

Werk

Label: Article

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311028X_0065|log80

Kontakt/Contact

[Digizeitschriften e.V.](#)
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

Dyadische Entwicklungen und Hausdorffsches Mass.

Vlad. Kniechal, Praha.

(Eingegangen am 13. April 1936.)

§ 1. Definitionen und Resultate.

Alle Zahlen in dieser Abhandlung sind reel. Für $0 \leq x < 1$ sei

$$x = 0, i_1 i_2 i_3 \dots = \frac{i_1}{2} + \frac{i_2}{2^2} + \frac{i_3}{2^3} + \dots$$

die *dyadische Entwicklung* der Zahl x (i_k ist also gleich 0 oder 1 für $k = 1, 2, 3, \dots$), die durch die Forderung normiert ist, daß die Folge i_1, i_2, i_3, \dots unendlich viele Nullen enthalten soll. Ist $n \geq 1$ ganz, so bezeichnen wir mit $p(x, n)$ die Anzahl der Nullen in dem System $i_1, i_2, i_3, \dots, i_n$ und setzen $p(x, 0) = 0$.

Herr Khintchine¹⁾ bewies folgenden Satz. Für alle Zahlen x mit $0 \leq x < 1$ mit Ausnahme einer Menge vom Lebesgueschen Maß Null gilt

$$\limsup_{n=\infty} \frac{|p(x, n) - \frac{1}{2}n|}{\sqrt{n \log \log n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

In dieser Abhandlung beschäftigen wir uns mit einer Menge \mathfrak{M}_α , welche folgendermassen definiert ist. Es sei $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$. Mit \mathfrak{M}_α wollen wir stets die Menge aller solchen Zahlen x mit $0 \leq x < 1$ bezeichnen, für welche²⁾

$$p(x, n) - \frac{1}{2}n = O(n^\alpha)$$

gilt. Nach dem Satze von Herrn Khintchine ist für $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ das Lebesguesche Maß der Menge \mathfrak{M}_α gleich Null. Man kann also für

¹⁾ A. Khintchine, Über einen Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Fund. Math. 6 (1924), 9—20.

²⁾ Ist $f(n) > 0$ für $n > n_0$, so bedeutet $\varphi(n) = O(f(n))$, dass

$$\limsup_{n=\infty} \frac{|\varphi(n)|}{f(n)} < \infty \text{ ist.}$$

eine geeignete Maßfunktion $f(x)$ das Hausdorffsche Maß der Menge \mathfrak{M}_α untersuchen.

\mathfrak{M} sei eine lineare Menge und $f(x)$ eine positive Funktion für $0 < x < 1$. Es sei $0 < \varrho < 1$. Man überdecke \mathfrak{M} mit einer höchstens abzählbaren Menge S offener Intervalle v , deren Längen³⁾ $|v|$ sämtlich kleiner als ϱ sind. Man setze⁴⁾ $A = \sum_v f(|v|)$. Die untere Grenze der Zahlen A für alle solche Überdeckungen S wollen wir mit $L_\varrho(\mathfrak{M}, f(x))$ bezeichnen. Nimmt ϱ ab, so nimmt $L_\varrho(\mathfrak{M}, f(x))$ offenbar nicht ab, und es existiert daher $\lim_{\varrho=0+} L_\varrho(\mathfrak{M}, f(x))$. Diese Zahl nennt man *das zur Funktion $f(x)$ zugehörige Hausdorffsche⁵⁾ Maß der Menge \mathfrak{M}* . Wir bezeichnen es mit $L(\mathfrak{M}, f(x))$.

Der Leser findet die Grundeigenschaften des Hausdorffschen Masses in der unter 5. zitierten Abhandlung. Hier mögen nur einige von ihnen ohne Beweis angegeben werden. $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_1, \dots$ seien lineare Mengen, $f(x), g(x)$ positive Funktionen für $0 < x < 1$.

1. Ist⁶⁾ $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}_1$, so ist $L(\mathfrak{M}, f(x)) \leq L(\mathfrak{M}_1, f(x))$.

2. Ist $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \dots$, so ist

$$L(\mathfrak{M}, f(x)) \leq L(\mathfrak{M}_1, f(x)) + L(\mathfrak{M}_2, f(x)) + \dots$$

3. Ist $\lim_{x=0+} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$ und $L(\mathfrak{M}, f(x)) < \infty$, so ist

$$L(\mathfrak{M}, g(x)) = 0.$$

4. Ist $f(x) = x$, so ist $L(\mathfrak{M}, f(x))$ das äußere Lebesguesche Maß der Menge \mathfrak{M} .

Wenn $\lim_{x=0+} \frac{f(x)}{x} = \infty$ ist, so kann $L(\mathfrak{M}, f(x)) > 0$ sein, auch wenn das Lebesguesche Maß der Menge \mathfrak{M} gleich Null ist. Man kann also das Hausdorffsche Maß für eine feinere Klassifikation der Mengen vom Lebesgueschen Maß Null benützen. Wir wollen diesen Begriff des Hausdorffschen Maßes auf die schon früher definierte Menge \mathfrak{M}_α anwenden. Wir wählen für die Hausdorffsche Maßfunktion die Funktion $f(x) = f(x, \beta) = x \cdot e^{(-\log x)^\beta}$. Wenn \mathfrak{M} vom Lebesgueschen Maß Null ist, so ist für $\beta \leq 0$ auch $L(\mathfrak{M}, f(x, \beta)) = 0$ und wenn \mathfrak{M} unendlichviele Elemente enthält, so ist für $\beta \geq 1$ $L(\mathfrak{M}, f(x, \beta)) = \infty$.

³⁾ $|v|$ bedeutet stets die Länge des Intervalls v .

⁴⁾ Die Limesoperationen wollen wir im erweiterten Sinne nehmen.

⁵⁾ F. Hausdorff, Dimension und äusseres Mass, *Math. Annalen*, 79 (1919), 157—179.

⁶⁾ $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$ bedeutet: \mathfrak{M} ist eine Teilmenge von \mathfrak{N} , $a \in \mathfrak{M}$ bedeutet: a ist ein Element aus \mathfrak{M} , mit $\{a, b, c, \dots\}$ bezeichnet man die aus den Elementen a, b, c, \dots bestehende Menge.

Wir wollen uns also nur mit dem Falle $0 < \beta < 1$ beschäftigen. Die Sätze 1 bis 4 und die eben angeführten Bemerkungen sind fast trivial; im Folgenden wird übrigens von ihnen kein Gebrauch gemacht. Unser Hauptziel liegt im Beweise des folgenden Satzes.

Hauptsatz. Es sei $0 < \beta < 1$, $f(x) = f(x, \beta) = x \cdot e^{(-\log x)^\beta}$ für $0 < x < 1$, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. Dann ist

I. $L(\mathfrak{M}_\alpha, f(x, \beta)) = 0$ für $0 < \beta < 1 - 2\alpha$.

II. $L(\mathfrak{M}_\alpha, f(x, \beta)) = \infty$ für $1 - 2\alpha < \beta < 1$.

Mit c_1, c_2, c_3, \dots wollen wir im Folgenden *positive, absolute Konstanten* bezeichnen.

Vor dem Beweise des Hauptsatzes wollen wir noch einige Hilfssätze ableiten.

Hilfssatz 1. Es sei n, k ganz, $n \geq 1$, $k' = k - \frac{1}{2}n$. Für $|k'| \leq \frac{1}{4}n$ gilt dann

$$\binom{n}{k} \leq c_1 \frac{2^n}{\sqrt{n}} e^{-2k'^2/n}, \quad (1)$$

$$\binom{n}{k} \geq c_2 \frac{2^n}{\sqrt{n}} e^{-3k'^2/n}, \quad (2)$$

und für alle k' gilt

$$\binom{n}{k} \leq c_3 2^n e^{-2k'^2/n}. \quad (3)$$

Beweis. Nach der Stirlingschen Formel ist für ganzes $n \geq 1$

$$c_4 \sqrt{n} e^{-n} n^n \leq n! \leq c_5 \sqrt{n} e^{-n} \cdot n^n \quad (4)$$

und also für ganze n, k mit $1 \leq k \leq n - 1$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \leq c_6 \sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} \frac{n^n}{k^k(n-k)^{n-k}} \quad (5)$$

Man setze $\varrho = \frac{2k'}{n}$. Dann gilt

$$\sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} = \sqrt{\frac{n}{\frac{1}{2}n(1+\varrho) \frac{1}{2}n(1-\varrho)}} = \frac{2}{\sqrt{n(1-\varrho^2)}} \quad (6)$$

und weiter

$$\begin{aligned} \frac{n^n}{k^k(n-k)^{n-k}} &= \frac{n^n}{(\frac{1}{2}n(1+\varrho))^k (\frac{1}{2}n(1-\varrho))^{n-k}} = \\ &= \frac{2^n}{(1+\varrho)^k (1-\varrho)^{n-k}} = 2^n \cdot y, \end{aligned}$$

wo

$\log y = -k \log(1+\varrho) - (n-k) \log(1-\varrho) = -\frac{1}{2}n \varphi(\varrho)$ ist.

Dabei ist $\varphi(x) = (1+x) \log(1+x) + (1-x) \log(1-x)$ für $0 < x < 1$ und $\varphi'(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$, $\varphi''(x) = \frac{2}{1-x^2}$. Nach dem Taylorschen Satze ist

$$\varphi(\varrho) = \varphi(0) + \frac{\varrho}{1!} \varphi'(0) + \frac{\varrho^2}{2!} \varphi''(\Theta\varrho) = \frac{\varrho^2}{1-\Theta^2\varrho^2}$$

mit $0 \leq \Theta \leq 1$ und also

$$\frac{n^n}{k^k(n-k)^{n-k}} = 2^n e^{-\frac{n}{2} \frac{\varrho^2}{1-\Theta^2\varrho^2}} = 2^n e^{-\frac{2k'^2}{n} \frac{1}{1-\Theta^2\varrho^2}}. \quad (7)$$

Für $|k'| \leq \frac{1}{2}n$, $n \geq 1$ ist $|\varrho| \leq \frac{1}{2}$, also erhält man nach (5), (6), (7) die Ungleichung (1).

Für $1 \leq k \leq n-1$ (dann ist also $n \geq 2$) erhält man nach (5), (6), (7)

$$\binom{n}{k} \leq \frac{2c_6}{\sqrt{n(1-\varrho^2)}} \cdot 2^n e^{-2k'^2/n}.$$

Nun ist aber $n(1-\varrho^2) \geq n \left(1 - \left(\frac{2}{n} \left(\frac{n}{2} - 1\right)\right)^2\right) = 4 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \geq 2$ und daher

$$\binom{n}{k} \leq c_3 2^n e^{-2k'^2/n}.$$

Diese Beziehung (mit eventuell vergrößerter Konstante c_3) gilt offenbar auch für $k=0$ und $k=n$, $n \geq 1$, denn in diesem Falle ist $k' = \frac{1}{2}n$ und daher

$$2^n e^{-2k'^2/n} = 2^n e^{-\frac{1}{2}n} = e^{n(\log 2 - \frac{1}{2})}$$

wo $\log 2 - \frac{1}{2} > 0$ ist.

Für $|\varrho| \leq \frac{1}{2}$ erhält man ähnlich nach (4), (6), (7)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \geq c_7 \sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} \frac{n^n}{k^k(n-k)^{n-k}} \geq c_2 \frac{1}{\sqrt{n}} 2^n e^{-3k'^2/n}.$$

Es sei $w = \langle a, b \rangle$ ein abgeschlossenes Intervall und $n \geq 0$, ganz. Die Intervalle

$$v = \left\langle a + \frac{i}{2^n}(b-a), a + \frac{i+1}{2^n}(b-a) \right\rangle \text{ für } i = 0, 1, 2, \dots, 2^n - 1$$

wollen wir die zu w zugehörigen Intervalle n -ter Ordnung nennen. Gleichzeitig führen wir für ganzes $k \geq 0$ folgende Bezeichnung ein:

$$p(v, k, w) = p\left(\frac{i}{2^n}, k\right). \quad (8)$$

Der Kürze halber wollen wir die zu $\langle 0, 1 \rangle$ zugehörigen Intervalle n -ter Ordnung auch *Intervalle n -ter Ordnung nennen* und statt $p(v, k, \langle 0, 1 \rangle)$ einfach $p(v, k)$ schreiben. Wenn w ein Intervall n_1 -ter Ordnung, v ein zu w zugehöriges Intervall n_2 -ter Ordnung ($n_1 \geq 0, n_2 \geq 0$) und x ein innerer Punkt des Intervalls v ist, so erkennt man leicht, daß v ein Intervall $(n_1 + n_2)$ -ter Ordnung ist und daß

$$p(v, k, w) = p(x, n_1 + k) - p(x, n_1) \quad (9)$$

für $k = 0, 1, \dots, n_2$ ist.

§ 2. Beweis der Behauptung I. des Hauptsatzes.

1. Es sei $0 < \alpha < \frac{1}{2}, 0 < \beta < 1 - 2\alpha$. Man wähle α' so, daß $\beta < 1 - 2\alpha' < 1 - 2\alpha$ gilt. Mit C_1, C_2, \dots wollen wir nur von α, α', β abhängige positive Konstanten bezeichnen.

Es sei a ganz,

$$a > \text{Max} (2, C_1^{\frac{2}{1-2\alpha'}}, C_3); \quad (10)$$

die Konstanten C_1, C_3 bestimmt man erst später. Für ganzes $n_1 \geq a$ sei $\mathfrak{N}(n_1)$ die folgendermassen definierte lineare Menge.

Für $i = 0, 1, 2, \dots$ setzen wir⁷⁾

$$n_i = [n_1 i^{\frac{1}{1-2\alpha'}}]. \quad (11)$$

Für $i = 1, 2, \dots$ sei $r_i = n_i - n_{i-1}$.

Für ganzes $i \geq 2$ ist nun (nach dem Mittelwertsatze)

$$\begin{aligned} r_i &\geq n_1 i^{\frac{1}{1-2\alpha'}} - n_1 (i-1)^{\frac{1}{1-2\alpha'}} - 1 \geq \frac{n_1}{1-2\alpha'} (i-1)^{\frac{2\alpha'}{1-2\alpha'}} - 1 \geq \\ &\geq \frac{n_1}{2(1-2\alpha')} (i-1)^{\frac{2\alpha'}{1-2\alpha'}} \end{aligned}$$

und für ganzes $i \geq 1$ also,

$$r_i \geq C_2 n_1 i^{\frac{2\alpha'}{1-2\alpha'}}. \quad (12)$$

Für $n_1 > C_3$ und für ganzes $i \geq 1$ ist deshalb

$$2n_1^{\alpha'} i^{\frac{\alpha'}{1-2\alpha'}} < \frac{1}{4} C_2 n_1 i^{\frac{2\alpha'}{1-2\alpha'}} \leq \frac{1}{4} r_i. \quad (12')$$

Mit V_k ($k \geq 1$, ganz) bezeichnet man die Menge aller abgeschlossener Intervalle n_k -ter Ordnung v , für welche folgende Ungleichungen gelten:

⁷⁾ $[\xi]$ bedeutet die grösste ganze Zahl, die höchstens gleich ξ ist.

$$|p(v, n_i) - \frac{1}{2}n_i| < n_1^{\alpha'} i^{1-2\alpha'}, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (13)$$

P_k soll im Folgenden die Anzahl der Intervalle aus V_k bezeichnen. Man setze nun⁸⁾

$$\mathfrak{N}(n_1) = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_v^{V_k} v. \quad (14)$$

Es sei $\varrho > 0$, $\varepsilon > 0$. Man wähle ein ganzes $k \geq 1$ so, daß die Ungleichungen

$$\frac{1}{2^{n_k-1}} < \varrho, \quad 2(n_1 - \frac{1}{2}n_i)^k C_1^k e^{n_i \beta k^{1-2\alpha'}} < \varepsilon \quad (15)$$

gelten. Dies kann man wegen (10) und wegen $\beta < 1 - 2\alpha'$ verwirklichen. Dann kann man $\mathfrak{N}(n_1)$ durch das abgeschlossene Intervallensystem V_k , also auch durch ein System von P_k offener Intervalle überdecken, deren Längen sämtlich kleiner als $\frac{1}{2^{n_k-1}}$ sind. Es ist also

$$L_{\varrho}(\mathfrak{N}(n_1), f(x, \beta)) \leq \frac{1}{2^{n_k-1}} e^{(n_k-1)\beta \log \beta^2} \cdot P_k \leq \frac{2}{2^{n_k}} e^{n_k \beta \log \beta^2} \cdot P_k. \quad (16)$$

p_1, p_2, \dots, p_k seien ganze Zahlen, für welche

$$|p_i - \frac{1}{2}n_i| < n_1^{\alpha'} \cdot i^{1-2\alpha'} \quad \text{mit } i = 1, 2, \dots, k \quad (17)$$

gilt. Nach (17) und (12') ist

$$|p_1 - \frac{1}{2}n_1| \leq n_1^{\alpha'} < \frac{1}{4}r_1 = \frac{1}{4}n_1 \quad (18)$$

und für $i = 2, 3, \dots$ auch

$$\begin{aligned} |p_i - p_{i-1} - \frac{1}{2}(n_i - n_{i-1})| &\leq |p_i - \frac{1}{2}n_i| + |p_{i-1} - \frac{1}{2}n_{i-1}| \leq \\ &\leq 2n_1^{\alpha'} i^{1-2\alpha'} < \frac{1}{4}r_i = \frac{1}{4}(n_i - n_{i-1}). \end{aligned} \quad (19)$$

Es gibt genau

$$\binom{n_1}{p_1} \binom{n_2 - n_1}{p_2 - p_1} \binom{n_3 - n_2}{p_3 - p_2} \dots \binom{n_k - n_{k-1}}{p_k - p_{k-1}}$$

also nach (1) aus Hilfssatz 1 wegen $r_i \geq 1$ [siehe (12)] und wegen (18), (19) höchstens $\frac{c_1^k}{\sqrt{r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_k}} \cdot 2^{n_k}$ Intervalle n_k -ter Ordnung v , für welche

$$p(v, n_i) = p_i \quad \text{mit } i = 1, 2, \dots, k \quad (20)$$

⁸⁾ Σv bedeutet die mengentheoretische Summe der Intervalle v .

ist. Damit die Intervalle n_k -ter Ordnung v , für welche (20) gilt, die Elemente aus V_k seien, so müssen die Beziehungen (17) für $i = 1, 2, \dots, k$ erfüllt sein. Man hat also für die Wahl der Zahl p_i höchstens $2n_1^{\alpha'} i^{1-2\alpha'} + 1 \leq 3n_1^{\alpha'} i^{1-2\alpha'}$ Möglichkeiten. Es ist also nach (12),

$$P_k \leq \frac{3^k c_1^k}{\sqrt{r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_k}} 2^{n_k} n_1^{k\alpha'} (k!)^{1-2\alpha'} \leq \\ \leq C_1^k n_1^{k(\alpha'-\frac{1}{2})} (k!)^{1-2\alpha'} 2^{n_k} (k!)^{1-2\alpha'} = C_1^k n_1^{-(\frac{1}{2}-\alpha')k} \cdot 2^{n_k}$$

und weiter nach (16), (11) und (15)

$$L_\varrho(\mathfrak{N}(n_1), f(x, \beta)) \leq 2 (n_1^{-(\frac{1}{2}-\alpha')C_1})^k \cdot e^{n_1^{\beta} k^{1-2\alpha'} \log^{\beta} 2} < \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt worden ist, so ist $L_\varrho[\mathfrak{N}(n_1), f(x, \beta)] = 0$ und weiter

$$L(\mathfrak{N}(n_1), f(x, \beta)) = 0. \quad (21)$$

2. Konstruieren wir jetzt die Menge $\mathfrak{P} = \sum_{n=a}^{\infty} \mathfrak{N}(n)$. Dann ist

$\mathfrak{M}_a \subset \mathfrak{P}$.

Beweis. Es sei $x \in \mathfrak{M}_a$, also $0 < x < 1$ und $p(x, n) = \frac{1}{2}n + O(n^a)$. Dann gibt es $n_1 \geq a$ ganz so, daß für alle ganze $n \geq n_1$ folgende Beziehung gilt ($\alpha' > \alpha$)

$$|p(x, n) - \frac{1}{2}n| < n^{\alpha'}. \quad (22)$$

Es sei $i \geq 1$, ganz. Der Punkt x ist wegen (22) ein innerer Punkt eines Intervalles n_i -ter Ordnung v , wo n_i durch (11) definiert ist. Nach (9), (22) und (11) gilt dann für dieses Intervall $|p(v, n_i) - \frac{1}{2}n_i| < n_i^{\alpha'} \leq n_1^{\alpha'} i^{1-2\alpha'}$. Der Punkt x liegt also für jedes $i \geq 1$ in $\sum_v v$ also auch in $\mathfrak{N}(n_1)$ also in \mathfrak{P} .

3. Nach (21) ist $L(\mathfrak{N}(n), f(x, \beta)) = 0$ für $n \geq a$. Es sei nun $0 < \varrho < 1$, $\varepsilon > 0$. Überdecken wir die Menge $\mathfrak{N}(n)$ mit einer höchstens abzählbaren Menge offener Intervalle W_n , von denen jedes kleinere Länge als ϱ hat, und so, daß

$$\sum_v^{W_n} f(|v|, \beta) < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

ist. Die Menge $\sum_{n=a}^{\infty} W_n$ besteht aus einer höchstens abzählbaren Menge offener Intervalle, sie überdeckt \mathfrak{P} und nach dem 2. Abstaze

auch \mathfrak{M}_a , und die Länge jedes einzelnen Intervalls ist kleiner als ϱ .
Es ist also

$$L_\varrho(\mathfrak{M}_a, f(x, \beta)) \leq \sum_{n=a}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} \leq \varepsilon$$

für beliebiges $\varepsilon > 0$, $\varrho > 0$. Deshalb ist $L(\mathfrak{M}_a, f(x, \beta)) = 0$, w. z. b. w.

§ 3. Beweis der Behauptung II. des Hauptsatzes.

1. Es sei

$$0 < \alpha < \frac{1}{2}, \quad 1 - 2\alpha < \beta < 1. \quad (23)$$

Wir wählen α' und ε so, daß

$$1 - 2\alpha < 1 - 2\alpha' < \beta, \quad (1 + 2\varepsilon)\alpha' < \alpha, \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{2} \quad (24)$$

gilt. Mit C_1, C_2, \dots wollen wir *positive nur von $\alpha, \alpha', \beta, \varepsilon$ abhängige Konstanten* bezeichnen.

Es sei $r \geq 1$, ganz, w ein abgeschlossenes Intervall. Dann wollen wir jedes zu w zugehörige Intervall r -ter Ordnung v , für welches die Beziehungen

$$|p(v, k, w) - \frac{1}{2}k| \leq r^{\frac{1}{2} + \varepsilon} + 1 \quad \text{mit } k = 1, 2, 3, \dots, r \quad (25)$$

gelten, ein *untergeordnetes zu w zugehöriges Intervall r -ter Ordnung* nennen.

Für $r > C_1$ ist

$$r^{\frac{1}{2} + \varepsilon} + 1 < \frac{1}{2}r \quad (26)$$

und das untergeordnete Intervall v enthält also keinen Endpunkt des Intervalls w , denn sonst wäre $p(v, r, w)$ gleich 0 oder r .

Hilfssatz 2. *Es sei $r \geq C_2$, ganz, l ganz $|l - \frac{1}{2}r| \leq \sqrt{r}$. Mit P bezeichne man die Anzahl der untergeordneten zu w zugehörigen Intervalle r -ter Ordnung v , für welche $p(v, r, w) = l$ ist. Dann ist $P > \frac{C_3}{\sqrt{r}} 2^r$.*

Beweis. Für $k = 1, 2, \dots, r$ soll A_k die Anzahl derjenigen (zu w zugehörigen) Intervalle r -ter Ordnung v bedeuten, für welche

$$|p(v, k, w) - \frac{1}{2}k| > r^{\frac{1}{2} + \varepsilon} + 1, \quad p(v, r, w) = l \quad (27)$$

ist. Die Anzahl aller Intervalle r -ter Ordnung mit $p(v, r, w) = l$ ist gerade gleich $\binom{r}{l}$ und daher ist

$$P \geq \binom{r}{l} - \sum_{k=1}^r A_k. \quad (28)$$

Es sei k ganz, $1 \leq k \leq r - 1$. Dann ist offenbar nach (27)

$$A_k = \Sigma' \binom{k}{p} \binom{r-k}{l-p} + \Sigma'' \binom{k}{p} \binom{r-k}{l-p} \quad (29)$$

wo man in Σ' über alle ganze p mit $p > \frac{1}{2}k + r^{1+\varepsilon} + 1$ und in Σ'' über alle ganze p mit $p < \frac{1}{2}k - r^{1+\varepsilon} - 1$ summiert. Man setze $p' = p - \frac{1}{2}k$, $l' = l - \frac{1}{2}r$. Nach (3) im Hilfssatze 1 ist

$$\begin{aligned} A'_k &= \Sigma' \binom{k}{p} \binom{r-k}{l-p} \leq c_3^2 \Sigma' 2^r e^{-\frac{2p'^2}{k} - \frac{2(l'-p')^2}{r-k}} = \\ &= c_3^2 2^r e^{-\frac{2l'^2}{r}} \Sigma' e^{-2\frac{(rp'-kl')^2}{rk(r-k)}}. \end{aligned}$$

Die Funktion $(rx - kl')^2$ ist für $x \geq r^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ wachsend, denn es ist $|l'| \leq \sqrt{r}$ und $r \geq 1$. Deshalb ist

$$A'_k \leq c_3^2 2^r e^{-\frac{2l'^2}{r}} \int_{r^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}^{\infty} e^{-2\frac{(rx-kl')^2}{kr(r-k)}} dx.$$

Führt man statt x die neue Variable u durch die Gleichung $u = \sqrt{\frac{2}{kr(r-k)}} (rx - kl')$ ein, so erhält man

$$A'_k \leq c_3^2 2^r \sqrt{\frac{k(r-k)}{2r}} \int_y^{\infty} e^{-u^2} du, \quad (30)$$

wo wegen $k \leq r$ und wegen $|l'| \leq \sqrt{r}$ die untere Grenze y mindestens gleich $\frac{\sqrt{2} r \cdot r^{\frac{1}{2}+\varepsilon} (r^\varepsilon - 1)}{\sqrt{kr(r-k)}} = \frac{\sqrt{2} r (r^\varepsilon - 1)}{\sqrt{k(r-k)}}$ ist.

Durch partielle Integration erhält man für $y > 0$

$$\int_y^{\infty} e^{-u^2} du = -\left[\frac{e^{-u^2}}{2u}\right]_y^{\infty} - \frac{1}{2} \int_y^{\infty} \frac{e^{-u^2}}{u^2} du \leq \frac{e^{-y^2}}{2y}. \quad (31)$$

Nach (30) und (31) ist also

$$A'_k \leq c_3^2 2^r \frac{k(r-k)}{4r(r^\varepsilon - 1)\sqrt{r}} e^{-2\frac{r^\varepsilon(r^\varepsilon - 1)^2}{k(r-k)}}.$$

Daher ist für $r \geq C_4$

$$A'_k \leq \frac{1}{2} c_3^2 2^r \sqrt{r} e^{-r^{2\varepsilon}}. \quad (32)$$

Aus Symmetriegründen oder durch eine analoge Berechnung erhalten wir

$$A''_k = \Sigma'' \binom{k}{p} \binom{r-k}{l-p} \leq \frac{1}{2} c_3^2 2^r \sqrt{r} e^{-r^{2\epsilon}}. \quad (33)$$

Da $A_r = 0$ ist, so ist nach (29), (32) und (33)

$$\sum_{k=1}^r A_k \leq c_3^2 2^r r^{\frac{1}{2}} e^{-r^{2\epsilon}}.$$

Für $r \geq C_5$ ist also

$$\sum_{k=1}^r A_k < \frac{c_2}{2e^3 \sqrt{r}} 2^r. \quad (34)$$

Weiter ist nach (2) im Hilfsatz 1 für $r \geq C_6$

$$\binom{r}{l} \geq \frac{c_2}{\sqrt{r}} 2^r e^{-\frac{3l^2}{r}} \geq \frac{c_2}{e^3 \sqrt{r}} 2^r$$

und deshalb für $r \geq C_2 = \text{Max}(C_5, C_6)$ nach (28) und (34)

$$P = \binom{r}{l} - \sum_{k=1}^r A_k > \frac{c_2}{2e^3 \sqrt{r}} 2^r = \frac{C_3}{\sqrt{r}} 2^r.$$

2. Es sei $A > 0$. Wir wählen n_1 ganz so, daß es folgende Bedingungen erfüllt:

$$n_1 > \text{Max}(2, C_9, C_{12}, C_{15}, C_{16}, C_{17}, C_{18}), \quad (35)$$

$$C_{19} n_1^{-\beta} e^{n_1^\beta \log^\beta 2} > A C_{13}.$$

Dabei sind C_9, C_{12} usw. Konstanten, die man erst später bestimmen wird. Man setze

$$\varrho = \frac{1}{2^{n_1}}, \quad n_i = \left[n_1 \cdot i^{\frac{1}{1-2\alpha'}} \right] \text{ für } i = 1, 2, \dots$$

und $r_i = n_i - n_{i-1}$ für $i = 2, 3, \dots$. Dann ist

$$\frac{1}{2} n_1 i^{\frac{1}{1-2\alpha'}} \leq n_i \leq n_1 i^{\frac{1}{1-2\alpha'}} \text{ für } i = 1, 2, \dots \quad (36)$$

und weiter (nach dem Mittelwertsatz) für $i = 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} r_i &\leq n_1 i^{\frac{1}{1-2\alpha'}} - n_1 (i-1)^{\frac{1}{1-2\alpha'}} + 1 \leq \\ &\leq n_1 \frac{1}{1-2\alpha'} i^{\frac{2\alpha'}{1-2\alpha'}} + 1 \leq C_7 n_1 i^{\frac{2\alpha'}{1-2\alpha'}}. \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} r_i &\geq n_1 i^{\frac{1}{1-2\alpha'}} - n_1 (i-1)^{\frac{1}{1-2\alpha'}} - 1 \geq \\ &\geq n_1 \frac{1}{1-2\alpha'} (i-1)^{\frac{2\alpha'}{1-2\alpha'}} - 1 \geq C_8 n_1 i^{\frac{2\alpha'}{1-2\alpha'}}. \end{aligned} \quad (38)$$

Für $n_1 \geq C_9$ ist

$$r_i \geq \text{Max}(C_1, C_2) \quad (i = 2, 3, \dots). \quad (39)$$

Es sei $i \geq 1$, ganz. Jedes Intervall n_i -ter Ordnung v heißt ein Intervall i -ter Stufe, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

$$|p(v, n_i) - \frac{1}{2}n_i| \leq C_{10}n_1^{\alpha'} i^{\frac{\alpha'}{1-2\alpha'}}, \quad (40)$$

wo $C_{10} = \frac{1}{2}\sqrt{C_8}$ ist.

Wir wollen nun *normale Intervalle i -ter Stufe* durch vollständige Induktion definieren. Wir nennen jedes Intervall erster Stufe normal. Es sei $i \geq 1$ ganz. Setzen wir voraus, daß wir schon die normalen Intervalle i -ter Stufe definiert haben. Dann nennen wir diejenigen Intervalle $(i+1)$ -ter Stufe normal, die einem normalen Intervalle i -ter Stufe untergeordnet sind.

3. Es sei $i \geq 2$, ganz, w ein Intervall $(i-1)$ -ter Stufe. Mit $N(w)$ bezeichnet man die Anzahl der normalen Intervalle i -ter Stufe v , die in w enthalten sind. Dann ist (für $n_1 > C_{12}$)

$$N(w) \geq C_{11}n_1^{\alpha'-\frac{1}{2}} 2^{r_i} > 0. \quad (41)$$

Beweis. Ist p eine ganze Zahl mit

$$|p - \frac{1}{2}n_i| \leq C_{10}n_1^{\alpha'} i^{\frac{\alpha'}{1-2\alpha'}}, \quad (42)$$

dann sind alle zu w zugehörige untergeordnete Intervalle r_i -ter Ordnung v mit

$$p(v, r_i, w) = p - p(w, n_{i-1}) \text{ normal.} \quad (43)$$

Die Anzahl dieser Intervalle ist nach Hilfssatz 2 gleich

$$P(p) > \frac{C_3}{\sqrt{r_i}} 2^{r_i}. \quad (44)$$

Es ist nämlich nach (35) und (39) $r_i \geq C_2$ und nach (43), (42), (40), (38) wegen $C_{10} = \frac{1}{2}\sqrt{C_8}$:

$$\begin{aligned} |p - p(w, n_{i-1}) - \frac{1}{2}r_i| &\leq |p - \frac{1}{2}n_i| + |p(w, n_{i-1}) - \frac{1}{2}n_{i-1}| \leq \\ &\leq C_{10}n_1^{\alpha'} i^{\frac{\alpha'}{1-2\alpha'}} + C_{10}n_1^{\alpha'} (i-1)^{\frac{\alpha'}{1-2\alpha'}} \leq \sqrt{r_i}. \end{aligned}$$

Die Anzahl der Zahlen p , welche die Bedingung (42) erfüllen, ist mindestens gleich $2C_{10}n_1^{\alpha'} i^{\frac{\alpha'}{1-2\alpha'}} - 1$. Es ist also nach (44), (37) für $n_1 > C_{12}$

$$N(w) \geq C_{11}n_1^{\alpha'} i^{\frac{\alpha'}{1-2\alpha'}} \frac{1}{\sqrt{n_1}} i^{-\frac{\alpha'}{1-2\alpha'}} 2^{r_i}.$$

4. Für $i \geq 1$ ganz sei V_i die Menge aller normalen Intervalle

i-ter Stufe. Es sei

$$\mathfrak{N}_i = \sum_v^{V_i} v, \quad \mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 \cdot \mathfrak{N}_2 \cdot \mathfrak{N}_3 \cdot \dots$$

a) Es sei $x \in \mathfrak{N}$, $k \geq 0$ ganz. Dann ist x ein innerer Punkt eines Intervalls k -ter Ordnung.

Sonst könnte man $i \geq 2$ ganz so wählen, daß $n_{i-1} > k$ wäre. Da $x \in \mathfrak{N}$ ist, so gibt es in V_i ein Intervall v , das x enthält. v ist einem Intervalle w ($i-1$)-ter Stufe untergeordnet. x müßte wegen $n_{i-1} > k$ ein Endpunkt dieses Intervalls sein, was mit dem 1. Absatze wegen (35) und (39) im Widerspruch steht. Speziell ist also $0 < x < 1$.

b) Es gilt

$$\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}_a. \quad (45)$$

In der Tat sei n ganz, $n > n_1$. Dann gibt es $i \geq 2$ ganz so, daß $n_{i-1} < n \leq n_i$ ist. Es sei $x \in \mathfrak{N}$. Es gibt ein Intervall $v \in V_i$ so, daß x nach a) sein innerer Punkt ist. Es sei $w \in V_{i-1}$, $v \subset w$. Nach (9) ist

$$\begin{aligned} p(x, n) &= p(v, n - n_{i-1}, w) + p(x, n_{i-1}) = \\ &= p(v, n - n_{i-1}, w) + p(w, n_{i-1}) \end{aligned}$$

und also nach (25), (40), (24), (37)

$$\begin{aligned} |p(x, n) - \frac{1}{2}n| &\leq |p(v, n - n_{i-1}, w) - \frac{1}{2}(n - n_{i-1})| + \\ &+ |p(w, n_{i-1}) - \frac{1}{2}n_{i-1}| \leq r_i^{\frac{1}{2} + \varepsilon} + 1 + C_{10} n_1^{\alpha'} i^{\frac{\alpha'}{1-2\alpha'}} \leq \\ &\leq C_7^{\frac{1}{2} + \varepsilon} n_1^{\frac{1}{2} + \varepsilon} i^{\frac{\alpha'}{1-2\alpha'}} + C_{10} n_1^{\alpha'} i^{\frac{\alpha'}{1-2\alpha'}} + 1 \leq \\ &\leq K i^{\frac{\alpha}{1-2\alpha'}} \leq K'(i-1)^{\frac{\alpha}{1-2\alpha'}} \leq K'' n_{i-1}^{\alpha} \leq K'' n^{\alpha}, \end{aligned}$$

wo K, K', K'' nur von $\alpha, \alpha', \beta, \varepsilon, n_1$ abhängig sind. Daraus folgt $p(x, n) - \frac{1}{2}n = O(n^{\alpha})$ also $x \in \mathfrak{M}_a$.

5. \mathfrak{N} ist eine abgeschlossene Menge, denn sie ist ein Durchschnitt abgeschlossener Mengen.

Es sei $i \geq 1$ ganz und w ein normales Intervall i -ter Stufe. Dann ist der Durchschnitt $w \cdot \mathfrak{N}$ nicht leer.

Nach dem Absatze 3 ist nämlich $N(w) > 0$ und es gibt daher ein normales Intervall ($i+1$)-ter Stufe w_1 , welches in w enthalten ist. Ähnlich enthält auch w_1 ein normales Intervall ($i+2$)-ter Stufe w_2 usw. Die Intervalle $w \supset w_1 \supset w_2 \supset \dots$ sind abgeschlossen und der Durchschnitt $w \cdot w_1 \cdot w_2 \cdot \dots$ ist also nicht leer. Er enthält also mindestens einen Punkt x . Es ist nun aber $w_k \subset \mathfrak{N}_{i+k}$ für jedes ganze $k \geq 1$ und $w \subset \mathfrak{N}_i \subset \mathfrak{N}_{i-1} \subset \dots$

6. Man überdecke nun \mathfrak{M}_a mit einer höchstens abzählbaren Menge offener Intervalle S , wo die Länge eines jeden Intervalls

kleiner als ϱ ist. Die Menge S überdeckt nach dem Absatze 4b auch die Menge \mathfrak{N} . \mathfrak{N} ist nun beschränkt und abgeschlossen (siehe Absatz 5); daher ist es möglich aus S ein endliches System S' offener Intervalle herauszunehmen so, daß S' auch \mathfrak{N} überdeckt. Man füge jedem Intervalle aus S' seine Endpunkte hinzu. So erhält man ein endliches System S'' abgeschlossener Intervalle.

Es ist dann ($\varrho < 1$)

$$\sum_v^{S''} f(|v|, \beta) \leq \sum_v^S f(|v|, \beta). \quad (46)$$

Es sei $w \in S''$, $w' = w \cdot \langle 0, 1 \rangle$. Ist $|w'| > 0$, so sei $i \geq 2$ die kleinste ganze Zahl, für welche das Intervall w' mindestens ein Intervall n_i -ter Ordnung enthält (w' enthält wegen $\varrho = \frac{1}{2^{n_i}}$ also kein Intervall n_{i-1} -ter Ordnung). Es sei $Q(w)$ die Menge aller Intervalle n_i -ter Ordnung, die einen nicht leeren Durchschnitt mit w' haben. Die Anzahl der Intervalle in $Q(w)$ ist höchstens gleich $2^{n_i} |w'| + 2 \leq 3 |w'| \cdot 2^{n_i}$, denn die Länge jedes Intervalls n_i -ter Ordnung ist gleich $\frac{1}{2^{n_i}}$.

Da $|w'| \leq 2 \cdot \frac{1}{2^{n_{i-1}}}$, $\beta < 1$ ist, so ist

$$\begin{aligned} \sum_v^{Q(w)} f(|v|, \beta) &\leq 3 |w'| \cdot 2^{n_i} |v| e^{(-\log|v|)\beta} \leq 3 |w'| e^{(n_i \log 2)\beta} \leq \\ &\leq 3 |w'| e^{(-\log|w'|)\beta} e^{(n_i \log 2)\beta - (-\log|w'|)\beta} \leq \\ &\leq 3 |w'| e^{(-\log|w'|)\beta} \cdot e^{(n_i^\beta - n_{i-1}^\beta) \log^{\beta} 2 + (n_{i-1}^\beta - (n_{i-1}-1)^\beta) \log^{\beta} 2} \leq \\ &\leq C_{13} f(|w|, \beta) e^{A_i}. \end{aligned} \quad (47)$$

Der Kürze halber haben wir $A_i = (n_i^\beta - n_{i-1}^\beta) \log^{\beta} 2$ für $i = 2, 3, \dots$ gesetzt. Wir ersetzen in S'' jedes Intervall w durch das System $Q(w)$. Die Intervalle w , für welche $|w'| = 0$ ist, lassen wir weg. Somit erhält man ein endliches Intervallsystem S''' mit folgenden Eigenschaften: Zu jedem Intervall v aus S''' gibt es eine ganze Zahl $i \geq 2$ so, daß das Intervall v n_i -ter Ordnung ist. S''' überdeckt \mathfrak{N} . Mit S''_i bezeichnet man die Menge aller Intervalle n_i -ter Ordnung aus S''' .

Es sei $k \geq 2$ die größte ganze Zahl, für welche in S''' Intervalle n_k -ter Ordnung vorkommen. Dann ist nach (46) und (47)

$$\sum_{i=2}^k e^{-A_i} \sum_v^{S''_i} f(|v|, \beta) \leq C_{13} \sum_v^S f(|v|, \beta). \quad (48)$$

7. Man bezeichne mit U Systeme von (endlich vielen) Intervallen mit folgenden Eigenschaften:

- a) Jedes Intervall des Systemes ist n_i -ter Ordnung mit $k \geq i \geq 1$;
 b) Das System überdeckt \mathfrak{N} .

Die Anzahl der Systeme U ist endlich und es gibt daher ein solches System W , für welches der Ausdruck

$$\Phi(U) = \sum_{i=1}^k e^{-A_i} \sum_v^{U_i} f(|v|, \beta) \quad (49)$$

den Minimalwert annimmt. Dabei bedeutet U_i die Menge der Intervalle n_i -ter Ordnung, die in U vorkommen und außerdem haben wir $e^{A_i} = n_1^{i\beta}$ gesetzt.

α) Zwei Intervalle v, \bar{v} aus W haben höchstens einen Punkt gemeinsam. Denn sonst wäre bei geeigneter Bezeichnung $v \subset \bar{v}$. Dann wäre offenbar $W - \{v\}$ auch ein U -System und für dieses wäre $\Phi(W - \{v\}) < \Phi(W)$, was mit der Voraussetzung in Widerspruch steht.

β) Es sei $v \in W_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$). Wegen der Minimaleigenschaft der Menge W gibt es in v mindestens ein Punkt $x \in \mathfrak{N}$. Da die Endpunkte von v nach dem Absatze 4a nicht in \mathfrak{N} liegen, so ist x ein innerer Punkt in v . Daraus folgt $v \in V_i$. Das Intervall v ist also ein normales Intervall i -ter Stufe.

γ) Nehmen wir an, daß $k \geq 2$ ist. Es gibt in W_k ein Intervall v . Dieses ist nach β) normal und k -ter Stufe. Es ist in einem normalen Intervall w ($k-1$ -ter Stufe) enthalten. Nach α) ist nicht $w \in W$. Mit $R(w)$ bezeichnet man die Menge aller normalen Intervalle k -ter Stufe, die in w enthalten sind. Ihre Anzahl hat man in Absatz 3 mit $N(w)$ bezeichnet. Jedes Intervall \bar{v} aus $R(w)$ enthält nach Absatz 5 mindestens einen Punkt x , der in \mathfrak{N} liegt. Dieser Punkt muß nach dem Absatze 4a ein innerer Punkt eines Intervalls \bar{w} aus W sein. Wenn w von einer niedrigeren Stufe als \bar{v} wäre, so wäre $w \subset \bar{w}$ und also auch $v \subset \bar{w}$, was nach α) unmöglich ist. Das Intervall \bar{w} ist also k -ter Stufe und deshalb $\bar{w} = v$. Daraus folgt $R(w) \subset W$. Das System $W_0 = W - R(w) + \{w\}$ ist offenbar auch ein U -System und nach (49), (41) ist

$$\begin{aligned} \Phi(W_0) &= \Phi(W) - e^{-A_k} N(w) \frac{1}{2^{n_k}} e^{(n_k \log 2)^\beta} + \\ &\quad + e^{-A_{k-1}} \frac{1}{2^{n_{k-1}}} e^{(n_{k-1} \log 2)^\beta} \leq \\ &\leq \Phi(W) - C_{11} n_1^{\alpha-1} \frac{1}{2^{n_{k-1}}} e^{(n_{k-1} \log 2)^\beta} + e^{-A_{k-1}} \frac{1}{2^{n_{k-1}}} e^{(n_{k-1} \log 2)^\beta}, \end{aligned}$$

also

$$\Phi(W_0) \leq \Phi(W) - \frac{n_1^{\alpha'-\frac{1}{2}}}{2^{n_{k-1}}} e^{(n_{k-1} \log 2)^\beta} (C_{11} - n_1^{\frac{1}{2}-\alpha'} e^{-A_{k-1}}). \quad (50)$$

Nun ist für $k \geq 3$ nach dem Mittelwertsatze und nach (38), (36), (24)

$$\begin{aligned} A_{k-1} &= (n^{\beta_{k-1}} - n^{\beta_{k-2}}) \log^\beta 2 \geq \beta r_{k-1} n_{k-1}^{\beta-1} \log^\beta 2 \geq \\ &\geq \beta C_8 n_1 (k-1)^{\frac{2\alpha'}{1-2\alpha'}} \cdot n_1^{\beta-1} (k-1)^{\frac{\beta-1}{1-2\alpha'}} \log^\beta 2 \geq C_{14} n_1^\beta. \end{aligned}$$

Für $n_1 > C_{15}$, $k \geq 3$ ist also

$$C_{11} - n_1^{\frac{1}{2}-\alpha'} e^{-A_{k-1}} > 0. \quad (51)$$

Für $k = 2$, $n_1 > C_{16}$ ist

$$C_{11} - n_1^{\frac{1}{2}-\alpha'} e^{-A_1} = C_{11} - n_1^{\frac{1}{2}(1-2\alpha'-\beta)} > 0 \quad (52)$$

und also nach (35), (51), (52) und (50) $\Phi(W_0) < \Phi(W)$ gegen die Voraussetzung. Es ist also notwendig $k = 1$ und $W = V_1$.

Da nach dem Absatze 6. S''' auch ein U -System ist, so ist nach (48), (49)

$$n_1^{-\frac{1}{2}\beta} \sum_v^{V_1} |v| e^{(-\log|v|)^\beta} \leq \sum_{i=2}^k e^{-A_i} \sum_v^{S_i'''} f(|v|, \beta) \leq C_{13} \sum_v^S f(|v|, \beta). \quad (53)$$

8. Es sei N die Anzahl der Intervalle erster Stufe. Dann ist $N = \sum_l \binom{n_1}{l}$, wo man in \sum über alle ganze l mit $|l - \frac{1}{2}n_1| \leq \leq C_{10} n_1^{\alpha'}$ summiert. Für $n_1 > C_{17}$ ist $C_{10} n_1^{\alpha'} < \sqrt{n_1} < \frac{1}{4}n_1$ und also $|l - \frac{1}{2}n_1| \leq \sqrt{n_1} < \frac{1}{4}n_1$. Nach (2) im Hilfssatze 1 ist nun $\binom{n_1}{l} \geq c_2 \frac{2^{n_1}}{\sqrt{n_1}} e^{-3}$; also ist für $n_1 > C_{18}$, $N \geq C_{19} n_1^{\alpha'-\frac{1}{2}} 2^{n_1}$. Deshalb ist nach (24), (35)

$$n_1^{-\frac{1}{2}\beta} \sum_v^{V_1} f(|v|, \beta) \geq C_{19} n_1^{-\beta} e^{n_1 \beta \log^2 2} > A C_{13}. \quad (54)$$

Aus (53) und (54) folgt dann $\sum_v^S f(|v|, \beta) > A$. Das gilt für alle mögliche Überdeckungen S , die aus höchstens abzählbarvielen offenen Intervallen, die kleiner als ϱ sind, bestehen. Daraus folgt

$$A \leq L_\varrho(\mathfrak{M}_\alpha, f(x, \beta)) \leq L(\mathfrak{M}_\alpha, f(x, \beta)).$$

Da A beliebig groß gewählt werden durfte, so ist $L(\mathfrak{M}_\alpha, f(x, \beta)) = \infty$.

*