lenosti C do výše x m nad A. Z úměry

$$x : 129 = 4725 : 2250.$$

vychází $x \doteq 270$ m. Ježto je C jen 189 m nad A, není C z A viditelno.]

Úlohy v terénu: 32. Ověřuj poznatky získané předem předešlými metodami!

Závěrečná poznámka. Studium speciálních map může být velmi dobře individualisováno tím, že jednotlivým žákům přidělíme zcela zvláštní samostatné úkoly. Užijeme k tomu starších, vyřazených map, ovšem s přesnou formulací úkolu. Takových problémů můžeme za jistý čas nastřádati celou řadu, kterou připojíme k jiným obdobným sbírkám: tabulkám sloužícím za podklad grafického znázornění, částem grafických i obyčejných jízdních řádů a pod. Zda je tím naznačena též jedna z nemnohých dosud pěšinek k žádoucímu zavedení t. zv. pracovní metody i do matematiky, o tom učiní soud teprve jistá dávka zkušeností získaných v praxi. Předpoklady tu jistě jsou (úzká souvislost s praktickými problémy, často dokonce volba východiska v konkrétní praktické úloze, spojitost s příbuznými předměty, pěstování mechanické zručnosti a grafické dovednosti vyjadřovací, snadná možnost individualisování a pod.). Pohodlnější tyto cesty jistě zrovna nejsou, kdyby však rozhodující slovo měla míti tato okolnost, pak bychom se mohli přímo vrátit k starobylé metodě pouhého přednášení.

Poznámka literární. Místo obšírného shánění literatury o speciálních mapách budiž upozorněno jen na pěkně vypravenou a po všech stránkách poučnou knížku: Št. kap. B. Tetour: Mapa v obrazech. Speciální mapa (2. opr. vyd. Praha 1934. 8° 175 str. obr. Kč 25,—). Čtenář najde tu i seznam další literatury. — Po stránce praktického užívání mapy najdou žáci leccos i v Rukověti branné výchovy, nižší stupeň (Praha 1934. 8° 260 str. obr. Kč 8,—).

K metodice složitého úrokování.

Jaroslav Friedrich, Praha.

Aby nevyzněla výzva kol. dr. Simerského v článku o metodice složitého úrokování (zde str. D 23) tak zcela na prázdno, připojuji k témuž thematu aspoň těchto několik poznámek.

Především míním se dotknouti jedné věci zásadní, ve které se stanoviskem kol. Simerského plně nesouhlasím. Jsem rozhodně také pro omezení počtu vzorců k pamatování na míru nejnutnější, ale není mi tímto minimem vzorec $K_n = K_0 q^n$ samotný, byť to doporučoval sám Lietzmann. Prakse žádá si tabulky střadatelů, žák byl uveden do základní úlohy pravidelného střádání, poznal pravidlo $A = aQ_n$, i patří, myslím, k věci, aby si byl dobře vědom toho, že za jistých podmínek a za kterých právě smí pravidla toho použíti bezprostředně. Proto je třeba, aby v učebnicích i od učitelů bylo výslovně a důrazně připomenuto, že onen vzorec udává hodnotu úspory pouze v případě shodnosti lhůt ukládacích a úrokovacích a to pro konec lhůty po posledním vkladu. A podobně pro hodnotu zásoby $B = bR_n$ počátkem lhůty před prvním důchodem b a pro splátku $d = DU_n$ připadající na konec lhůty po zápůjčce D. Kdekoli jsou příslušné podmínky splněny, nechť žák rovnou užívá uvedených vzorců, jistě snadno i s podmínkami zapamatovatelných. Rozmanitost úloh — při účelné ovšem jich přípravě — poskytne zajisté dosti příležitosti cvičiti i případy do tohoto základního rámce nezapadající, jednoduché i kombinované, aby byl pěstován také vztah a přesun těchto součtových veličin. Přirozeně bych tedy nechával v úloze první (str. D 18) shrnouti platy b jediným krokem v součet bQ_{10}, v úloze třetí (str. D 21) podobně a posunouti pak B_{24} o rok kupředu k hodnotě A_{25}, v úloze čtvrté konečně (str. D 22) přenésti úsporu $A_{10,5} = uQ_{20}$ jako celek přes 9 pololetí na termín převodní. Právě tohoto zacházení s celky, jehož předpokladem jsou rozvržení úlohy v dílčí výkony, posouzení podmínek a jasná orientace, jest, myslím, potřeba, aby mohl žák od nadbytečnosti kroků elementárních vyspěti k vyšší schopnosti konceptní.

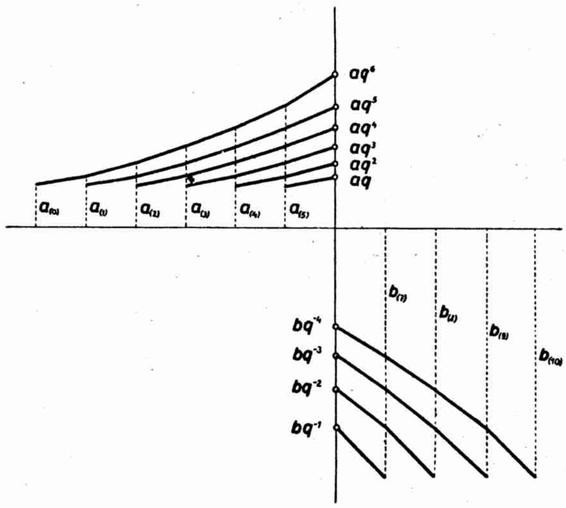
Druhá poznámka týká se oněch schemat. Jistě dobře se jimi poslouží k podpoře správných představ o sounáležitosti částek a k názornějšímu vyznačení příslušných časových vzdáleností. Pomocných čar využilo by se však vydatněji, kdyby byly vedeny tak, aby každá svým průběhem naznačovala současně, byť jen zhruba, časový vzrůst příslušné částky, jak je to doporučitelno již při úloze základní. Při provedení přesném[1]) — napoprvé žádoucím — šlo by takto o osnovu lomených linií typu křivky exponenciální. Obrazec znázorňuje případ důchodu (pod osou) plynoucího z pravidelných vkladů úsporných (nad osou). Ostatně soudím, že schemat plných nebude třeba v tak značné míře. Užije se jich s prospěchem v příkladech úvodních a nějaké ukázce úlohy kombinované, nadále pak vystačí se zajisté již jen se zápisem dat na jediné časové ose[2]) k vůli přehledu po dislokaci částek.

Při této příležitosti je však záhodno připomenouti si jednu okolnost, která se téměř pravidelně při projednávání složitého úrokování vyskytuje a sama o sobě potřebu nějaké názorné pomůcky vyvolává. Když se totiž od kapitoly o jedné jistině postoupí

[1]) K docílení značnějšího rozchodu čar je třeba užíti buď vyššího procenta (srovnej s pozn. 6 pod čarou!) anebo při procentu běžném větší jistiny za současného pošinutí měřítka na ose jistin.

[2]) Při tom považuji za bezpečnější označovati samy lhůty (viz schemata č. 1 až 4 v citovaném článku), než jejich meze, jak převzato z učebnice ve schematě č. 5. Také vypsání pořadí slovem (první, druhý, atd.) per extensum se dobře osvědčuje.

k problému střádání, sáhne se obvykle — ani učebnice tu metodicky přiměřeně neuvádívají — ihned k případu pravidelnosti, ač je v životní praksi nejméně častý. Je to krok unáhlený a škodlivý, neboť daleko-li je k tomu, aby tu mezi časovým pořadím stejných vkladů a pořadím ve vyvozené geometrické řadě, braným dokonce jednou v tom, po druhé v onom směru, vznikla pro žáka konfuse. Kdyby se předeslaly jeden, dva příklady o různosti jednak vkladů, jednak intervalů, byl by již tím potřebný obraz postupu žákovi podložen.



Jinak jest v oné didakticky nepříznivé situaci pochopitelna snaha některých autorů učebnic a učitelů odlišiti jednotlivé vklady aspoň indexy odpovídajícími příslušnému termínu. Proti tomu má Simerský námitku, opřenou o požadavek stejného znaku pro stejné částky. Podle toho, co výše uvedeno, bylo by však právě případné počínati vklady nestejnými, sestaviti pro ně výsledek nejprve pouze ve tvaru $aq^n + bq^{n-1} + cq^{n-2} + \ldots$, resp. $a_1q^n + a_2q^{n-1} + a_3q^{n-2} + \ldots + a_nq$, a přejíti teprve dodatečně k rovnosti.[3]) Ale ani při supponovaných částkách stejných nemusily by indexy prohlášené výslovně pouze za udavatele místa žáky másti. Nicméně je toto označení přece zatíženo jistou závadou, jejíž původ jest však jinde, a to v nevyhovující, nedostatečně vyvinuté symbolice tohoto počtu. Proto pojednám dříve o této.

V samém úvodu dostává se do počtu nová veličina „úročitel“

[3]) Viz na př. v Algebře Hozově, vyd. 2 (1901), str. 193. Podobného kroku se užívá ze známých důvodů při odvozování poučky binomické.

jakožto kvocient vznikající geometrické posloupnosti pro vzrůst jistiny. Použití téže značky q nejeví se prozatím nepřípadným. Rušivost — zvláště pro školu citelná — vystoupí teprve při kterékoli geometrické řadě, která vzniká z řady pravidelných platů, ať jest její kvocient q či $1/q$ či q^2 neb pod. — Nemáme sjednáno, jak na znaku q odlišovati různost procenta od změny v důsledku jiné lhůty úrokovací. — Označení hodnoty kapitálu k jistému termínu je celkem ustáleno, a to zcela případně připojením indexu udávajícího čas právě uplynulý, přes to však leckdy jest si přáti, aby se dalo prováděti také pro hodnoty počátkem lhůt.[4]) — Pro převod částek mnohdy by bylo třeba indexu dvojitého. — Nemáme také nedvojsmyslného prostředku, abychom si různé hotovosti v úloze označili indexy podle jejich časové dislokace. Tak na př. značka j_8 sama o sobě neříká žákovi, zda jde o peníz j na konci osmého roku ve zvoleném časovém rámci, takže číselně $j_8 = j$, či o zúrokovanou, pozměněnou hodnotu jistiny j z termínu základního neb vůbec jiného, takže by v tomto smyslu číselně bylo $j_8 = jq^8$, resp. jq^{8-t}.[5])

Právě nedostatek posléze uvedený způsobuje onu závadu v zapisování stejných úsporných vkladů formou $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$. Odpomoc je tu však dosti snadná, rozhodneme-li se pro zásadu, index udávající pouze časové umístění hodnoty písmenem označené uzávorkovati. Podle toho, použijeme-li i při této funkci indexu důsledně zásady zaznamenávati čas uplynulý, zněla by ona posloupnost $a_{(0)}, a_{(1)}, a_{(2)}, \ldots, a_{(n-1)}$, a mohlo by jí bez nebezpečí nedorozumění od žáka býti používáno. I při jiných příležitostech by tento způsob přispíval k zřetelnosti. Tak na př. výše uvedené kroky v příkladech byly by výstižněji vyjádřeny vzorci

$$B_{(24)} = rR_{n-24},\ A_{(25)} = aQ_{25},\ B_1 = B_{(24)}q,$$
$$A_{(10,5)} = uQ_{20},\ A_{4,5} = A_{(10,5)}q^9.$$

A základní vztah součtů A, B ekvivalentních serii n pravidelných platů by zněl $B_{(-1)} = A_{(n)}\, q^{-(n+1)}$.

[4]) Příklady rovněž hojně se vyskytující, kde lhůtami jsou roky lidského věku, takže může rušiti konfuse s roky kalendářními, vyžadují z tohoto důvodu jednak obezřelé stylisace, jednak zásadního, interního ujednání o hranici lhůt.

[5]) Uvedené nedostatky nutí učitele k svépomoci. Je toho dokladem na př. Simerského způsob připisování procentového indexu k úročiteli q. Sám jsem si pro pololetní úrokování vypomáhal někdy užitím čárky (reservovati raději pro eventuální druhé procento úlohy!), jindy značkou g místo q. Rozlišování termínu počátkem a koncem lhůty bylo by sice možné a výjimečně v případě zvláštní potřeby přípustné formou na př. K_{VII} (pro počátek), $_{\mathrm{X}}K$ (pro konec), takže by platilo $_{\mathrm{X}}K = K_{\mathrm{VII}}q^4$, ale zásadně jest se stříci nadměrného a proto didakticky nezdravého formalismu i nevystavovati žáky nebezpečí kolise vzhledem k ustálenému již významu značky K_{10}. — Snad by aspoň k některým z těchto potřeb mohlo býti zaujato stanovisko komisí pro symboliku v matematickém vyučování.

Ze svých zkušeností konečně ještě dodávám, že zásada **ekvivalence peněžních částek nesoučasných** a na ní založené řešení převodem z termínu na termín vyžadují podrobnější průpravy a hojnějšího cviku, než se obvykle za to má. Míval jsem dojem, že se přes zdánlivě postačující vysvětlení věci některým žákům přece jen bezděčně vtírá — patrně pod vlivem číselné nerovnosti ekvivalentních hodnot a při nevyvinutém ještě vlastním smyslu pro proměnlivost peněz s časem — myšlenka jakéhosi zisku resp. ztráty, jež je ovšem ujmutí se zásady ekvivalence a libovolnosti převodního termínu na překážku. Proto soudím, že je radno, jakmile se dospěje k úlohám na porovnávání, výměnu a slučování kapitálů, cvičiti tyto přesuny především na příkladech se schystanými vhodnými čísly,[6]) v malém jen časovém rozmezí, s početním psaným aparátem co nejmenším a v četných variantách.

A jak s tou **libovolností převodního termínu**? Že pro žáky není v každém případě samozřejmostí a že se dokonce proti vámi navrženému postupu mohou ozvati námitky, o tom se můžete přesvědčiti při první příležitosti, kde byste zamýšleli dát úrokovati neb diskontovati kapitál po dobu, během které nezůstává nedotčen, resp. není celý ještě vytvořen. Tak tomu bývá při výpočtu zbytku z kapitálu důchodem nestráveného a mohlo by se to vyskytnouti také při výpočtu neznámého základního kapitálu, jímž vedle pravidelných příplatků úsporných byla založena určitá celková úspora. Než sahati v takovém případě k nějaké jen fiktivní konstrukci situace, která by oprávněnost postupu v první chvíli se příčícího dovodila a může tu ostatně jako

---

[6]) Data vhodná k tomuto **cvičebnímu účelu převodovému** připraví si žáci sami jednoročními kroky ze základu náležitě dělitelného. Při vzrůstu 4%ním potřebují dělitelnost 25 a směrem zpětným 26, tedy pro časový rozsah 4 let hověl by tomuto požadavku základ $26^2 . 25^2$, t. j. číslo 422 500. To se pro zběžnou tuto manipulaci, jejíž jednou podmínkou je nezatížený přehled, nehodí. Teprve vzrůst 10%ní poskytuje ze základu $11^2 . 10^2$ serii vhodnějších ekvivalentních hodnot

10 000, 11 000, 12 100, 13 310, 14 641

a evt. 25%ní(!) pro rozsah 6 let

4 096, 5 120, 6 400, 8 000, 10 000, 12 500, 15 625.

Takto připravená data umožňují i zpaměti hravě zodpověděti na př. otázky: Někdo si vypůjčil na 10% 10 000 Kč a po 3 letech ještě 20 000 Kč; jaké výše doroste jeho dluh koncem roku čtvrtého? — Polovinu pohledávky 13 310 Kč splatné až po 3 letech žádá věřitel již koncem roku prvního; kolik by to činilo? — Na kolik let by stačila jistina 25 000 Kč k vyplácení ročního důchodu 12 500 Kč při 25%ní(!) úrokové míře a jak asi velký by byl zbytkový důchod poslední?

K námitkám proti neživotnosti podotýkám, že lze ovšem taková cvičení konati i pro obvyklá procenta a základ libovolný, vzdáme-li se výhod z vhodnosti a úplnosti čísel.