O zborcené ploše, jejíž část je topologicky ekvivalentní s Möbiovým listem.

Josef Klíma, Brno.

(Došlo dne 18. března 1935.)

V topologii uvádí se jako nejjednodušší příklad dvojité plochy[1]) nebo jednostranné, uvažujeme-li, že je uložena v prostoru o větším počtu dimensí než je dvě, t. zv. Möbiův list. Tento vznikne tím, že obdélníkový proužek slepíme podél dvou protějších stran tak, že jednu z těchto stran otočíme o 180° kol jejího středu. Ploška tak vytvořená je zřejmě rozvinutelná. Ale uvádí se, že lze plochu ekvivalentní topologicky s Möbiovým listem vytvořiti ještě jinak,[2]) leč pak plocha tato není, jak dále uvidíme, rozvinutelnou.

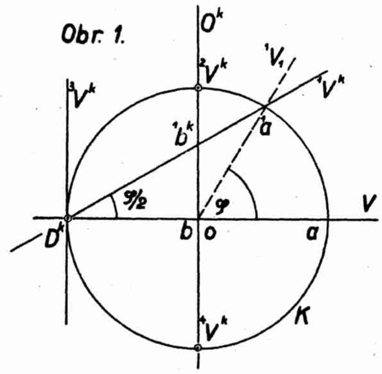
Zvolme v rovině α, jdoucí osou O, bod a mimo přímku O! Bodem a veďme v α úsečku m^1m, jež je bodem a půlena! Nechť rovina otáčí se rovnoměrně kolem osy O a současně úsečka m^1m kolem bodu a v rovině α též rovnoměrně a sice úhlovými rychlostmi v poměru 2 : 1. Při otočení roviny α o úhel 360°, otočí se úsečka m^1m o 180°, takže bod ${}^1m$ splyne s počáteční polohou bodu m a obráceně. Úsečka m^1m při této dvojí rotaci vytvoří plochu, jež je zřejmě topologicky ekvivalentní s Möbiovým listem. Plocha takto vytvořená je částí jisté zborcené plochy, již vytvoříme hořejším způsobem, vezmeme-li v rovině α místo úsečky m^1m její prodloužení, přímku V. Lze snadno ukázati, že plocha tato je zborcenou plochou třetího stupně, která má přímku O za jednoduchou řídicí přímku. Sestrojme tuto plochu v t. zv. vojenské perspektivě, t. j. v šikmém průmětě na rovinu π kružnice K, již opisuje bod a přímky V při otáčení kol osy O, pro promítací paprsky svírající s π úhel 45°.

V obr. 1 počáteční poloha přímky V vzata v rovině π kolmo k ose O a k jejímu šikmému průmětu O^k. Nechť otáčí se bod a ve smyslu + (proti směru pohybu ručiček na hodinách) kol osy O na kružnici K a přímka V ve smyslu — v rovině (VO), takže průsečík b

[1]) Viz na př. Hlavatý: Úvod do neeuklidovské geometrie, str. 158.
[2]) Steinitz-Rademacher: Vorlesungen über die Theorie der Polyeder (1934), str. 19.

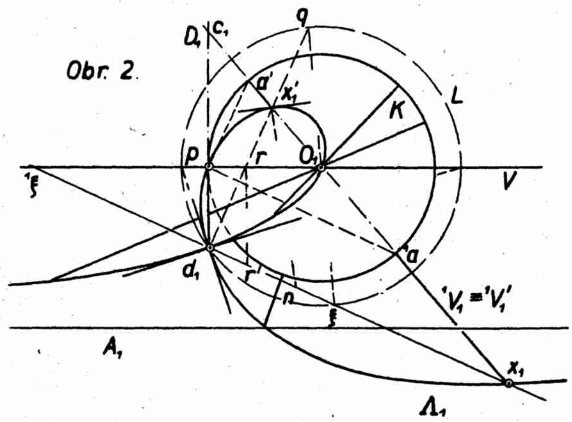
přímky V s osou O probíhá tuto osu od středu o kružnice K vzhůru. Při otočení o úhel φ kol osy O, otočí se přímka V v rovině (VO) o úhel $\frac{1}{2}\varphi$ do polohy ${}^1V$. Šikmý průmět ${}^1V^k$ jde patrně diametrálně

Obr. 1.



protilehlým bodem D^k k bodu a na kružnici K. Z toho patrno, že vytvořená zborcená plocha má řídicí přímku D, jež má šikmý průmět v bodě D^k kružnice K. Přímka V vytvoří tudíž zborcenou plochu třetího stupně, jež má kružnici K, osu O za jedno-

Obr. 2.



duché řídicí útvary a přímku D za dvojnou řídicí přímku a lze ji označiti $[O, D, K]$. Rovina π je tečnou rovinou plochy v bodě a a její řez s plochou rozpadá se v přímku V a kružnici K. Torsální roviny jsou tu minimálními rovinami, jdoucími přímkou O, kuspidální body jsou jejich průsečíky s přímkou D. Ježto přímka D svírá s π úhel 45° a kolmý její průmět do π je v tečně kružnice K, jsou torsální přímky ${}^1T$, ${}^2T$ imaginární druhého druhu a sice minimální, ležící v rovinách rovnoběžných s π ve vzdálenostech $\pm ai$, je-li a poloměr kružnice K. Ve zvolené vojenské perspektivě obrys plochy rozpadá se ve tři body, z nichž jeden je v D^k a druhé dva jsou v bodových průmětech ${}^2V^k$, ${}^4V^k$ tvořících přímek, rovnoběžných se směrem promítání.

V obr. 2 vyznačena zborcená tato plocha v kolmém promítání na rovinu π kružnice K, jež vzata za první průmětnu. Řez plochy s libovolnou rovinou $\lambda \parallel \pi$ je strofoidou Λ, jak ukážeme snadno následovně. Rovina λ protíná dvojnou řídicí přímku D v bodě d, jehož půdorys je od stopníku p přímky D vzdálen o délku pd_1 rovnou výšce roviny λ nad π. Průsečík x libovolné tvořicí přímky ${}^1V$ zborcené plochy s rovinou λ, je na průsečnici roviny (D^1V) s rovinou λ, jež je hlavní přímkou v rovině (D^1V) a tedy je rovnoběžná se stopou p^1a téže roviny na π. Opišme kol středu O_1 kružnici L, jež jde bodem d_1 a její druhý průsečík s d_1x_1 označme ξ. Jestliže d_1x_1 protíná tvořicí přímku V, ležící v π v bodě ${}^1\xi$, tu platí:

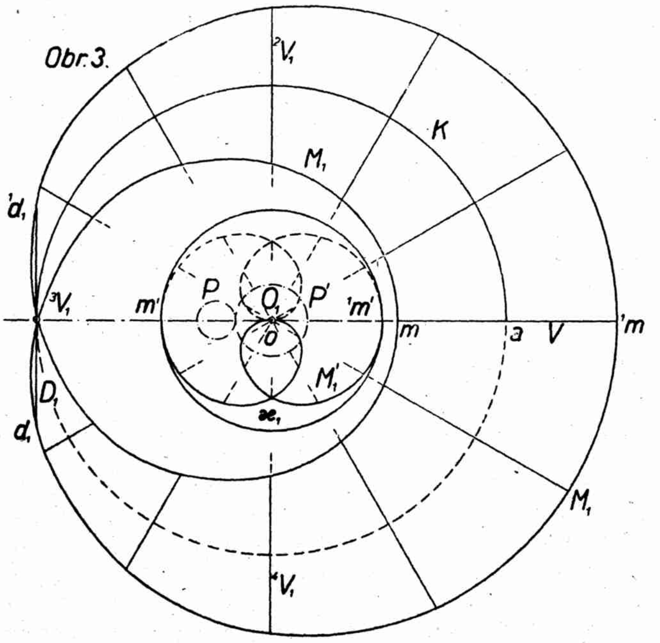
$$\xi x_1 = - d_1 \,.\, {}^1\xi,$$

v čemž obsaženo známé kissoidální vytvoření strofoidy Λ_1 z kružnice L, jejího průměru V pro pól d_1 na kružnici.[3]) Bod d je dvojným bodem řezu Λ a tečny v něm mají půdorysy jdoucí průsečíky kružnice L s přímkou V a tudíž vzájemně kolmé. V půdoryse ${}^1V_1$ je půdorys ještě druhé přímky ${}^1V'$, jež má stopník na π v bodě a' a která protíná rovinu λ v bodě x'. Polární subnormála pro pól d_1 křivky Λ_1 v bodě x'_1 je dána úsečkou $d_1n = d_1\xi - d_1r'$, kde body ξ, r' jsou na normálách křivek L a V, jichž kissoidou je Λ_1. Reálná asymptota A_1 křivky Λ_1 je souměrně položená k V vzhledem k dvojnému bodu d_1. Bod O_1 je singulárním ohniskem křivky Λ_1, což vyplývá též z toho, že Λ je řezem s plochou. V obr. 2 vyznačena ona část plochy, která je mezi rovinami π a λ.

Část této zborcené plochy, jež je topologicky ekvivalentní s Möbiovým listem, je omezena částí M průsečné křivky této plochy s plochou anuloidu o středové kružnici K a poloměru r, jestliže délka $m^1m = 2r$. Průsečná křivka obou ploch je stupně $3 \,.\, 4 = 12$, jež se tu rozpadá ve dvě křivky stupně 6, z nichž jedna je okrajem M. Křivku M lze výhodně sestrojiti ze sférické křivky M', jež je na kulové ploše $\varkappa$ opsané ze středu o kružnice K poloměrem r. V obr. 3 sestrojeno vše opět v kolmém průmětě na rovinu π kružnice K co prvou průmětnu. Mysleme si, že s vytvořujícími přímkami V, ${}^1V$, ... plochy zborcené vedeme středem o kulové plochy $\varkappa$ rovnoběžky, jež lze dostati též tak, že tvořicí přímka V otáčí se rovnoměrně kolem O a současně v rovině (VO) kol bodu o úhlovými rychlostmi v poměru $2 : 1$. Průsečíky m', ${}^1m'$ přímek těchto

[3]) Wieleitner: Spezielle ebene Kurven, str. 37.

s kulovou plochou $\varkappa$ opíší na této křivku, jež je clelií druhého druhu.[4]) Půdorys M'_1 je růžicí o rovnici v polární soustavě $\varrho = r \sin \frac{1}{2}\omega$,[5]) jež je prodlouženou epicykloidou o dvou větvích, jíž opíše bod m', spojíme-li jej s kružnicí P, která se kotálí po kružnici P' o poloměru dvojnásobném.[6]) Křivka M'_1 je stupně 6 majíc rovnici v pravoúhlé soustavě vzhledem k ose $X \equiv m'^1m'$ a po-



Obr. 3.

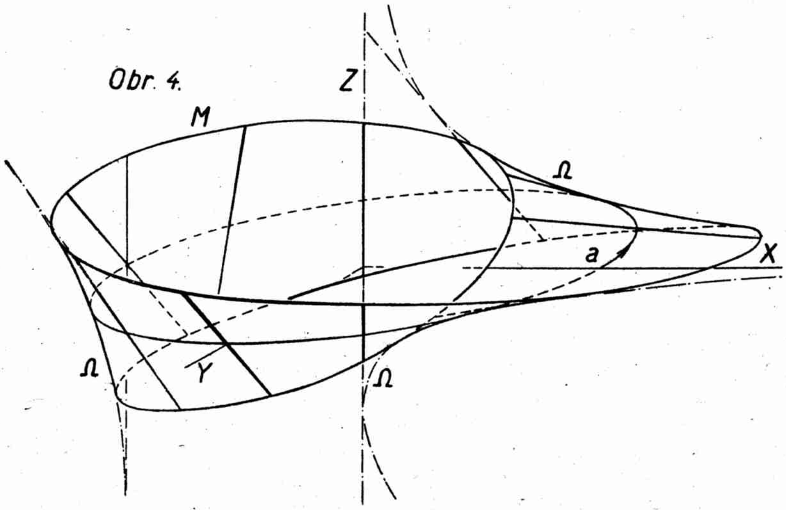
čátku o:

$$4\,(x^2 + y^2)^3 + r^4y^2 - 4r^2\,(x^2 + y^2)^2 = 0.$$

Kruhové body jsou trojnými body křivky M'_1. Ježto kružnice o středu v počátku o mají v konečnu s M'_1 4 společné body, je v kruhových bodech obsaženo jejich zbývajících 8 průsečíků. Tečnu v libovolném bodě křivky M'_1 jakož i oskulační kružnice v jejích vrcholech lze snadno sestrojiti z jejího kinematického vytvoření.[7]) Půdorys M_1 okraje je částí konchoidy křivky M'_1 pro pól o a délku rovnou poloměru a kružnice K. Úplná tato konchoida,

4) G. Loria: Curve sghembe speciali, II. díl, str. 59.
5) G. Loria: Spezielle algebraische Kurven und transcendente Kurven, I. díl, str. 366.
6) Tamtéž, II. díl, str. 109.
7) Kadeřávek-Klíma-Kounovský: Deskr. geometrie, I. díl, str. 128.

jež je kissoidou křivek M'_1, K_1 pro pól o, je stupně $2 \,.\, 2 \,.\, 6 - (2 \,.\, 2 + 8) = 12$,[8]) ale rozpadá se tu ve dvě křivky stupňů 6, souměrně k sobě položených podle středu o.[9]) Půdorys M_1 okraje plochy je křivkou stupně 6, jež má v počátku o a v bodě ${}^3V_1$ dvojné body a v kruhových bodech trojné body. Prostorová křivka M je též stupně 6, ježto je zvláštním případem globoidální závitnice (šneku).[10]) Závitnici tuto vytvoří bod probíhající rovnoměrně kružnici, která se současně rovnoměrně otáčí kol obecně položené



Obr. 4.

osy tak, že úhlové rychlosti obou pohybů jsou v konstantním poměru $m : n$, a která je racionální křivkou stupně $2(m + n)$. V našem případě jest $m : n = 1 : 2$ a tedy M je prostorovou křivkou stupně 6.

Proniková čára zmíněného anuloidu se zborcenou plochou rozpadá se tu v křivku M a v křivku, již vyplňují průsečíky tvořicích přímek zborcené plochy s druhými kružnicemi poledníkovými anuloidu, jejichž středy přímky ty neprocházejí. Obě tyto části proniku protínaly by se reálně v průsečících d, ${}^1d$ dvojné řídicí přímky D s anuloidem.

V obr. 4 sestrojen šikmý obraz ($\omega = 150°$, $q = \frac{2}{3}$) této části zborcené plochy a vyznačen obrys Ω zborcené plochy, z něhož

[8]) Wieleitner: Spezielle ebene Kurven, str. 3, nebo Klíma: Příspěvek ke křivkám cissoidálním, Rozpravy České akademie **31** (1922), č. 39, 5 stran.

[9]) Tamtéž str. 108. Jedna část konchoidy má v polárních souřadnicích rovnici $\varrho - a = r \sin \frac{1}{2}\omega$ a druhá $\varrho + a = r \sin \frac{1}{2}\omega$, jež převedeny na pravoúhlé souřadnice dají rovnice stupňů 6.

[10]) G. Loria: Curve sghembe speciali, II. díl, str. 33—35.