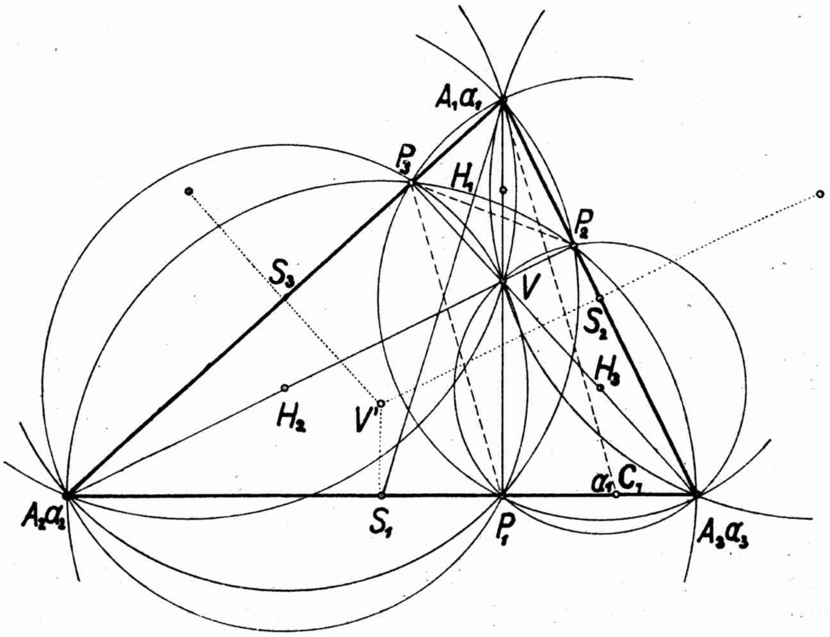
ČLÁNKY A REFERÁTY.

Z geometrie trojúhelníka.

Vojtěch Tuček (Brno).

1. Označme vrcholy trojúhelníka $A_1A_2A_3$ znaky A_{n-1}, A_n, A_{n+1}, jeho strany a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, vnitřní úhly α_{n-1}, α_n, α_{n+1}, středy stran S_{n-1}, S_n, S_{n+1} a pod. dále; znakem (S, a) rozumějme kružnici



Obr. 1.

o středu S a poloměru a. Podle kosinusové věty je $a_n{}^2 = a^2{}_{n+1} + a^2{}_{n-1} - 2a_{n+1}a_{n-1} \cos \alpha_n$, což lze psáti:

$$a^2{}_n = a^2{}_{n+1} + a^2{}_{n-1} - 2a_{n+1}\mathrm{a}_{n-1,n+1} = a^2{}_{n+1} + a^2{}_{n-1} - 2a_{n-1}\mathrm{a}_{n+1,n-1},$$

kde $\mathfrak{a}_{n-1,n+1} = A_nP_{n+1}$ značí ortogonální průmět strany a_{n-1} do a_{n+1} (obr. 1). Součinový člen $a_{r+1}\mathfrak{a}_{n-1,n+1}$ anebo $a_{n-1}\mathfrak{a}_{n+1,n-1}$ značí, jak se lze snadno přesvědčiti, mocnost vrcholu A_n vzhledem k $(S_n, \frac{1}{2}a_n)$; označme ji $M_{A_n}{}^{S_n}$. Potom dostaneme relaci

$$2M_{A_n}{}^{S_n} = a^2_{n+1} + a^2_{n-1} - a^2_n. \tag{1}$$

a) Sečtěme dvě rovnice z těchto tří rovnic; dostaneme

$$M_{A_{n+1}}{}^{S_{n+1}} + M_{A_{n-1}}{}^{S_{n-1}} = a^2_n, \tag{2}$$

což znamená,

že strana trojúhelníka je přepona pravoúhlého trojúhelníka, jehož odvěsny mají délky tečen, vedených z koncových bodů oné strany ke kružnicím opsaným nad dvěma druhými stranami jako průměry.

Je-li v trojúhelníku $\alpha_n = 90^0$, je $M_{A_{n+1}}{}^{S_{n+1}} = a^2_{n-1}$, $M_{A_{n-1}}{}^{S_{n-1}} = a^2_{n+1}$, a_n přepona, a vztah přejde ve větu Pythagorovu.

Je-li úhel při A_n tupý, je $M_{A_n}{}^{S_n} < 0$; vrchol A_n leží uvnitř kružnice $(S_n, \frac{1}{2}a_n)$ a místo tečny z A_n k této kružnici třeba vzíti polovici nejkratší tětivy vrcholem A_n.

Součet všech rovnic (1) dá vztah

$$2\Sigma M_{A_n}{}^{S_n} = \Sigma a^2_n, \tag{3}$$

což znamená, že součet čtverců nad stranami trojúhelníka je roven součtu čtverců nad všemi šesti tečnami, které lze vésti z vrcholů trojúhelníka ke kružnicím opsanými protějšími stranami jako průměry.

b) Mocnosti vrcholů trojúhelníka vzhledem ke kružnicím $(S_n, \frac{1}{2}a_n)$ lze vyjádřiti ještě několika jinými výrazy. Především jest, jak známo, délka těžnice $A_nS_n \equiv t_n = \frac{1}{2}\sqrt{2\,(a^2_{n+1} + a^2_{n-1}) - a^2_n}$. Potom mocnost $M_{A_n}{}^{S_n} = t^2_n - \frac{1}{4}a^2_n$ $[= \frac{1}{2}\,(a^2_{n+1} + a^2_{n-1} - a^2_n)]$.

Jiný výraz (obr. 1) dostaneme, uvážíme-li, že v podobných trojúhelnících $A_nP_nA_{n-1}$ a A_nVP_{n+1} (kde P_n jsou paty výšek v_n a V je průsečík výšek a $\overline{VA_n} = h_n$) jest

$$v_{n+1} : a_{n+1} = \mathfrak{a}_{n-1,n+1} : h_n,$$

z čehož plyne

$$a_{n+1}\mathfrak{a}_{n-1,n+1} = M_{A_n}{}^{S_n} = v_nh_n.$$

To lze dokázati jinak planimetricky, sestrojíme-li opsané kružnice v tětivových čtyrúhelnících $VP_{n-1}A_{n+1}P_n$ a $VP_nA_{n-1}P_{n+1}$, neboť tu jest A_n střed mocnosti všech tří kružnic $(S_n, \frac{1}{2}a_n)$, $(H_{n+1}, \frac{1}{2}h_{n+1})$, $(H_{n-1}, \frac{1}{2}h_{n-1})$, kde H_{n+1}, H_n, H_{n-1} jsou středy úseků resp. h_{n+1}, h_n, h_{n-1}, a jdou jím všechny tři chordály $A_{n+1}A_n$, $A_{n-1}A_n$, P_nA_n. Proto je netoliko $M_{A_n}{}^{S_n} = a_{n+1}\mathfrak{a}_{n-1,n+1} = a_{n-1}\mathfrak{a}_{n+1,n-1}$, ale i $A_nP_n \,.\, A_nV = v_nh_n$.

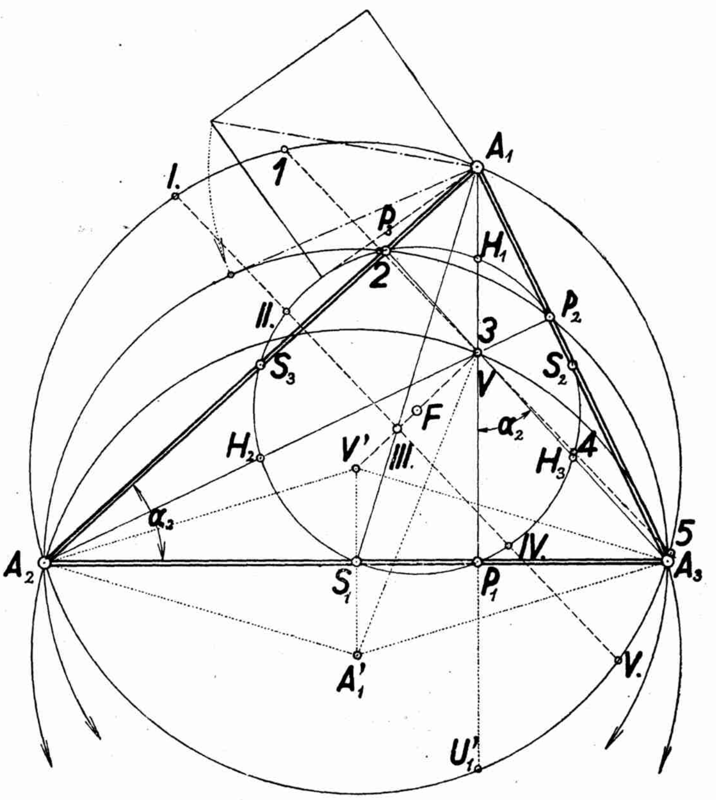
Uvážíme-li konečně podobné trojúhelníky $A_nP_{n+1}P_{n-1}$ a

$C_nA_{n+1}A_n$, a označíme-li o nich $\overline{P_{n+1}P_{n-1}} = p_n$, $\overline{A_nC_n} = g_n$, jest $p_n : \mathfrak{a}_{n+1,n-1} = a_{n-1} : g_n$, proto

$$a_{n-1}\mathfrak{a}_{n+1,n-1} = M_{A_n}{}^{S_n} = g_n p_n.$$

Jest tedy celkem

$$M_{A_n}{}^{S_n} = a_{n\pm1}\mathfrak{a}_{n\mp1,n\pm1} = v_n h_n = g_n p_n = \tfrac{1}{2}\,(a^2{}_{n+1} + a^2{}_{n-1} - a^2{}_n). \quad (4)$$



Obr. 2.

Poznamenati třeba ještě, že $M_{A_n}{}^{S_{n\pm1}} = 0$.

2. Odvozené vztahy a vlastnosti ve spojení s mocností $M_{A_n}{}^{S_n}$ vedou také k úvahám o mocnostech jiných bodů vzhledem k význačným kružnicím v trojúhelníku. (Obr. 2).

a) Mocnost vrcholu A_n vzhledem k Feuerbachově kružnici $(F, \frac{1}{2}r)$ jest

$$M_{A_n}{}^F = \overline{A_nP_n}\,.\,\overline{A_nH_n} = \tfrac{1}{2}v_n h_n = \tfrac{1}{4}(a^2{}_{n+1} + a^2{}_{n-1} - a^2{}_n) \quad (5)$$

a součtové vztahy zní

$$M_{A_{n+1}}{}^F + M_{A_{n-1}}{}^F = \tfrac{1}{2}a^2{}_n;\ 4\Sigma M_{A_n}{}^F = \Sigma a^2{}_n. \tag{6}$$

Spojíme-li výsledky odst. 1 a 2, jest

$$2\,(M_{A_{n+1}}{}^F + M_{A_{n-1}}{}^F) = M_{A_{n+1}}{}^{S_{n+1}} + M_{A_{n-1}}{}^{S_{n-1}} = a^2{}_n,$$

$$4\,\Sigma\, M_{A_n}{}^F = 2\,\Sigma\, M_{A_n}{}^{S_n} = \Sigma\, a^2{}_n,$$

$$M_{A_n}{}^F : M_{A_n}{}^{S_n} : = 1 : 2,$$

s příslušnými měřickými interpretacemi. Mezi jiným plyne z úměry, že úhlopříčka ve čtverci nad tečnou vedenou z vrcholu A_n ke kružnici $(F, \frac{1}{2}r)$ má stejnou délku $\sqrt{M_{A_n}{}^F}\,.\,\sqrt{2}$ jako tečna z téhož vrcholu ke kružnici $(S_n, \frac{1}{2}a_n)$. (Obr. 2.)

b) Mocnosti bodu V.

Vzhledem ke kružnici $(S_n, \frac{1}{2}a_n)$ jest

$$M_V{}^{S_n} = d_n h_n, \quad (d_n = \overline{VP_n}),$$

a má tutéž hodnotu pro všechny tři hodnoty indexu n, poněvadž jsou výšky A_nP_n chordály všech tří kružnic a V je střed mocnosti.

Stejně nezávisí na hodnotě indexu n mocnost bodu V vzhledem k Feuerbachově kružnici (obr. 2)

$$M_V{}^F = \overline{H_nV}\,.\,\overline{VP_n} = \tfrac{1}{2}d_nh_n,$$

a vzhledem ke kružnici opsané

$$M_V{}^{V'} = \overline{A_nV}\,.\,\overline{VU'_n} = 2h_nd_n,$$

kde U'_n je průsečík opsané kružnice (V', r) s výškou A_nP_n; pro souměrnost kružnic (A'_n, r)[1]) a (V', r) vzhledem k $A_{n+1}A_{n-1}$ jest $\overline{A'_nS_n} = \overline{S_nV}$!

$d_n = VP_n = P_nU'_n$. Tak dostaneme ve spojení

$$M_V{}^{V'} = 2M_V{}^{S_n} = 4M_V{}^F = 2d_nh_n. \tag{7}$$

Je-li trojúhelník ostroúhlý, leží orthocentrum V uvnitř všech tří kružnic; jeho mocnosti vzhledem k nim jsou čtverce nejkratších půltětiv, jdoucích bodem V. Poněvadž středy V' a F — kružnice opsané a Feuerbachovy — spolu s orthocentrem V leží na centrále, kterou jest zde Eulerova přímka, je nejkratší půltětiva ve jmenovaných dvou kružnicích kolmice k Eulerově přímce v bodě V. A poněvadž jest $\sqrt{M_V{}^{V'}} = 2\sqrt{M_V{}^F}$, $2\sqrt{M_V{}^{V'}} = 4\sqrt{M_V{}^F}$, jest nejkratší tětiva v opsané kružnici, vedená orthocentrem V kolmo k $V'FV$ — v trojúhelníku ostroúhlém — rozdělena Feuerbachovou kružnicí a bodem V na čtyři stejně dlouhé úseky.

[1]) A'_n je střed kružnice jdoucí body A_{n+1}, A_{n-1}, V a platí pro něj:

Je-li úhel při A_n tupý, leží V vně trojúhelníka i uvažovaných tří kružnic, a z bodu V jsou možné tečny k nim. Jejich čtverce jsou pak uvažované mocnosti; tečny z V ke kružnicím (V', r) a $(F, \frac{1}{2}r)$ mají délky v poměru $2 : 1$ a v témž poměru jsou i poloměry obou kružnic. Spojnice $V'FV$ je společná centrála, a proto je orthocentrum v tupoúhlém trojúhelníku vnější bod podobnosti obou kružnic; tečna vedená z bodu V k jedné, dotýká se i druhé.

c) Nyní můžeme jednoduchým způsobem určiti délku Eulerovy úsečky $V'V = e$.

Především dostaneme z podobných trojúhelníků VP_nA_{n-1} a $A_{n+1}P_nA_n$ (obr. 2),

$$d_n : a_{n+1,n} = a_{n-1,n} : v_n, \quad h_{n-1} : a_{n+1,n} = a_{n-1} : v_n,$$

z čehož plyne napřed

$$d_n = \frac{(a^2_{n-1} + a^2_n - a^2_{n+1})(a^2_n + a^2_{n+1} - a^2_{n-1})}{8a_n\Delta},$$

použijeme-li vedle kosinové věty pro a_{n-1} také vztahu $4a^2_nv_n = 8a_n\Delta$, kde Δ je obsah trojúhelníka.

Potom dostaneme

$$h_n = \frac{a_n(a^2_{n+1} + a^2_{n-1} - a^2_n)}{4\Delta}.$$

Pak vypočteme

$$M_V{}^{V'} = 2d_n h_n =$$

$$= \frac{(a^2_{n+1} + a^2_{n-1} - a^2_n)(a^2_{n-1} + a^2_n - a^2_{n+1})(a^2_n + a^2_{n+1} - a^2_{n-1})}{16\Delta^2}$$

Nahradíme-li trojčleny známými výrazy z kosinové věty a Δ výrazem $\frac{\Pi a_n}{4r}$, je $M_V{}^{V'} = r^2\Pi\, 2\cos\alpha_n = r^2 - e^2$ a dostaneme

$$e = r\sqrt{1 - 8\cos\alpha_{n-1}\cos\alpha_n\cos\alpha_{n+1}}. \qquad (8)$$

d) Mocnosti těžiště T.

S ohledem na vztahy $V'T = \frac{1}{3}e$, $TF = \frac{1}{6}e$, jest $M_T{}^{V'} = \frac{1}{9}e^2 - r^2$, $M_T{}^F = \frac{1}{36}e^2 - \frac{1}{4}r^2$, tedy $M_T{}^{V'} = 4M_T{}^F$ (obr. 2).

Poněvadž bod T leží vždycky uvnitř kružnic (V', r) i $(F, \frac{1}{2}r)$, a Eulerova přímka jest jejich centrála, určují obě kružnice na nejkratší tětivě bodem T, kolmé k $V'V$, čtyři stejně dlouhé úseky.

Poněvadž je $TS_n = \frac{1}{3}t_n$, jest mocnost vzhledem k $(S_n, \frac{1}{2}a_n)$ $M_T{}^{S_n} = \frac{1}{9}t^2_n - \frac{1}{4}a^2_n$, a dosadíme-li sem dříve uvedenou hodnotu pro t_n, dostaneme

$$M_T^{S_n} = \frac{a^2_{n+1} + a^2_{n-1} - 5a^2_n}{18}.$$

Je-li v trojúhelníku $a_n > a_{n-1} > a_{n+1}$ (>0), nemůže býti $5a^2_n \leqq a^2_{n+1} + a^2_{n-1}$. Kdyby platila tato nerovnost, platila by, s ohledem na vztah $a^2_{n+1} + a^2_{n-1} = a^2_n + 2a_{n+1}a_{n-1} \cos \alpha_n$ a známou větu: $|a + b| \leqq |a| + |b|$, nerovnost $|\cos \alpha_n| \geqq \dfrac{2a^2_n}{a_{n+1}a_{n-1}}$. Ale z podmínky $a_n > a_{n-1} > a_{n+1}$ vychází $2a^2_n > a_{n+1}a_{n-1}$, tedy $|\cos \alpha_n| > 1$, což není možné pro reálné úhly. Musí tedy býti $5a^2_n > a^2_{n+1} + a^2_{n-1}$ a $M_T^{S_n}$ jest záporné; leží tedy bod T uvnitř kružnice $(S_n, \frac{1}{2}a_n)$, je-li a_n nejdelší strana. Naproti tomu těžiště může ležeti uvnitř, vně nebo na kružnici sestrojené nad nejkratší stranou. Lze totiž podobně ukázati, že může býti $M_T^{S_{n+1}} \gtreqless 0$.

Mají-li mocnosti $M_T^{S_{n+1}}$ a $M_T^{S_{n-1}}$ stejná znaménka, jest

$$|M_T^{S_{n+1}}| + |M_T^{S_{n-1}}| = \left| \frac{2\,(a^2_{n+1} + a^2_{n-1}) - a^2_n}{9} \right| = \tfrac{4}{9}\, t^2_n; \qquad (10)$$

mají-li tyto mocnosti pro všechny hodnoty indexu n stejná znaménka, jest

$$6\, \Sigma\, |M_T^{S_n}| = \Sigma\, a^2_n, \qquad (11)$$

což opět umožňuje jednoduchou měřickou interpretaci uvážíme-li, že $\sqrt{M_T^{S_n}}$ značí délku příslušné tečny, případně nejkratší půltětivy.

e) Mocnosti výškových pat P_n.

Vzhledem ke kružnici $(S_n, \frac{1}{2}a_n)$ jest zřejmě (obr. 2)

$$M^{S_n}_{P_n} = \mathfrak{a}_{n+1,n}\, \mathfrak{a}_{n-1,n} = \frac{(a^2_{n+1} + a^2_n - a^2_{n-1})\,(a^2_{n-1} + a^2_n - a^2_{n-1})}{4a_n^2}.$$

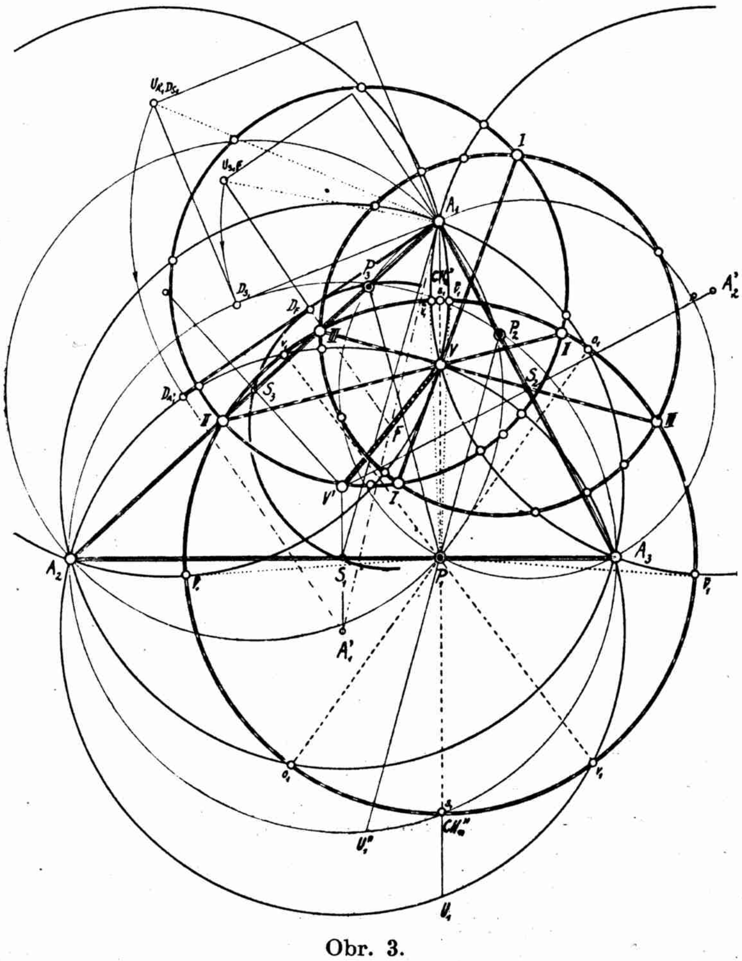
Tutéž hodnotu mají netoliko mocnosti $M_{P_n}^{V'}$ a $M_{P_n}^{A'_n}$, ale i $M_{P_n}^{A'_{n\pm1}}$, neboť jest v obr. 1

$$M_{P_n}^{A'_{n\pm1}} = v_n d_n = \frac{v_n(a^2_{n+1} + a^2_n - a^2_{n-1})\;(a^2_{n-1} + a^2_n - a^2_{n+1})}{8a_n\Delta}$$

jak plyne z *c*), z čehož dostaneme týž výraz jako pro $M_{P_n}^{S_n}$, dosadíme-li $v_n = \dfrac{2\Delta}{a_n}$. Je tudíž v celku

$$|M_{P_n}^{S_n}| = |M_{P_n}^{A'_n}| = |M_{P_n}^{A'_{n\pm1}}| = |M_{P_n}^{V'}| = \left| \frac{(a^2_{n+1} + a^2_n - a^2_{n-1})\,(a^2_{n-1} + a^2_n - a^2_{n+1})}{4a^2_n} \right| \qquad (12)$$

a druhá odmocnina z těchto výrazů určuje délku tečen případně nejkratších půltětiv vedených patou P_n v příslušných pěti kružnicích. Sestrojíme-li tečny nebo nejkratší půltětivy (obr. 3), dostaneme deset koncových bodů, které určují kružnici opsanou ze středu P_n poloměrem



Obr. 3.

$$\sqrt{|M_{P_n}^{S_n}|} = r_n^M =$$
$$= \frac{1}{2a_n}\left|\sqrt{(a^2_{n+1} + a_n^2 - a^2_{n-1})\,(a^2_{n-1} + a^2_n - a^2_{n+1})}\right|.$$

Tímto způsobem dostaneme tři kružnice (P_n, r_n^M) a můžeme ukázati, že jejich střed mocnosti jest v průsečíků výšek V, t. j.