Jednoduše rozpojité funkce.

(Obsah předešlého článku.)

Buď $f(x)$ reálná ohraničená funkce jedné reálné proměnné, definovaná v $\langle a, b\rangle$. Jsou-li $\Phi^+(x)$, $\Phi^-(x)$, $\Phi_+(x)$, $\Phi_-(x)$ funkce, definované vztahy (0), a $\varphi(x)$ největší z prostých hodnot těchto čtyř funkcí, má $f(x)$ v bodě α jednoduchou diskontinuitu, je-li v bodě α rozpojitá a existuje-li pro každé $\varepsilon > 0$ takové $\eta > 0$, že $\varphi(x) < \varepsilon$ pro každé x splňující nerovniny $0 < | x - \alpha | < \eta$. Funkci, která má jen jednoduché diskontinuity, nazveme jednoduše rozpojitou.

Pro funkce jednoduše rozpojité platí některé zajímavé věty. Předně, taková funkce se dá rozvinout ve stejnoměrně konvergentní řadu ohraničených funkcí $f_n(x)$ s isolovanými diskontinuitami položenými tak, že body diskontinuit různých $f_n(x)$ jsou různé. Za druhé, jsou-li dány v intervalu $\langle a, b)$ funkce $\Phi^+(x)$, $\Phi_+(x)$ a v intervalu $(a, b\rangle$ funkce $\Phi^-(x)$, $\Phi_-(x)$, existuje spojitá nebo jednoduše rozpojitá funkce $f(x)$, splňující v $\langle a, b\rangle$ podmínky (0), tehdy a jen tehdy, je-li splněn vztah (9) pro každou posloupnost $\{x_n\}$ bodů $x_n \in \langle a, b\rangle$; $x_p \neq x_q$ pro $p \neq q$. Chceme-li nahraditi v této větě funkci $f(x)$ funkcí, která je také derivovatelná skoro všude v $\langle a, b\rangle$, je třeba připojiti tuto podmínku: Pro každé $\varepsilon > 0$ lze nalézti posloupnost $\{I_n\}$ otevřených intervalů bez společných bodů, která pokrývá množinu bodů, pro něž $\varphi(x) > 0$, a splňuje podmínky $\sum\limits_n \omega(\varphi; I_n) < \infty$ a $\sum\limits_n | I_n | < \varepsilon$ (kde $\omega(\varphi; I_n)$ je oscilace $\varphi(x)$ v int. I_n, $| I_n |$ míra I_n; symbolika přejata ze Saksovy knihy Théorie de l'intégrale). Důkaz poslední věty se opírá o větu: Ohraničená funkce reálné proměnné, definovaná v $\langle a, b\rangle$, má tam skoro všude derivaci tehdy a jen tehdy, je-li funkcí (VBG^*) na množině míry $b - a$ (je-li $a < b$).