Les formules de quadrature approchée de M. K. Petr.[1])

Václav Hruška, Praha.

(Reçu le 15. janvier 1936.)

1. Dans un article récent,[2]) M. *G. N. Watson* a démontré, de deux manières différentes, les formules de quadrature approchée, que M *K. Petr* a publiées, sans démonstration, il y a une vingtaine d'années.[1]) Moi même, j'ai esquissé une troisième démonstration qui fait l'objet d'une communication au 2e Congrès des Mathématiciens des Pays Slaves.[3]) Cette démonstration est fondée sur une interpolation parabolique spéciale de la fonction intégrée.

2. Dans l'intervalle fermée

2.1
$$0 \leqq x \leqq 1$$

soit donnée une fonction $f(x)$ et supposons que ses dérivées, jusqu'à l'ordre $(n+1)$, y existent. Soit

2.2
$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n,$$

$n + 1$ valeurs différentes dans l'intervalle 2.1. Posons

2.3
$$f(a_0, a_1) = \frac{f(a_1) - f(a_0)}{a_1 - a_0}, \quad f(a_0, a_1, a_2) = \frac{f(a_2, a_1) - f(a_1, a_0)}{a_2 - a_0},$$
$$f(a_0, a_1, a_2, a_3) = \frac{f(a_3, a_2, a_1) - f(a_2, a_1, a_0)}{a_3 - a_0}, \ldots$$

les différences divisées de $f(x)$. La formule générale d'interpolation parabolique[4]) nous fournit

---

[1]) Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, **44** (1915), p. 454—5.
[2]) Ibid. **65** (1936), p. 1—7.
[3]) Ibid. **64** (1935), p. 146—7.
[4]) *V. Láska-V. Hruška*, Teorie a praxe numerického počítání (Praha, 1934), p. 126. aussi: *Whittaker-Robinson*, The Calculus of Observations (London, 1924), p. 25.

$$f(x)=f(a_0)+(x-a_0)\,f(a_0,a_1)+(x-a_0)(x-a_1)\,f(a_0,a_1,a_2)+\dots$$
$$+\dots+(x-a_0)(x-a_1)\dots(x-a_{n-1})\,f(a_0,a_1,a_2,\dots,a_n)+R_n$$

2.4 $$R_n=\frac{(x-a_0)(x-a_1)\dots(x-a_n)}{(n+1)!}\,f^{(n+1)}(\xi),$$

ξ étant un nombre de l'intervalle $(x, a_0, a_1, \dots, a_n)$, c'est-à-dire un nombre compris entre la plus petite et la plus grande des quantités $x, a_0, a_1, \dots, a_n$.

3. En posant[5])

$$f(\underbrace{a_0, a_0, \dots, a_0}_{p\text{-fois}},\ \underbrace{a_1, a_1, \dots, a_1}_{r\text{-fois}},\ \underbrace{a_2, a_2}_{s\text{-fois}}, \dots,) =$$
$$=\frac{\partial^{p+r+s+\dots-3} f(a_0, a_1, a_2, \dots)}{(p-1)!\,(r-1)!\,(s-1)!\dots\partial^{p-1} a_0\, \partial^{r-1} a_1\, \partial^{s-1} a_2 \dots},$$

la formule 2.4 subsiste même si les quantités 2.2 ne sont pas toutes différentes. Elle est alors linéaire et homogène en $f(a_0), f(a_1), \dots, f'(a_0), f'(a_1), \dots, f''(a_0), f''(a_1), \dots$, qui y figurent.

4. Posons $n = 2k-1$,
$$a_0 = a_1 = \dots = a_{k-1} = 0,$$
$$a_k = a_{k+1} = \dots = a_{2k-1} = 1,$$
et mettons en évidence, que le polynôme d'interpolation est linéaire et homogène en

4.1 $$f^{(i)}(0) = f_0^{(i)} \text{ et } f^{(i)}(1) = f_1^{(i)}, \quad i = 0, 1, \dots, k-1$$

4.2 $$f(x) = P_0(x)\,f_0 + P_1(x)\,f'_0 + \dots + P_{k-1}(x)\,f_0^{(k-1)} +$$
$$+Q_0(x)\,f_1 + Q_1(x)\,f'_1 + \dots + Q_{k-1}(x)\,f_1^{(k-1)} + R_{2k},$$
$$R_{2k} = \frac{x^k(x-1)^k}{(2k)!}\,f^{(2k)}(\xi), \qquad 0 < \xi < 1.$$

$P_i(x)$ et $Q_i(x)$ sont des polynômes bien déterminés de degré $(2k-1)$ au plus; ils ne changent pas quelque soient les valeurs 4.1.

5. Pour les trouver, prennons dans 4.2 pour $f(x)$ des polynômes convenables de degré $(2k-1)$ au plus. On aura $f^{(2k)}(x) \equiv 0$ et par suite $R_{2k} \equiv 0$. Choisissons

5.1 $$f(x) = x^{k-p}(1-x)^k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} x^{k+i-p},$$

p entier, $0 < p \leq k$
et calculons
$$f^{(i)}(1) = 0,\ i = 0, 1, 2, \dots, (k-1),$$
$$f^{(i)}(0) = 0,\ i = 0, 1, 2, \dots, (k-p-1),$$

[5]) *V. Láska-V. Hruška*, ibid., p. 90.

$$f^{(k-p+s)}(0) = (-1)^s\,(k+s-p)!\,.\binom{k}{s}, \quad s = 0, 1, 2, \ldots, (p-1).$$

En substituant ces valeurs dans 4.2, on obtient les équations suivantes

$$p = 1;\ x^{k-1}(1-x)^k = (k-1)!\,P_{k-1}(x),$$

$$p = 2;\ x^{k-2}(1-x)^k = -\binom{k}{1}(k-1)!\,P_{k-1}(x) + (k-2)!\,P_{k-2}(x),$$

$$p = 3;\ x^{k-3}(1-x)^k =$$

$$= \binom{k}{2}(k-1)!\,P_{k-1}(x) - \binom{k}{1}(k-2)!\,P_{k-2}(x) + (k-3)!\,P_{k-3}(x),$$

$$x^{k-p}(1-x)^k = (-1)^{p-1}\binom{k}{p-1}(k-1)!\,P_{k-1}(x) +$$

$$+ (-1)^{p-2}\binom{k}{p-2}(k-2)!\,P_{k-2}(x) +$$

$$+ (-1)^{p-3}\binom{k}{p-3}(k-3)!\,P_{k-3}(x) + \ldots + (k-p)!\,P_{k-p}(x).$$

Multiplions ces équations succesivement par

$$\binom{k+p-2}{p-1},\ \binom{k+p-3}{p-2}, \ldots \binom{k-1}{0},$$

et ajoutons les ensuite! Le coëfficient de $P_{k-i}(x)$ étant égal à

$$(k-i)!\left[\binom{k+p-i-1}{p-i} - \binom{k}{1}\binom{k+p-i-2}{p-i-1} + \right.$$

$$\left. + \binom{k}{2}\binom{k+p-i-3}{p-i-2} - \ldots + (-1)^{p-i}\binom{k}{p-i}\right] = 0,$$

$$i = 1, 2, 3, \ldots, (p-1),$$

il ne reste que l'expression $(k-p)!\,P_{k-p}(x)$ au second membre. En effet, ce coëfficient de $P_{k-i}(x)$ est en même temps le coëfficient de t^{p-i} dans le produit du polynôme

$$1 - \binom{k}{1}t + \binom{k}{2}t^2 - \binom{k}{3}t^3 + \ldots + (-1)^k t^k = (1-t)^k$$

et de la série infinie

$$1 + \binom{k}{1}t + \binom{k+1}{2}t^2 + \binom{k+2}{3}t^3 + \ldots = (1-t)^{-k}.$$

Par suite on a

5.2 $$P_{k-p}(x) = \frac{x^{k-p}(1-x)^k}{(k-p)!}\sum_{i=0}^{p-1}\binom{k+i-1}{i}x^i.$$

6. Pour obtenir les polynômes $Q_i(x)$, prennons pour $f(x)$ un polynôme quelconque de degré $(2k-1)$, c'est-à-dire un polynôme,

pour lequel les quantités 4.1 étaient choisies d'une manière tout-à-fait arbitraire. Dans 4.2 on a alors $R_{2k} \equiv 0$. Faisons la substitution $x = 1 - t$ et interpolons le polynôme $\varphi(t) = f(1 - t)$ d'après 4.2

$$\begin{aligned}
\varphi(t) = f(1-t) &= P_0(1-t)\, f_0 + P_1(1-t)\, f'_0 + \ldots + \\
&+ P_{k-1}(1-t)\, f_0^{(k-1)} + Q_0(1-t)\, f_1 + Q_1(1-t)\, f'_1 + \ldots + \\
&+ Q_{k-1}(1-t)\, f_1^{(k-1)} = \qquad (6.1)\\
&= P_0(t)\, \varphi_0 + P_1(t)\, \varphi'_0 + \ldots + P_{k-1}(t)\, \varphi_0^{(k-1)} \\
&+ Q_0(t)\, \varphi_1 + Q_1(t)\, \varphi'_1 + \ldots + Q_{k-1}(t)\, \varphi_1^{(k-1)}.
\end{aligned}$$

Mais, on a

$$\varphi^{(i)}(0) = (-1)^i f_1^{(i)}, \quad \varphi^{(i)}(1) = (-1)^i f_0^{(i)}$$
$$i = 0, 1, 2, \ldots, k-1.$$

En comparant, dans 6.1, les facteurs des mêmes valeurs arbitraires 4.1, on conclut que

$$Q_i(t) = (-1)^i P_i(1-t). \qquad (6.2)$$

7. On peut donner une autre forme à 5.2 en remarquant, que la somme dans 5.2 est précisément la somme des premiers p termes du développement

$$(1-x)^{-k} = \frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(k-1)},$$

l'exposant $(k-1)$ désignant la derivée $(k-1)$-ième. Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{p-1} \binom{k+i-1}{i} x^i &= \frac{1}{(k-1)!} \left[\frac{1}{1-x} - \frac{x^{p+k-1}}{1-x}\right]^{(k-1)} \\
&= \frac{1}{(k-1)!} \left[\frac{1}{1-x} - \frac{\{1-(1-x)\}^{p+k-1}}{1-x}\right]^{(k-1)} = \\
&= \frac{1}{(k-1)!} \left[\sum_{i=1}^{p+k-1} (-1)^{i-1} \binom{p+k-1}{i} (1-x)^{i-1}\right]^{(k-1)} = \\
&= \sum_{i=k}^{p+k-1} (-1)^{i+k} \binom{k+p-1}{i} \binom{i-1}{k-1} (1-x)^{i-k} = \\
&= \sum_{r=0}^{p-1} (-1)^r \binom{k+p-1}{k+r} \binom{k+r-1}{k-1} (1-x)^r.
\end{aligned}$$

On a par suite

$$P_s(x) = \frac{x^s(1-x)^k}{s!} \sum_{r=0}^{k-s-1} (-1)^r \binom{2k-s-1}{k+r} \binom{k+r-1}{k-1} (1-x)^r.$$

7.1

8. Comme, d'après 6.2, on a

8.1 $$\int_0^1 P_s(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^s \int_0^1 Q_s(1-x)\,\mathrm{d}x = (-1)^s \int_0^1 Q_s(t)\,\mathrm{d}t = A_s,$$

il vient par intégration de la relation 4.2

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{s=0}^{k-1} A_s[f_0^{(s)} + (-1)^s f_1^{(s)}] + R_{2k}.$$

8.2

$$R_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!} \int_0^1 x^k(1-x)^k f^{(2k)}(\xi)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{(-1)^k f^{(2k)}(\xi_1)}{(2k)!} \int_0^1 x^k(1-x)^k\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{(-1)^k}{(2k)!} \frac{(k!)^2}{(2k+1)!} f^{(2k)}(\xi_1), \qquad 0 < \xi_1 < 1,$$

en supposant la dérivée $f^{(2k)}(x)$ continue dans l'intervalle $0 \leqq x \leqq 1$. C'est bien la formule de M *K. Petr.*

9. Pour calculer les coëfficients 8.1, supposons d'abord $s > 0$, intégrons 7.1 par parties de 0 à 1

$$A_s = \frac{1}{(s-1)!} \cdot \sum_{i=0}^{k-s-1} (-1)^i \binom{2k-s-1}{k+i} \binom{k+i-1}{k-1} \cdot$$

$$\cdot \int_0^1 \frac{x^{s-1}(1-x)^{k+i+1}}{k+i+1} \,.\, \mathrm{d}x$$

et transformons cette somme en

$$A_s = \frac{1}{(s-1)!} \cdot \sum_{i=0}^{k-s-1} (-1)^i \binom{2k-s-1}{k+i} \binom{k+i-1}{k-1} \cdot$$

$$\cdot \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{k+i+1} \,.\, \mathrm{d}x +$$

9.1

$$+ \frac{1}{(s-1)!} \cdot \sum_{i=-1}^{k-s-1} (-1)^{i+1} \frac{i+1}{2k-s} \binom{2k-s}{k+i+1} \binom{k+i}{k-1} \cdot$$

$$\cdot \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{k+i+1}\mathrm{d}x,$$

car, pour $i = -1$, le nouveau terme de la deuxième somme est égal à zéro. Dans la deuxième somme introduisons $i+1=j$ et remarquons, que

$$\frac{i+1}{2k-s}=\frac{k-s}{2k-s}-\frac{k-s-j}{2k-s}.$$

Cette somme est égale alors à

$$\frac{k-s}{2k-s}\cdot\frac{1}{(s-1)!}\cdot\sum_{j=0}^{k-(s-1)-1}(-1)^j\binom{2k-(s-1)-1}{k+j}\binom{k+j-1}{k-1}\cdot$$
$$\cdot\int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{k+j}\,.\,dx$$
$$-\frac{1}{(s-1)!}\cdot\sum_{j=0}^{k-s}(-1)^j\frac{k-s-j}{2k-s}\binom{2k-s}{k+j}\binom{k+j-1}{k-1}\cdot$$
$$\cdot\int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{k+j}\,.\,dx=$$
$$=\frac{k-s}{2k-s}\cdot A_{s-1}-\frac{1}{(s-1)!}\cdot\sum_{j=0}^{k-s-1}(-1)^j\binom{2k-s-1}{k+j}\binom{k+j-1}{k-1}\cdot$$
$$\cdot\int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{k+j}\,dx.$$

Évidement, on peut omettre le terme $j=k-s$, car il contient le facteur $k-s-j=0$.

La première des sommes 9.1 est égale à

$$\frac{1}{(s-1)!}\cdot\sum_{i=0}^{k-s-1}(-1)^i\binom{2k-s-1}{k+i}\binom{k+i-1}{k-1}\cdot$$
$$\cdot\int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{k+i}\,dx-$$
$$-s\,.\,\frac{1}{s!}\cdot\sum_{i=0}^{k-s-1}(-1)^i\binom{2k-s-1}{k+i}\binom{k+i-1}{k-1}\cdot$$
$$\cdot\int_0^1 x^{s}(1-x)^{k+i}\,.\,dx=$$
$$=\frac{1}{(s-1)!}\cdot\sum_{i=0}^{k-s-1}(-1)^i\binom{2k-s-1}{k+i}\binom{k+i-1}{k-1}\cdot$$
$$\cdot\int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{k+i}\,dx-sA_s.$$

On a, par suite, la relation

$$A_s = \frac{k-s}{2k-s} A_{s-1} - sA_s,$$

c'est-à-dire

9.2 $$A_{s-1} = \frac{(s+1)(2k-s)}{k-s} A_s.$$

Comme

$$A_{k-1} = \frac{1}{(k-1)!}\int_0^1 x^{k-1}(1-x)^k \, dx =$$

$$= \frac{1}{(k-1)!} \cdot \frac{(k-1)!\, k!}{(2k)!} = \frac{k!}{(2k)!},$$

on peut calculer de 9.2 succesivement

$$A_s = \frac{(s+2)(2k-s-1)}{k-s-1} A_{s+1},$$

$$A_{s+1} = \frac{(s+3)(2k-s-2)}{k-s-2} A_{s+2},$$

$$A_{k-2} = \frac{k(k+1)}{1} A_{k-1} = \frac{k(k+1)}{1} \frac{k!}{(2k)!}.$$

En multipliant ces équations, on obtient bien le résultat

9.3 $$A_s = \frac{(2k-s-1)!\, k!}{(2k)!\,(k-s-1)!\,(s+1)!}, \quad s > 0.$$

Au cas que s soit égal à zéro, l'intégration par parties devient superflue. En procédant de la même manière que dans 9.1, on a

$$A_0 = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{2k-1}{k+i} \binom{k+i-1}{k-1} \frac{1}{k+i+1} =$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{2k-1}{k+i} \binom{k+i-1}{k-1} +$$

$$+ \sum_{i=-1}^{k-1} (-1)^{i+1} \frac{i+1}{2k} \binom{2k}{k+i+1} \binom{k+i}{k-1} =$$

9.4 $$= \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{2k-1}{k+i} \binom{k+i-1}{k-1} +$$

$$+ \frac{k}{2k} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{2k}{k+j} \binom{k+j-1}{k-1}$$

$$- \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{2k-1}{k+j} \binom{k+j-1}{k-1} = \frac{1}{2},$$