ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY A FYSIKY

ČÁST MATEMATICKÁ

Sur les matrices orthogonales symétriques.

B. Bydžovský, Praha.

(Reçu le 10 avril 1936.)

Les matrices orthogonales, qui sont en même temps symétriques, ne peuvent pas être exprimées par les formules connues de Cayley, puisque ces formules supposent que l'équation caractéristique de la matrice orthogonale ne possède pas de racine égale à l'unité, condition qui n'est pas remplie dans le cas de symétrie. Mais on peut parvenir à exprimer toutes ces matrices par une autre voie, à l'aide du théorème que je vais démontrer et que je n'ai pas trouvé dans les travaux des auteurs qui se sont occupés de ces matrices spéciales.[1])

1. Soit C une matrice orthogonale symétrique. Si C' désigne la matrice transposée, on a, d'une part $C' = C^{-1}$, d'autre part $C = C'$, donc $C = C^{-1}$, $C^2 = J$, J désignant la matrice unité. Comme $(C - J)(C + J) = C^2 - J = 0$, p étant le rang de $(C + J)$, celui de $(C - J)$ ne peut pas surpasser $n - p$. En effet, le système $(C - J)x = 0$ est vérifié par toute colonne de la matrice $(C + J)$; comme p de ces colonnes sont linéairement indépendantes, le système considéré a au moins p solutions linéairement indépendantes et son rang est au plus égal à $n - p$.

On suppose dans la suite que C n'est pas la matrice unité. Donc, $n > p$. Il suit alors de ce qui précède que l'équation caractéristique

$$| C + xJ | = 0$$

possède aussi bien la racine $+1$ que la racine -1. Comme le rang de $C + J$ est p, la multiplicité de la racine $+1$ n'est pas inférieur à $n - p$, et il est évident, par un raisonnement analogue, que la multiplicité de la racine -1 n'est pas inférieur à p. Donc, ces multiplicités sont précisément égales à ces deux nombres et le rang de $(C - J)$ est, par conséquent, précisément égal à $n - p$. Il en suit

[1]) Frobenius, Crelles J. **84** (1878), p. 26; Hoffmann, Archiv, II. série t. 8 (1890) p. 225; Prym. Gött. Abh. t. **38**, (1892) p. 3; L. Castoldi: Sul numero degli elementi arbitrari etc. Rend. Ist. Lomb. 1934.

que l'équation caractéristique de la matrice considérée est de la forme

$$(x + 1)^p (x - 1)^{n-p} = 0.$$

2. Déterminons les diviseurs élémentaires de la matrice

$$(C + xJ).$$

Les mineurs d'ordre $(n - 1)$ de cette matrice ont l'unité positive pour leur racine au moins $(n - p - 1)$-uple, puisque le rang des mineurs de cet ordre de la matrice $(C + J)$ ne peut das surpasser le nombre p. On conclut de la même manière que ces mineurs ont l'unité négative pour leur racine au moins $(p - 1)$-uple. Donc, tous ces mineurs ont le diviseur commun

$$D_{n-1} = (x + 1)^{p-1} (x - 1)^{n-p-1} \tag{1}$$

et c'est le plus grand commun diviseur, puisque tout autre facteur linéaire commun aux mineurs de l'ordre $(n - 1)$ — ce ne pourrait être que le facteur $(x + 1)$ ou $(x - 1)$ — augmenterait la multiplicité des racines de l'équation caractéristique, ce qui est exclu.

On démontre d'une manière analogue que le plus grand commun diviseur des mineurs de l'ordre $(n - 2)$ est

$$D_{n-2} = (x + 1)^{p-2} (x - 1)^{n-p-2}$$

et ainsi de suite. Cette suite des plus grands communs diviseurs aboutit:

a) à $(x - 1)$ pour $p < n - p$,
b) à $(x + 1)$ pour $p > n - p$,
c) à $(x^2 - 1)$ pour $p = n - p$,

et les plus grands communs diviseurs qui suivent sont tous égaux à l'unité.

Or, pour la matrice diagonale dont l'équation caractéristique est la même, à savoir

$$(x + 1)^p (x - 1)^{n-p} = 0,$$

les D_i sont évidemment les mêmes, et par conséquent, les diviseurs élémentaires sont les mêmes pour les deux matrices. Énonçons le résultat acquis:

La matrice $(C + xJ)$, où C est une matrice orthogonale symétrique telle que le rang de $(C + J)$ est p, a les mêmes diviseurs élémentaires que la matrice $(J_p + xJ)$, J_p désignant une matrice qu'on obtient en changeant les signes des $n - p$ derniers éléments principaux de la matrice unité.

3. On sait que deux formes quadratiques — ou bien, ce qui revient au même — deux matrices symétriques sont l'une la transformée de l'autre par une transformation orthogonale à la condition — nécessaire et suffisante — que leurs matrices caractéristi-

ques possèdent les mêmes diviseurs élémentaires. Les matrices C, J_p sont symétriques et satisfont à cette condition; donc, il existe une matrice orthogonale A telle que

$$C = A'J_pA.$$

En éxécutant cette multiplication et en tenant compte de l'orthogonalité de A, on obtient

$$C = A'J_pA =$$

$$\left(\begin{array}{l} 1 - 2a^2_{p+1,1} - \ldots - 2a^2_{n1}, - 2a_{p+1,1}a_{p+1,2} - \ldots - 2a_{n1}a_{n2}, \ldots, - 2a_{p+1,1}a_{p+1,n} - \ldots \\ \hfill - 2a_{n1}a_{nn} \\ - 2a_{p+1,1}a_{p+1,2} - \ldots, 1 - 2a^2_{p+1,2} - \ldots - 2a^2_{n2}, \ldots, - 2a_{p+1,2}a_{p+1,n} - \ldots - 2a_{n2}a_{nn} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ - 2a_{p+1,1}a_{p+1,n} - \ldots, - 2a_{p+1,2}a_{p+1,n} - \ldots - 2a_{n2}a_{nn}, \ldots, 1 - 2a^2_{p+1,n} - \ldots - 2a^2_{nn} \end{array}\right) \quad (2)$$

ce qui est l'expression générale d'une matrice C orthogonale symétrique pour laquelle le rang de $(C + J)$ est égal à p, a_{ik} étant les éléments d'une matrice orthogonale convenablement choisie.[2]) On voit facilement qu'inversement toute matrice de cette forme, les a_{ik} étant les éléments d'une matrice orthogonale quelconque, est orthogonale symétrique.

4. L'expression (2) peut être remplacée par une autre, donnant en même temps une décomposition de la matrice C en des matrices plus simples. On se rend facilement compte que

$$\left(\begin{array}{llll} 1 - 2a_1^2 & - 2a_1a_2, & \ldots & - 2a_1a_n \\ - 2a_1a_2 & 1 - 2a_2^2, & \ldots & - 2a_2a_n \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ - 2a_1a_n & - 2a_2a_n, & \ldots & 1 - 2a_n^2 \end{array}\right) = J - 2aa',$$

en désignant, de la manière usuelle, par a le vecteur contravariant aux composantes $a_1, \ldots, a_n$, par a' le vecteur covariant aux mêmes composantes. Si $a, b, c, \ldots$ sont des vecteurs tels que

$$a'b = a'c = b'c = \ldots = 0,$$

on a, de plus

$$(J - 2aa')(J - 2bb') = J - 2aa' - 2bb',$$
$$(J - 2aa')(J - 2bb')(J - 2cc') = J - 2aa' - 2bb' - 2cc'$$

et ainsi de suite. Ceci fait voir que l'expression (2) peut être remplacée par la suivante:

$$C = J - 2a_{p+1}a'_{p+1} - \ldots - 2a_na'_n =$$
$$= (J - 2a_{p+1}a'_{p+1})(J - 2a_{p+2}a'_{p+2}) \ldots (J - 2a_na'_n), \quad (3)$$

$a_{p+1}, \ldots, a_n$ étant les colonnes d'une matrice orthogonale. Ceci donne lieu au théorème suivant:

[2]) J'ai simplifié la démonstration de ce résultat, que j'avais obtenu d'abord par une voie plus compliquée, grâce à une suggestion de mon collègue, M. Petr.

Toute matrice orthogonale symétrique C, pour laquelle $(C + J)$ a le rang p, est le produit de $(n - p)$ matrices orthogonales symétriques de la forme

$$J - 2aa',$$

les a étant les colonnes d'une même matrice orthogonale.

Il est évident que l'inverse a encore lieu.

5. Si $a_1, \ldots, a_p$ sont les premières p colonnes de la matrice orthogonale A — voir formule (2) — on a

$$a_1a'_1 + \ldots + a_na'_n = J.$$

En effet, $a_r = A' \, . \, i_r$, en désignant par i_r la matrice dont tous les éléments sont nuls, sauf le r-ième élément principal, égal à l'unité. On a de même $a'_r = i_r \, . \, A$. Donc $\Sigma a_r a'_r = A' \Sigma i_r A = A'JA = J$. Par conséquent

$$(J - 2a_1a'_1) \ldots (J - 2a_pa'_p)\,(J - 2a_{p+1}a'_{p+1}) \ldots (J - 2a_na'_n) = \\ = J - 2\,(a_1a'_1 + \ldots + a_na'_n) = J - 2J = -J.$$

Il suit de cette équation que

$$(J - 2a_1a'_1) \ldots (J - 2a_pa'_p)\, C = -J.$$

Mais, comme $J - 2a_ia'_i$ est évidemment une matrice orthogonale symétrique, elle est égale à sa matrice inverse et la dernière relation donne

$$C = -(J - 2a_1a'_1) \ldots (J - 2a_pa'_p), \qquad (4)[3]$$

d'où l'on voit que la matrice en question est égale aussi — au signe près — au produit de p matrices symétriques orthogonales de la forme

$$J - 2aa'$$

les a étant les colonnes d'une même matrice orthogonale.

6. On peut se renseigner de plus près sur les composantes d'une matrice C données par les formules (3), (4).

Puisque

$$(C - J)\,(C + J) = 0$$

toutes les colonnes de $C + J$ sont des solutions du système

$$(C - J)\, x = 0. \qquad (5)$$

Mais comme le rang de ce système est égal à $n - p$ et celui de $(C + J)$ est égal à p, toute solution de (5) est une combinaison linéaire des colonnes de la matrice $(C + J)$. D'autre part, la formule (3) donne

$$C - J = -2a_{p+1}a'_{p+1} - \ldots - 2a_na'_n,$$

d'où il suit

$$(C - J)\, a_i = 0,$$

[3]) Ceci suit aussi directement de la formule (2).

pour $i = 1, \ldots, p$. Donc, $a_1, \ldots, a_p$ sont des solutions du système (5), remplissant, de plus, les conditions d'orthogonalité, et, par suite, des combinaisons linéaires des colonnes de $(C + J)$. Ces combinaisons sont linéairement indépendantes, puisque ce sont des éléments d'une matrice orthogonale, dont le rang est toujours n.

Inversement, tout système $a_1, \ldots, a_p$ jouissant de ces propriétés, peut figurer dans la formule (4). En effet, $a_1, \ldots, a_p$ étant un système de solutions du système (5), remplissant les conditions d'orthogonalité, considérons le système

$$(C - J - 2a_1a'_1 - \ldots - 2a_pa'_p)\, x = 0. \tag{6}$$

Soit z une solution de ce système, on a

$$(C - J)\, z - 2\,(a_1a'_1 + \ldots + a_pa'_p)\, z = 0. \tag{7}$$

Multiplions cette équation par a'_i du côté gauche. Comme $(C - J)\, a_i = 0$, on a $a'_i\,(C - J) = 0$ et, il suit de (7):

$$a'_i\,(a_1a'_1 + \ldots + a_pa'_p)\, z = 0.$$

Mais comme $a'_i \,.\, a_1 = \ldots = a'_i \,.\, a_p = 0$, sauf $a'_i \,.\, a_i \neq 0$, on a $a'_i \,.\, a_ia'_i \,.\, z = 0$, d'où l'on conclut aisément $a'_i \,.\, z = 0$ pour $i = 1, \ldots, p$. Donc, l'équation (7) donne

$$(C - J)\, z = 0. \tag{8}$$

Ceci fait voir que toute solution du système (6) est, en même temps, une solution du système (5). Toute solution de ce dernier système est une combinaison linéaire des $a_1, \ldots, a_p$, donc

$$z = k_1a_1 + \ldots + k_pa_p.$$

On a, par conséquent,

$$(C - J - 2a_1a'_1 - \ldots - 2a_pa'_p)\,(k_1a_1 + \ldots + k_pa_p) = 0,$$

d'où il suit

$$(a_1a'_1 + \ldots + a_pa'_p)\,(k_1a_1 + \ldots + k_pa_p) = 0. \tag{9}$$

Dans ce produit les termes

$$a_ra'_r \,.\, k_sa_s = k_sa_ra'_r \,.\, a_s = 0 \text{ pour } r \neq s,$$

puisque

$$a'_r \,.\, a_s = 0 \text{ pour } r \neq s;$$

le terme

$$a_ia'_i \,.\, k_ia_i = k_ia_ia'_i \,.\, a_i = k_ia_i,$$

puisque $a'_i \,.\, a_i$ est une matrice i_1 (v. num. 5). L'équation (9) donne le résultat

$$k_1a_1 + \ldots + k_pa_p = 0,$$

qui signifie que le système (6) n'a que des solutions nulles. Donc, son rang est égal à n.