Zum Interpolationsprobleme im Einheitskreise regulärer Funktionen[1]).

Ernst Lammel, Prag.

(Eingegangen am 29. September 1936.)

An abzählbar unendlichvielen z-Stellen aus dem Innern des Einheitskreises $|z| < 1$, welche auf dessen Peripherie keinen Häufungspunkt besitzen sollen, denken wir uns Z-Werte in eindeutiger Weise vorgeschrieben. Wir fragen nach den notwendigen und zugleich hinreichenden Bedingungen, unter welchen es eine für $|z| < 1$ reguläre Funktion $f(z)$ gibt, welche an den z-Stellen die vorgegebenen Z-Werte annimmt. Da die z-Stellen aus $|z| < 1$ mindestens einen Häufungspunkt in $|z| \leqq 1$ besitzen müssen und dieser nach Vorraussetzung nicht auf $|z| = 1$ liegen kann, so existiert höchstens eine Funktion $f(z)$, die die verlangten Eigenschaften besitzt.

Die eben formulierte Interpolationsaufgabe wurde unter allgemeineren Voraussetzungen bereits gelöst,[2]) doch scheinen die folgenden Ausführungen wegen der verwendeten Hilfsmittel bemerkenswert zu sein.

Wir beweisen die folgenden Sätze: Hat die Folge $\{z_\nu\}$, $(\nu = 1, 2, \ldots)$ aus $|z| < 1$ keinen Häufungspunkt auf $|z| = 1$, so läßt sich jede für $|z| < 1$ reguläre Funktion $f(z)$ in eine Reihe von der Form

$$A_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu \prod_{\nu=1}^{\mu} \frac{z - z_\nu}{1 - \bar{z}_\nu z} \tag{1}$$

---

[1]) Diese Arbeit ist ein textlich neu gefasster Teil meiner im Frühjahr 1933 an der Deutschen Universität in Prag eingereichten und approbierten Dissertation.

[2]) Wegen der hieher gehörigen Arbeiten von S. Takenaka, F. Malmquist und J. L. Walsh verweisen wir auf das Buch von J. L. Walsh, Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain (American Mathematical Society Colloquium Publications, volume XX) New-York City 1935.

entwickeln. Für die Koeffizienten A_μ ($\mu = 0, 1, 2, \ldots$) gilt dann

$$\overline{\lim_{\mu\to\infty}} \sqrt[\mu]{|A_\mu|} \leqq 1. \tag{2}$$

Umgekehrt: Hat die Folge $\{z_\nu\}$, ($\nu = 1, 2, \ldots$) aus $|z| < 1$ keinen Häufungspunkt auf $|z| = 1$, so konvergiert die Reihe (1) dann und nur dann für alle z aus $|z| < 1$, wenn (2) erfüllt ist. Die Konvergenz ist dann in jedem Kreise $|z| \leqq r < 1$ gleichmäßig. Die Reihensumme stellt also eine für $|z| < 1$ analytische Funktion dar.

In diesen beiden Sätzen ist ein notwendiges und zugleich hinreichendes Kriterium dafür enthalten, daß es eine für $|z| < 1$ reguläre Funktion gibt, welche an den Stellen z_ν aus $|z| < 1$, die keinen Häufungspunkt auf $|z| = 1$ besitzen, die Werte Z_ν annimmt.

Zur Benützung gerade der Reihen (1) wurde ich durch das Bestreben geführt, ein kreisgeometrisches Analogon zur Newtonschen Interpolationsformel zu finden.

§ 1. Reihensätze.

Wir beweisen den folgenden Satz 1. *Ist*

$$|z_\nu| < d; \; \nu = 1, 2, 3, \ldots, \tag{3}$$

so konvergiert eine Reihe von der Form (1) *dann und nur dann für alle* z *aus* $|z| < 1$, *wenn* (2) *erfüllt ist.*

Da für $|z| < 1$

$$\left|\frac{z - z_\nu}{1 - \bar{z}_\nu z}\right| \leqq \frac{|z| + |z_\nu|}{1 + |z_\nu|\,|z|} < \frac{|z| + d}{1 + d\,|z|} < 1$$

ist, se erhalten wir für das $(n+1)$-te Glied der Reihe die Abschätzung

$$\left| A_n \prod_{\nu=1}^{n} \frac{z - z_\nu}{1 - \bar{z}_\nu z} \right| < |A_n| \left(\frac{|z| + d}{1 + d\,|z|}\right)^n \tag{4}$$

und es ist also

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left| A_n \prod_{\nu=1}^{n} \frac{z - z_\nu}{1 - \bar{z}_\nu z} \right|} \leqq \frac{|z| + d}{1 + d|z|} \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|A_n|}.$$

Die Bedingung (2) ist mithin hinreichend dafür, daß die Reihe (1) für alle z aus $|z| < 1$ konvergiert.

Wir zeigen nun, daß (2) auch notwendig ist.

Da die Reihe (1) für alle z aus $|z| < 1$ konvergieren soll, so muß für einen festen Wert z' aus $|z| < 1$

$$\left| A_n \prod_{\nu=1}^{n} \frac{z' - z_\nu}{1 - \bar{z}_\nu z'} \right| < 1 \tag{5}$$

sein, sobald $n \geqq N$.

Ist z' so gelegen, daß $d < |z'| < 1$, so wird

$$\left| \frac{z' - z_\nu}{1 - \bar{z}_\nu z'} \right| \geqq \frac{|z'| - |z_\nu|}{1 - |z_\nu|\,|z'|} > \frac{|z'| - d}{1 - d\,|z'|}$$

und deshalb folgt aus (5)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|A_n|} \leqq \frac{1 - d\,|z'|}{|z'| - d}.$$

und da wir $|z'| < 1$ beliebig nahe an Eins wählen können, so erhalten wir schließlich

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|A_n|} \leqq 1,$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Ist die Reihe (1) für alle z aus $|z| < 1$ konvergent, so müssen nach Satz 1 die Koeffizienten A_μ $(\mu = 0, 1, \ldots)$ der Bedingung (2) genügen und wenn dies der Fall ist, so folgt aus (4), daß die Reihe (1) sogar für $|z| \leqq r < 1$ gleichmäßig konvergiert. Wir erhalten so den Satz 2. *Ist* $|z_\nu| < d$; $\nu = 1, 2, \ldots$ *und ist die Reihe* (1) *im ganzen Innern des Einheitskreises* $|z| < 1$ *konvergent, so konvergiert sie gleichmäßig für* $|z| \leqq r < 1$ *und stellt daher eine in* $|z| < 1$ *reguläre Funktion dar.*

§ 2. Entwicklungssatz.

Wir stellen uns nun die Frage, ob sich jede im Einheitskreise reguläre Funktion $f(z)$ in eine Reihe von der Form (1) entwickeln läßt, wobei die Folge $\{z_\nu\}$, $(\nu = 1, 2, \ldots)$ der Bedingung (3) genügen soll.

Läßt sich $f(z)$ in eine Reihe (1) entwickeln, so konvergiert diese Reihe nach Satz 2 gleichmäßig für $|z| \leqq r < 1$ und man kann daher $f(z)$ in der Form

$$f(z) = A_0 + \sum_{\mu=1}^{n} A_\mu \prod_{\nu=1}^{\mu} \frac{z - z_\nu}{1 - \bar{z}_\nu z} + f_{n+1}(z) \prod_{\nu=1}^{n+1} \frac{z - z_\nu}{1 - \bar{z}_\nu z} \tag{6}$$

schreiben, worin $f_{n+1}(z)$ eine für $|z| < 1$ reguläre Funktion bedeutet.

Um A_n $(n \geqq 2)$ zu berechnen, dividieren wir (6) durch

$$\frac{(z - z_n)(z - z_{n+1})}{1 - \bar{z}_n z_{n+1}} \prod_{\nu=1}^{n-1} \frac{z - z_\nu}{1 - \bar{z}_\nu z}\ ^{3)}$$

und integrieren längs $|z| = r_n$ $(0 < r_n < 1$ und $|z_\nu| < r_n$; $\nu = 1, 2, \ldots, n + 1)$. Wir erhalten so

$$A_n = \frac{1 - \bar{z}_n z_{n+1}}{2\pi i} \int\limits_{|z| = r_n} \frac{f(z)}{(z - z_n)(z - z_{n+1}) \prod\limits_{\nu=1}^{n-1} \frac{z - z_\nu}{1 - \bar{z}_\nu z}} dz. \quad (7)$$

Um A_0 bzw. A_1 zu berechnen, dividieren wir (6) durch $z - z_1$ bzw. $\frac{(z - z_1)(z - z_2)}{1 - \bar{z}_1 z_2}$ und integrieren längs $|z| = r_0$ $(0 < r_0 < 1$ und $|z_1| < r_0)$ bzw. $|z| = r_1$ $(0 < r_1 < 1$ und $|z_\nu| < r_1$; $\nu = 1, 2)$. Wir erhalten so

$$A_0 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z| = r_0} \frac{f(z)}{z - z_1} dz$$

$$\text{bzw. } A_1 = \frac{1 - \bar{z}_1 z_2}{2\pi i} \int\limits_{|z| = r_1} \frac{f(z)}{(z - z_1)(z - z_2)} dz. \quad (8)$$

Da $|z_\nu| < d < 1$; $\nu = 1, 2, \ldots$ ist, so können wir für alle n $r_n = R$ $(d < R < 1)$ setzen. Aus (7) folgt dann

$$|A_n| < \frac{M(R)}{(R - d)^2 \prod\limits_{\nu=1}^{n-1} \frac{R - d}{1 - Rd}},$$

wobei $M(R) = \text{Max}\, |f(z)|$ bedeutet.

Mithin ist

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|A_n|} \leqq \frac{1 - Rd}{R - d}$$

und da wir $R < 1$ beliebig nahe an Eins wählen können, ist

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|A_n|} \leqq 1.$$

Nach dem Satz 2 stellt also die Reihe (1), in der die Koeffizienten A_μ $(\mu = 0, 1, 2, \ldots)$ durch (7) und (8) gegeben sind, eine für $|z| < 1$ reguläre Funktion dar. Daß diese Funktion mit $f(z)$

---

[3]) Die naheliegende Division durch

$$\prod_{\nu=1}^{n+1} \frac{z - z_\nu}{1 - \bar{z}_\nu z}$$

ist unzweckmäßig.

identisch ist, folgt einfach daraus, daß $f(z)$ und die durch die Reihe dargestellte Funktion an den Stellen z_ν in den Funktionswerten übereinstimmen und die z-Stellen mindestens einen Häufungspunkt in $|z| < 1$ besitzen.

Wir erhalten somit den folgenden Entwicklungssatz: *Hat die Folge* $\{z_\nu\}$, $(\nu = 1, 2, \ldots)$ *aus* $|z| < 1$ *keinen Häufungspunkt auf* $|z| = 1$, *so läßt sich jede für* $|z| < 1$ *reguläre Funktion in eine Reihe von der Form* (1) *entwickeln.*

Für die Koeffizienten gelten die Integraldarstellungen (7) *und* (8) *und es ist* $\overline{\lim\limits_{\mu\to\infty}} \sqrt[\mu]{|A_\mu|} \leqq 1.$

§ 3. Das Interpolationsproblem.

Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf den Fall, daß die z-Stellen aus $|z| < 1$ voneinander verschieden sind.

Wir denken uns die abzählbar unendlichvielen z-Stellen aus $|z| < 1$, an denen die Z-Werte vorgeschrieben sind, in eine Folge $\{z_\nu\}$, $(\nu = 1, 2, \ldots)$ angeordnet.

Die Koeffizienten A_μ $(\mu = 0, 1, 2 \ldots)$ einer Reihe (1) werden dadurch eindeutig bestimmt, daß man an der Stelle z_ν den Wert Z_ν vorschreibt. Die Ausdrücke, welche man auf diese Weise für die A_μ $(\mu = 0, 1, 2, \ldots)$ erhält, wollen wir als kreisgeometrisch verallgemeinerte Steigungen bezeichnen.

Aus § 1 folgt, daß es dann eine für $|z| < 1$ reguläre Funktion $f(z)$ gibt, welche für z_ν den Wert Z_ν annimmt, wenn die kreisgeometrisch verallgemeinerten Steigungen A_μ $(\mu = 0, 1, \ldots)$ der Bedingung (2) genügen.

Die Notwendigkeit der Bedingung (2) ergibt sich aus dem Entwicklungssatz.

Wir erhalten so das folgende Resultat: *Haben die abzählbar unendlichvielen z-Stellen aus* $|z| < 1$ *keinen Häufungspunkt auf* $|z| = 1$ *und ist* $\{z_\nu\}$, $(\nu = 1, 2, \ldots)$ *eine beliebige Anordnung derselben in eine Folge, so gibt es dann und nur dann eine für* $|z| < 1$ *reguläre Funktion* $f(z)$, *für welche* $f(z_\nu) = Z_\nu$ *ist, wenn die zugehörigen Steigungen der Bedingung* (2) *genügen.*

Herrn Professor K. Löwner, Prag, danke ich für die weitgehende Unterstützung, welche er mir bei dieser Arbeit angedeihen ließ.

Prag, im September 1936.

*