore ici à une relation du type (19) et l'on évalue le coefficient e' de la manière exposée antérieurement.

Il reste à indiquer le procédé dont je me suis servi pour évaluer le rayon de giration du disque. La formule bien connue, relative à la durée d'oscillation τ d'un pendule composé, peut se mettre à la forme

$$\tau = \frac{\pi r}{\sqrt{gl}},$$

r étant le rayon de giration du pendule par rapport au couteau distant de l du centre de gravité et g désignant l'accélération due à la pesanteur. Il s'en suit, conformément au théorème de Steiner,

$$R^2 = r^2 + l^2 = \frac{gl}{\pi^2}\tau^2 + l^2 \qquad (22)$$

ce qui fournit directement le carré du rayon de giration, intervenant dans l'inégalité (19). Pour obtenir sa valeur numérique, il suffit donc de faire osciller le disque, à la manière d'un pendule, sur un couteau parallèle à son axe de rotation et d'évaluer l et τ.

Dans ce qui précède, j'ai décrit sommairement la méthode de mesure du coefficient de restitution tangentielle. La méthode suppose qu'on satisfasse à certaines conditions, indiquées plus haut, et je me propose maintenant de montrer, comment j'y suis parvenu dans mes expériences. Notre méthode ne permet que la mesure des coefficients *apparents* de restitution tangentielle. D'après ce que j'ai exposé dans le no **1**, la valeur du coefficient apparent sera d'autant plus voisine de celle du coefficient vrai que la percussion normale sera plus grande et que la vitesse de rotation du disque sera plus faible — la chute étant supposée verticale. Par suite, la vitesse de rotation initiale du disque ne devait pas dépasser la valeur nécessaire pour apprécier, sans aucun doute, le sens de la rotation du disque après le rebondissement. Dans les expériences réalisées, la vitesse initiale des disques avant le choc était d'un ou deux tours par seconde. D'autre part, pour que la percussion normale soit assez grande, j'ai choisi une hauteur de chute de 150 à 190 cm. Enfin, pour avoir des coefficients de frottement suffisamment élevés, un au moins des solides, à savoir le disque ou la plaque, ont été constitués en *liège* ou en *gomme élastique*. Ce choix du matériau nous a permis d'obtenir, en même temps, un rebondissement assez grand pour examiner le sens de rotation après le choc. Les pourtours des disques en bois, ébonite et fibre ont été rendus rugueux à l'aide d'un limage approprié.

La condition essentielle pour l'application de notre méthode est l'incidence normale du disque sur la plaque qui peut être réalisée le plus aisément par une chute verticale sur une plaque horizontale. Cette plaque a été amenée à l'horizontalité au moyen d'un niveau à bulle et bien fixée dans cette position sur le plancher. Les plaques

de liège et de gomme élastique ont été munies d'un châssis en bois. Quant à la verticalité de la chute du disque, elle a été garantie, en se servant d'un appareil spécial dont je parlerai plus tard. On peut ici, je crois, négliger les pertubations du mouvement du disque dues à l'air. On a surtout affaire à l'*effet Magnus*. Par action de la résistance de l'air, la trajectoire du centre du disque se courbe faiblement dans le sens de la rotation du disque. On s'assure facilement qu'une telle courbure de la trajectoire augmente la rotation rétrograde du disque après le choc. Ceci se présente comme une *augmentation* apparente du coefficient de restitution tangentielle. Donc, si l'effet Magnus n'est pas complètement négligeable, il contrebalance, en partie, la diminution apparente du coefficient tangentiel due au glissement ayant lieu pendant le choc. Car ce qu'il y a de certain, c'est que cette diminution dépasse l'augmentation due à l'air, parce que les disques utilisés étaient relativement très plats. On voit, en somme, que l'action de l'effet Magnus ne peut pas augmenter l'écart entre les coefficients vrai et apparent.

Nous avons réalisé deux appareils d'expérimentation, suivant qu'il s'agisse de disques ou d'anneaux.

A. Appareil pour l'expérimentation des disques. (Voir fig. 2.) Cet appareil comporte un bâti rigide constitué par deux montants verticaux assemblés par une entretoise. Chaque disque, comportant un axe muni de deux tourillons côniques creux, peut tourner entre deux pointes fixées sur les montants du bâti. Ces pointes, maintenues en position par deux ressorts à boudin, peuvent s'écarter brusquement et simultannément grâce à un dispositif d'escamotage dont la commande est placée sur le dessus du bâti.

B. Appareil pour l'expérimentation des anneaux. (Voir fig. 3a, b.) Il est essentiellement constitué par une fourche dont les branches portent deux plateaux circulaires concentriques, pouvant tourner librement, dont l'écartement est commandé à l'aide d'une fourchette mobile. L'anneau à expérimenter est placé entre les deux plateaux; il est maintenu par la pression de ces plateaux; le centrage de l'anneau est réalisé très simplement par trois rangées de pointes à 120°, portées par l'un des plateaux et venant se placer dans des troux correspondants de l'anneau. Une rotation de 90° de la fourche maintenant les plateaux amène ceux-ci dans la position horizontale ce qui permet une mise en place très facile des anneaux.

L'appareil du type A convient spécialement à l'étude des disques homogènes. Il exige que ceux-ci soient munis en leur centre des coupelles permettant de tourner entre les pointes de l'appareil. On commence par essayer le disque homogène et deux cas peuvent se présenter:

1er cas. La rotation après le choc est du même sens que la rotation primitive, ce qui signifie $e' < 0{,}5$. On ajoute alors des disques concentriques en laiton de diamètres inférieurs à celui du disque expérimenté, de manière à réduire le rayon de giration jusqu'à obtenir une rotation de sens inverse après le choc.

2e cas. La rotation après le choc du disque homogène tel quel est déjà de sens inverse à la rotation primitive, — c'est-à-dire que: $e' > 0{,}5$. En ce cas, on augmente le rayon de giration, en

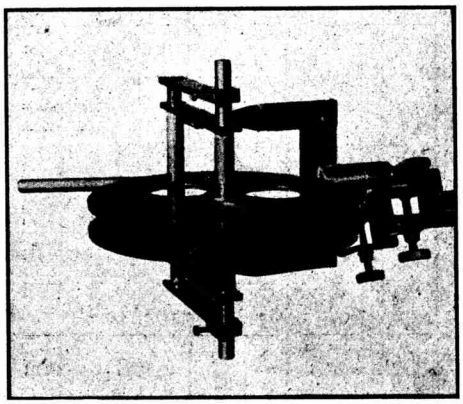


Fig. 3a. Appareil **B** pour l'expérimentation des anneaux, dans la position horizontale.

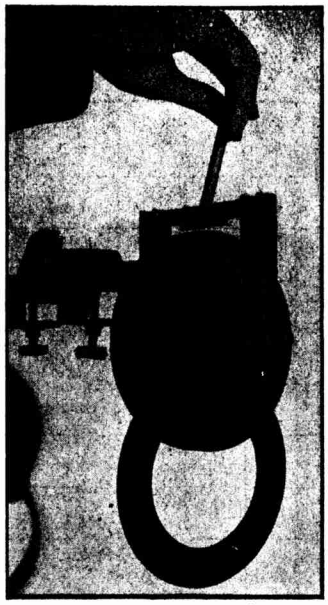


Fig. 3b. Appareil **B** avec un anneau qui vient d'être abandonné à l'action de la pesanteur.

fixant de part et d'autre du disque des anneaux en laiton de différentes largeurs, jusqu'à changement de sens de la rotation après le choc.

Mais il est plus avantageux, dans ce second cas, d'utiliser l'appareil **B**, car le montage sur l'appareil **A** exige les coupelles de centrage qui diminuent encore le rayon de giration.

L'appareil **B** ne peut être utilisé que dans les cas où $e' > 0{,}5$. On augmente progressivement le rayon de giration du disque expérimenté, en l'évidant en sa partie centrale suivant un cercle, dont on fait croître le rayon jusqu'à ce qu'on obtienne le changement de sens de la rotation après le choc.

3. Résultats expérimentaux.

Les mesures du coefficient apparent de restitution tangentielle, que j'ai exécutées par la méthode décrite au numéro précé-

TABLEAU A.

Mesures exécutées à l'aide de l'appareil A sur les disques pleins.

	Matériau constituant		Dimensions en cm		Valeurs limites	$e' \pm \varepsilon$
	le disque	la plaque	du disque a d	de la plaque D		
1.	liège comprimé	liège comprimé	7,80 0,8	0,8	0,205 0,239	0,222 ± 0,009
2.	liège brut	liège comprimé	7,42 1,3	0,8	0,219 0,248	0,253 ± 0,007
3.	liège naturel	liège naturel	4,48 0,8	0,7	0,233 0,290	0,262 ± 0,014
4.	liège naturel	bois de chêne	4,48 0,8	3,8	0,233 0,290	0,262 ± 0,014
5.	liège comprimé	bois de chêne	7,80 0,8	3,8	0,246 0,297	0,272 ± 0,013
6.	liège comprimé	liège naturel	7,80 0,8	0,7	0,246 0,297	0,272 ± 0,013
7.	liège comprimé	liège brut	7,80 0,8	3,0	0,259 0,297	0,278 ± 0,010
8.	liège brut	liège brut	7,42 1,4	3,0	0,248 0,521	0,38 ± 0,07
9.	bois de chêne et gomme grise	parquet en bois	8,66 1,0	—	0,559 0,591	0,575 ± 0,008
10.	bois de chêne et gomme grise	liège comprimé	8,70 1,0	0,8	0,610 0,648	0,629 ± 0,010
11.	bois d'aune	gomme élastique (blanche)	8,16 1,0	1,0	0,628 0,656	0,642 ± 0,007
12.	bois de chêne	gomme élastique (blanche)	8,16 1,0	1,0	0,624 0,679	0,651 ± 0,014
13.	bois de chêne	gomme élastique (grise)	8,16 1,0	1,0	0,624 0,679	0,651 ± 0,014
14.	bois de chêne	gomme élastique (grise)	8,20 1,0	1,0	0,646 0,665	0,655 ± 0,008
15.	bois de chêne et gomme grise	gomme élastique (grise)	8,66 1,0	1,0	0,653 0,676	0,664 ± 0,006

TABLEAU B.

Mesures exécutées à l'aide de l'appareil B *sur les anneaux.*

	Matériau constituant		Dimensions en cm		Valeurs limites	$e' \pm \varepsilon$
	l'anneau	la plaque	de l'anneau *a b d*	de la plaque *D*		
16.	fibre	gomme élastique (grise)	7,89 3,57 0,6	1,0	0,618 0,648	0,633 ± 0,008
17.	pertinax	gomme élastique (grise)	7,93 3,54 0,4	1,0	0,630 0,656	0,643 ± 0,007
18.	gomme naturelle	bois de chêne	5,90 2,90 1,0	3,8	0,603 0,689	0,646 ± 0,022
19.	ébonite	gomme élastique (grise)	7,92 3,08 0,6	1,0	0,665 0,697	0,681 ± 0,008
20a.	ébonite (pourtour poli)	gomme élastique (grise)	8,01 3,81 0,4	1,0	0,626 0,633	0,630 ± 0,002
20b.	ébonite (pourtour rugueux)	gomme élastique (grise)	7,99 3,00 0,4	1,0	0,677 0,706	0,691 ± 0,008
21.	laiton	gomme élastique (grise)	6,45 2,28 0,25	1,0	0,685 0,716	0,701 ± 0,008

dent, se résument dans les deux tableaux **A** et **B**. Le premier contient des données relatives aux mesures, au nombre de 15, exécutées à l'aide de l'appareil **A** sur les disques pleins. Le second tableau réunit les résultats obtenus par des mesures, au nombre de 7, faites sur les anneaux, en se servant de l'appareil **B**. Voici les détails de manipulation pour chacune des catégorie de mesure.

Dans la première colonne du tableau **A**, on trouve les indications sur les matériaux constituant le disque et la plaque; les dimensions inscrites dans la seconde colonne ont la signification suivante: a signifie le rayon géométrique du disque, d son épaisseur et D est l'épaisseur de la plaque dont je n'indique pas les autres dimensions dans le tableau, car la longueur et la largeur de la plaque étaient, dans tous les cas, à peu près les-mêmes, à savoir 15 cm environ. La troisième colonne contient les deux valeurs limites R_1^2/a^2, R_2^2/a^2 satisfaisant à l'inégalité (19). La première valeur, en tous cas plus petite que la seconde, correspond à la

rotation rétrograde du disque, tandis que la seconde se rapporte à une répartition de la masse du disque telle qu'il tourne après le choc dans le sens primitif. Enfin, dans la dernière colonne du tableau, j'ai inscrit la valeur e' du coefficient apparent de restitution tangentielle calculée par la formule (20). J'y ai ajouté aussi l'erreur vraisemblable ε donnée par l'expression (21).

Je donne ensuite quelques détails techniques relatifs aux mesures exécutées:

Mesure no 8. (Voir le tableau **A.**) L'espèce du liège brut employée était peu homogène ce qui a occasionné une certaine indétermination du coefficient tangentiel. C'est pourquoi l'erreur probable dépasse notablement les erreurs des autres mesures.

Mesure no 9. Le disque a été fabriqué en bois de chêne et muni sur son pourtour d'un anneau de gomme élastique grise, d'épaisseur de 0,7 cm. La plaque, heurtée par le disque dans cette expérience, était le plancher lui même (parquet en bois).

Mesure no 10. Le disque employé était identique au précédent, à la différence qu'entre le pourtour du disque et l'anneau en gomme élastique on avait intercalé une bande de papier-émeri, pour éviter le glissement de la gomme.

Mesures nos 11, 12, 13. Le pourtour du disque en bois était finement encoché à l'aide d'une roulette crénelée.

Mesure no 14. Le disque en bois de chêne était muni d'une bande de papier-émeri (comme au no *10*, mais sans l'anneau de gomme).

Mesure no 15. Cette mesure a été faite sur le même disque que la mesure no *9*.

Il reste à remarquer que dans les expériences *1* à *8*, le rayon de giration du disque a été réduit en mettant sur l'axe du disque des plaques circulaires en laiton, tandis que, dans les cas nos *9* à *15*, il était nécessaire de munir le disque d'anneaux de laiton, situés des deux cotés du disque pour obtenir un rayon de giration supérieur à $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

Quant aux mesures de la seconde catégorie, elles sont numérottées de *16* à *21* et les résultats correspondants sont réunis dans le tableau **B.** Dans la première colonne de ce tableau, j'indique les matériaux constituant l'anneau et la plaque. Dans la deuxième colonne, on trouve les dimensions de ces deux solides, à savoir: le rayon extérieur de l'anneau a, sa largeur b, c'est-à-dire la différence entre ses deux rayons extérieur et intérieur, l'épaisseur de l'anneau d et celle de la plaque D. Les deux dernières colonnes sont constituées de la même façon que les colonnes correspondan-

tes du tableau **A**. Voici quelques remarques relatives aux mesures de la deuxième catégorie:

Mesure no 18 (Voir le tableau **B**): La gomme naturelle utilisée était de provenance assez ancienne et par suite assez dure pour pouvoir constituer un anneau permettant d'être utilisé tel quel, sans qu'il soit besoin de le soutenir par des disques minces en laiton, par exemple. A remarquer que l'erreur possible sur la mesure est environ trois fois plus grande que celle des autres mesures, en raison de la tendance de ce matériau à conserver momentanément une déformation permanente.

Mesure no 20a) a été effectuée sur un anneau en ébonite dont le pourtour extérieur était poli.

Mesure no 20b) a été faite sur le même anneau, à la différence que son pourtour a été rendu rugueux à l'aide d'un limage approprié.

En regardant les deux tableaux, on voit que, abstraction faite des deux cas exceptionnels (nos *8* et *18*), dont j'ai déjà parlé, l'erreur relative probable de détermination du coefficient apparent de restitution tangentielle est de l'ordre de 4% dans les sept cas, où ce coefficient est inférieur à 0,5, tandis que l'erreur probable moyenne, calculée pour les cas restants, en nombre de treize, où le coefficient tangentiel dépasse la valeur 0,5, est égale à 1,2% seulement. Pour apprécier convenablement la précision des résultats obtenus, il faut envisager les circonstances suivantes. D'abords la méthode est bien simple et n'exige, outre les deux appareils **A** et **B**, aucun instrument particulier. Deuxièmement, les valeurt des coefficients apparents de restitution tangentielle dépenden, non seulement des dimensions et des vitesses des corps se choquant, mais aussi de la rugosité de leurs surfaces. J'ai été conduit à ce résultat par des considérations théoriques et les mesures exécutées l'ont légitimé. Par exemple, les mesures *13* et *14* montrent qu'en munissant le pourtour du disque d'une bande de papier-émeri, on accroît le coefficient apparent de 0,651 à 0,655, c'est-à-dire d'une valeur inférieure à l'erreur probable. Dans une plus grande mesure, les valeurs du dit coefficient diffèrent dans les expériences *20a*), *b*), où j'ai fait la mesure d'abord pour l'anneau poli, puis sur le même anneau à pourtour rugueux, pour rendre manifeste l'effet du frottement sur l'allure du choc. D'après le tableau **B**, les valeurs du coefficient apparent, relatives à ces deux cas, sont 0,630 et 0,691 et l'on constate qu'elles diffèrent entre elles de presque 10%. Enfin, il importe de remarquer que les mesures exécutées sont les premières expériences quantitatives de ce genre.

En terminant, je crois utile de signaler que tous les résultats obtenus vérifient pleinement l'exactitude de nos formules fonda-

mentales lesquelles découlent de notre théorie générale. En revanche, ils sont en contradiction directe avec la supposition habituelle que la composante tangentielle de la vitesse relative des points de contact est nulle après le choc. Les expériences, décrites dans le présent travail, confirment ainsi nos prévisions théoriques.

*

Experimentální určení zdánlivého koeficientu smykové restituce.

(Obsah předešlého článku.)

V práci *Théorie générale du choc dans les systèmes matériels* (Journal de l'Ecole Polytechnique, 2e série, 28, p. 15—64, Paris 1931) odvodil jsem obecné zákony rázu, z nichž vyplývá, že při rázu dokonale drsných těles tečná složka relativní rychlosti dotykových bodů obou těles změní znamení a zmenší se v jistém poměru, který nazývám *koeficientem smykové restituce*. Tento výsledek odporuje dosud běžnému předpokladu, že zmíněná složka po rázu vymizí, což je podle mé teorie splněno jen pro tělesa dokonale nepružná (plastická), pro která je koeficient smykové restituce roven nule. Obecně však má tento koeficient hodnoty různé od nuly, které podle mých měření leží mezi 0,2 a 0,7. K experimentálnímu stanovení těchto hodnot užil jsem metody založené na vzorcích, odvozených v prve citované práci pro fysikální ráz kotouče na pevnou rovinu, za předpokladu, že se jedná o tělesa dokonale drsná. Taková tělesa nelze ovšem realisovati, ale ukazuje se, že při dostatečně velkém tření zůstávají vzorce v platnosti; rozdíl je pouze v tom, že část pohybové energie promění se při smyku kotouče po rovině v teplo a proto tečná složka rychlosti dotykového bodu kotouče se zmenší více, než kdyby byl koeficient tření nekonečně veliký. Tím se zdánlivě zmenší koeficient smykové restituce, jehož hodnotu pak označuji jako *zdánlivý* koeficient smykové restituce. Je vždycky menší než koeficient *pravý*, který odpovídá případu dokonale drsných těles, ale za vhodně volených podmínek se neliší mnoho od koeficientu pravého.

Při měření zdánlivého koeficientu smykové restituce postupoval jsem takto: Roztočený kotouč známého momentu setrvačnosti nechal jsem dopadnouti svisle na vodorovnou rovinnou desku a pozoroval jsem směr jeho otáčení po odskoku. Při tom byl vhodným způsobem měněn moment setrvačnosti kotouče a byly stanoveny dvě (pokud možno málo odlišné) hodnoty jeho poloměru setrvačnosti, pro které se kotouč po rázu otáčel v opačných směrech. Z těchto dvou hodnot odvodil jsem pak početně horní i dolní mez pro zdánlivý koeficient smykové restituce a za správnou

hodnotu vzal jsem aritmetický střed obou mezních hodnot. Získané výsledky jsou obsaženy ve dvou tabulkách **A** a **B**. Týkají se rázu kotoučů korkových, pryžových, dřevěných, mosazných, ebonitových a pertinaxových na pevnou desku, zhotovenou z některé ze jmenovaných hmot.

Provedená měření velmi dobře souhlasí s teorií a bezpečně prokazují nesprávnost obvykle činěného předpokladu, o němž jsem mluvil na počátku.

A Multiplication Method for the measurement of the absorption of light in thin layers.

By **Dr. L. Honty**, Praha.

(Received November 2, 1936.)

The diminution of light by absorption, when travelling through a thin film of some absorbing substance, is, as a rule, only measurable when the extinction coefficient is fairly high. In the case of weak absorption it becomes necessary to use sensitive photoelectric methods, which have of recent years been developed to a high degree of efficiency, so that by their use it is possible to determine the dimming or extinction of light to one tenth of one per cent (e. g. in the measurement of absorption in thin crystals by Gudden and his pupils). However even these sensitive methods are often insufficient, and frequently it is necessary to determine the absorption by some quite distinct method for other reasons. This is the case when the absorption is required to be measured directly in a thin layer, and it is not possible to get the absorbing substance into the form of a thicker layer, more suitable to the experimental measurement, as, for example, in the case of only a small quantity of the absorbent being available, such as a finished and mounted thin filter, etc. Besides, even when the substance is obtainable in thicker layers, it may be necessary to determine the absorption of light in a thin layer, for which the physical and physico-chemical (colloidal) properties are characteristic, and different from those shown by thicker layers.

It is possible to obtain increased absorption during the passage through a thin layer by prolonging the path of the measured ray within the layer concerned (illumination along the layer is, for the most part, experimentally impracticable) by means similar to those used in the Lummer-Gehrcke interference-film spectroscope, i. e. by ensuring that the ray incident on the boundary of the thin layer never emerges from it, but by repeated reflection within the critical angle continues within the layer till its final

emergence to the measuring apparatus. The application of this principle to absorption measurements is as follows (Fig. 1).

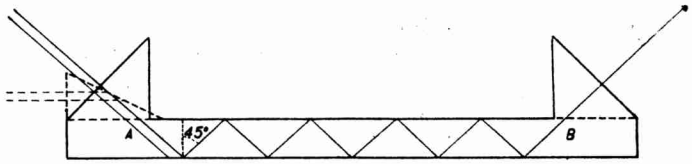


Fig. 1.

The thin layer, either alone or else cemented to a glass plate, is fixed in optical contact (by the use of glycerine, cedar-wood oil, etc.) with a small glass prism, say a right-angle glass prism as shown in the plate. The prism is best fixed flat on one of its right-angle sides, so that the incident light falls vertically on its hypothenuse, or else on the other right-angle side, according to the method of F. Twyman, for parallel incident light. A thin beam of parallel rays proceeding from a slit falls, through this prism, upon the lower side of the thin layer, at so great an angle that, by repeated total internal reflection, it traverses the entire length of the thin layer before finally emerging through a similarly placed exit prism to the measuring apparatus (photometer, polarimeter, or spectrograph). By this means the path of the ray in the absorbing material of the thin layer is prolonged to such a degree (about 200 times) that even an apparently colourless thin layer will visibly show its characteristic absorption tints.

The angle of incidence for total internal reflection at the lower surface of the layer is given by the well-known expression

$$\sin \beta \geqq \frac{n_1}{n_2} < 1,$$

where n_1 and n_2 stand for the absolute indices of refraction of the bounding medium and the layer respectively. For an average value of the relative index of refraction $n_2/n_1 = n = 1{,}5$, which corresponds to the mean value between the surrounding air and ordinary crown glass, we obtain for the critical angle almost 42° (41° 40′). If the narrow beam used for the measurement falls perpendicularly upon the hypotenuse face of the mounted right-angle prism, the angle of incidence on the lower surface of the layer will be exactly 45°, so that the condition for total internal reflection is fulfilled for a distinct pencil of rays of small divergent angle. In the case of the second modification, for parallel incidence of the light, the face of the prism in optical contact with the layer must be twice as long as that exposed to the incident light. Under these

circumstances the ray strikes the hypotenuse face of the prism at an angle of less than 45° and is them totally reflected from the lower surface of the layer. Considering the fact that the angle of incidence usually differs sensibly from the angle of minimum deviation, and also considering that the index of refraction depends on the wave-length of the incident light, it is necessary to investigate the effects of these facts.

Deviations from the critical angle produce a double change: thus, a change in the angle of incidence from the critical angle within the layer alters the course, and hence the length of the optical path pursued by the ray within the layer. For an approximately constant distance between the initial entry to and final exit from the layer at the points where the prisms are homogeneously attached to it, and for a constant thickness of the layer, the length of the path traced out by the ray under repeated reflection within the layer is given by the expression

$$\frac{\overline{AB}}{2d \tan \beta} \cdot n \cdot \frac{2d}{\cos \beta} = n \cdot \frac{\overline{AB}}{\sin \beta}.$$

According to this, the length of the optical path traversed within the layer has no connection with the thickness of the layer; it is, however, connected with the angle of incidence, and with the distance between the points of entry and exit. That it is not connected with the thickness of the layer follows as a direct consequence of the fact that, in thinner layers the increased number of reflections offsets the longer path between each pair of reflections obtained in thicker layers, as is quite obvious from the above expression, in which $\frac{\overline{AB}}{2d \tan \beta}$ gives the number of reflections, while $n \frac{2d}{\cos \beta}$ gives the length of the optical path taken between each pair of successive reflections. For a layer 1 mm thick with an angle of incidence of 45°, we obtain 100 reflections at each surface of the layer, where the distance between the points of entrance and exit is 100 mm, and under these conditions the optical path is extended to n .•141 mm, as compared to n . 1 mm for direct passage of the ray through the layer.

The length of the optical path within the layer is indirectly proportional to the sine of the angle of incidence, and if the angle of incidence is decreased below the critical angle the length of this optical path increases, while at the same time the amount of light reflected simultaneously decreases. However, even a rough and approximate calculation is enough to make it clear that the decrease of the reflected light due to the decrease of the incident

angle below the critical value far outweighs the simultaneous lengthening of the optical path, and the increase of absorption obtained thereby, so that the optimum results are obtained from the method when using the critical angle of incidence for the ray. According to the above expression, the length of the optical path, for a decrease of 10′ and 1° below the critical value is diminished in the ratio, respectively of 0,707 : 0,705, and 0,707 : 0,695. The intensity of the reflected light decreases far more rapidly. According to the Fresnel's law, the intensity of the reflected light is given by the expression

$$J^r = J^r_{||} + J^r_{\perp} - \tfrac{1}{2} J_0 \left[\frac{\sin^2(\alpha - \beta)}{\sin^2(\alpha - \beta)} + \frac{\tan^2(\alpha - \beta)}{\tan^2(\alpha - \beta)} \right],$$

where $J^r_{||}$ and $J^v_{\perp}$ are the intensities of light polarised respectively in planes parallel and perpendicular to the plane of incidence, J_0 and J^r the total intensities of the incident and reflected light, and α and β the angles of incidence and refraction respectively, so that $\sin \alpha / \sin \beta = n$.

This expression, with the necessary modification of symbols, is also valid for the incidence of light in an optically dense medium upon the boundary of an optically less dense medium, since even in the case of the difference $\alpha - \beta$ having a negative value its square still remains positive. For total reflection, where $\alpha = 90°$, $J^r \doteq J_0$.

The numerical values of this equation have been worked out by Krüss, and for the case of light reflected within an optically denser medium, for index of refraction $n = 1{,}5$, for angles of incidence slightly smaller than the critical angle (i. e. 41° 81′) within a difference of 1° we get the following intensity ratios for the given differences in minutes of arc from the critical angle

n	critical angle	$\beta_m - 0$	$\beta_m - 1'$	$-5'$	$-10'$	$-20'$	$-30'$	$-40'$	$-50'$	$-60'$
1,5	41° 81′	1,000	0,860	0,723	0,634	0,530	0,462	0,412	0,375	0.343

According to this calculation compared with the small increases in the optical path got by lowering the angle of incidence 10′ and 1° below the critical value, the intensity of the reflected light for $n = 1{,}5$ decreases in the rations respectively of 1,000 : 0,634 and 1,000 : 0,343 respectively, compared to which the absorption increases in the ratio $e^{-0{,}707} : e^{-0{,}695}$ are inappreciable.

It is clearly shown, from the above, what serious losses in reflection, from the standpoint of absorption, are caused by even slight decreases of the angle of incidence below the critical value. Increase of the angle of incidence above the critical angle does not

produce any loss on reflection. A similar calculation gives the course of reflection for the following large intervals of excess of the angle of incidence over the critical value

n	critical angle	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°
1,5	41° 81′	0,040	0,040	0,041	0,055	0,245	1,000	1,000

From these figures it is evident that even for an increase of 20° we get a constant value for the reflected light; at the same time, however, the length of the optical path in the layer is decreased in the ratio 0,707 : 0,342. In consequence, it is advisable to carry out measurements at an angle of incidence slightly greater than the critical value, with which it is certain that the whole spectral range is totally reflected (provided, of course, that strong anomalous dispersion does not take place).

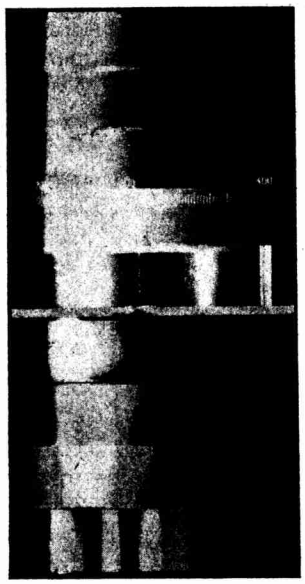
In considering the above conditions the dimming of the light in its passage through the layer has been attributed entirely of absorption. At the boundaries of the layer, of the prisms, and of the optical joining medium, a minute reflection of light always occurs, which may be neglected. The same thing occurs during the normal entrance and exit of light at the prism faces. For the vertical incidence of light on the boundary between air and glass, we get light reflected in accordance with the expression

$$J^r = J_0 \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}\right)^2.$$

For a mean index of refraction $n_2/n_1 = 1{,}5$ this reflection at the glass accounts for about 4% of the incident light. Over a range of indices of refraction from 1,40 to 1,99 the intensity of the reflected light for normal incidence increases in the ratio 2,78 : 10,96. From the point of absorption we may either take this reflection loss into account or else compensate for it experimentally. In the accurate determination of the conditions applicable to this experimental method attention must also be given to phenomena of anomalous dispersion taking place simultaneously with absorption, and to polarisation phenomena, especially during reflection (natural light is not changed by total reflection, and only plane polarised light is polarised elliptically thereby (at 45° to the plane of incidence it becomes circularly polarised after being twice totally reflected) however it is probable that even ordinary light becomes weakly polarised in the plane of incidence after multiple (× 50) reflection (see the photograph Fig. 2 of the Herotar screen). Further we must also consider interference phenomena in the case of passage through a very thin layer, with which is further connected the

question of inequalities in the surfaces or homogeneity of the layer, as also the case of anisotropy.

By means of this method the spectral absorption of thin and apparently colourless layers of dyestuffs was determined, as also that of polarisation filters. Under experiment a thin layer (0,01 mm, placed between plates of thicker glass) of polarisation filter (periodide quinine sulphate) showed weak diffusion colours, characteristic for fluorescent quinine compounds, which even appeared as visible streaks in the region of total reflection.



Ordinary- non multiplication-method:

1. Eastman Pola-screen (filter cemented in glass),
2. Zeiss Herotar (filter cemented in glass),
3. a neutral glass (absorption 50%),
4. the white flame carbon arc. (Zeiss, 10 Amp.), direct,
5. the mercury vapour lamp Philips Philora.

Multiplication method:

1a. Pola-screen ⊕ ∥ ,

2a. Herotar ⊕ ∥ ,

2b. Herotar ⊗ 45°,

3a. the neutral glass.

Fig. 2. Photographs of the spectral absorption in the visible region taken on Kodak SS panchromatic films.

The Kodak „Polaroid" filter composed of small crystals combined togather by the Friedmann-Land method showed on examination a stronger blue-green colour than the yellower Zeiss „Herotar" made by the Bernauer method from a single large thin crystal. In the spectroscopic analysis of the absorption (see the annexed spectrum photograph) with the aid of the multiplication method described above, a dense purple filter showed chiefly light red light, an increase of absorption being accompanied by an increase of the polarisation of the emergent light. According to the direction in the layer of the ray of light traversing it, relative

to the plane of polarisation of the filter (with dichroic absorption; the absorption band by Herotar ⦞ 45° lies at about 650$\mu\mu$; it is not shown on the Fig.) a marked difference appeared in the spectral intensity of the analysed light, as also in the polarisation in different parts of the spectrum. Thus it was found that the red of the spectrum was polarised perpendicularly to the blue in the emergent light, as we were able to ascertain by using a Nicol in conjunction with the spectroscope. These polarisation filters are made only in very thin layers, so that all optical measurements must be carried out with these thin layers only.

This multiplication method, besides increasing the absorption, also strongly multiplies the reflection and surface properties of thin layers, especially as regards their spectral properties, which fact must always be taken into account in addition to actual absorption.

Department III of the Institute of Physics (Department of Scientific Photography and Photochemistry) of the Charles' University. Director Prof. Dr. V. Vojtěch.

*

Multiplikační methoda pro měření absorpce světla v tenkých vrstvách.

(Obsah předchozího článku.)

Byla udána multiplikační metoda pro měření světelné absorpce u tenkých vrstev, kde se absorpce zvýší tím, že se optická dráha úzkého světelného paprsku postupujícího vrstvou prodlouží mnohonásobnými totálními odrazy světla uvnitř vrstvy. Vstup a výstup světelného paprsku do vrstvy a z ní se provádí pomocí hranolu — nejlépe pravoúhlého skleněného — jenž jest s vrstvou opticky homogenně spojen, nejlépe immersním olejem. Této metody bylo použito při stanovení spektrální absorpce, jakož i rozdílu v polarisaci u tenkých barevných a polarisačních filtrů, jak je vidět z přiloženého spektrografického snímku absorpce. Metoda zvýšeně vystihuje i reflekční a povrchové vlastnosti tenkých vrstev.

Rozdělení teploty v omezeném kruhovém válci, je-li dáno časově proměnlivé rozdělení teploty na jeho povrchu.

Napsal **Filip Bock**, Brno.

(Došlo 20. října 1936.)

Budiž dán omezený kruhový válec o výšce $2h$ a poloměru a. Osový řez položíme tak do soustavy válcových souřadnic z, r, φ. jak ukazuje obr. 1. Tento kruhový válec je vnořen do časově proměnlivého tepelného pole, při čemž teplota na povrchu válce je periodickou funkcí času t; na souřadnicích nezávisí.

Příklad: volně stojící betonový sloup vystavený vlivům tepelných výkyvů. Tážeme se, jak vnikají tepelná kolísání do válce a jak probíhají.

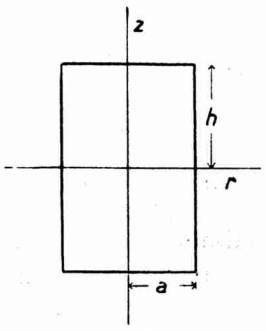
Diferenciální rovnice tepelného proudu

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varkappa^2 \Delta u$$

uvnitř válce nabývá v případě osové souměrnosti tvaru

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varkappa^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \qquad (1)$$

kdež u značí teplotu, t jest čas, r a z mají význam patrný z obr. 1. Na úhlu φ teplota u nezávisí. Rovnici (1) řešíme známým způsobem. Partikulární řešení pro u píšeme v komplexním tvaru



Obr. 1.

$$u = R(r)\, e^{ivt} \cos \lambda z \qquad (2)$$

a smluvíme, že reálná část komplexní veličiny u, tedy $\mathfrak{Re}\, u$, představuje teplotu. Pro souměrnost válce vůči rovině $z = 0$ bude patrně u sudou funkcí proměnné z; proto jsme zvolili pro závislost na z funkci $\cos z$. Zavedeme-li nyní integrál (2) do diferenciální rovnice (1), obdržíme pro R diferenciální rovnici

$$R'' + \frac{1}{r} R' - \left(\lambda^2 + \frac{iv}{\varkappa^2}\right) R = 0. \tag{3}$$

Integrál této rovnice jest

$$R = cJ_0\left[r \sqrt{-\left(\frac{iv}{\varkappa^2} + \lambda^2\right)}\right]; \tag{4}$$

$J_0(x)$ jest Besselova funkce argumentu x a indexu nula.[1]) Pro partikulární řešení plyne pak

$$u = e^{ivt} \cdot \cos \lambda z \cdot J_0\left[r \sqrt{-\left(\frac{iv}{\varkappa^2} + \lambda^2\right)}\right].$$

Ve vnějším prostoru jest teplota závislá na času a mění se s danou kruhovou frekvencí v. Amplitudu tepelných změn, která je také známa, označíme A a předpokládáme, že se střední teplota rovná nule.[2]) Podmínky, které mají býti splněny na povrchu válce, pak znějí

$$u = Ae^{ivt} \quad \text{pro } r = a \tag{5}$$

a

$$u = Ae^{ivt} \quad \text{pro } z = \pm h. \tag{6}$$

Řešení provedeme takto[3]): Nejdříve stanovíme funkci u_1, která vyhovuje těmto krajovým podmínkám

$$u_1 = Ae^{ivt} \quad \text{pro } r = a \tag{7}$$

a

$$u_1 = 0 \quad \text{pro } z = \pm h, \tag{8}$$

pak určíme druhou funkci u_2, která hoví podmínkám

$$u_2 = 0 \quad \text{pro } r = a \tag{9}$$

a

$$u_2 = Ae^{ivt} \quad \text{pro } z = \pm h. \tag{10}$$

Potom jistě splňuje

$$u = u_1 + u_2$$

podmínky (5) a (6).

Podmínka (8) dává hodnoty pro λ, neboť z rovnice

$$u\Big|_{z=\pm h} = e^{ivt} \cos \lambda h \cdot J_0\left[r \sqrt{-\left(\frac{iv}{\varkappa^2} + \lambda^2\right)}\right] = 0$$

[1]) Obecný integrál vlastně zní:

$$R = c\, J_0(x) + c_1\, Y_0(x),$$

$Y_0(x)$ jest Neumannova funkce. Pro $x = 0$ roste $Y_0(x)$ přes všechny meze, takže c_1 nutno zvoliti rovno nule, abychom zamezili vzrůstu funkce R a tím též teploty u na nekonečně velkou hodnotu.

[2]) Vhodnou volbou nulového bodu dá se toho vždy dosáhnouti.

[3]) Na možnost rozkladu $u = u_1 + u_2$ upozornil mne p. prof. Weyrich.

vyplývá $\cos \lambda h = 0$ a tedy

$$\lambda = (n + \tfrac{1}{2}) \frac{\pi}{h}.$$

Pro u_1 se tak obdrží

$$u_1 = e^{ivt} \sum_{n=0}^{\infty} a_m \cos (n + \tfrac{1}{2}) \frac{z}{h} \pi \, . \, J_0 \left[r \sqrt{-\left(\frac{iv}{\varkappa^2} + (n + \tfrac{1}{2})^2 \frac{\pi^2}{h^2} \right)} \right].$$

Veličiny a_n jsou prozatím libovolné konstanty; určíme je z podmínky (7), jež nabývá tvaru

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos (n + \tfrac{1}{2}) \frac{z}{h} \pi \, . \, J_0 \left[a \sqrt{-\left(\frac{iv}{\varkappa^2} + (n + \tfrac{1}{2})^2 \frac{\pi^2}{h^2} \right)} \right]. \quad (11)$$

Konstanty a_n dostaneme známou metodou; obě strany rovnice (11) násobíme

$$\cos (n + \tfrac{1}{2}) \frac{z}{h} \pi \, dz$$

a integrujeme dle z v mezích od $-h$ do h. Počet dává

$$a_n = \frac{2(-1)^n A}{(n + \tfrac{1}{2}) \pi J_0 \left[a \sqrt{-\left(\frac{iv}{\varkappa^2} + (n + \tfrac{1}{2})^2 \frac{\pi^2}{h^2} \right)} \right]}.$$

Tím konečně vznikne pro u_1 výraz:

$$u_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 (-1)^n A e^{ivt} \, . \cos (n + \tfrac{1}{2}) \frac{z}{h} \pi \, . J_0 \left[r \sqrt{-\left(\frac{iv}{\varkappa^2} + (n + \tfrac{1}{2})^2 \frac{\pi^2}{h^2} \right)} \right]}{(n + \tfrac{1}{2}) \pi J_0 \left[a \sqrt{-\left(\frac{iv}{\varkappa^2} + (n + \tfrac{1}{2})^2 \frac{\pi^2}{h^2} \right)} \right]}. \quad (12)$$

Řešení pro u_2 nalezneme podobným způsobem. Podmínka (9) dává

$$J_0 \left[a \sqrt{-\left(\frac{iv}{\varkappa^2} + \lambda^2 \right)} \right] = 0.$$

Jsou-li j_m ($m = 1, 2, 3, \ldots$) kořeny rovnice[4]) $J_0(x) = 0$, je

$$a \sqrt{-\left(\frac{iv}{\varkappa^2} + \lambda^2 \right)} = j_m$$

a z toho

$$\lambda = \sqrt{-\left(\frac{j_m^2}{a^2} + \frac{iv}{\varkappa^2} \right)}.$$

[4]) Kořeny této rovnice jsou tabelovány. Srv. Jahnke-Emde, Funktionentafeln, Lipsko 1928, str. 122.

Lze tedy u_2 dáti tvar

$$u_2 = \sum_{m=0}^{\infty} b_m e^{ivt} \cos z \sqrt{-\left(\frac{j_m^2}{a^2} + \frac{iv}{\varkappa^2}\right)} \cdot J_0\left(j_m \frac{r}{a}\right).$$

Zbývá ještě poslední krajní podmínka (10)

$$u_2\Big|_{z=\pm h} = Ae^{ivt},$$

z ní plyne

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} b_m \cos h \sqrt{-\left(\frac{j_m^2}{a^2} + \frac{iv}{\varkappa^2}\right)} \cdot J_0\left(j_m \frac{r}{a}\right).$$

Konstanty b_m dostaneme, násobíme-li předešlou rovnici

$$rJ_0\left(j_m \frac{r}{a}\right)$$

a integrujeme-li podle r v mezích od 0 do a.

Integrace dává nejprve

$$A \frac{a}{j_m} \left| rJ_1\left(\frac{j_m}{a} r\right)\right|_0^a = b_m \cos h \sqrt{-\left(\frac{j_m^2}{a^2} + \frac{iv}{\varkappa^2}\right)} \left[J_0^2(j_m) + J_1^2(j_m)\right] \frac{a^2}{2}$$

a se zřetelem k

$$J_0(j)_m = 0$$

zjednoduší se výraz a pro b_m plyne

$$b_m = \frac{2A}{j_m J_1(j_m) \cos h \sqrt{-\left(\frac{j_m^2}{a^2} + \frac{iv}{\varkappa^2}\right)}},$$

takže konečně u_2 nabývá tvaru

$$u_2 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2Ae^{ivt} J_0\left(j_m \frac{r}{a}\right) \cos z \sqrt{-\left(\frac{j_m^2}{a^2} + \frac{iv}{\varkappa^2}\right)}}{j_m J_1(j_m) \cos h \sqrt{-\left(\frac{j_m^2}{a^2} + \frac{iv}{\varkappa^2}\right)}}. \tag{13}$$

Hledané rozdělení teploty skládá se aditivně z těchto částečných řešení u_1 a u_2, takže

$$u = u_1 + u_2, \tag{14}$$

čímž řešení dané úlohy jest úplně určeno.

Pro numerické počítání bude výhodnější, napíšeme-li výrazy (12) a (13) v trochu pozměněném tvaru, který nám zároveň objasní fysikální smysl nalezeného řešení. Dále zavedeme nová označení. Vypočteme reálné části veličin u_1 a u_2, o které konečně jde, asi takto.

Označíme (12)

$$\left|\left\{\frac{iv}{\varkappa^2} + (n + \tfrac{1}{2})^2 \frac{\pi^2}{h^2}\right\}\right| = p_n$$

a

$$\frac{v}{\varkappa^2 (n + \tfrac{1}{2})^2 \frac{\pi^2}{h^2}} = \operatorname{tg} \varphi_n,$$

potom jest

$$\sqrt{-p_n e^{i\varphi_n}} = \sqrt{p_n} \cdot e^{i\left(\frac{\varphi_n}{2} + \frac{\pi}{2}\right)}. \tag{15}$$

Dosadíme do výrazu

$$J_0\left(r \sqrt{\frac{iv}{\varkappa^2} + (n + \tfrac{1}{2})^2 \frac{\pi^2}{h^2}}\right)$$

hodnotu (15) a obdržíme

$$J_0\left[r \sqrt{p_n} \exp i\left(\frac{\varphi_n}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right] = M_n e^{i\varphi_n}$$

a podobně

$$J_0\left[h \sqrt{p_n} \exp i\left(\frac{\varphi_n}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right] = \overline{M}_n e^{i\bar{\varphi}_n}.$$

Číselné hodnoty těchto funkcí lze přehlédnouti z tabulky,[5]) při čemž veličina ψ jest funkcí proměnné r. Reálná část $\mathfrak{Re}\, u_1$ dá se tudíž vyjádřiti výrazem

$$\mathfrak{Re}\, u_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\,(-1)^n A \cos (n + \tfrac{1}{2}) \frac{z}{h} \pi M_n}{(n + \tfrac{1}{2})\, \pi \overline{M}_n} \cos (vt + \psi_n - \bar{\psi}_n)$$

a představuje, jak se dalo očekávati, vlnu, která směrem poloměru postupuje a ve směru osy z nabývá charakteru stojaté vlny.

Abychom vypočetli reálnou část $\mathfrak{Re}\, u_2$, zavedeme nejprve tato označení:

$$\cos z \sqrt{-\left(\frac{j_m^2}{a^2} + \frac{iv}{\varkappa^2}\right)} = c_m e^{i\nu_m}$$

a

$$\cos h \sqrt{-\left(\frac{j_m^2}{a^2} + \frac{iv}{\varkappa^2}\right)} = \bar{c}_m e^{i\bar{\nu}_m}.$$

[5]) K. Hayasi, Fünfstellige Funktionentafeln, Berlín 1930, str. 145.

Veličina γ závisí na proměnné z. Tak dospíváme k vzorci

$$u_2 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2AJ_0\left(j_m \frac{r}{a}\right) c_m}{j_m J_1(j_m)\, \bar{c}_m} e^{i(\nu t + \gamma_m - \bar{\gamma}_m)}.$$

Reálná část $\mathfrak{Re}\, u_2$ představuje opakem k $\mathfrak{Re}\, u_1$ vlnu, která ve směru poloměru má charakter stojaté vlny a která směrem osy postupuje. Úhrnné řešení

$$\mathfrak{Re}\, u_1 + \mathfrak{Re}\, u_2$$

jest výslednice obou vlnových skupin.

Z právě řečeného jeví se také fysikální smysl zprvu čistě formálního rozkladu řešení v u_1 a u_2. Řešení u_1 znázorňuje tepelné vlny, které pronikají pláštěm, zatím co u_2 představuje tu část tepelného rozdělení, která odpovídá teplotě pronikající základnami válce.

Ke konci vyslovuji dík panu A. Erdelyimu za všechny jeho vzácné rady.

V Brně v srpnu 1936.

*

The distribution of temperature in a limited circular cylinder the surface temperature of which is a harmonic function of the time.

(Abstract of the preceding article.)

The distribution of temperature is sought in a limited circular cylinder surrounded by a temperature field, changing periodically with the time. The solution is composed additively from two partial solutions. The one partial solution concerns the heat penetrating through the convex surface of the cylinder (function u_1 given by the equation 12), the other partial solution considers the heat penetrating through both planes limiting the cylinder (function u_2 given by the equation 13).

Tento sešit vyšel dne 14. února 1937.

Knihovna spisů matematických a fysikálních

Právě vyšel svazek 18

BODOVÉ MNOŽINY

Část první

Napsal

EDUARD ČECH

profesor Masarykovy university v Brně

S dodatkem: **O derivovaných číslech funkcí jedné proměnné,** od prof. VOJTĚCHA JARNÍKA

8° VIII, 275 stran 1936 Váz. v pl. Kč 68,—

Teorie množin má v moderní matematice roli tak význačnou a mnohostrannou, že prvá česká učebnice, napsaná vynikajícím znalcem tohoto oboru, jistě vzbudí zájem všech, kdo jsou u nás s matematikou ve styku. Nepředpokládaje vlastně vůbec předběžných znalostí, vede autor čtenáře jistou rukou od prvých elementů leckde až k hranicím dnešní vědy. 336 cvičení zvyšuje elementární ráz knihy. Při výběru látky byla dána přednost těm partiím, které jsou nezbytné pro studium moderní analysy. Upozorňujeme zejména na teorii Lebesgueovy míry a integrálu; potřeba českého výkladu této fundamentální partie moderní analysy byla velmi citelná.

Cena byla stanovena velmi nízko v přesvědčení, že, bude-li kniha hojně čtena, bude to znamenati pro českou matematickou vědu značný zisk.

Lze dostati u všech knihkupců nebo přímo u nakladatele.

Jednota československých matematiků a fysiků, Praha II, Žitná 25.

UČEBNÍ POMŮCKY

FYSIKÁLNÍ
MATEMATICKÉ
CHEMICKÉ

přesně vyrobené
spolehlivě fungující
odborně vyzkoušené

vyrábí a dodává,
všechny přístroje a pomůcky kterékoliv výroby
pečlivě a odborně opravuje

FYSMA,

společnost s ručením omezeným,

založená Jednotou československých matematiků a fysiků

Praha XIX-Bubeneč,
Piettova 180.

Telefon 72526. Telefon 72526.

Vydává a nakládá Jednota československých matematiků a fysiků v Praze. Redakce a administrace v Praze II, Žitná 25. Telefon 29308. Denně od $8^1/_2$—$12^1/_2$ a od 14—18 hod. kromě soboty odpol., neděle a svátku. — Účet poštovní spořitelny v Praze 13103. — Knihtiskárna Prometheus v Praze VIII, Na Rokosce 94. Telefon RR 8139, RR 8107. — Novinová sazba povolena řed. pošt a telegrafů 18. listopadu 1933, čís. 288250/VII. Podací úřad Praha 25.