Les fonctions simplement discontinues.

Bohuš Jurek, Žilina.

(Reçu le 13 décembre 1935.)

La notion de la fonction discontinue d'une variable réelle est assez large. Pour obtenir des résultats utiles dans la théorie des fonctions discontinues, nous sommes forcés de former des groupes plus étroites de fonctions. Par exemple, on ne peut dire presque rien sur la dérivabilité des fonctions discontinues les plus générales; mais, nous connaissons le théorème de Lebesgue-Young sur la dérivabilité des fonctions à variation bornée. J'ai déjà étudié[1]) de plus proche la dérivabilité des fonctions discontinues à variation bornée. Il est naturel de faire un pas en avant en formant une famille plus large de fonctions discontinues qui contient comme cas particulier celle des fonctions discontinues à variation bornée. Nous savons que chaque fonction à variation bornée possède partout (sauf aux extrémités de l'intervalle où elle est définie) une limite gauche et une limite droite. Alors, les fonctions discontinues qui possèdent partout des limites gauches et droites, représentent un exemple d'une telle famille. Nous définirons une famille encore plus large de fonctions: c'est la famille des fonctions simplement discontinues. Les 3 premiers chapîtres de ce mémoire sont destinés à l'étude des propriétés élémentaires de cette famille de fonctions. Le chapître 4 contient la démonstration de la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction bornée d'une variable réelle soit dérivable presque partout. Le chapître 5 contient l'application du résultat du chapître précédent sur les fonctions simplement discontinues.

1° Définitions.

Soit $f(x)$ une fonction bornée d'une variable réelle, définie dans $\langle a, b\rangle$. Désignons pour tout $\xi \subset \langle a, b\rangle$

[1]) Voir mon mémoire *Sur la dérivabilité des fonctions discontinues*, Věstník K. Č. Spol. Nauk, tř. II. roč. 1931, XXVII et *Sur la dérivabilité des fonctions à variation bornée*, Časopis pro pěst. m. f., **65** (1935-6), 8—27.

$$\left.\begin{array}{ll}\limsup\limits_{x=\xi+0} f(x) - f(\xi) = \Phi^+(\xi) & \limsup\limits_{x=\xi-0} f(x) - f(\xi) = \Phi^-(\xi) \\ \liminf\limits_{x=\xi+0} f(x) - f(\xi) = \Phi_+(\xi) & \liminf\limits_{x=\xi-0} f(x) - f(\xi) = \Phi_-(\xi)\end{array}\right\} \quad (0)$$

La fonction $f(x)$ étant bornée dans $\langle a, b\rangle$, les nombres $\Phi^+(\xi)$, $\Phi_+(\xi)$ sont définis et bornés pour $\xi \subset \langle a, b)$, les nombres $\Phi^-(\xi)$ et $\Phi_-(\xi)$ pour $\xi \subset (a, b\rangle$. Désignons de plus par $\varphi(\xi)$ la plus grande des valeurs absolues de ces quatre nombres. $\varphi(x)$ est évidemment bornée et non négative.

Nous dirons que $f(x)$ possède une discontinuité simple au point ξ si elle est discontinue au point ξ et s'il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un nombre $\eta > 0$ tel que $\varphi(x) < \varepsilon$ pour tout x remplissant la condition $0 < | x - \xi | < \eta$. Toute autre discontinuité d'une fonction bornée sera dite composée. Une fonction discontinue qui n'a que des discontinuités simples sera pour nous une fonction simplement discontinue.

Il n'est pas difficile de démontrer que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction simplement discontinue, définie dans un intervalle $\langle a, b\rangle$, est au plus dénombrable. Cela vient immédiatement du fait que l'inégalité $\varphi(x) > A > 0$ n'a lieu que pour un nombre fini de points de $\langle a, b\rangle$, quel que soit d'ailleurs A. Si l'inégalité considérée avait lieu pour une infinité de points de $\langle a, b\rangle$, chaque point limite de ces points serait un point de discontinuité composée.

Je fais remarquer ici qu'on peut former une échelle de diverses classes logiques de fonctions discontinues. On a les inclusions suivantes: fonctions discontinues à variation bornée $\subset$ fonctions discontinues qui possèdent partout des limites gauches et droites $\subset$ fonctions simplement discontinues $\subset$ fonctions dont l'ensemble des points de discontinuité est au plus dénombrable $\subset$ fonctions de Baire $\subset$ fonctions mesurables au sens de M. Lebesgue.

2° L'isolation des discontinuités simples.

Soit $f(x)$ une fonction simplement discontinue, définie dans $\langle a, b\rangle$. Nous allons déterminer une méthode du développement de $f(x)$ en une série de fonctions qui n'ont qu'un nombre fini de discontinuités. Cette méthode nous permettra d'isoler les discontinuités de $f(x)$ et d'étudier leur nature.

La démonstration du théorème qui exprime la possibilité du développement, est basée sur le lemme suivant, d'ailleurs bien connu:

Lemme 1. *Prémisse. $f_n(x)$ définie et bornée dans $\langle a, b\rangle$ et continue au point $\xi \in (a, b)$ pour tout n naturel, la série $\Sigma f_n(x)$ est uniformément convergente.*

Thèse. *La fonction* $f(x) = \Sigma f_n(x)$ *est continue au point* ξ.

Démonstration: Choisissons un nombre positif ε, trouvons un entier positif m tel que

$$\left| \sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{pour tout } x \in \langle a, b \rangle$$

et un nombre $\eta > 0$ tel que

$$\left| \sum_{n=1}^{m} f_n(x) - \sum_{n=1}^{m} f_n(\xi) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

pour tout x remplissant la condition $| x - \xi | < \eta$.

On a pour $| x - \xi | < \eta$

$$| f(x) - f(\xi) | \leqq \left| \sum_{n=1}^{m} (f_n(x) - f_n(\xi)) \right| +$$

$$+ \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(x) \right| + \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(\xi) \right| < \varepsilon.$$

Alors, $f(x)$ est continue au point ξ.

Théorème 1. *Soit* $f(x)$ *une fonction simplement discontinue dans* $\langle a, b \rangle$. *On a*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

où les $f_n(x)$ *remplissent les conditions suivantes*:

1° la série $\Sigma f_n(x)$ *est uniformément convergente,*

2° chaque $f_n(x)$ *est bornée dans* $\langle a, b \rangle$, *continue et dérivable partout dans* $\langle a, b \rangle$ *sauf dans un nombre fini de points (au plus),*

3° la coïncidence des points de discontinuité de diverses $f_n(x)$ *est exclue.*

Démonstration. Nous savons que l'inégalité $\varphi(x) > A > 0$ n'est vraie que pour un nombre fini de points x. On peut, par conséquent, épuiser l'ensemble des points de discontinuité de $f(x)$ par une suite $x_1, x_2, x_3, \ldots$ ($x_m \neq x_n$ pour $m \neq n$) telle que la suite $\{\varphi(x_n)\}$ est non croissante. Soit $\varphi(x) < a_1$ pour $x \in \langle a, b \rangle$ et soit $\{a_n\}$ une suite décroissante de constantes positives telle que la série $\Sigma\, a_n$ soit convergente. Désignons par μ_p le dernier nombre naturel m tel que $\varphi(x_m) \geqq a_p$ ($\mu_1 = 0$).

Il est évident qu'on peut pour tout point $\gamma \in \langle a, b \rangle$ et pour tout $A > \varphi(\gamma)$ trouver un intervalle (α, β) entourant γ tel que l'oscillation de $f(x)$ dans (α, β) est $< 2A$. Fixons le nombre p. Si l'ensemble $\{\xi_1 < \ldots < \xi_{\mu_{p+1}-\mu_p}\}$ est identique à $\{x_{\mu_p+1}, \ldots, x_{\mu_{p+1}}\}$, entourons chaque point ξ_k par un intervalle (α_k, β_k) tel que les $\langle \alpha_n, \beta_n \rangle$ sont disjoints, $\alpha_k < \beta_k$ et qu'on a

$$| f(x) - f(\xi_k) | < 2\varphi(\xi_k) \tag{1}$$

pour tout $x \epsilon (\alpha_k, \beta_k)$. Entourons tout point $\eta \epsilon \langle \alpha_1, \xi_1)$[2]) par un intervalle (a_η, b_η) $(a_\eta < b_\eta)$ tel que l'oscillation de $f(x)$ dans cet intervalle est $< 3\varphi(\eta)$. Désignons b'_η le plus petit des nombres b_η, $\frac{1}{2}(\eta + \xi_1)$. Les intervalles (a_η, b'_η) couvrent l'intervalle $\langle \alpha_1, \zeta \rangle$ quel que soit $\zeta \epsilon (\alpha_1, \xi_1)$. D'après le lemme de Borel-Lebesgue, il existe un système fini d'intervalles (a_η, b'_η) qui le couvre lui-même. Alors, on peut former une suite dénombrable $(c_1, d_1), (c_2, d_2), \ldots$ d'intervalles (a_η, b'_η) telle que $c_k < d_k$, $c_k < c_{k+1}$, $d_k < d_{k+1}$, $c_{k+1} \epsilon (c_k, d_k)$ pour $k = 1, 2, 3, \ldots$ et

$$\lim_{n=\infty} d_n = \xi_1.$$

Nous allons maintenant définir deux fonctions $G_1(x)$ et $g_1(x)$ qui nous seront utiles pour la construction de la fonction $f_p(x)$. Désignons $\alpha_1 = d_0$. Prenons dans tout intervalle $\langle d_{k-1}, d_k)$ (où $k = 1, 2, \ldots$) $G_p(x)$ égale à la borne supérieure et $g_p(x)$ à la borne inférieure de $f(x) - f(\xi_1)$ dans (c_k, d_k). On a évidemment

$$G_p(x) \geqq f(x) - f(\xi_1) \geqq g_p(x) \tag{2}$$

et

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x=d_k+0} G_p(x) = G_p(d_k) \geqq \lim_{x=d_k-0} g_p(x) \\ \lim_{x=d_k+0} g_p(x) = g_p(d_k) \leqq \lim_{x=d_k-0} G_p(x) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Désignons par $M(\vartheta)$ la borne supérieure de $\varphi(x)$ dans (ϑ, ξ_1). Si $(c_k, d_k) \equiv (a_\eta, b'_\eta)$ pour un certain η et $\vartheta < \eta$, nous avons pour $x \epsilon \langle d_{k-1}, d_k)$, d'après la définition de (a_η, b'_η), la relation

$$G_p(x) - g_p(x) < 3\varphi(\eta) \leqq 3M(\vartheta).$$

Mais, d'après la même définition, on a

$$x < b'_\eta \leqq \tfrac{1}{2}(\eta + \xi_1);$$

si x tend vers ξ_1, $d_k = b'_\eta$ et le nombre correspondant η le font aussi et ($f(x)$ étant une fonction simplement discontinue) nous pouvons écrire

$$0 \leqq \lim_{x=\xi_1-0} (G_p(x) - g_p(x)) \leqq 3 \lim_{x=\xi_1-0} M(x) = 0. \tag{4}$$

D é f i n i t i o n s. D'après (3), il existe pour $k = 1, 2, 3, \ldots$ un nombre A_k tel qu'on a en même temps

$$\lim_{x=d_k-0} G_p(x) \geqq A_k \geqq \lim_{x=d_k-0} g_p(x)$$

$$G_p(d_k) \geqq A_k \geqq g_p(d_k)$$

[2]) Je suppose ici, pour fixer les idées, la relation $a < \xi_1$. Le lecteur verra que le procédé de la démonstration reste le même aussi pour le cas $a = \xi_1$.

Soit A_0 un nombre qui remplit la dernière relation pour $k = 0$. Prenons dans $\langle d_k, d_{k+1}\rangle$ pour $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$f_p(x) = A_k + \tfrac{1}{2}(A_k - A_{k+1}) \left\{\cos\left(\pi \frac{x - d_k}{d_{k+1} - d_k}\right) - 1\right\}.$$

La fonction $f_p(x)$ ainsi définie est continue dans (α_1, ξ_1) et continue de droite au point α_1. De plus, on a

$$g_p(x) \leqq f_p(x) \leqq G_p(x) \tag{5}$$

et, d'après (2),

$$| f_p(x) - (f(x) - f(\xi_1)) | \leqq G_p(x) - g_p(x),$$

de plus, d'après (4)

$$\lim_{x=\xi_1-0} [f_p(x) - (f(x) - f(\xi_1))] = \lim_{x=\xi_1-0} (G_p(x) - g_p(x)) = 0. \tag{6}$$

Définissons de la même manière $f_p(x)$ dans les intervalles $\langle\alpha_k, \xi_k)$, $(\xi_k, \beta_k\rangle$, prenons $f_p(\xi_k) = f_p(a) = f_p(b) = 0$ pour tout k considéré. Cela fait, il y a encore quelques intervalles ouverts, où $f_p(x)$ n'est pas définie. Si (γ, δ) est un tel intervalle, prenons pour $x \in (\gamma, \delta)$

$$f_p(x) = f_p(\gamma) + \tfrac{1}{2}[f_p(\gamma) - f_p(\delta)] \left\{\cos\left(\pi \frac{x - \gamma}{\delta - \gamma}\right) - 1\right\}. \tag{7}$$

La fonction ainsi définie est continue et dérivable partout dans (a, b) sauf les points ξ_k. De plus, elle est continue et dérivable d'un côté aux points a, b si $a < \xi_1$ et $b > \xi_{\mu_p+1} - \mu_p$. Il n'est pas difficile de démontrer qu'elle est bornée. La borne supérieure de $G_p(x)$ (et d'après (5) aussi de $f_p(x)$) dans $\langle\alpha_k, \beta_k\rangle$ est au plus égale à la borne supérieure de $f(x) - f(\xi_k)$ et la borne inférieure de $g(x)$ (et de $f_p(x)$) est au moins égale à la borne inférieure de $f(x) - f(\xi_k)$ dans le même intervalle. D'après (1), on a pour $x \in \langle\alpha_k, \beta_k\rangle$

$$| f_p(x) | < 2\varphi(\xi_k).$$

L'oscillation de $f_p(x)$ dans $\langle a, b\rangle$ ne diffère pas de celle de $f_p(x)$ dans l'ensemble-somme des intervalles $\langle\alpha_k, \beta_k\rangle$ voir (7). On a

$$| f_p(x) | < 2a_p.$$

Le dernier résultat exprime aussi la convergence uniforme de la série $\Sigma f_n(x)$. On voit sans peine que la coïncidence de points de discontinuité de diverses $f_n(x)$ est exclue.

Notre série remplit les conditions du théorème 1 sauf (peut-être) la condition

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x). \tag{8}$$

Mais, d'après le lemme 1, la fonction $f(x) - \Sigma f_n(x)$ ne peut posséder de discontinuité qu'aux points x_k. Nous allons démontrer que cette fonction est continue aussi pour les points x_k. D'après (6), on a pour un certain p

$$\lim_{x=x_k} [f(x) - \Sigma f_n(x)] = \lim_{x=x_k} [(f(x) - f_p(x)) - \sum_{n \neq p} f_n(x)] =$$

$$= \lim_{x=x_k} (f(x) - f_p(x)) - \lim_{x=x_k} \sum_{n \neq p} f_n(x) =$$

$$= f(x_k) - \sum_{n \neq p} f_n(x_k) = f(x_k) - \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_k),$$

alors, $f(x) - \Sigma f_n(x)$ est continue. Nous savons que toute fonction continue est exprimable par une série uniformément convergente de polynomes. Si la relation (8) n'a pas lieu et si l'on a

$$f(x) - \Sigma f_n(x) = \Sigma P_n(x),$$

où $\Sigma P_n(x)$ est une série uniformément convergente de polynomes, nous pouvons prendre $f_n(x) + P_n(x)$ au lieu de $f_n(x)$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ Ainsi, le théorème 1 est démontré.

Le problème de l'isolation des discontinuités de $f(x)$ revient au problème du développement de $f(x)$. Étant donné un développement

$$f(x) = \Sigma f_n(x)$$

remplissant les 3 conditions du théorème 1, il existe pour tout point ξ de discontinuité de $f(x)$ un nombre p tel que $f(x) - f_p(x)$ est continue au point ξ. Alors, la discontinuité de $f(x)$ et de $f_p(x)$ au point ξ ont la même nature. En particulier, les nombres $\Phi^+(\xi)$, $\Phi^-(\xi)$, $\Phi_+(\xi)$, $\Phi_-(\xi)$ sont les mêmes pour $f(x)$ et $f_p(x)$.

3° Théorèmes d'existence.

Nous voulons résoudre encore le problème suivant: Existe-t-il pour les nombres Φ^+, Φ^-, Φ_+, Φ_-, donnés d'avance, une fonction simplement discontinue $f(x)$ qui satisfait aux conditions (0)? Le théorème 2 répond à cette question.

Théorème 2. *Soient donnés pour tout $x \in (a, b)$ $(a < b)$ quatre nombres finis $\Phi^+(x) \geqq \Phi_+(x)$, $\Phi^-(x) \geqq \Phi_-(x)$ et les nombres (finis) $\Phi^+(a) \geqq \Phi_+(a)$, $\Phi^-(b) \geqq \Phi_-(b)$; soit $\varphi(x)$ la fonction définie dans le chapitre 1°. La condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une fonction continue ou simplement discontinue $f(x)$ remplissant* (0) *est la validité de l'égalité*

$$\lim_{n=\infty} \varphi(x_n) = 0 \tag{9}$$

quelle que soit la suite $\{x_n\}$ *des points* $x_n \in \langle a, b\rangle$; $x_p \neq x_q$ *pour* $p \neq q$.

Démonstration. La nécessité de la condition (9) est évidente (voir le chapitre 1). Il ne nous reste que de prouver sa suffisance. Soit $\{a_n\}$ une suite décroissante de constantes positives telle que $\Sigma\, a_n$ est convergente. Si (9) a lieu, l'ensemble des points où $\varphi(x) \geqq a_n$ est fini. Il n'est pas difficile de construire une suite de fonctions $\{f_n(x)\}$ telle que $|\, f_k(x)\,| < a_{k-1}$ et que $f_k(x)$ est continue partout[3]) dans $\langle a, b\rangle$ sauf dans les points (en nombre fini), pour lesquels $a_k \leqq \varphi(x) < a_{k-1}$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$; $a_0 = \infty$); nous pouvons même construire les $f_n(x)$ dont les discontinuités sont caractérisées par les nombres $\Phi^+(x)$, $\Phi_+(x)$, $\Phi^-(x)$, $\Phi_-(x)$ donnés. La fonction $f(x) = \Sigma\, f_n(x)$ n'est discontinue que pour les points où $\varphi(x) > 0$ (voir lemme 1). De plus, nous savons que $\sum\limits_{n \neq p} f_n(x)$ est continue au point ξ si $a_p \leqq \varphi(\xi) < a_{p-1}$; par suite, $f(x)$ remplit les conditions (0). La validité de (9) montre que $f(x)$ est une fonction continue ou simplement discontinue.

Corollaire. *Soit donné pour* $x \in (a, b\rangle$ *une fonction* $\gamma(x)$ *et pour* $x \in \langle a, b)$ *une fonction* $\delta(x)$; *soit* $\varphi(x)$ *le plus grand des nombres* $|\,\gamma(x)\,|$ *et* $|\,\delta(x)\,|$. *La condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une fonction* $f(x)$ *définie dans* $\langle a, b\rangle$ *et telle qu'on a*

$$f(x-0) - f(x) = \gamma(x) \text{ pour } x \in (a, b\rangle$$
$$\text{et } f(x+0) - f(x) = \delta(x) \text{ pour } x \in \langle a, b)$$

est la validité de (9) *quelle que soit la suite* $\{x_n\}$ *des points* $x_n \in \langle a, b\rangle$; $x_p \neq x_q$ *pour* $p \neq q$.

Théorème 3: *Soit* $\vartheta(x)$ *une fonction définie dans* (a, b) *qui satisfait à la condition suivante*:

$$\lim_{n=\infty} \vartheta(x_n) = 0$$

quel que soit la suite $\{x_n\}$ *de points* $x \in (a, b)$ ($x_p \neq x_q$ *pour* $p \neq q$). *Il existe une fonction* $F(x)$ *définie dans* $\langle a, b\rangle$ *qui possède une dérivée finie gauche dans* $(a, b\rangle$ *et une dérivée finie droite dans* $\langle a, b)$ *telle que pour* $x \in (a, b)$ *on a*

$$F'_d(x) - F'_g(x) = \vartheta(x).$$

Démonstration. Prenons $\vartheta(x) = \delta(x)$, $\gamma(x) = 0$ et trouvons (d'après le corollaire du théorème 2) la fonction correspondante $f(x)$. La fonction $f(x)$ étant bornée et discontinue aux points d'un ensemble au plus dénombrable, elle est intégrable au sens de Rie-

[3]) Je dirai désormais qu'une fonction définie dans $< a, b >$ est continue partout dans $< a, b >$ si elle est continue dans (a, b) et continue d'un côté aux points a, b.

mann.[4]) On a

$$\lim_{h=\pm 0} \frac{1}{h} \left\{ \int_a^{x+h} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^{x} f(x)\,\mathrm{d}x \right\} = f(x \pm 0)$$

où les signes $\pm$ dépendent l'un de l'autre d'une manière bien connue. Si nous désignons l'intégrale de $f(x)$ par $F(x)$, nous pourrons écrire

$$F'_d(x) - F'_g(x) = \vartheta(x)$$

c. q. f. d.

4° Théorème général sur la dérivabilité de fonctions.

Pour pouvoir continuer les études des fonctions simplement discontinues, nous avons besoin d'introduire dans nos raisonnements quelques généralisations du concept de la fonction à variation bornée.[5])

Nous désignerons par $V^*(f; E)$ et appellerons *variation forte sur E* d'une fonction $f(x)$ définie dans un intervalle $I \supset E$ la borne supérieure des sommes $\sum\limits_k \omega(f; I_k)$[6]) ou $\{I_k\}$ est une suite finie quelconque d'intervalles fermés n'empiétant pas l'un sur l'autre et dont les extrémités appartiennent à E. Si $V^*(f; E) < \infty$, la fonction $f(x)$ sera dite *à variation bornée au sens restreint sur E* ou bien *fonction (VB^*) sur E*. Une fonction finie $f(x)$ sera dite *à variation bornée généralisée au sens restreint sur $E \subset I$* ou, en abrégé, *une fonction (VBG^*) sur E*, lorsque E est somme d'une suite finie ou dénombrable d'ensembles tels que $f(x)$ est (VB^*) sur chacun d'eux.

On voit sans peine que si $f(x)$ est (VB^*) (ou (VBG^*) resp.) sur un ensemble E, elle est (VB^*) ou (VBG^*) sur tout sous-ensemble de E.

Théorème A. Si une fonction finie $f(x)$ est (VBG^*) sur E, cet ensemble est contenu dans une somme d'ensembles fermés E_n sur lesquels $f(x)$ est (VB^*).

Théorème B. Si une fonction $f(x)$ est (VB^*) sur un ensemble E, elle l'est également sur la fermeture $\overline{E}$ de cet ensemble.[7])

---

[4]) On trouvera la démonstration de cette affirmation par exemple dans „Leçons sur l'intégration" par M. Lebesgue, 1928 p. 29.

[5]) Les définitions et les théorèmes A — C sont tirés de l'ouvrage de M. Saks „Théorie de l'intégrale", Monogr. mat. II. Warszawa 1933 p. 158—161. Le théorème D est un résultat immédiat du théorème 18 du même ouvrage p. 188.

[6]) $\omega(f; I_k)$ désigne l'oscillation de $f(x)$ sur I_k, $\omega(f; M)$ l'oscillation de $f(x)$ sur un ensemble M de points.

[7]) L'ensemble $\overline{E} = E + E'$ où E' est l'ensemble dérivé de E. Je désignerai désormais par $|E|$ la mesure (lebesguienne) de E.

Théorème C. Toute combinaison linéaire à coefficients constants de deux fonction (VB^*) sur E est une fonction (VB^*) sur E.

Théorème D. Une fonction finie $f(x)$ définie dans $\langle a, b\rangle$ qui possède une dérivée gauche finie dans $(a, b\rangle$ et une dérivée droite finie dans $\langle a, b)$, est une fonction (VBG^*) dans $\langle a, b\rangle$.

Théorème 4. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction bornée d'une variable réelle $f(x)$, définie dans $\langle a, b\rangle$, soit dérivable (au sens propre du mot) presque partout dans $\langle a, b\rangle$ est qu'elle soit une fonction (VBG^*) sur un ensemble E de mesure $|b - a|$.*

Le théorème 4 est équivalent au théorème suivant:

Théorème 5. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction bornée d'une variable réelle $f(x)$, définie dans $\langle a, b\rangle$, soit dérivable (au sens propre du mot) presque partout dans $\langle a, b\rangle$ est qu'elle soit (VB^*) sur un ensemble fermé M de mesure supérieure à σ, quel que soit le nombre $\sigma < |b - a|$.*

L'équivalence des théorèmes énoncés plus haut résulte du lemme 2.

Lemme 2. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction bornée $f(x)$, définie dans $\langle a, b\rangle$, soit (VBG^*) sur un ensemble E de mesure $|b - a|$ est qu'elle soit (VB^*) sur un ensemble fermé M de mesure supérieure à σ, quel que soit le nombre $\sigma < < |b - a|$.*

Démonstration. La condition est nécessaire. Supposons que $f(x)$ est une fonction (VBG^*) sur un ensemble de mesure $|b - a|$. Trouvons, d'après le théorème A, une suite $\{E_n\}$ d'ensembles fermés sur lesquels $f(x)$ est (VB^*) et telle que $|\sum_n E_n| = |b - a|$. Trouvons de plus pour $\sigma < |b - a|$ un nombre naturel m tel que

$$\left|\sum_{k=1}^{m} E_k\right| - \sigma > 0. \tag{10}$$

Désignons ϱ le premier membre de l'inégalité (10). Soit $\{I_n^k\}$ la suite des intervalles contigus (ouverts) de l'ensemble E_k ($k = = 1, 2, \ldots$) et soit r_k un nombre tel que

$$\sum_{n=r_k}^{\infty} |I_n^k| < \frac{\varrho}{m}.$$

Désignons $M_k = E_k - \sum_{s=1}^{m} \sum_{n=r_s}^{\infty} I_n^s$ et $M = \sum_{k=1}^{m} M_k$. L'ensemble M est fermé et remplit les conditions

$$0 \leqq \left| \sum_{k=1}^{m} E_k \right| - | M | < \varrho$$

et, par suite, aussi la condition

$$| M | - \sigma > 0. \tag{11}$$

Il nous reste à démontrer que $f(x)$ est une fonction (VB^*) sur M. Partageons l'intervalle $\langle a, b \rangle$ par les bornes inférieures et supérieures des M_k pour $k \leqq m$ et par les extrémités des I_n^k pour $k \leqq m$ et $n < r_k$ en des intervalles ouverts K_i disjoints. Soit $x_1, x_2, \ldots, x_\lambda$ une suite épuisant l'ensemble des extrémités des K_i ($x_m \neq x_n$ pour $m \neq n$). Si $\{T_n\}$ est une suite quelconque d'intervalles fermés n'empiétant pas l'un sur l'autre et dont les extrémités appartiennent à M et si $T_j \equiv \langle \alpha, \beta \rangle \subset K_p$, la relation $\alpha \in M_h$ $(h \leqq m)$ entraîne $\beta \in M_h$. En effet, le point β n'est pas au dehors des bornes de M_h et il n'appartient pas à I_n^h pour $n < r_h$, parce que $\alpha \in M_h$ et K_p ne contient aucun x_i. Mais, β n'appartient à aucun I_n^h pour $n \geqq r_h$ à cause de la relation $\beta \in M$. Alors, on a $\beta \in E_h$, $\beta \in M$, $\beta \in M_h$. Un point x_i déterminé ne peut pas appartenir à 3 intervalles K_n divers; nous pouvons écrire

$$\sum_{k,} \omega(f; T_k) \leqq \sum_{h=1}^{m} V^*(f; M_h) + 2\lambda\, \omega(f; \langle a, b \rangle) < +\infty.$$

Mais, la condition énoncée est aussi s u f f i s a n t e. En effet, soit $\{E_n\}$ une suite infinie d'ensembles fermés qui remplissent la condition du théorème 5 pour les σ tendant vers $| b - a |$. On a évidemment $| \Sigma E_n | = | b - a |$. La fonction $f(x)$ est (VB^*) sur tout E_n et (VBG^*) sur ΣE_n. L'équivalence des théorèmes 4 et 5 est démontrée.

Nous allons maintenant démontrer le théorème 5 à l'aide du lemme 3.

Lemme 3. *Soit M un ensemble fermé et soit $f(x)$ une fonction définie dans $\langle a, b \rangle \supset M$ et dérivable (au sens propre du mot) pour $x \in M$. Si $f_1(x) = f(x)$ pour $x \in M$ et si $f_1(x)$ est linéaire dans les intervalles contigus de M complétés par leurs extrémités, elle possède une dérivée finie partout dans $\langle a, b \rangle$ sauf dans un ensemble dénombrable.*

Démonstration. Il suffit évidemment de démontrer la dérivabilité de $f_1(x)$ pour $x \in M$. Nous pouvons même laisser de côté les extrémités des intervalles contigus (a_n, b_n) de M. Si $\{x_n\}$ est une suite de points tendant vers x qui est point limite bilatéral des (a_n, b_n), soit $\{\xi_n\}$ une suite épuisant les $x_n \in M$ et $\{\eta_n\}$ une suite contenant les autres x_n. On a

$$\lim_{n=\infty} \frac{f_1(\xi_n) - f_1(x)}{\xi_n - x} = f'(x)$$

et pour $\eta_n \in \langle a_{m_n}, b_{m_n} \rangle$

$$\frac{f_1(\eta_n) - f_1(x)}{\eta_n - x} \in \left\langle \frac{f_1(a_{m_n}) - f_1(x)}{a_{m_n} - x}, \frac{f_1(b_{m_n}) - f_1(x)}{b_{m_n} - x} \right\rangle,$$

d'où vient

$$\lim_{n=\infty} \frac{f_1(\eta_n) - f_1(x)}{\eta_n - x} = \lim_{n=\infty} \frac{f_1(a_n) - f_1(x)}{a_n - x} =$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{f_1(b_n) - f_1(x)}{b_n - x} = f'(x)$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{f_1(x_n) - f_1(x)}{x_n - x} = f'(x).$$

Remarque. On voit de la même manière que $f_1(x)$ possède une dérivée droite (finie) dans $\langle a, b)$ et une dérivée gauche (finie) dans $(a, b\rangle$; donc, $f_1(x)$ est une fonction (VBG^*) dans $\langle a, b\rangle$ (théorème D).

Démonstration du théorème 5.

Démontrons tout d'abord que la condition du th. 5. est nécessaire. Soit $f(x)$ une fonction bornée dans $\langle a, b\rangle$ $(a < b)$ et dérivable presque partout dans $\langle a, b\rangle$. Soit $0 < \sigma < b - a$ et posons $\varepsilon = \frac{1}{4}(b - a - \sigma)$. Soit $K_1, K_2, \ldots$ une suite d'intervalles ouverts, disjoints qui contient tous les points où $f(x)$ n'est pas dérivable[8]; soit $\sum_i |K_i| < \varepsilon$. Posons $M = \langle a, b\rangle - \Sigma K_i$ et construisons la fonction $f_1(x)$ (égale à $f(x)$ pour $x \in M$, pour $x = a$ et $x = b$ et linéaire dans chaque fermeture $\overline{K}_i$); posons $f_2(x) = f(x) - f_1(x)$. La fonction $f_2(x)$ est bornée dans $\langle a, b\rangle$, continue et égale à zéro pour $x \in M$, et dérivable (donc continue) presque partout dans $\langle a, b\rangle$ (voir le Lemme 3). Nous allons maintenant montrer que l'on peut couvrir l'ensemble ΣK_i par une suite d'intervalles ouverts et disjoints $H_1, H_2, \ldots$ telle que

$$\sum_i |H_i| < 2\varepsilon, \lim_{n=\infty} S(f_2, H_n) = 0$$

(nous désignerons, en général, par $S(g, G)$ la borne supérieure

[8]) Nous prenons l'intervalle $\langle a, b\rangle$ pour l'espace de nos considérations, de sorte que les intervalles $\langle a, c)$, $(c, b\rangle$ doivent être regardés comme ouverts. On supprime, de plus, tous les K_i dans lesquels $f(x)$ est dérivable. Si $f(x)$ était dérivable partout, on n'aurait rien á démontrer (voir le lemme 2 et le théorème D).

de $|g(x)|$ sur l'ensemble G); la deuxième condition doit être supprimée si la suite $H_1, H_2, \ldots$ est finie. Pour former une telle suite, soit c la borne supérieure de $S(f_2, K_i)$ pour $i = 1, 2, \ldots$; on a $S(f_2, K_i) > 0$ pour chaque i, donc $c > 0$. Désignons par $L_1, L_2, \ldots$ tous les intervalles K_i, pour lesquels $S(f_2, K_i) > \frac{1}{2}c$ et posons $T = L_1 + L_2 + \ldots$ Chaque point limite des extrémités des intervalles L_i est un point de discontinuité de $f_2(x)$; on a donc $|\overline{T} - T| = 0$, $|\overline{T}| = |T|$. Alors, on peut couvrir l'ensemble $\overline{T}$ par un nombre fini d'intervalles ouverts et disjoints $H'_1, \ldots, H'_{k'}$ tels que $\sum_i |H'_i| < |T| + \frac{1}{2}\varepsilon$. Désignons par L'_1, $L'_2, \ldots$ tous les K_i tels que $K_i(H'_1 + \ldots + H'_k) \neq 0$; chaque L_i, étant contenu dans un H'_j, fait partie de la suite $L'_1, L'_2, \ldots$ L'ensemble $\sum_i H'_i + \sum_j L'_j$ est évidemment somme d'un nombre fini ($\leqq k'$) d'intervalles ouverts et disjoints $H_1, H_2, \ldots, H_{k_1}$; en supprimant dans la suite $K_1, K_2, \ldots$ tous les L'_i, on obtient une nouvelle suite $K_1{}^1, K_2{}^1, \ldots$ et on a le résultat suivant: les intervalles $H_1, \ldots, H_{k_1}, K_1{}^1, K_2{}^1, \ldots$ sont disjoints et recouvrent l'ensemble $\sum_i K_i$; en outre, on a

$$\Sigma\,|H_i| + \Sigma\,|K_j{}^1| < \varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon$$
$$S(f_2, H_i) \leqq c \qquad \text{pour } 1 \leqq i \leqq k_1$$
$$S(f_2, K_j{}^1) \leqq \tfrac{1}{2}c \qquad \text{pour } j = 1, 2, 3, \ldots$$

En désignant par $L_j{}^1$ $(j = 1, 2, 3, \ldots)$ ceux parmi les intervalles $K_i{}^1$ pour lesquels $S(f_2, K_i{}^1) > \frac{1}{4}c$, on obtient de la même manière une suite d'intervalles ouverts et disjoints

$$H_{k_1+1}, \ldots, H_{k_2}, K_1{}^2, K_2{}^2, K_3{}^2, \ldots \tag{11}$$

(où les $K_j{}^2$ sont choisis parmi les $K_i{}^1$) qui possède les propriétés suivantes: la suite (11) couvre l'ensemble $\sum_1 K_j{}^1$ et l'on a

$$\sum_{i=1}^{k_1} |H_i| + \sum_{i=k_1+1}^{k_2} |H_i| + \sum_j |K_j{}^2| < \varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{4}\varepsilon,$$
$$S(f_2, K_j{}^2) \leqq \tfrac{1}{4}c \text{ pour } j = 1, 2, \ldots$$

On peut encore retrancher de chaque H_i $(k_1 < i \leqq k_2)$ sa partie commune avec $\overline{H_1 + \ldots + H_{k_1}}$ (car les points de $\overline{H_1 + \ldots + H_{k_1}}$ — $(H_1 + \ldots + H_{k_1})$ n'appartiennent pas à ΣK_i); après cette modification, on aura (remarquons que $f_2(x) = 0$ en dehors des K_i)

$$S(f_2, H_i) \leqq \tfrac{1}{2}c \text{ pour } k_1 < i \leqq k_2$$

et les intervalles

$$H_1, \ldots, H_{k_2}, K_1{}^2, K_2{}^2, \ldots$$

seront disjoints et leur somme couvrira l'ensemble ΣK_i. En procédant de cette manière, on obtient une suite, $H_1, H_2, \ldots$ aux propriétés demandées; quel que soit le nombre naturel p, on trouvera toujours un n tel qu'on aura

$$S(f_2, K_p) > \frac{c}{2^n}, \text{ c'est-à-dire } K_p \subset \sum_{i=1}^{k_n} H_i.$$

Retranchons de chaque H_i sa partie qui tombe au dehors de $\langle a, b\rangle$. Soit $H_n = (\gamma_n, \delta_n)$ où $\gamma_n < \delta_n$; posons $s_n = S(f_2, H_n)$ et soit $C_n = \langle a, b\rangle\, (\delta_n - s_n, \gamma_n + s_n)$; si $\delta_n - s_n \geqq \gamma_n + s_n$, on doit poser $C_n = 0$. Soit

$$U = \lim_{m=\infty} \sum_{n=m}^{\infty} (C_n - \overline{H}_n)$$

(si la suite $H_1, H_2, \ldots$ est finie, posons $H_n = C_n = 0$ pour n assez grand). Soit $\xi \in U$; on a alors pour une certaine suite infinie $m_1 < m_2 < \ldots$

$$\xi \in C_{m_n} - \overline{H}_{m_n},$$

donc

$$\delta_{m_n} - \gamma_{m_n} < s_{m_n}, \ | \xi - \gamma_{m_n} | < s_{m_n}, \ | \xi - \delta_{m_n} | < s_{m_n},$$

et (à cause de $s_n \to 0$)

$$\gamma_{m_n} \to \xi, \ \delta_{m_n} \to \xi,$$

donc

$$\xi \in \langle a, b\rangle - \Sigma H_n, \ f_2(\xi) = 0;$$

d'autre part, on a

$$f_2(\delta_{m_n}) = 0, \ | f_2(\zeta_{m_n}) | > \tfrac{1}{2} s_{m_n}$$

pour un certain $\zeta_{m_n} \in (\gamma_{m_n}, \delta_{m_n})$; nous obtenons les relations

$$\frac{f_2(\delta_{m_n}) - f_2(\xi)}{\delta_{m_n} - \xi} = 0, \ \left| \frac{f_2(\zeta_{m_n}) - f_2(\xi)}{\zeta_{m_n} - \xi} \right| > \tfrac{1}{2},$$

donc $f'(\xi)$ n'existe pas, d'où $| U | = 0$. Il existe donc un r tel que

$$\left| \sum_{n=r}^{\infty} (C_n - H_n) \right| < \varepsilon,$$

d'où

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} H_n + \sum_{n=r}^{\infty} C_n \right| < 3\varepsilon.$$

L'ensemble

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} H_n + \sum_{n=r}^{\infty} C_n$$

est somme d'une suite d'intervalles ouverts et disjoints $X_1, X_2, \ldots$ Il existe un nombre q_0 tel que l'on ait

$$X_q H_n = 0 \text{ pour } q > q_0,\ n < r.$$

A chaque X_q avec $q > q_0$ faisons correspondre un $H_{m_q} \subset X_q$ tel que $s_{m_q} \geqq \frac{1}{2} s_n$ pour chaque $H_n \subset X_q$; si $\xi \subset X_q$, on aura $| f_2(\xi) | \leqq$ $\leqq 2 s_{m_q}$ (observons que $f_2(x) = 0$ en dehors des H_n), donc $\omega(f_2, X_q) \leqq$ $\leqq 4 s_{m_q}$.

On a ou bien $s_{m_q} \leqq | H_{m_q} |$, ou bien $s_{m_q} > | H_{m_q} |$; dans le dernier cas, on a

$$2 s_{m_q} - | H_{m_q} | = | C_{m_q} |,$$

d'où

$$s_{m_q} \leqq | C_{m_q} |;$$

alors, on a toujours

$$\omega(f_2, X_q) \leqq 4 \, | H_{m_q} | + 4 \, | C_{m_q} |.$$

Pour $p \neq q$, on a $X_p X_q = 0$, donc $H_{m_p} H_{m_q} = C_{m_p} C_{m_q} = 0$.

$$\sum_{q>q_0} | H_{m_q} | = | \sum_{q>q_0} H_{m_q} | \leqq b - a,$$

$$\sum_{q>q_0} | C_{m_q} | = | \sum_{q>q_0} C_{m_q} | \leqq b - a;$$

en posant $N = \langle a, b \rangle - Z$, on a

$$V^*(f_2, N) \leqq \sum_q \omega(f_2, X_q) \leqq$$

$$\sum_{q=1}^{q_0} \omega(f_2, X_q) + 4 \sum_{q>q_0} (| H_{m_q} | + | C_{m_q} |) < \infty.$$

La fonction $f_2(x)$ est donc une fonction (VB^*) sur l'ensemble fermé N de mesure $> b - a - 3\varepsilon$. La fonction $f_1(x)$ est (voir la remarque après le lemme 3 et le lemme 2) une fonction (VB^*) sur un ensemble fermé F de mesure $> b - a - \varepsilon$. Donc, la fonction $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ est une fonction (VB^*) sur l'ensemble fermé NF de mesure $> b - a - 4\varepsilon = \sigma$.

La nécessité de notre condition est démontrée. La suffisance est exprimée par le théorème 11 chap. VIII. de l'ouvrage Saks, Théorie de l'intégrale.

Théorème 6. *Soit $\varphi(x)$ une fonction bornée, définie dans $\langle a, b \rangle$. La condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une fonction finie $f(x)$, dérivable presque partout dans $\langle a, b \rangle$ et liée à $\varphi(x)$ par les relations énoncées dans le chap. 1er, coïncide avec la validité simultanée des conditions suivantes:*

1° $\varphi(x) = 0$ aux points d'un ensemble dense dans $\langle a, b \rangle$.

2° $\varphi(x) \geqq \frac{1}{2} \limsup_{\xi = x} \varphi(\xi)$

pour tout $x \in \langle a, b \rangle$ (donc $\varphi(x) \geqq 0$).

3° *On peut pour tout $\varepsilon > 0$ trouver une suite $\{I_n\}$ d'intervalles ouverts disjoints qui couvre l'ensemble des points où $\varphi(x) > 0$ et qui remplit les conditions $\Sigma\, \omega(\varphi; I_n) < \infty$ et $\Sigma \mid I_n \mid < \varepsilon$.*

Démonstration. La condition est nécessaire:

1° L'ensemble des points de discontinuité de $f(x)$ ne peut contenir aucun intervalle.

2° Si $f(x)$ existait et si l'inégalité

$$\varphi(x) < \tfrac{1}{2} \limsup_{\xi = x} \varphi(\xi)$$

avait lieu, on aurait pour toute suite d'intervalles $\{K_n\}$ telle que $x \in K_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ et $\lim \mid K_n \mid = 0$, la relation

$$\limsup_{\xi = x} f(\xi) - \liminf_{\xi = x} f(\xi) = \lim_{n = \infty} (M_n - m_n) \geqq \limsup_{\xi = x} \varphi(\xi) > 2\varphi(x),$$

où M_n et m_n sont resp. la borne supérieure et inférieure de $f(\zeta)$ pour $\zeta \neq x$ et en même temps $\zeta \in K_n$. Un des nombres $\Phi^+(x)$, $\Phi^-(x)$, $\Phi_+(x)$, $\Phi_-(x)$ serait $> \varphi(x)$.

3° Soit $\varepsilon > 0$ et $\sigma > \mid b - a \mid - \varepsilon$. Supposons l'existence d'une fonction $f(x)$ qui a dans $\langle a, b \rangle$ les propriétés démandées. L'ensemble des points où $\varphi(x) > 0$ étant de mesure nulle, nous le pouvons couvrir par une suite d'intervalles ouverts $\{H_n\}$ tels que $\Sigma H_n < \frac{1}{2} (\mid b - a \mid - \sigma)$. Mais, nous savons aussi que $f(x)$ est (VB^*) sur un ensemble fermé E de mesure $> \frac{1}{2} (\sigma + \mid b - a \mid)$. Alors, elle est (VB^*) sur $F = E - \Sigma H_n$ de mesure supérieure à $\sigma > \mid b - a \mid - \varepsilon$. Nous obtenons la condition 3° pour les intervalles contigus I_n de F.

La condition est suffisante. Les conditions 1° et 2° entraînent pour tout $\xi \in \langle a, b \rangle$ les relations

$$\varphi(\xi) \geqq \tfrac{1}{2} \limsup_{\xi = x} \varphi(x) \geqq 0 = \liminf_{x = \xi} \varphi(x),$$

$$\varphi(\xi) - \liminf_{x = \xi} \varphi(x) = \varphi(\xi) \geqq \mid \varphi(\xi) - \limsup_{x = \xi \pm 0} \varphi(x) \mid$$

quel que soit le choix des signes.[9] Nous pouvons prendre $f(x) = \varphi(x)$. Si $\varphi(x)$ satisfait à la condition 3°, elle est (VB^*) sur l'ensemble fermé $\langle a, b \rangle - \Sigma I_n$ de mesure aussi proche que l'on veut à $\mid b - a \mid$. Alors, $\varphi(x)$ est dérivable presque partout dans $\langle a, b \rangle$. Le théorème 6 est démontré.

5° Sur la dérivabilité de fonctions simplement discontinues.

Théorème 7. *Soient données dans $\langle a, b \rangle$ quatre fonctions finies $\Phi^+(x) \geqq \Phi_+(x)$, $\Phi^-(x) \geqq \Phi_-(x)$. La condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une fonction continue ou simplement*

[9]) Si $\xi = a$ ou $\xi = b$, nous devons choisir le signe $+$ resp. $-$.

discontinue $f(x)$, remplissant (0) *dans $\langle a, b\rangle$ et dérivable presque partout dans $\langle a, b\rangle$, coïncide avec la validité simultanée des conditions suivantes:*

1° *La condition du théorème 2.*

2° *La condition 3° du th. 6 (où $\varphi(x)$ est liée à $f(x)$ par les relations énoncées dans le chap.* 1er).

Démonstration. La condition est n é c e s s a i r e en vertu des théorèmes 2 et 6 (on voit aisément que la fonction finie $\varphi(x)$ liée à une fonction continue ou simplement discontinue est nécessairement bornée). Mais, elle est aussi s u f f i s a n t e. Soit $\{\sigma_k\}$ une suite croissante de constantes positives tendant vers $|b - a|$. Trouvons, d'après la condition 3° du th. 6, pour tout σ_k une suite d'intervalles ouverts disjoints $\{I_n{}^k\}$ qui couvre l'ensemble des points où $\varphi(x) > 0$ et qui remplit les conditions $\sum\limits_n \omega(\varphi; I_n{}^k) < \infty$ et $\sum\limits_n |I_n{}^k| < |b - a| - \sigma_k$. Nous pouvons évidemment supposer $\sum\limits_n I_n{}^k \subset \sum\limits_n I_n{}^{k-1}$ pour $k = 2, 3, \ldots$; posons encore $I_1{}^0 = \langle a, b\rangle$. Soit D l'ensemble (au plus dénombrable) de tous les points x tels que $\varphi(x) > 0$. Pour $k = 1, 2, \ldots$ soit E_k l'ensemble de tous les points $x \in D$ jouissants de la propriété suivante: il existe deux intervalles $I_m{}^{k-1}$, $I_n{}^k$ tels que

$$x \in I_m{}^{k-1}, \quad x \in I_n{}^k, \tag{12}$$

$$\frac{1}{2^k}\,\omega(\varphi, I_n{}^k) < \varphi(x) \leqq \frac{1}{2^{k-1}}\,\omega(\varphi, I_m{}^{k-1}). \tag{13}$$

Remarquons qu'à chaque $x \in D$ il correspond une suite *unique* $I_{m_0}{}^0 \supset I_{m_1}{}^1 \supset I_{m_2}{}^2 \supset \ldots$ telle que $x \in I_{m_i}{}^i$ pour chaque i et que la suite $\frac{1}{2^i}\,\omega(\varphi, I_{m_i}{}^i)$ tend vers zéro d'une manière monotone; on a donc $D = E_1 + E_2 + \ldots$ et les ensembles E_k sont disjoints. Définissons maintenant (pour $k = 1, 2, \ldots$) une fonction $f_k(x)$ de la manière suivante. Chaque intervalle $I_n{}^k$ ne peut contenir qu'un nombre fini de points de l'ensemble E_k (voir (13) et (9)). On peut alors aisément construire, dans chaque fermeture $\overline{I_n{}^k}$, une fonction $f_k(x)$ jouissante des propriétés suivantes: aux extrémités de $I_n{}^k$ et aux points de $E_k \,.\, I_n{}^k$, on a $f_k(x) = 0$; les seuls points de discontinuité de $f_k(x)$ dans $\overline{I_n{}^k}$ sont les points de E_k; dans chaque point de E_k, on a les relations (0), où l'on doit remplacer $f(x)$ par $f_k(x)$; dans $\overline{I_n{}^k}$, le nombre $|f_k(x)|$ est au plus égal au maximum de $\varphi(\xi)$ pour $\xi \in E_k I_n{}^k$; enfin, $f_k(x)$ est (VBG^*) sur $I_n{}^k$. (Pour construire une telle fonction, il suffit d'employer les fonctions linéaires et les fonctions de la forme $c + d \,.\, \sin(x-h)^{-1}$.)

Posons $f_k(x) = 0$ dans $\langle a, b\rangle - \sum_n I_n^k$. Alors la fonction $f_k(x)$ n'a pas des discontinuités que dans les points de E_k (remarquons pour cela que $|f_k(x)| \leqq \omega(\varphi, I_n^k)$ dans I_n^k et que $\sum_n \omega(\varphi, I_n^k) < < \infty$) et la série $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ est uniformément convergente (parce que $|f_k(x)| \leqq \frac{1}{2^{k-1}} \omega(\varphi, I_1^0)$). D'après le lemme 1 on voit que la fonction $f(x)$ remplit les relations (0) et d'après (9), on voit qu'elle est continue ou simplement discontinue. Il nous reste à démontrer que $f(x)$ soit dérivable presque partout.

Chaque $f_k(x)$ est (VBG^*) sur I_n^k, donc aussi sur $\sum_n I_n^k$. En outre, pour $x \in I_n^k$, on a $|f_k(x)| \leqq \omega(\varphi, I_n^k)$; donc, en posant $M_k = \langle a, b\rangle - \sum_n I_n^k$, on a $V^*(f_k; M_k) \leqq 2\sum_n \omega(\varphi, I_n^k) < \infty$, c'est-à-dire, $f_k(x)$ est (VBG^*) sur M_k, d'où il résulte qu'elle est (VBG^*) sur $\langle a, b\rangle$. Soit maintenant $0 < \sigma < b - a$ et posons $\varepsilon = \frac{1}{2}(b - - a - \sigma)$; soit m un nombre tel que $\sigma_m > b - a - \varepsilon$. La fonction $\sum_{k=1}^{m} f_k(x)$ est (VBG^*) sur $\langle a, b\rangle$ (théorème C), donc elle est (VB^*) sur un ensemble fermé F de mesure $> b - a - \varepsilon$. Posons

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} f_k(x) = g(x).$$

On a $g(x) = 0$ pour $x \in G = \langle a, b\rangle - \sum_{n=1}^{\infty} I_n^m$ et

$$V^*(g, G) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \omega(g, I_n^m).$$

Pour $k > m$, l'oscillation $\omega(f_k, I_n^m)$ est au plus égale à la borne supérieure de $2\varphi(\xi)$ sur $E_k \cdot I_n^m$, donc au plus égale à la borne supérieure de $\frac{2}{2^{k-1}} \omega(\varphi, I_l^{k-1})$ pour $I_l^{k-1} \subset I_n^m$, donc

$$\omega(f_k, I_n^m) \leqq 2^{2-k} \omega(\varphi, I_n^m),$$
$$\omega(g, I_n^m) \leqq 2^{2-m} \omega(\varphi, I_n^m).,$$

donc

$$V^*(g, G) \leqq 2^{2-m} \omega(\varphi, I_n^m) < \infty.$$

Donc, g est (VB^*) sur G et l'on a $|G| = b - a - \sum_n |I_n^m| > > \sigma_m > b - a - \varepsilon$. La fonction $f(x) = \sum_{k=1}^{m} f_k(x) + g(x)$ est donc (VB^*) sur l'ensemble fermé FG, dont la mesure est $> b - a - - 2\varepsilon = \sigma$. D'après le th. 5., $f(x)$ est dérivable presque partout et le th. 7. est démontré.