

Werk

Label: Periodical issue

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311028X_0065|log75

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

ROČNÍK 65.

SEŠIT 4.

ČASOPIS

PRO PĚSTOVÁNÍ

MATEMATIKY A FYSIKY

Redigují

VOJTĚCH JARNÍK a FRANTIŠEK ZÁVIŠKA

za součinnosti

B. BYDŽOVSKÉHO, E. ČECHA, V. DOLEJŠKA,
J. FRIEDRICH, V. HLAVATÉHO, B. HOSTINSKÉHO,
M. KÖSSLERA, K. RYCHLÍKA, M. A. VALOUCHA, F. VYČICHLA,
A. WANGLERA, A. ŽÁČKA.

VYDÁVÁ VLASTNÍM NÁKLADEM

JEDNOTA ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

ZA PODPORY MINISTERSTVA ŠKOLSTVÍ A NÁRODNÍ OSVĚTY.



V PRAZE 1936.

Ročně 4 sešity.

Předplatné (pro nečleny) 120 Kč.

Journal Tchécoslovaque de Mathématiques et de Physique.

Éditeur: Jednota čsl. matematiků a fysiků, Praha II-609, Tchécoslovaquie.
Abonnement pour un an 120 Kč. Chèques postaux: Praha 13103.

Année 65

Fascicule 4

935—36

Obsah. — Sommaire.

ČÁST VĚDECKÁ.

Část matematická. — Travaux mathématiques.

- Bohumil Bydžovský, Praha II, U Karlova 3: Sur les matrices orthogonales symétriques — O souměrných maticích ortogonálních 189
Vladimír Knichal, Praha II, U Karlova 3: Dyadische Entwicklungen und Hausdorffsches Mass — Dyadické rozvoje a Hausdorffova míra 195
Josef Klíma, Brno, Veverí 95: O ploše Möbiova listu — Sur la surface de la feuille de Möbius 211
Ladislav Seifert, Brno, Kotlářská 2: Příspěvek k deskriptivní geometrii Eudoxovy hypopédy — Remarque à la géométrie descriptive de l'hyppopéde 217

Část fyzikální. — Travaux de physique.

- Swami Jnanananda, Praha II, Preslova 1: An application of the method wherein the φ - and κ -methods are combined for the determination of the grating constant. Part I 226
Arnošt Dittrich, Stará Ďala: Šířka Luny v klínopisně tabulce Kidinnu-ově — La latitude de la Lune sur la table cunéiforme de Kidinnu 245

VYUČOVÁNÍ, ZPRÁVY, LITERATURA.

Články a referáty. — Articles et rapports.

- Vojtěch Tuček, Brno: Z geometrie trojúhelníka — Géométrie du triangle 129
Rudolf Brdička, Praha: Isotopy — Les isotopes 136

Vyučování. — Questions didactiques.

- Jaroslav Friedrich, Praha: K otázce orientování přímky v analytické geometrii — Sur la question de l'orientation de la ligne droite en géométrie analytique 156
Václav Skalický, Pardubice: Matematika a studium speciální mapy — Les mathématiques et l'étude de la carte géographique „spéciale“ 160
Jaroslav Friedrich, Praha: K metodice složitého úrokování — Au sujet des méthodes de calcul des intérêts composés 169
Josef Šoler, České Budějovice: Edisonův efekt — L'effet d'Edison 174

Zprávy a drobnosti. — Communications.

- Dr. Antonín Pleskot †. — Osobní zprávy. — Jubilé de M. Marcel Brillouin. — Mikrochemický důkaz helia vzniklého rozbitím atomu. — Záporné zbytky v t. zv. postupném dělení (Eukleidově algoritmu). — Zpráva o I. sjezdu pro středoškolskou pedagogiku a didaktiku (obor přírodovědný) 177

Literatura. — Analyses.

- Recenze vědeckých publikací 184
Recenze didaktických publikací 193
Původní publikace československých matematiků a fysiků 193
Spolkový věstník V 45

Tento sešit vyšel dne 5. června 1936.

ČÁST MATEMATICKÁ

Sur les matrices orthogonales symétriques.

B. Bydžovský, Praha.

(Reçu le 10 avril 1936.)

Les matrices orthogonales, qui sont en même temps symétriques, ne peuvent pas être exprimées par les formules connues de Cayley, puisque ces formules supposent que l'équation caractéristique de la matrice orthogonale ne possède pas de racine égale à l'unité, condition qui n'est pas remplie dans le cas de symétrie. Mais on peut parvenir à exprimer toutes ces matrices par une autre voie, à l'aide du théorème que je vais démontrer et que je n'ai pas trouvé dans les travaux des auteurs qui se sont occupés de ces matrices spéciales.¹⁾

1. Soit C une matrice orthogonale symétrique. Si C' désigne la matrice transposée, on a, d'une part $C' = C^{-1}$, d'autre part $C = C'$, donc $C = C^{-1}$, $C^2 = J$, J désignant la matrice unité. Comme $(C - J)(C + J) = C^2 - J = 0$, p étant le rang de $(C + J)$, celui de $(C - J)$ ne peut pas dépasser $n - p$. En effet, le système $(C - J)x = 0$ est vérifié par toute colonne de la matrice $(C + J)$; comme p de ces colonnes sont linéairement indépendantes, le système considéré a au moins p solutions linéairement indépendantes et son rang est au plus égal à $n - p$.

On suppose dans la suite que C n'est pas la matrice unité. Donc, $n > p$. Il suit alors de ce qui précède que l'équation caractéristique

$$|C + xJ| = 0$$

possède aussi bien la racine $+1$ que la racine -1 . Comme le rang de $C + J$ est p , la multiplicité de la racine $+1$ n'est pas inférieure à $n - p$, et il est évident, par un raisonnement analogue, que la multiplicité de la racine -1 n'est pas inférieure à p . Donc, ces multiplicités sont précisément égales à ces deux nombres et le rang de $(C - J)$ est, par conséquent, précisément égal à $n - p$. Il en suit

¹⁾ Frobenius, Crelles J. 84 (1878), p. 26; Hoffmann, Archiv, II. série t. 8 (1890) p. 225; Prym, Gött. Abh. t. 33, (1892) p. 3; L. Castoldi: Sul numero degli elementi arbitrari etc. Rend. Ist. Lomb. 1934.

que l'équation caractéristique de la matrice considérée est de la forme

$$(x + 1)^p (x - 1)^{n-p} = 0.$$

2. Déterminons les diviseurs élémentaires de la matrice

$$(C + xJ).$$

Les mineurs d'ordre $(n - 1)$ de cette matrice ont l'unité positive pour leur racine au moins $(n - p - 1)$ -uple, puisque le rang des mineurs de cet ordre de la matrice $(C + J)$ ne peut pas dépasser le nombre p . On conclut de la même manière que ces mineurs ont l'unité négative pour leur racine au moins $(p - 1)$ -uple. Donc, tous ces mineurs ont le diviseur commun

$$D_{n-1} = (x + 1)^{p-1} (x - 1)^{n-p-1} \quad (1)$$

et c'est le plus grand commun diviseur, puisque tout autre facteur linéaire commun aux mineurs de l'ordre $(n - 1)$ — ce ne pourrait être que le facteur $(x + 1)$ ou $(x - 1)$ — augmenterait la multiplicité des racines de l'équation caractéristique, ce qui est exclu.

On démontre d'une manière analogue que le plus grand commun diviseur des mineurs de l'ordre $(n - 2)$ est

$$D_{n-2} = (x + 1)^{p-2} (x - 1)^{n-p-2}$$

et ainsi de suite. Cette suite des plus grands communs diviseurs aboutit:

- a) à $(x - 1)$ pour $p < n - p$,
- b) à $(x + 1)$ pour $p > n - p$,
- c) à $(x^2 - 1)$ pour $p = n - p$,

et les plus grands communs diviseurs qui suivent sont tous égaux à l'unité.

Or, pour la matrice diagonale dont l'équation caractéristique est la même, à savoir

$$(x + 1)^p (x - 1)^{n-p} = 0,$$

les D_i sont évidemment les mêmes, et par conséquent, les diviseurs élémentaires sont les mêmes pour les deux matrices. Énonçons le résultat acquis:

La matrice $(C + xJ)$, où C est une matrice orthogonale symétrique telle que le rang de $(C + J)$ est p , a les mêmes diviseurs élémentaires que la matrice $(J_p + xJ)$, J_p désignant une matrice qu'on obtient en changeant les signes des $n - p$ derniers éléments principaux de la matrice unité.

3. On sait que deux formes quadratiques — ou bien, ce qui revient au même — deux matrices symétriques sont l'une la transformée de l'autre par une transformation orthogonale à la condition — nécessaire et suffisante — que leurs matrices caractéristi-

Toute matrice orthogonale symétrique C , pour laquelle $(C + J)$ a le rang p , est le produit de $(n - p)$ matrices orthogonales symétriques de la forme

$$J - 2aa',$$

les a étant les colonnes d'une même matrice orthogonale.

Il est évident que l'inverse a encore lieu.

5. Si $a_1, \dots, a_p$ sont les premières p colonnes de la matrice orthogonale A — voir formule (2) — on a

$$a_1 a'_1 + \dots + a_n a'_n = J.$$

En effet, $a_r = A' \cdot i_r$, en désignant par i_r la matrice dont tous les éléments sont nuls, sauf le r -ième élément principal, égal à l'unité. On a de même $a'_r = i_r \cdot A$. Donc $\sum a_r a'_r = A' \sum i_r A = A' J A = J$. Par conséquent

$$(J - 2a_1 a'_1) \dots (J - 2a_p a'_p) (J - 2a_{p+1} a'_{p+1}) \dots (J - 2a_n a'_n) = J - 2(a_1 a'_1 + \dots + a_n a'_n) = J - 2J = -J.$$

Il suit de cette équation que

$$(J - 2a_1 a'_1) \dots (J - 2a_p a'_p) C = -J.$$

Mais, comme $J - 2a_i a'_i$ est évidemment une matrice orthogonale symétrique, elle est égale à sa matrice inverse et la dernière relation donne

$$C = -(J - 2a_1 a'_1) \dots (J - 2a_p a'_p), \quad (4)^3$$

d'où l'on voit que la matrice en question est égale aussi — au signe près — au produit de p matrices symétriques orthogonales de la forme

$$J - 2aa'$$

les a étant les colonnes d'une même matrice orthogonale.

6. On peut se renseigner de plus près sur les composantes d'une matrice C données par les formules (3), (4).

Puisque

$$(C - J)(C + J) = 0$$

toutes les colonnes de $C + J$ sont des solutions du système

$$(C - J)x = 0. \quad (5)$$

Mais comme le rang de ce système est égal à $n - p$ et celui de $(C + J)$ est égal à p , toute solution de (5) est une combinaison linéaire des colonnes de la matrice $(C + J)$. D'autre part, la formule (3) donne

$$C - J = -2a_{p+1} a'_{p+1} - \dots - 2a_n a'_n,$$

d'où il suit

$$(C - J)a_i = 0,$$

³) Ceci suit aussi directement de la formule (2).

pour $i = 1, \dots, p$. Donc, $a_1, \dots, a_p$ sont des solutions du système (5), remplissant, de plus, les conditions d'orthogonalité, et, par suite, des combinaisons linéaires des colonnes de $(C + J)$. Ces combinaisons sont linéairement indépendantes, puisque ce sont des éléments d'une matrice orthogonale, dont le rang est toujours n .

Inversement, tout système $a_1, \dots, a_p$ jouissant de ces propriétés, peut figurer dans la formule (4). En effet, $a_1, \dots, a_p$ étant un système de solutions du système (5), remplissant les conditions d'orthogonalité, considérons le système

$$(C - J - 2a_1a'_1 - \dots - 2a_pa'_p)x = 0. \quad (6)$$

Soit z une solution de ce système, on a

$$(C - J)z - 2(a_1a'_1 + \dots + a_pa'_p)z = 0. \quad (7)$$

Multiplions cette équation par a'_i du côté gauche. Comme $(C - J)a_i = 0$, on a $a'_i(C - J) = 0$ et, il suit de (7):

$$a'_i(a_1a'_1 + \dots + a_pa'_p)z = 0.$$

Mais comme $a'_i \cdot a_1 = \dots = a'_i \cdot a_p = 0$, sauf $a'_i \cdot a_i \neq 0$, on a $a'_i \cdot a_i a'_i \cdot z = 0$, d'où l'on conclut aisément $a'_i \cdot z = 0$ pour $i = 1, \dots, p$. Donc, l'équation (7) donne

$$(C - J)z = 0. \quad (8)$$

Ceci fait voir que toute solution du système (6) est, en même temps, une solution du système (5). Toute solution de ce dernier système est une combinaison linéaire des $a_1, \dots, a_p$, donc

$$z = k_1a_1 + \dots + k_pa_p.$$

On a, par conséquent,

$$(C - J - 2a_1a'_1 - \dots - 2a_pa'_p)(k_1a_1 + \dots + k_pa_p) = 0,$$

d'où il suit

$$(a_1a'_1 + \dots + a_pa'_p)(k_1a_1 + \dots + k_pa_p) = 0. \quad (9)$$

Dans ce produit les termes

$$a_ra'_r \cdot k_sa_s = k_sa_ra'_r \cdot a_s = 0 \text{ pour } r \neq s,$$

puisque

$$a'_r \cdot a_s = 0 \text{ pour } r \neq s;$$

le terme

$$a_ia'_i \cdot k_ia_i = k_ia_ia'_i \cdot a_i = k_ia_i,$$

puisque $a'_i \cdot a_i$ est une matrice i_1 (v. num. 5). L'équation (9) donne le résultat

$$k_1a_1 + \dots + k_pa_p = 0,$$

qui signifie que le système (6) n'a que des solutions nulles. Donc, son rang est égal à n .

Or, formons le produit

$$\begin{aligned} & (C - J - 2a_1a'_1 - \dots - 2a_pa'_p)(C + J - 2a_1a'_1 - \dots - 2a_pa'_p) = \\ & = C^2 - J^2 - 2(C - J)(a_1a'_1 + \dots + a_pa'_p) - 2(a_1a'_1 + \dots + \\ & + a_pa'_p)(C + J) + 4(a_1a'_1 + \dots + a_pa'_p)^2 = -2(a_1a'_1 + \dots + \\ & + a_pa'_p)(C - J) - 4(a_1a'_1 + \dots + a_pa'_p) + 4(a_1a'_1 + \dots + \\ & + a_pa'_p) = 0. \end{aligned}$$

Ici, on a fait usage de ce que $a_ia'_i \cdot a_ka'_k = 0$ pour $i \neq k$, $a_ia'_i \cdot a_ia'_i = a_ia'_i$. Le produit considéré étant nul et le premier facteur ayant le rang égal à n , le second a le rang égal à 0, donc

$$C + J - 2a_1a'_1 - \dots - 2a_pa'_p = 0$$

d'où il suit

$$C = -J + 2a_1a'_1 + \dots + 2a_pa'_p. \quad (10)$$

On démontre facilement que $(J - 2a_1a'_1) \dots (J - 2a_pa'_p) = J - 2a_1a'_1 - \dots - 2a_pa'_p$. Donc, (10) est bien la formule (4). On a le résultat:

Les systèmes $a_1, \dots, a_p$, figurant dans la formule (4), qui donne la décomposition d'une matrice orthogonale symétrique, sont un système de solutions du système (5) jouissant des propriétés de l'orthogonalité; inversement, tout système de p solutions de ce système jouissant de ces propriétés donne lieu à une telle décomposition. Ce système de solutions est, d'ailleurs, formé de p combinaisons linéaires des colonnes de la matrice $(C + J)$.

Il va sans dire que le même résultat s'applique à la formule (3), c. à d., aux systèmes $a_{p+1}, \dots, a_n$.

*

O souměrných maticích ortogonálních.

(Obsah předešlého článku.)

Každou takovou matici C lze vyjádřiti tvarem vzorce (2), jestliže p je hodnota matice $C + J$ (J matice jednotková); při tom čísla a jsou prvky ortogonální matice vhodně volené. Každá taková matice je součin $n - p$ a také součin p jednoduchých matic tvaru $J - 2aa'$, kde a jsou sloupce téže ortogonální matice (vzorce (3), (4)). Soustavy $a_1, \dots, a_p$ vzorce (4) jsou řešení soustavy lineárních rovnic (5), která jsou zároveň ortogonální; toto řešení je ostatně lineární kombinací sloupců matice $C + J$.

Dyadische Entwicklungen und Hausdorffsches Mass.

Vlad. Kniechal, Praha.

(Eingegangen am 13. April 1936.)

§ 1. Definitionen und Resultate.

Alle Zahlen in dieser Abhandlung sind reel. Für $0 \leq x < 1$ sei

$$x = 0, i_1 i_2 i_3 \dots = \frac{i_1}{2} + \frac{i_2}{2^2} + \frac{i_3}{2^3} + \dots$$

die *dyadische Entwicklung* der Zahl x (i_k ist also gleich 0 oder 1 für $k = 1, 2, 3, \dots$), die durch die Forderung normiert ist, daß die Folge $i_1, i_2, i_3, \dots$ unendlich viele Nullen enthalten soll. Ist $n \geq 1$ ganz, so bezeichnen wir mit $p(x, n)$ die Anzahl der Nullen in dem System $i_1, i_2, i_3, \dots, i_n$ und setzen $p(x, 0) = 0$.

Herr Khintchine¹⁾ bewies folgenden Satz. Für alle Zahlen x mit $0 \leq x < 1$ mit Ausnahme einer Menge vom Lebesgueschen Maß Null gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|p(x, n) - \frac{1}{2}n|}{\sqrt{n \log \log n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

In dieser Abhandlung beschäftigen wir uns mit einer Menge $\mathfrak{M}_\alpha$, welche folgendermassen definiert ist. Es sei $0 \leq \alpha$. Mit $\mathfrak{M}_\alpha$ wollen wir stets die Menge aller solchen Zahlen x mit $0 \leq x < 1$ bezeichnen, für welche²⁾

$$p(x, n) - \frac{1}{2}n = O(n^\alpha)$$

gilt. Nach dem Satze von Herrn Khintchine ist für $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ das Lebesguesche Maß der Menge $\mathfrak{M}_\alpha$ gleich Null. Man kann also für

¹⁾ A. Khintchine, Über einen Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Fund. Math. 6 (1924), 9—20.

²⁾ Ist $f(n) > 0$ für $n > n_0$, so bedeutet $\varphi(n) = O(f(n))$, dass

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|\varphi(n)|}{f(n)} < \infty \text{ ist.}$$

eine geeignete Maßfunktion $f(x)$ das Hausdorffsche Maß der Menge $\mathfrak{M}_\alpha$ untersuchen.

$\mathfrak{M}$ sei eine lineare Menge und $f(x)$ eine positive Funktion für $0 < x < 1$. Es sei $0 < \varrho < 1$. Man überdecke $\mathfrak{M}$ mit einer höchstens abzählbaren Menge S offener Intervalle v , deren Längen³⁾ $|v|$ sämtlich kleiner als ϱ sind. Man setze⁴⁾ $A = \sum_v f(|v|)$. Die untere Grenze der Zahlen A für alle solche Überdeckungen S wollen wir mit $L_\varrho(\mathfrak{M}, f(x))$ bezeichnen. Nimmt ϱ ab, so nimmt $L_\varrho(\mathfrak{M}, f(x))$ offenbar nicht ab, und es existiert daher $\lim_{\varrho=0+} L_\varrho(\mathfrak{M}, f(x))$. Diese Zahl nennt man *das zur Funktion $f(x)$ zugehörige Hausdorffsche⁵⁾ Maß der Menge $\mathfrak{M}$* . Wir bezeichnen es mit $L(\mathfrak{M}, f(x))$.

Der Leser findet die Grundeigenschaften des Hausdorffschen Masses in der unter 5. zitierten Abhandlung. Hier mögen nur einige von ihnen ohne Beweis angegeben werden. $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_1, \dots$ seien lineare Mengen, $f(x), g(x)$ positive Funktionen für $0 < x < 1$.

1. Ist⁶⁾ $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}_1$, so ist $L(\mathfrak{M}, f(x)) \leq L(\mathfrak{M}_1, f(x))$.

2. Ist $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \dots$, so ist

$$L(\mathfrak{M}, f(x)) \leq L(\mathfrak{M}_1, f(x)) + L(\mathfrak{M}_2, f(x)) + \dots$$

3. Ist $\lim_{x=0+} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$ und $L(\mathfrak{M}, f(x)) < \infty$, so ist

$$L(\mathfrak{M}, g(x)) = 0.$$

4. Ist $f(x) = x$, so ist $L(\mathfrak{M}, f(x))$ das äußere Lebesguesche Maß der Menge $\mathfrak{M}$.

Wenn $\lim_{x=0+} \frac{f(x)}{x} = \infty$ ist, so kann $L(\mathfrak{M}, f(x)) > 0$ sein, auch wenn das Lebesguesche Maß der Menge $\mathfrak{M}$ gleich Null ist. Man kann also das Hausdorffsche Maß für eine feinere Klassifikation der Mengen vom Lebesgueschen Maß Null benutzen. Wir wollen diesen Begriff des Hausdorffschen Maßes auf die schon früher definierte Menge $\mathfrak{M}_\alpha$ anwenden. Wir wählen für die Hausdorffsche Maßfunktion die Funktion $f(x) = f(x, \beta) = x \cdot e^{(-\log x)^\beta}$. Wenn $\mathfrak{M}$ vom Lebesgueschen Maß Null ist, so ist für $\beta \leq 0$ auch $L(\mathfrak{M}, f(x, \beta)) = 0$ und wenn $\mathfrak{M}$ unendlichviele Elemente enthält, so ist für $\beta \geq 1$ $L(\mathfrak{M}, f(x, \beta)) = \infty$.

³⁾ $|v|$ bedeutet stets die Länge des Intervalls v .

⁴⁾ Die Limesoperationen wollen wir im erweiterten Sinne nehmen.

⁵⁾ F. Hausdorff, Dimension und äusseres Mass, Math. Annalen, 79 (1919), 157–179.

⁶⁾ $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$ bedeutet: $\mathfrak{M}$ ist eine Teilmenge von $\mathfrak{N}$, $a \in \mathfrak{M}$ bedeutet: a ist ein Element aus $\mathfrak{M}$, mit $\{a, b, c, \dots\}$ bezeichnet man die aus den Elementen $a, b, c, \dots$ bestehende Menge.

Wir wollen uns also nur mit dem Falle $0 < \beta < 1$ beschäftigen. Die Sätze 1 bis 4 und die eben angeführten Bemerkungen sind fast trivial; im Folgenden wird übrigens von ihnen kein Gebrauch gemacht. Unser Hauptziel liegt im Beweise des folgenden Satzes.

Hauptsatz. Es sei $0 < \beta < 1$, $f(x) = f(x, \beta) = x \cdot e^{(-\log x)^\beta}$ für $0 < x < 1$, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. Dann ist

I. $L(\mathfrak{M}_\alpha, f(x, \beta)) = 0$ für $0 < \beta < 1 - 2\alpha$.

II. $L(\mathfrak{M}_\alpha, f(x, \beta)) = \infty$ für $1 - 2\alpha < \beta < 1$.

Mit $c_1, c_2, c_3, \dots$ wollen wir im Folgenden *positive, absolute Konstanten* bezeichnen.

Vor dem Beweise des Hauptsatzes wollen wir noch einige Hilfssätze ableiten.

Hilfssatz 1. Es sei n, k ganz, $n \geq 1$, $k' = k - \frac{1}{2}n$. Für $|k'| \leq \frac{1}{4}n$ gilt dann

$$\binom{n}{k} \leq c_1 \frac{2^n}{\sqrt{n}} e^{-2k'^2/n}, \quad (1)$$

$$\binom{n}{k} \geq c_2 \frac{2^n}{\sqrt{n}} e^{-3k'^2/n}, \quad (2)$$

und für alle k' gilt

$$\binom{n}{k} \leq c_3 2^n e^{-2k'^2/n}. \quad (3)$$

Beweis. Nach der Stirlingschen Formel ist für ganzes $n \geq 1$

$$c_4 \sqrt{n} e^{-n} n^n \leq n! \leq c_5 \sqrt{n} e^{-n} \cdot n^n \quad (4)$$

und also für ganze n, k mit $1 \leq k \leq n - 1$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \leq c_6 \sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} \frac{n^n}{k^k (n-k)^{n-k}}. \quad (5)$$

Man setze $\varrho = \frac{2k'}{n}$. Dann gilt

$$\sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} = \sqrt{\frac{n}{\frac{1}{2}n(1+\varrho) \frac{1}{2}n(1-\varrho)}} = \frac{2}{\sqrt{n(1-\varrho^2)}} \quad (6)$$

und weiter

$$\begin{aligned} \frac{n^n}{k^k (n-k)^{n-k}} &= \frac{n^n}{(\frac{1}{2}n(1+\varrho))^k (\frac{1}{2}n(1-\varrho))^{n-k}} = \\ &= \frac{2^n}{(1+\varrho)^k (1-\varrho)^{n-k}} = 2^n \cdot y, \end{aligned}$$

wo

$\log y = -k \log(1+\varrho) - (n-k) \log(1-\varrho) = -\frac{1}{2}n \varphi(\varrho)$
ist.

Dabei ist $\varphi(x) = (1+x) \log(1+x) + (1-x) \log(1-x)$ für $0 < x < 1$ und $\varphi'(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$, $\varphi''(x) = \frac{2}{1-x^2}$. Nach dem Taylorschen Satze ist

$$\varphi(\varrho) = \varphi(0) + \frac{\varrho}{1!} \varphi'(0) + \frac{\varrho^2}{2!} \varphi''(\Theta \varrho) = \frac{\varrho^2}{1 - \Theta^2 \varrho^2}$$

mit $0 \leq \Theta \leq 1$ und also

$$\frac{n^n}{k^k(n-k)^{n-k}} = 2^n e^{-\frac{n}{2} \frac{\varrho^2}{1-\Theta^2 \varrho^2}} = 2^n e^{-\frac{2k'^2}{n} \frac{1}{1-\Theta^2 \varrho^2}}. \quad (7)$$

Für $|k'| \leq \frac{1}{2}n$, $n \geq 1$ ist $|\varrho| \leq \frac{1}{2}$, also erhält man nach (5), (6), (7) die Ungleichung (1).

Für $1 \leq k \leq n-1$ (dann ist also $n \geq 2$) erhält man nach (5), (6), (7)

$$\binom{n}{k} \leq \frac{2c_6}{\sqrt{n(1-\varrho^2)}} \cdot 2^n e^{-2k'^2/n}.$$

Nun ist aber $n(1-\varrho^2) \geq n \left(1 - \left(\frac{2}{n} \left(\frac{n}{2} - 1\right)\right)^2\right) = 4 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \geq 2$ und daher

$$\binom{n}{k} \leq c_3 2^n e^{-2k'^2/n}.$$

Diese Beziehung (mit eventuell vergrößerter Konstante c_3) gilt offenbar auch für $k=0$ und $k=n$, $n \geq 1$, denn in diesem Falle ist $k' = \frac{1}{2}n$ und daher

$$2^n e^{-2k'^2/n} = 2^n e^{-\frac{1}{4}n} = e^{n(\log 2 - \frac{1}{4})}$$

wo $\log 2 - \frac{1}{4} > 0$ ist.

Für $|\varrho| \leq \frac{1}{2}$ erhält man ähnlich nach (4), (6), (7)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \geq c_7 \sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} \frac{n^n}{k^k(n-k)^{n-k}} \geq c_2 \frac{1}{\sqrt{n}} 2^n e^{-3k'^2/n}.$$

Es sei $w = \langle a, b \rangle$ ein abgeschlossenes Intervall und $n \geq 0$, ganz. Die Intervalle

$$v = \left\langle a + \frac{i}{2^n}(b-a), a + \frac{i+1}{2^n}(b-a) \right\rangle \text{ für } i = 0, 1, 2, \dots, 2^n - 1$$

wollen wir die zu w zugehörigen Intervalle n -ter Ordnung nennen. Gleichzeitig führen wir für ganzes $k \geq 0$ folgende Bezeichnung ein:

$$p(v, k, w) = p\left(\frac{i}{2^n}, k\right). \quad (8)$$

Der Kürze halber wollen wir die zu $\langle 0, 1 \rangle$ zugehörigen Intervalle n -ter Ordnung auch *Intervalle n -ter Ordnung nennen* und statt $p(v, k, \langle 0, 1 \rangle)$ einfach $p(v, k)$ schreiben. Wenn w ein Intervall n_1 -ter Ordnung, v ein zu w zugehöriges Intervall n_2 -ter Ordnung ($n_1 \geq 0, n_2 \geq 0$) und x ein innerer Punkt des Intervalls v ist, so erkennt man leicht, daß v ein Intervall $(n_1 + n_2)$ -ter Ordnung ist und daß

$$p(v, k, w) = p(x, n_1 + k) - p(x, n_1) \quad (9)$$

für $k = 0, 1, \dots, n_2$ ist.

§ 2. Beweis der Behauptung I. des Hauptsatzes.

1. Es sei $0 < \alpha < \frac{1}{2}, 0 < \beta < 1 - 2\alpha$. Man wähle α' so, daß $\beta < 1 - 2\alpha' < 1 - 2\alpha$ gilt. Mit $C_1, C_2, \dots$ wollen wir nur von α, α', β abhängige positive Konstanten bezeichnen.

Es sei a ganz,

$$a > \text{Max} (2, C_1^{\frac{2}{1-2\alpha'}}, C_3); \quad (10)$$

die Konstanten C_1, C_3 bestimmt man erst später. Für ganzes $n_1 \geq a$ sei $\mathfrak{N}(n_1)$ die folgendermassen definierte lineare Menge.

Für $i = 0, 1, 2, \dots$ setzen wir⁷⁾

$$n_i = [n_1 i^{\frac{1}{1-2\alpha'}}]. \quad (11)$$

Für $i = 1, 2, \dots$ sei $r_i = n_i - n_{i-1}$.

Für ganzes $i \geq 2$ ist nun (nach dem Mittelwertsatze)

$$\begin{aligned} r_i &\geq n_1 i^{\frac{1}{1-2\alpha'}} - n_1 (i-1)^{\frac{1}{1-2\alpha'}} - 1 \geq \frac{n_1}{1-2\alpha'} (i-1)^{\frac{2\alpha'}{1-2\alpha'}} - 1 \geq \\ &\geq \frac{n_1}{2(1-2\alpha')} (i-1)^{\frac{2\alpha'}{1-2\alpha'}} \end{aligned}$$

und für ganzes $i \geq 1$ also,

$$r_i \geq C_2 n_1 i^{\frac{2\alpha'}{1-2\alpha'}}. \quad (12)$$

Für $n_1 > C_3$ und für ganzes $i \geq 1$ ist deshalb

$$2n_1^{\alpha'} i^{\frac{\alpha'}{1-2\alpha'}} < \frac{1}{4} C_2 n_1 i^{\frac{2\alpha'}{1-2\alpha'}} \leq \frac{1}{4} r_i. \quad (12')$$

Mit V_k ($k \geq 1$, ganz) bezeichnet man die Menge aller abgeschlossener Intervalle n_k -ter Ordnung v , für welche folgende Ungleichungen gelten:

⁷⁾ $[\xi]$ bedeutet die grösste ganze Zahl, die höchstens gleich ξ ist.

$$|p(v, n_i) - \frac{1}{2}n_i| < n_1^{\alpha'} i^{\frac{1}{1-2\alpha'}}, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (13)$$

P_k soll im Folgenden die Anzahl der Intervalle aus V_k bezeichnen. Man setze nun⁸⁾

$$\mathfrak{N}(n_1) = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_v^{V_k} v. \quad (14)$$

Es sei $\varrho > 0$, $\varepsilon > 0$. Man wähle ein ganzes $k \geq 1$ so, daß die Ungleichungen

$$\frac{1}{2^{n_k-1}} < \varrho, \quad 2(n_1 - \frac{1}{2})^{\beta} C_1^k e^{n_1 \beta k^{\frac{\beta}{1-2\alpha'}}} < \varepsilon \quad (15)$$

gelten. Dies kann man wegen (10) und wegen $\beta < 1 - 2\alpha'$ verwirklichen. Dann kann man $\mathfrak{N}(n_1)$ durch das abgeschlossene Intervallensystem V_k , also auch durch ein System von P_k offener Intervalle überdecken, deren Längen sämtlich kleiner als $\frac{1}{2^{n_k-1}}$ sind. Es ist also

$$L_{\varrho}(\mathfrak{N}(n_1), f(x, \beta)) \leq \frac{1}{2^{n_k-1}} e^{(n_k-1)\beta \log \beta^2} \cdot P_k \leq \frac{2}{2^{n_k}} e^{n_k \beta \log \beta^2} \cdot P_k. \quad (16)$$

$p_1, p_2, \dots, p_k$ seien ganze Zahlen, für welche

$$|p_i - \frac{1}{2}n_i| < n_1^{\alpha'} \cdot i^{\frac{1}{1-2\alpha'}} \quad \text{mit } i = 1, 2, \dots, k \quad (17)$$

gilt. Nach (17) und (12') ist

$$|p_1 - \frac{1}{2}n_1| \leq n_1^{\alpha'} < \frac{1}{4}r_1 = \frac{1}{4}n_1 \quad (18)$$

und für $i = 2, 3, \dots$ auch

$$\begin{aligned} |p_i - p_{i-1} - \frac{1}{2}(n_i - n_{i-1})| &\leq |p_i - \frac{1}{2}n_i| + |p_{i-1} - \frac{1}{2}n_{i-1}| \leq \\ &\leq 2n_1^{\alpha'} i^{\frac{1}{1-2\alpha'}} < \frac{1}{4}r_i = \frac{1}{4}(n_i - n_{i-1}). \end{aligned} \quad (19)$$

Es gibt genau

$$\binom{n_1}{p_1} \binom{n_2 - n_1}{p_2 - p_1} \binom{n_3 - n_2}{p_3 - p_2} \dots \binom{n_k - n_{k-1}}{p_k - p_{k-1}}$$

also nach (1) aus Hilfssatz 1 wegen $r_i \geq 1$ [siehe (12)] und wegen (18), (19) höchstens $\frac{c_1^k}{\sqrt{r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_k}} \cdot 2^{n_k}$. Intervalle n_k -ter Ordnung v , für welche

$$p(v, n_i) = p_i \quad \text{mit } i = 1, 2, \dots, k \quad (20)$$

⁸⁾ Σv bedeutet die mengentheoretische Summe der Intervalle v .

ist. Damit die Intervalle n_k -ter Ordnung v , für welche (20) gilt, die Elemente aus V_k seien, so müssen die Beziehungen (17) für $i = 1, 2, \dots, k$ erfüllt sein. Man hat also für die Wahl der Zahl p_i höchstens $2n_1^{\alpha'} i^{1-2\alpha'} + 1 \leq 3n_1^{\alpha'} i^{1-2\alpha'}$ Möglichkeiten. Es ist also nach (12),

$$P_k \leq \frac{3^k c_1^k}{\sqrt{r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_k}} 2^{n_k} n_1^{k\alpha'} (k!)^{\frac{\alpha'}{1-2\alpha'}} \leq \\ \leq C_1^k n_1^{k(\alpha' - \frac{1}{2})} (k!)^{\frac{\alpha'}{1-2\alpha'}} 2^{n_k} (k!)^{\frac{\alpha'}{1-2\alpha'}} = C_1^k n_1^{-(\frac{1}{2}-\alpha')k} \cdot 2^{n_k}$$

und weiter nach (16), (11) und (15)

$$L_\varrho(\mathfrak{N}(n_1), f(x, \beta)) \leq 2 (n_1^{-(\frac{1}{2}-\alpha')C_1})^k \cdot e^{n_1^{\frac{\beta}{1-2\alpha'} \log \beta} 2} < \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt worden ist, so ist $L_\varrho[\mathfrak{N}(n_1), f(x, \beta)] = 0$ und weiter

$$L(\mathfrak{N}(n_1), f(x, \beta)) = 0. \quad (21)$$

2. Konstruieren wir jetzt die Menge $\mathfrak{P} = \sum_{n=a}^{\infty} \mathfrak{N}(n)$. Dann ist

$\mathfrak{M}_a \subset \mathfrak{P}$.

Beweis. Es sei $x \in \mathfrak{M}_a$, also $0 < x < 1$ und $p(x, n) = \frac{1}{2}n + O(n^\alpha)$. Dann gibt es $n_1 \geq a$ ganz so, daß für alle ganze $n \geq n_1$ folgende Beziehung gilt ($\alpha' > \alpha$)

$$|p(x, n) - \frac{1}{2}n| < n^{\alpha'}. \quad (22)$$

Es sei $i \geq 1$, ganz. Der Punkt x ist wegen (22) ein innerer Punkt eines Intervalles n_i -ter Ordnung v , wo n_i durch (11) definiert ist. Nach (9), (22) und (11) gilt dann für dieses Intervall $|p(v, n_i) - \frac{1}{2}n_i| < n_i^{\alpha'} \leq n_1^{\alpha'} i^{\frac{\alpha'}{1-2\alpha'}}$. Der Punkt x liegt also für jedes $i \geq 1$ in $\sum_v v$ also auch in $\mathfrak{N}(n_1)$ also in $\mathfrak{P}$.

3. Nach (21) ist $L(\mathfrak{N}(n), f(x, \beta)) = 0$ für $n \geq a$. Es sei nun $0 < \varrho < 1$, $\varepsilon > 0$. Überdecken wir die Menge $\mathfrak{N}(n)$ mit einer höchstens abzählbaren Menge offener Intervalle W_n , von denen jedes kleinere Länge als ϱ hat, und so, daß

$$\sum_n^{W_n} f(|v|, \beta) < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

ist. Die Menge $\sum_{n=a}^{\infty} W_n$ besteht aus einer höchstens abzählbaren Menge offener Intervalle, sie überdeckt $\mathfrak{P}$ und nach dem 2. Abstaze

auch $\mathfrak{M}_a$, und die Länge jedes einzelnen Intervalls ist kleiner als ϱ .
Es ist also

$$L_\varrho(\mathfrak{M}_a, f(x, \beta)) \leq \sum_{n=a}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} \leq \varepsilon$$

für beliebiges $\varepsilon > 0$, $\varrho > 0$. Deshalb ist $L(\mathfrak{M}_a, f(x, \beta)) = 0$, w. z. b. w.

§ 3. Beweis der Behauptung II. des Hauptsatzes.

1. Es sei

$$0 < \alpha < \frac{1}{2}, 1 - 2\alpha < \beta < 1. \quad (23)$$

Wir wählen α' und ε so, daß

$$1 - 2\alpha < 1 - 2\alpha' < \beta, (1 + 2\varepsilon)\alpha' < \alpha, 0 < \varepsilon < \frac{1}{2} \quad (24)$$

gilt. Mit $C_1, C_2, \dots$ wollen wir *positive nur von $\alpha, \alpha', \beta, \varepsilon$ abhängige Konstanten* bezeichnen.

Es sei $r \geq 1$, ganz, w ein abgeschlossenes Intervall. Dann wollen wir jedes zu w zugehörige Intervall r -ter Ordnung v , für welches die Beziehungen

$$|p(v, k, w) - \frac{1}{2}k| \leq r^{\frac{1}{2}+\varepsilon} + 1 \text{ mit } k = 1, 2, 3, \dots, r \quad (25)$$

gelten, ein *untergeordnetes zu w zugehöriges Intervall r -ter Ordnung* nennen.

Für $r > C_1$ ist

$$r^{\frac{1}{2}+\varepsilon} + 1 < \frac{1}{2}r \quad (26)$$

und das untergeordnete Intervall v enthält also keinen Endpunkt des Intervalls w , denn sonst wäre $p(v, r, w)$ gleich 0 oder r .

Hilfssatz 2. *Es sei $r \geq C_2$, ganz, l ganz $|l - \frac{1}{2}r| \leq \sqrt{r}$. Mit P bezeichne man die Anzahl der untergeordneten zu w zugehörigen Intervalle r -ter Ordnung v , für welche $p(v, r, w) = l$ ist. Dann ist $P > \frac{C_3}{\sqrt{r}} 2^r$.*

Beweis. Für $k = 1, 2, \dots, r$ soll A_k die Anzahl derjenigen (zu w zugehörigen) Intervalle r -ter Ordnung v bedeuten, für welche

$$|p(v, k, w) - \frac{1}{2}k| > r^{\frac{1}{2}+\varepsilon} + 1, p(v, r, w) = l \quad (27)$$

ist. Die Anzahl aller Intervalle r -ter Ordnung mit $p(v, r, w) = l$ ist gerade gleich $\binom{r}{l}$ und daher ist

$$P \geq \binom{r}{l} - \sum_{k=1}^r A_k. \quad (28)$$

Es sei k ganz, $1 \leq k \leq r-1$. Dann ist offenbar nach (27)

$$A_k = \Sigma' \binom{k}{p} \binom{r-k}{l-p} + \Sigma'' \binom{k}{p} \binom{r-k}{l-p} \quad (29)$$

wo man in Σ' über alle ganze p mit $p > \frac{1}{2}k + r^{\frac{1}{2}+\varepsilon} + 1$ und in Σ'' über alle ganze p mit $p < \frac{1}{2}k - r^{\frac{1}{2}+\varepsilon} - 1$ summiert. Man setze $p' = p - \frac{1}{2}k$, $l' = l - \frac{1}{2}r$. Nach (3) im Hilfssatze 1 ist

$$\begin{aligned} A'_k &= \Sigma' \binom{k}{p} \binom{r-k}{l-p} \leq c_3^2 \Sigma' 2^r e^{-\frac{2p'^2}{k} - \frac{2(l'-p')^2}{r-k}} = \\ &= c_3^2 2^r e^{-\frac{2l'^2}{r}} \Sigma' e^{-2\frac{(rp'-kl')^2}{rk(r-k)}}. \end{aligned}$$

Die Funktion $(rx - kl')^2$ ist für $x \geq r^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ wachsend, denn es ist $|l'| \leq \sqrt{r}$ und $r \geq 1$. Deshalb ist

$$A'_k \leq c_3^2 2^r e^{-\frac{2l'^2}{r}} \int_{r^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}^{\infty} e^{-2\frac{(rx-kl')^2}{rk(r-k)}} dx.$$

Führt man statt x die neue Variable u durch die Gleichung $u = \sqrt{\frac{2}{kr(r-k)}} (rx - kl')$ ein, so erhält man

$$A'_k \leq c_3^2 2^r \sqrt{\frac{k(r-k)}{2r}} \int_y^{\infty} e^{-u^2} du, \quad (30)$$

wo wegen $k \leq r$ und wegen $|l'| \leq \sqrt{r}$ die untere Grenze y mindestens gleich $\frac{\sqrt{2} r \cdot r^{\frac{1}{2}+\varepsilon} - 1}{\sqrt{kr(r-k)}} = \frac{\sqrt{2} r(r^{\frac{1}{2}+\varepsilon} - 1)}{\sqrt{k(r-k)}}$ ist.

Durch partielle Integration erhält man für $y > 0$

$$\int_y^{\infty} e^{-u^2} du = -\left[\frac{e^{-u^2}}{2u}\right]_y^{\infty} - \frac{1}{2} \int_y^{\infty} \frac{e^{-u^2}}{u^2} du \leq \frac{e^{-y^2}}{2y}. \quad (31)$$

Nach (30) und (31) ist also

$$A'_k \leq c_3^2 2^r \frac{k(r-k)}{4r(r^{\frac{1}{2}+\varepsilon} - 1) \sqrt{r}} e^{-2\frac{r^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(r^{\frac{1}{2}+\varepsilon}-1)^2}{k(r-k)}}.$$

Daher ist für $r \geq C_4$

$$A'_k \leq \frac{1}{2} c_3^2 2^r \sqrt{r} e^{-r^{2\varepsilon}}. \quad (32)$$

Aus Symmetriegründen oder durch eine analoge Berechnung erhalten wir

$$A''_k = \Sigma'' \binom{k}{p} \binom{r-k}{l-p} \leq \frac{1}{2} c_3^2 2^r \sqrt{r} e^{-r^{2\epsilon}}. \quad (33)$$

Da $A_r = 0$ ist, so ist nach (29), (32) und (33)

$$\sum_{k=1}^r A_k \leq c_3^2 2^r r^{\frac{1}{2}} e^{-r^{2\epsilon}}.$$

Für $r \geq C_5$ ist also

$$\sum_{k=1}^r A_k < \frac{c_2}{2e^3 \sqrt{r}} 2^r. \quad (34)$$

Weiter ist nach (2) im Hilfsatz 1 für $r \geq C_6$

$$\binom{r}{l} \geq \frac{c_2}{\sqrt{r}} 2^r e^{-\frac{3l^{11}}{r}} \geq \frac{c_2}{e^3 \sqrt{r}} 2^r$$

und deshalb für $r \geq C_2 = \text{Max}(C_5, C_6)$ nach (28) und (34)

$$P = \binom{r}{l} - \sum_{k=1}^r A_k > \frac{c_2}{2e^3 \sqrt{r}} 2^r = \frac{C_3}{\sqrt{r}} 2^r.$$

2. Es sei $A > 0$. Wir wählen n_1 ganz so, daß es folgende Bedingungen erfüllt:

$$n_1 > \text{Max}(2, C_9, C_{12}, C_{15}, C_{16}, C_{17}, C_{18}), \quad (35)$$

$$C_{19} n_1^{-\beta} e^{n_1^\beta \log^\beta 2} > A C_{13}.$$

Dabei sind C_9, C_{12} usw. Konstanten, die man erst später bestimmen wird. Man setze

$$\varrho = \frac{1}{2n_1}, \quad n_i = \left[n_1 \cdot i^{\frac{1}{1-2\alpha'}} \right] \text{ für } i = 1, 2, \dots$$

und $r_i = n_i - n_{i-1}$ für $i = 2, 3, \dots$. Dann ist

$$\frac{1}{2} n_1 i^{\frac{1}{1-2\alpha'}} \leq n_i \leq n_1 i^{\frac{1}{1-2\alpha'}} \text{ für } i = 1, 2, \dots \quad (36)$$

und weiter (nach dem Mittelwertsatz) für $i = 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} r_i &\leq n_1 i^{\frac{1}{1-2\alpha'}} - n_1 (i-1)^{\frac{1}{1-2\alpha'}} + 1 \leq \\ &\leq n_1 \frac{1}{1-2\alpha'} i^{\frac{2\alpha'}{1-2\alpha'}} + 1 \leq C_7 n_1 i^{\frac{2\alpha'}{1-2\alpha'}}. \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} r_i &\geq n_1 i^{\frac{1}{1-2\alpha'}} - n_1 (i-1)^{\frac{1}{1-2\alpha'}} - 1 \geq \\ &\geq n_1 \frac{1}{1-2\alpha'} (i-1)^{\frac{2\alpha'}{1-2\alpha'}} - 1 \geq C_8 n_1 i^{\frac{2\alpha'}{1-2\alpha'}}. \end{aligned} \quad (38)$$

Für $n_1 \geq C_9$ ist

$$r_i \geq \text{Max}(C_1, C_2) \quad (i = 2, 3, \dots). \quad (39)$$

Es sei $i \geq 1$, ganz. Jedes Intervall n_i -ter Ordnung v heißt ein Intervall i -ter Stufe, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

$$|p(v, n_i) - \frac{1}{2}n_i| \leq C_{10}n_1^{\alpha'} i^{\frac{\alpha'}{1-2\alpha'}}, \quad (40)$$

wo $C_{10} = \frac{1}{2}\sqrt{C_8}$ ist.

Wir wollen nun *normale Intervalle i -ter Stufe* durch vollständige Induktion definieren. Wir nennen jedes Intervall erster Stufe normal. Es sei $i \geq 1$ ganz. Setzen wir voraus, daß wir schon die normalen Intervalle i -ter Stufe definiert haben. Dann nennen wir diejenigen Intervalle $(i+1)$ -ter Stufe normal, die einem normalen Intervalle i -ter Stufe untergeordnet sind.

3. Es sei $i \geq 2$, ganz, w ein Intervall $(i-1)$ -ter Stufe. Mit $N(w)$ bezeichnet man die Anzahl der normalen Intervalle i -ter Stufe v , die in w enthalten sind. Dann ist (für $n_1 > C_{12}$)

$$N(w) \geq C_{11}n_1^{\alpha'-\frac{1}{2}} 2^{r_i} > 0. \quad (41)$$

Beweis. Ist p eine ganze Zahl mit

$$|p - \frac{1}{2}n_i| \leq C_{10}n_1^{\alpha'} i^{\frac{\alpha'}{1-2\alpha'}}, \quad (42)$$

dann sind alle zu w zugehörige untergeordnete Intervalle r_i -ter Ordnung v mit

$$p(v, r_i, w) = p - p(w, n_{i-1}) \text{ normal.} \quad (43)$$

Die Anzahl dieser Intervalle ist nach Hilfssatz 2 gleich

$$P(p) > \frac{C_3}{\sqrt{r_i}} 2^{r_i}. \quad (44)$$

Es ist nämlich nach (35) und (39) $r_i \geq C_2$ und nach (43), (42), (40), (38) wegen $C_{10} = \frac{1}{2}\sqrt{C_8}$:

$$\begin{aligned} |p - p(w, n_{i-1}) - \frac{1}{2}r_i| &\leq |p - \frac{1}{2}n_i| + |p(w, n_{i-1}) - \frac{1}{2}n_{i-1}| \leq \\ &\leq C_{10}n_1^{\alpha'} i^{\frac{\alpha'}{1-2\alpha'}} + C_{10}n_1^{\alpha'} (i-1)^{\frac{\alpha'}{1-2\alpha'}} \leq \sqrt{r_i}. \end{aligned}$$

Die Anzahl der Zahlen p , welche die Bedingung (42) erfüllen, ist mindestens gleich $2C_{10}n_1^{\alpha'} i^{\frac{\alpha'}{1-2\alpha'}} - 1$. Es ist also nach (44), (37) für $n_1 > C_{12}$

$$N(w) \geq C_{11}n_1^{\alpha'} i^{\frac{\alpha'}{1-2\alpha'}} \frac{1}{\sqrt{n_1}} i^{-\frac{\alpha'}{1-2\alpha'}} 2^{r_i}.$$

4. Für $i \geq 1$ ganz sei V_i die Menge aller normalen Intervalle

i-ter Stufe. Es sei

$$\mathfrak{N}_i = \sum_v^{V_i} v, \quad \mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 \cdot \mathfrak{N}_2 \cdot \mathfrak{N}_3 \cdot \dots$$

a) Es sei $x \in \mathfrak{N}$, $k \geq 0$ ganz. Dann ist x ein innerer Punkt eines Intervalls k -ter Ordnung.

Sonst könnte man $i \geq 2$ ganz so wählen, daß $n_{i-1} > k$ wäre. Da $x \in \mathfrak{N}$ ist, so gibt es in V_i ein Intervall v , das x enthält. v ist einem Intervalle w ($i-1$)-ter Stufe untergeordnet. x müßte wegen $n_{i-1} > k$ ein Endpunkt dieses Intervalls sein, was mit dem 1. Absatze wegen (35) und (39) im Widerspruch steht. Speziell ist also $0 < x < 1$.

b) Es gilt

$$\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}_a. \quad (45)$$

In der Tat sei n ganz, $n > n_1$. Dann gibt es $i \geq 2$ ganz so, daß $n_{i-1} < n \leq n_i$ ist. Es sei $x \in \mathfrak{N}$. Es gibt ein Intervall $v \in V_i$ so, daß x nach a) sein innerer Punkt ist. Es sei $w \in V_{i-1}$, $v \subset w$. Nach (9) ist

$$\begin{aligned} p(x, n) &= p(v, n - n_{i-1}, w) + p(x, n_{i-1}) = \\ &= p(v, n - n_{i-1}, w) + p(w, n_{i-1}) \end{aligned}$$

und also nach (25), (40), (24), (37)

$$\begin{aligned} |p(x, n) - \tfrac{1}{2}n| &\leq |p(v, n - n_{i-1}, w) - \tfrac{1}{2}(n - n_{i-1})| + \\ &+ |p(w, n_{i-1}) - \tfrac{1}{2}n_{i-1}| \leq r_i^{\frac{1}{2}+\varepsilon} + 1 + C_{10}n_1^{\alpha'}i^{\frac{\alpha'}{1-2\alpha'}} \leq \\ &\leq C_7^{\frac{1}{2}+\varepsilon}n_1^{\frac{1}{2}+\varepsilon}i^{\frac{\alpha'}{1-2\alpha'}} + C_{10}n_1^{\alpha'}i^{\frac{\alpha'}{1-2\alpha'}} + 1 \leq \\ &\leq K i^{\frac{\alpha}{1-2\alpha'}} \leq K'(i-1)^{\frac{\alpha}{1-2\alpha'}} \leq K''n_{i-1}^{\alpha} \leq K''n^{\alpha}, \end{aligned}$$

wo K, K', K'' nur von $\alpha, \alpha', \beta, \varepsilon, n_1$ abhängig sind. Daraus folgt $p(x, n) - \tfrac{1}{2}n = O(n^{\alpha})$ also $x \in \mathfrak{M}_a$.

5. $\mathfrak{N}$ ist eine abgeschlossene Menge, denn sie ist ein Durchschnitt abgeschlossener Mengen.

Es sei $i \geq 1$ ganz und w ein normales Intervall i -ter Stufe. Dann ist der Durchschnitt $w \cdot \mathfrak{N}$ nicht leer.

Nach dem Absatze 3 ist nämlich $N(w) > 0$ und es gibt daher ein normales Intervall $(i+1)$ -ter Stufe w_1 , welches in w enthalten ist. Ähnlich enthält auch w_1 ein normales Intervall $(i+2)$ -ter Stufe w_2 usw. Die Intervalle $w \supset w_1 \supset w_2 \supset \dots$ sind abgeschlossen und der Durchschnitt $w \cdot w_1 \cdot w_2 \cdot \dots$ ist also nicht leer. Er enthält also mindestens einen Punkt x . Es ist nun aber $w_k \subset \mathfrak{N}_{i+k}$ für jedes ganze $k \geq 1$ und $w \subset \mathfrak{N}_i \subset \mathfrak{N}_{i-1} \subset \dots$.

6. Man überdecke nun $\mathfrak{M}_a$ mit einer höchstens abzählbaren Menge offener Intervalle S , wo die Länge eines jeden Intervalls

kleiner als ϱ ist. Die Menge S überdeckt nach dem Absatze 4b auch die Menge $\mathfrak{N}$. $\mathfrak{N}$ ist nun beschränkt und abgeschlossen (siehe Absatz 5); daher ist es möglich aus S ein endliches System S' offener Intervalle herauszunehmen so, daß S' auch $\mathfrak{N}$ überdeckt. Man füge jedem Intervalle aus S' seine Endpunkte hinzu. So erhält man ein endliches System S'' abgeschlossener Intervalle.

Es ist dann ($\varrho < 1$)

$$\sum_v^{S''} f(|v|, \beta) \leq \sum_v^S f(|v|, \beta). \quad (46)$$

Es sei $w \in S''$, $w' = w \cdot \langle 0, 1 \rangle$. Ist $|w'| > 0$, so sei $i \geq 2$ die kleinste ganze Zahl, für welche das Intervall w' mindestens ein Intervall n_i -ter Ordnung enthält (w' enthält wegen $\varrho = \frac{1}{2^{n_1}}$ also kein Intervall n_{i-1} -ter Ordnung). Es sei $Q(w)$ die Menge aller Intervalle n_i -ter Ordnung, die einen nicht leeren Durchschnitt mit w' haben. Die Anzahl der Intervalle in $Q(w)$ ist höchstens gleich $2^{n_i} |w'| + 2 \leq 3 |w'| \cdot 2^{n_i}$, denn die Länge jedes Intervalls n_i -ter Ordnung ist gleich $\frac{1}{2^{n_i}}$.

Da $|w'| \leq 2 \cdot \frac{1}{2^{n_{i-1}}}$, $\beta < 1$ ist, so ist

$$\begin{aligned} \sum_v^{Q(w)} f(|v|, \beta) &\leq 3 |w'| \cdot 2^{n_i} |v| e^{(-\log|v|)\beta} \leq 3 |w'| e^{(n_i \log 2)\beta} \leq \\ &\leq 3 |w'| e^{(-\log|w'|)\beta} e^{(n_i \log 2)\beta - (-\log|w'|)\beta} \leq \\ &\leq 3 |w| e^{(-\log|w|)\beta} \cdot e^{(n_i^\beta - n_{i-1}^\beta) \log^{\beta 2} 2 + (n_{i-1}^\beta - (n_{i-1} - 1)^\beta) \log^{\beta 2} 2} \leq \\ &\leq C_{13} f(|w|, \beta) e^{A_i}. \end{aligned} \quad (47)$$

Der Kürze halber haben wir $A_i = (n_i^\beta - n_{i-1}^\beta) \log^{\beta 2} 2$ für $i = 2, 3, \dots$ gesetzt. Wir ersetzen in S'' jedes Intervall w durch das System $Q(w)$. Die Intervalle w , für welche $|w'| = 0$ ist, lassen wir weg. Somit erhält man ein endliches Intervallsystem S''' mit folgenden Eigenschaften: Zu jedem Intervall v aus S''' gibt es eine ganze Zahl $i \geq 2$ so, daß das Intervall v n_i -ter Ordnung ist. S''' überdeckt $\mathfrak{N}$. Mit S'''_i bezeichnet man die Menge aller Intervalle n_i -ter Ordnung aus S''' .

Es sei $k \geq 2$ die größte ganze Zahl, für welche in S''' Intervalle n_k -ter Ordnung vorkommen. Dann ist nach (46) und (47)

$$\sum_{i=2}^k e^{-A_i} \sum_v^{S'''_i} f(|v|, \beta) \leq C_{13} \sum_v^S f(|v|, \beta). \quad (48)$$

7. Man bezeichne mit U Systeme von (endlich vielen) Intervallen mit folgenden Eigenschaften:

- a) Jedes Intervall des Systemes ist n_i -ter Ordnung mit $k \geq i \geq 1$;
 b) Das System überdeckt $\mathfrak{N}$.

Die Anzahl der Systeme U ist endlich und es gibt daher ein solches System W , für welches der Ausdruck

$$\Phi(U) = \sum_{i=1}^k e^{-A_i} \sum_v^{U_i} f(|v|, \beta) \quad (49)$$

den Minimalwert annimmt. Dabei bedeutet U_i die Menge der Intervalle n_i -ter Ordnung, die in U vorkommen und außerdem haben wir $e^{A_1} = n_1^{1/\beta}$ gesetzt.

α) Zwei Intervalle $v, \bar{v}$ aus W haben höchstens einen Punkt gemeinsam. Denn sonst wäre bei geeigneter Bezeichnung $v \subset \bar{v}$. Dann wäre offenbar $W - \{v\}$ auch ein U -System und für dieses wäre $\Phi(W - \{v\}) < \Phi(W)$, was mit der Voraussetzung in Widerspruch steht.

β) Es sei $v \in W_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$). Wegen der Minimaleigenschaft der Menge W gibt es in v mindestens ein Punkt $x \in \mathfrak{N}$. Da die Endpunkte von v nach dem Absatze 4a nicht in $\mathfrak{N}$ liegen, so ist x ein innerer Punkt in v . Daraus folgt $v \in V_i$. Das Intervall v ist also ein normales Intervall i -ter Stufe.

γ) Nehmen wir an, daß $k \geq 2$ ist. Es gibt in W_k ein Intervall v . Dieses ist nach β) normal und k -ter Stufe. Es ist in einem normalen Intervall w ($k-1$ -ter Stufe) enthalten. Nach α) ist nicht $w \in W$. Mit $R(w)$ bezeichnet man die Menge aller normalen Intervalle k -ter Stufe, die in w enthalten sind. Ihre Anzahl hat man in Absatz 3 mit $N(w)$ bezeichnet. Jedes Intervall $\bar{v}$ aus $R(w)$ enthält nach Absatz 5 mindestens einen Punkt x , der in $\mathfrak{N}$ liegt. Dieser Punkt muß nach dem Absatze 4a ein innerer Punkt eines Intervalls $\bar{w}$ aus W sein. Wenn w von einer niedrigeren Stufe als $\bar{v}$ wäre, so wäre $w \subset \bar{w}$ und also auch $v \subset \bar{w}$, was nach α) unmöglich ist. Das Intervall $\bar{w}$ ist also k -ter Stufe und deshalb $\bar{w} = v$. Daraus folgt $R(w) \subset W$. Das System $W_0 = W - R(w) + \{w\}$ ist offenbar auch ein U -System und nach (49), (41) ist

$$\begin{aligned} \Phi(W_0) &= \Phi(W) - e^{-A_k} N(w) \frac{1}{2^{n_k}} e^{(n_k \log 2)^\beta} + \\ &\quad + e^{-A_{k-1}} \frac{1}{2^{n_{k-1}}} e^{(n_{k-1} \log 2)^\beta} \leq \\ &\leq \Phi(W) - C_{11} n_1^{\alpha'-1} \frac{1}{2^{n_{k-1}}} e^{(n_{k-1} \log 2)^\beta} + e^{-A_{k-1}} \frac{1}{2^{n_{k-1}}} e^{(n_{k-1} \log 2)^\beta}, \end{aligned}$$

also

$$\Phi(W_0) \leq \Phi(W) - \frac{n_1^{a'-\frac{1}{2}}}{2^{n_{k-1}}} e^{(n_{k-1} \log 2)^\beta} (C_{11} - n_1^{\frac{1}{2}-a'} e^{-A_{k-1}}). \quad (50)$$

Nun ist für $k \geq 3$ nach dem Mittelwertsatze und nach (38), (36), (24)

$$\begin{aligned} A_{k-1} &= (n_{k-1}^\beta - n_{k-2}^\beta) \log^\beta 2 \geq \beta r_{k-1} n_{k-1}^{\beta-1} \log^\beta 2 \geq \\ &\geq \beta C_8 n_1 (k-1)^{\frac{2a'}{1-2a'}} \cdot n_1^{\beta-1} (k-1)^{\frac{\beta-1}{1-2a'}} \log^\beta 2 \geq C_{14} n_1^\beta. \end{aligned}$$

Für $n_1 > C_{15}$, $k \geq 3$ ist also

$$C_{11} - n_1^{\frac{1}{2}-a'} e^{-A_{k-1}} > 0. \quad (51)$$

Für $k = 2$, $n_1 > C_{16}$ ist

$$C_{11} - n_1^{\frac{1}{2}-a'} e^{-A_1} = C_{11} - n_1^{\frac{1}{2}(1-2a'-\beta)} > 0 \quad (52)$$

und also nach (35), (51), (52) und (50) $\Phi(W_0) < \Phi(W)$ gegen die Voraussetzung. Es ist also notwendig $k = 1$ und $W = V_1$.

Da nach dem Absatze 6. S''' auch ein U -System ist, so ist nach (48), (49)

$$n_1^{-\frac{1}{2}\beta} \sum_v^{V_1} |v| e^{(-\log |v|)^\beta} \leq \sum_{i=2}^k e^{-A_i} \sum_v^{S_i'''} f(|v|, \beta) \leq C_{13} \sum_v^S f(|v|, \beta). \quad (53)$$

8. Es sei N die Anzahl der Intervalle erster Stufe. Dann ist $N = \sum_l \binom{n_1}{l}$, wo man in $\sum$ über alle ganze l mit $|l - \frac{1}{2}n_1| \leq \leq C_{10} n_1^{a'}$ summiert. Für $n_1 > C_{17}$ ist $C_{10} n_1^{a'} < \sqrt{n_1} < \frac{1}{4}n_1$ und also $|l - \frac{1}{2}n_1| \leq \sqrt{n_1} < \frac{1}{4}n_1$. Nach (2) im Hilfssatze 1 ist nun $\binom{n_1}{l} \geq c_2 \frac{2^{n_1}}{\sqrt{n_1}} e^{-3}$; also ist für $n_1 > C_{18}$, $N \geq C_{19} n_1^{a'-\frac{1}{2}} 2^{n_1}$. Deshalb ist nach (24), (35)

$$n_1^{-\frac{1}{2}\beta} \sum_v^{V_1} f(|v|, \beta) \geq C_{19} n_1^{-\beta} e^{n_1 \beta \log^\beta 2} > A C_{13}. \quad (54)$$

Aus (53) und (54) folgt dann $\sum_v^S f(|v|, \beta) > A$. Das gilt für alle mögliche Überdeckungen S , die aus höchstens abzählbarvielen offenen Intervallen, die kleiner als ϱ sind, bestehen. Daraus folgt

$$A \leq L_\varrho(\mathfrak{M}_a, f(x, \beta)) \leq L(\mathfrak{M}_a, f(x, \beta)).$$

Da A beliebig groß gewählt werden durfte, so ist $L(\mathfrak{M}_a, f(x, \beta)) = \infty$.

*

Dyadické rozvoje a Hausdorffova míra.

(Obsah předešlého článku.)

Pro $0 < x < 1$ budiž $x = 0, i_1 i_2 i_3 \dots = \frac{i_1}{2} + \frac{i_2}{2^2} + \dots$ dyadický rozvoj čísla x (i_k tedy rovno buď 0 neb 1) normovaný požadkem, aby posloupnost $i_1, i_2, i_3, \dots$ obsahovala nekonečně mnoho nul. Označme $p(x, n)$ počet nul v systému $i_1, i_2, \dots, i_n$.

Budiž $f(x) > 0$ pro $0 < x < 1$ a $\mathfrak{M}$ nějaké lineární množství. Budiž $0 < \varrho < 1$. Pokryjme $\mathfrak{M}$ nejvýše spočetným množstvím S

otevřených intervalů kratších než ϱ a utvořme výraz $A = \sum_v^S f(|v|)$,

kde $|v|$ je délka intervalu $v \in S$. Dolní hranici součtů A pro všechna taková pokrytí S označme $L_\varrho(\mathfrak{M}, f(x))$. Jestliže ϱ klesá, $L_\varrho(\mathfrak{M}, f(x))$ neklesá a existuje tedy limita

$$L(\mathfrak{M}, f(x)) = \lim_{\varrho=0+} L_\varrho(\mathfrak{M}, f(x)),$$

kterou nazýváme Hausdorffovou mírou množství $\mathfrak{M}$ příslušnou k $f(x)$.

Budiž $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. Souhrn čísel x , pro která $0 \leq x < 1$ a pro která $p(x, n) = \frac{1}{2}n + O(n^\alpha)$ označme $\mathfrak{M}_\alpha$. Budiž $f(x, \beta) = x \cdot e^{(-\log x)^\beta}$ pro $0 < x < 1$, $0 < \beta < 1$. V předešlém článku jsme dokázali tuto větu.

Je-li $0 < \beta < 1 - 2\alpha$ je $L(\mathfrak{M}_\alpha, f(x, \beta)) = 0$ a je-li $1 - 2\alpha < \beta < 1$ je $L(\mathfrak{M}_\alpha, f(x, \beta)) = \infty$.

O zborcené ploše, jejíž část je topologicky ekvivalentní s Möbiovým listem.

Josef Klíma, Brno.

(Došlo dne 18. března 1935.)

V topologii uvádí se jako nejjednodušší příklad dvojité plochy¹⁾ nebo jednostranné, uvažujeme-li, že je uložena v prostoru o větším počtu dimensí než je dvě, t. zv. Möbiův list. Tento vznikne tím, že obdélníkový proužek slepíme podél dvou protějších stran tak, že jednu z těchto stran otočíme o 180° kol jejího středu. Ploška tak vytvořená je zřejmě rozvinutelná. Ale uvádí se, že lze plochu ekvivalentní topologicky s Möbiovým listem vytvořit ještě jinak,²⁾ leč pak plocha tato není, jak dále uvidíme, rozvinutelnou.

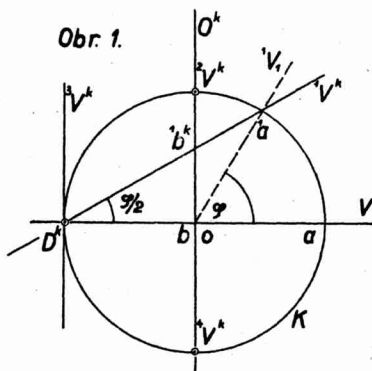
Zvolme v rovině α , jdoucí osou O , bod a mimo přímku O ! Bodem a vedme v α úsečku m^1m , jež je bodem a půlena! Nechť rovina otáčí se rovnoměrně kolem osy O a současně úsečka m^1m kolem bodu a v rovině α též rovnoměrně a sice úhlovými rychlostmi v poměru $2 : 1$. Při otočení roviny α o úhel 360° , otočí se úsečka m^1m o 180° , takže bod 1m splyne s počáteční polohou bodu m a obrátí se. Úsečka m^1m při této dvojí rotaci vytvoří plochu, jež je zřejmě topologicky ekvivalentní s Möbiovým listem. Plocha takto vytvořená je částí jisté zborcené plochy, již vytvoříme hořejším způsobem, vezmeme-li v rovině α místo úsečky m^1m její prodloužení, přímku V . Lze snadno ukázat, že plocha tato je zborcenou plochou třetího stupně, která má přímku O za jednoduchou řídící přímku. Sestrojíme tuto plochu v t. zv. vojenské perspektivě, t. j. v šikmém průmětu na rovinu π kružnice K , již opisuje bod a přímky V při otáčení kol osy O , pro promítací paprsky svírající s π úhel 45° .

V obr. 1 počáteční poloha přímky V vzata v rovině π kolmo k ose O a k jejímu šikmému průmětu O^k . Nechť otáčí se bod a ve smyslu $+$ (proti směru pohybu ručiček na hodinách) kol osy O na kružnici K a přímka V ve smyslu — v rovině (VO) , takže průsečík b

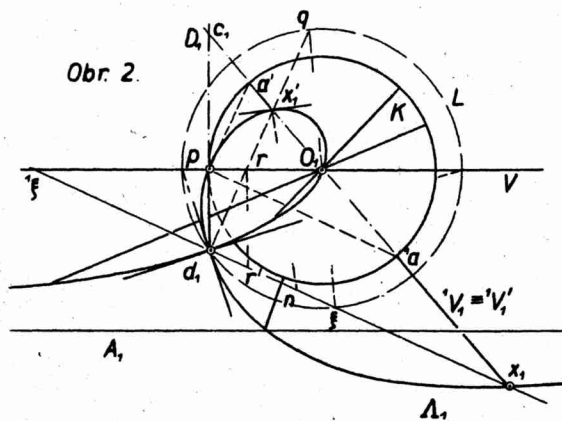
¹⁾ Viz na př. Hlavatý: Úvod do neeuclidovské geometrie, str. 158.

²⁾ Steinitz-Rademacher: Vorlesungen über die Theorie der Polyeder (1934), str. 19.

přímky V s osou O probíhá tuto osu od středu o kružnice K vzhůru. Při otočení o úhel φ kol osy O , otočí se přímka V v rovině (VO) o úhel $\frac{1}{2}\varphi$ do polohy 1V . Šikmý průmět ${}^1V^k$ jde patrně diametrálně



protilehlým bodem D^k k bodu a na kružnici K . Z toho patrně, že vytvořená zborcená plocha má řídící přímku D , jež má šikmý průmět v bodě D^k kružnice K . Přímka V vytvoří tudíž zborcenou plochu třetího stupně, jež má kružnici K , osu O za jedno-



duché řídící útvary a přímku D za dvojnou řídící přímku a lze ji označiti $[O, D, K]$. Rovina π je tečnou rovinou plochy v bodě a a její řez s plochou rozpadá se v přímku V a kružnici K . Torsální roviny jsou tu minimálními rovinami, jdoucími přímkou O , kuspídní body jsou jejich průsečíky s přímkou D . Ježto přímka D svírá s π úhel 45° a kolmý její průmět do π je v tečně kružnice K ,

jsou torsální přímky 1T , 2T imaginární druhého druhu a sice minimální, ležící v rovinách rovnoběžných s π ve vzdálenostech $\pm ai$, je-li a poloměr kružnice K . Ve zvolené vojenské perspektivě obrys plochy rozpadá se ve tři body, z nichž jeden je v D^k a druhé dva jsou v bodových průmětech ${}^2V^k$, ${}^4V^k$ tvořících přímek, rovnoběžných se směrem promítání.

V obr. 2 vyznačena zborcená tato plocha v kolmém promítání na rovinu π kružnice K , jež vzata za první průmětnu. Řez plochy s libovolnou rovinou $\lambda \parallel \pi$ je strofoidou A , jak ukážeme snadno následovně. Rovina λ protíná dvojnou řídící přímku D v bodě d , jehož půdorys je od stopníku p přímky D vzdálen o délku pd_1 rovnou výšce roviny λ nad π . Průsečík x libovolné tvořící přímky 1V zborcené plochy s rovinou λ , je na průsečnici roviny (D^1V) s rovinou λ , jež je hlavní přímkou v rovině (D^1V) a tedy je rovnoběžná se stopou $p'a$ téže roviny na π . Opíšme kol středu O_1 kružnici L , jež jde bodem d_1 a její druhý průsečík s d_1x_1 označme ξ . Jestliže d_1x_1 protíná tvořící přímku V , ležící v π v bodě ${}^1\xi$, tu platí:

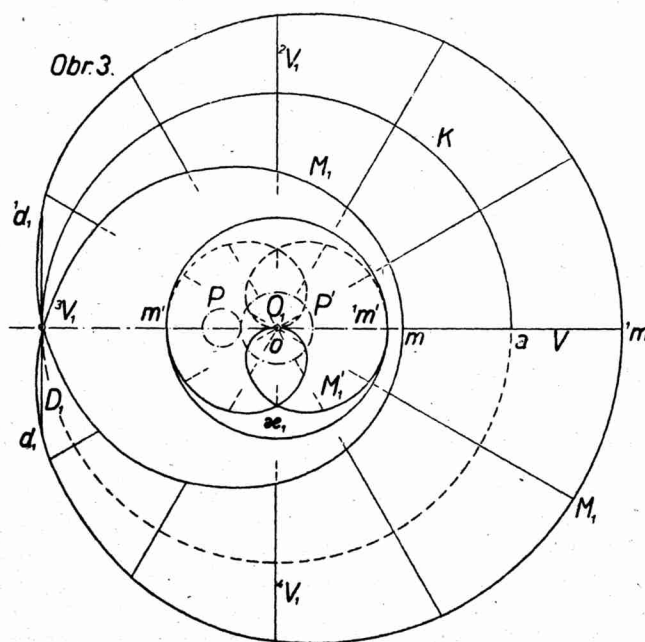
$$\xi x_1 = -d_1 \cdot {}^1\xi,$$

v čemž obsaženo známé kissoidální vytvoření strofoidy A_1 z kružnice L , jejího průměru V pro pól d_1 na kružnici.³⁾ Bod d je dvojným bodem řezu A a tečny v něm mají půdorysy jdoucí průsečíky kružnice L s přímkou V a tudíž vzájemně kolmé. V půdoryse 1V_1 je půdorys ještě druhé přímky ${}^1V'$, jež má stopník na π v bodě a' a která protíná rovinu λ v bodě x' . Polární subnormála pro pól d_1 křivky A_1 v bodě x'_1 je dána úsečkou $d_1n = d_1\xi - d_1r'$, kde body ξ , r' jsou na normálách křivek L a V , jichž kissoidou je A_1 . Reálná asymptota A_1 křivky A_1 je souměrně položená k V vzhledem k dvojnému bodu d_1 . Bod O_1 je singulárním ohniskem křivky A_1 , což vyplývá též z toho, že A je řezem s plochou. V obr. 2 vyznačena ona část plochy, která je mezi rovinami π a λ .

Část této zborcené plochy, jež je topologicky ekvivalentní s Möbiovým listem, je omezena částí M průsečné křivky této plochy s plochou anuloidu o středové kružnici K a poloměru r , jestliže délka $m^1m = 2r$. Průsečná křivka obou ploch je stupně $3 \cdot 4 = 12$, jež se tu rozpadá ve dvě křivky stupně 6, z nichž jedna je okrajem M . Křivku M lze výhodně sestrojiti ze sférické křivky M' , jež je na kulové ploše κ opsané ze středu o kružnice K poloměrem r . V obr. 3 sestrojeno vše opět v kolmém průmětě na rovinu π kružnice K co prvou průmětnu. Mysleme si, že s vytvořujícími přímkami V , 1V , ... plochy zborcené vedeme středem o kulové plochy κ rovnoběžky, jež lze dostati též tak, že tvořící přímka V otáčí se rovnoměrně kolem O a současně v rovině (VO) kol bodu o úhlovými rychlostmi v poměru $2 : 1$. Průsečíky m' , ${}^1m'$ přímek těchto

³⁾ Wieleitner: Spezielle ebene Kurven, str. 37.

s kulovou plochou κ opíše na této křivku, jež je celičí druhého druhu.⁴⁾ Půdorys M'_1 je růžicí o rovnici v polární soustavě $\rho = r \sin \frac{1}{2}\omega$,⁵⁾ jež je prodlouženou epicykloidou o dvou větvích, jíž opíše bod m' , spojíme-li jej s kružnicí P , která se kotálí po kružnici P' o poloměru dvojnásobném.⁶⁾ Křivka M'_1 je stupně 6 majíc rovnici v pravoúhlé soustavě vzhledem k ose $X \equiv m'm'$ a po-



čátku o:

$$4(x^2 + y^2)^3 + r^4 y^2 - 4r^2(x^2 + y^2)^2 = 0.$$

Kruhové body jsou trojnými body křivky M'_1 . Ježto kružnice o středu v počátku o mají v konečnu s M'_1 4 společné body, je v kruhových bodech obsaženo jejich zbývajících 8 průsečíků. Tečnu v libovolném bodě křivky M'_1 jakož i osculační kružnice v jejích vrcholech lze snadno sestrojiti z jejího kinematického vytvoření.⁷⁾ Půdorys M_1 okraje je částí konchoidy křivky M'_1 pro pól o a délku rovnou poloměru a kružnice K . Úplná tato konchoida,

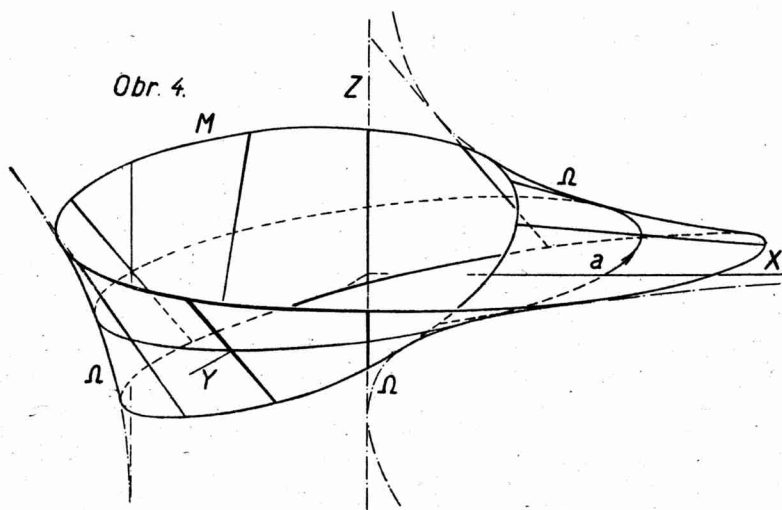
⁴⁾ G. Loria: Curve sghembe speciali, II. díl, str. 59.

⁵⁾ G. Loria: Spezielle algebraische Kurven und transcendente Kurven, I. díl, str. 366.

⁶⁾ Tamtéž, II. díl, str. 109.

⁷⁾ Kadeřávek-Klíma-Kounovský: Deskr. geometrie, I. díl, str. 128.

jež je kissoidou křivek M'_1, K_1 pro pól o , je stupně 2.2.6 — $(2 \cdot 2 + 8) = 12$,⁸⁾ ale rozbíjí se tu ve dvě křivky stupňů 6, souměrně k sobě položených podle středu o .⁹⁾ Půdorys M_1 okraje plochy je křivkou stupně 6, jež má v počátku o a v bodě 3V_1 dvojné body a v kruhových bodech trojné body. Prostorová křivka M je též stupně 6, ježto je zvláštním případem globoidální závitnice (šneku).¹⁰⁾ Závitnici tuto vytvoří bod probíhající rovnoměrně kružnici, která se současně rovnoměrně otáčí kol obecně položené



osy tak, že úhlové rychlosti obou pohybů jsou v konstantním poměru $m : n$, a která je racionální křivkou stupně $2(m + n)$. V našem případě jest $m : n = 1 : 2$ a tedy M je prostorovou křivkou stupně 6.

Proniková čára zmíněného anuloidu se zborcenou plochou rozbíjí se tu v křivku M a v křivku, již vyplňují průsečíky tvořících přímek zborcené plochy s druhými kružnicemi poledníkovými anuloidu, jejichž středy přímky ty neprocházejí. Obě tyto části proniku protínaly by se reálně v průsečících d, d' dvojné řídící přímky D s anuloidem.

V obr. 4 sestojen šikmý obraz ($\omega = 150^\circ, q = \frac{2}{3}$) této části zborcené plochy a vyznačen obrys Ω zborcené plochy, z něhož

⁸⁾ Wieleitner: Spezielle ebene Kurven, str. 3, nebo Klíma: Příspěvek ke křivkám cissoidálním, Rozpravy České akademie 31 (1922), č. 39, 5 stran.

⁹⁾ Tamtéž str. 108. Jedna část konchoidy má v polárních souřadnicích rovnici $\varrho - a = r \sin \frac{1}{2}\omega$ a druhá $\varrho + a = r \sin \frac{1}{2}\omega$, jež převedeny na pravoúhlé souřadnice dají rovnice stupňů 6.

¹⁰⁾ G. Loria: Curve sghembe speciali, II. díl, str. 33—35.

tři části přicházejí k platnosti. Křivka Ω je třetí třídy, čtvrtého stupně s třemi body vratu, z nichž v obraze je jen jeden reálný napravo od bodu a . V obr. 4 vyznačena kruhová dráha K bodu a na povrchu a patrně, že při jednom proběhnutí přijdeme na druhou stranu plochy v bodě a a teprve při dvojím proběhnutí kružnice vrátíme se do bodu a . K jasnější představě listu použito nyní zaváděného vytahování,¹¹⁾ že čáry plochy v částech bližších k oku vytahují se silněji.

*

**Sur une surface gauche dont une partie est topologiquement
équivalente à la feuille de Möbius.**

(Résumé de l'article précédent.)

Cette partie de la surface est engendrée par un segment m^1m d'une droite V qui tourne uniformément autour d'un axe O se trouvant avec V dans un plan et qui tourne en même temps autour de son centre $a(am = {}^1ma)$, les deux vitesses angulaires ayant le rapport 2 : 1. La droite V engendre une surface réglée du troisième degré, soit D sa directrice double. Les plans perpendiculaires à la directrice simple O coupent la surface réglée suivant des strofoïdes. La courbe M qui limite la partie considérée est de l'ordre 6, et elle admet une construction simple dans la projection orthogonale sur le plan π qui contient la circonférence K décrite par le centre a du segment m^1m . Dans la figure 4 se trouve construite cette partie de la surface à la perspective cavalière, trois parties de la courbe Ω du contour et le segment d^1d de la droite double D de la surface y jouant un rôle.

¹¹⁾ Viz na př. Hilbert-Cohn: Anschauliche Geometrie.

Příspěvky k deskriptivní geometrii Eudoxovy hypopédy.

L. Seifert, Brno.

(Došlo dne 29. srpna 1935.)

Obsah: Plochy druhého stupně jdoucí hypopédou, jejich ohniska. Průmět hypopédy z jejího obecného bodu, z jejího vrcholu, z bodu na povrchu válce jdoucí dvojným bodem. Průmět rovnoběžný s obecnou přímkou kuželu. Průmět z bodu na kuželu neb na válci. Poznámky o křivosti průmětů.

Hypopéda je průsek koule s rotačním válcem, který se jí dotýká v jednom bodě. Byla studována již ve starověku. Eudoxovou sluje podle autora astronomického systému, ve kterém právě hypopédy hrají důležitou úlohu. Křivka zvaná Vivianovo okno je její zvláštní případ. Nejdůležitější vlastnosti najde čtenář v dílech: Teixeira, Courbes spéciales remarquables, str. 324, Loria, Curve sghembe speciali, str. 199. Mnoho zajímavých konstruktivních detailů se najde ve spise M. Lerch, O dvou plochách stupně čtvrtého (Rozpravy II. třídy České akademie 22 (1913), č. 36, 141 stran). Časem při různých příležitostech a cvičeních se svými žáky přišel jsem na jiné vlastnosti a konstruktivní detaily, jež zde uveřejňuji. Pro stručnost jsem pokud možno zkrátil výpočty často dosti dlouhé, ač docela elementární a uveřejňuji jen věty, jež v citovaných a snadno přístupných pramenech nejsou. Chybějící obrázky si čtenář snadno sám doplní.

1. Hypopéda jest dána parametricky rovnicemi

$$x = a \cos 2\varphi, \quad y = a \sin 2\varphi, \quad z = 2b \sin \varphi; \quad (1)$$

jeví se jako průsek rotačního válce s koulí

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 + 2 \frac{b^2}{a} x = a^2 + 2b^2. \quad (2)$$

V obr. 1 jest O střed kruhu (a), podstavy válce, $C\left(-\frac{b^2}{a}, 0, 0\right)$ jest střed koule, $A(a, 0, 0)$ dotýčný bod obou ploch. Tento jest dvojný hypopédy a zároveň středem rotačního kuželu

(2a)

jenž hypopédou prochází. Jí prochází i parabolický válec

(2b)



Svazek ploch druhého stupně jdoucích hypopédou jest

(3)

a sestává vesměs z rotačních ploch, s výjimkou plochy (2b). Stopy těchto ploch tvoří svazek kružnic s dotykem v A (obr. 1). Buď k jedna z nich se středem S , jež je zároveň středem kvadriky. Tečna kružnice k je průmětem dvou přímek kvadriky a zároveň bisekant hypopédy, dotyčný bod R jest jejich stopa. Z toho je zřejmo, že k je stopou hyperboloidu, kdežto každý kruh svazku, jež uzavírá kruh (a) , je stopou elipsoidu. Abychom k danému φ našli snadno první a druhý průmět, učiňme v obr. 1 $A'B = 2b$, $\angle BA'M_1 = \varphi$. Vzdálenost $A'M_1$ od B jest z_M . Stopa T tečny hypopédy v bodě M jest průsečík tečny M_1T ke kruhu (a) s kolmicí AT ku AM , (AT je stopa tečné roviny kuželu 2a). Troj-

úhelník AHT je rovnoramenný a $HT = HA$. Bod T opisuje cissoidu Diokletovu.

Ohniska plochy (3) ležící mimo rovinu (xy) mají souřadnice

$$\xi = -\lambda \frac{b^2}{a}, \quad \zeta = \left(a + \lambda \frac{b^2}{a}\right) \sqrt{\frac{1}{\lambda} - 1}$$

a jejich geom. místo je kubika

$$[\zeta^2 + (\xi - a)^2] \xi + \frac{b^2}{a} (\xi - a)^2 = 0 \quad (4)$$

či v polárních souřadnicích s pólem A a osou AO

$$r = \frac{a}{\cos \omega} + \frac{b^2}{a} \cos \omega. \quad (4a)$$

Ohniska jsou reálná při $-\frac{b^2}{a} \leq \xi$, t. j., je-li střed kvadriky v intervalu CO . Máme pak na (4) dvojiny bodů takové, že součet vzdáleností od bodů hypopédy je konstantní.

2. Průmět hypopédy (1) z jejího obecného bodu $M^0(\varphi_0)$ do roviny $z = 0$ je *strofoida*. Snadným výpočtem dostaneme nejprve rovnici v pravoúhlé a pak v polární soustavě s pólem A a osou Ax

$$r = 2a \sin \varphi_0 \frac{\sin(2\omega - \varphi_0)}{\cos \omega};$$

M_1^0 je základní bod, Ay řídicí přímka, $AQ' = Q'P$ (obr. 1).

Z jiných průmětů křivky z jejího bodu zaslouží zmínky průmět z vrcholu křivky $V(-a, 0, 2b)$, jenž odpovídá hodnotě $\varphi_0 = \frac{1}{2}\pi$, na rovinu (yz) . Jest to

$$by^2z + a^2z^2 - b^2y^2 = 0;$$

Longchamps ji nazývá *cubique mixte*.¹⁾

Projekce z bodu na kouli mimo křivku (stereografická) dává bicirkulární křivku, jež má dvě analagmacie. Řídicí kruhy jsou průměty kruhu $z = 0$ a hlavního kruhu, který obsahuje osu válce. Tato metoda je v teorii bicirkulárních křivek dobře známa.

3. Buď $S(a, 0, c)$ bod na povrchu válce, jež jde dvojným bodem A . Přímka, která spojuje S s bodem M hypopédy má na $z = 0$ stopu

$$x = a - \frac{2ac \sin^2 \varphi}{c - 2b \sin \varphi}, \quad y = \frac{2ac \sin \varphi \cos \varphi}{c - 2b \sin \varphi};$$

vezmeme-li A za pól, Ax za osu, má tento bod polární souřadnice r

¹⁾ Teixeira, Courbes spéciales remarquables, sv. 1, str. 118.

$$\text{a } \omega = \frac{1}{2}\pi + \varphi,$$

$$r = \frac{2ac \sin \varphi}{c - 2b \sin \varphi} = -\frac{ac}{b} + \frac{\frac{ac}{b}}{1 + \frac{2b}{c} \cos \omega}. \quad (5)$$

Vidíme tedy, že *průmět hypopédy z bodu S jest ohnisková konchoida kuželosečky, při čemž délka, o niž se průvodič kuželosečky zmenšuje, jest rovna parametru.*

Vyjdeme-li od této konchoidy

$$r = -p + \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \omega},$$

vidíme, že ji lze považovati za průmět hypopédy, při čem $a = \frac{1}{2}\varepsilon p$. Na průvodiči bodem A jsou body $M(\omega)$, $M'(\pi + \omega)$ a bod M_0 kružnice (a) . Výpočtem nebo promítáním zjistíme ihned, že body A, M_0, M, M' tvoří harmonickou čtveřinu a tečny bodů M, M' s tečnou kruhu v bodě M_0 se sekou v bodě T_0 .

Kartesiova rovnice křivky (5) zní pro počátek A

$$(x^2 + y^2 + \varepsilon p x)^2 = \varepsilon^2 x^2 (x^2 + y^2); \quad (5a)$$

utvoříme-li inverzní křivku pro pól A a mocnost g^2 a píšeme-li pak

$$a_0 = -\frac{g^2}{\varepsilon p}, \quad b_0 = \varepsilon a_0, \quad \text{dostaneme}$$

$$r = \frac{b_0 x}{x - a_0}$$

a poznáváme, že *průmět (5) jest křivka inverzní s Nikomedovou konchoidou.*²⁾

Nechť střed promítání $S(x_0, y_0, z_0)$ je na přímce kuželu v rovině $y = 0$. Pak

$$y_0 = 0, \quad x_0 = \frac{a}{b} (b - z_0);$$

pro průmět bodu M do $z = 0$ dostaneme

$$x = a \frac{z_0 \cos 2\varphi + 2(z_0 - b) \sin \varphi}{z_0 - 2b \sin \varphi}, \quad y = az_0 \frac{\sin 2\varphi}{z_0 - 2b \sin \varphi},$$

nebo, vezmeme-li za počátek bod $A(x = a + \xi, y = \eta)$,

$$\xi = 2az_0 \frac{\sin \varphi - \sin^3 \varphi}{z_0 - 2b \sin \varphi}, \quad \eta = az_0 \frac{\sin 2\varphi}{z_0 - 2b \sin \varphi};$$

²⁾ Teixeira, l. c., sv. 1, str. 259.

křivka má trojnásobný bod A s tečnami $\xi = 0$, $\eta = \pm \xi$, pro $z_0 > 2b$ je uzavřená a podobá se trifoliu,³⁾ na něž se redukuje při $z_0 = \infty$, t. j. při rovnoběžném promítání.

4. Poslední poznámka vnučuje otázku, jaký je průmět hypopédy, promítáme-li rovnoběžně s obecnou přímkou kuželu. Buď D bod φ_0 hypopédy, kosiny směrné přímky AD jsou úměrné k

$$-a \sin \varphi_0, a \cos \varphi_0, b,$$

stopa přímky bodem $M(\varphi)$ rovnoběžné s AD jest (počátek A)

$$\xi = 2a \sin \varphi (\sin \varphi_0 - \sin \varphi), \eta = 2a \sin \varphi (\cos \varphi - \cos \varphi_0).$$

Píšeme-li

$$\xi = 4a \sin \varphi \sin \frac{1}{2}(\varphi_0 - \varphi) \cos \frac{1}{2}(\varphi_0 + \varphi),$$

$$\eta = 4a \sin \varphi \cdot \sin \frac{1}{2}(\varphi_0 - \varphi) \sin \frac{1}{2}(\varphi_0 + \varphi),$$

vidíme, že rovnoběžný průmět pro pól A a osu Ax lze psáti

$$r = 4a \sin (2\Theta - \varphi_0) \sin (\varphi_0 - \Theta) \quad [\Theta = \frac{1}{2}(\varphi_0 + \varphi)]. \quad (6)$$

Tato rovnice ukazuje, že *rovnoběžný průmět je trifolium* a obráceně, *každé trifolium lze považovati za rovnoběžný průmět hypopédy* (b je libovolné).

Označme $M_1(x, y)$, $M_0(\xi, \eta)$ horizontální a šikmý průmět (směr AD) téhož bodu φ při počátku A . Snadno najdeme

$$(\xi + i\eta) - (x + iy) = -2ai \sin \varphi e^{i\varphi_0},$$

z čehož jde, že vektor M_1M_0 rovná se délkou vektoru AM_1 a to je Brocardova konstrukce křivky.⁴⁾ Tečny hypopédy ve dvojném bodě se promítnou do

$$\frac{\eta}{\xi} = \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2}, \quad \frac{\eta}{\xi} = -\operatorname{cotg} \frac{\varphi_0}{2}.$$

Vezmeme-li opět O za počátek souřadnic, jest rovnice šikmého průmětu

$$x = a \cos 2\varphi + 2a \sin \varphi_0 \sin \varphi, y = a \sin 2\varphi - 2a \cos \varphi_0 \sin \varphi. \quad (6a)$$

Vzorce pro střed křivosti dostaneme snadno, napíšeme-li rovnici normály a její derivaci. Pak pro $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$ dostaneme středy křivosti oněch větví trojného bodu, které povstanou z dvojného bodu hypopédy

$$x_1 = 2a \cos \varphi_0 - a, x_2 = -2a \cos \varphi_0 - a.$$

³⁾ Teixeira, l. c., sv. 1, str. 302.

⁴⁾ Teixeira, sv. 1, str. 303.

Třetí větev, do níž se zobrazují body v blízkosti φ_0 (bod D) má střed křivosti

$$x_3 = 2a - a \cos 2\varphi_0, \quad y_3 = -a \sin 2\varphi_0.$$

Dvě dvojné tečny (obrys válce) se dotýkají kruhu (a) a jsou rovnoběžné s AD_1 , třetí je rovnoběžná s Ay (obrys parabolického válce) a dotýká se v bodech daných rovnicí $\sin \varphi = \frac{1}{2} \sin \varphi_0$ (pro něž vymizí koeficient při x v rovnici normály).

Z okolnosti, že trifolium je projekcí hypopédy, plyne konstrukce tečny. Buď M^0 bod trifolia, M_1 příslušný bod řídicího kruhu (a), T bod na tečně vyznačený v odstavci (1). M_0T je hledaná tečna. Bodem T jde také tečna bodu M' na téže rovnoběžce s AD_1 . Na křivce máme tedy kvadratickou involuci dvojic M^0M' ; tečny v bodech dvojiny se sbíhají v bodě T , jenž opisuje cisoidu, paprsky vedené z trojného bodu k bodům téže dvojiny jsou k sobě kolmé.

5. Volme za střed promítání libovolný bod S kužele. Pro počátek A hově jeho souřadnice rovnicím

$$\frac{x_0}{-a \sin \varphi_0} = \frac{y_0}{a \cos \varphi_0} = \frac{z_0}{b},$$

takže, položíme-li $\alpha = \frac{2b}{z_0}$, jest

$$\alpha x_0 = -2a \sin \varphi_0, \quad \alpha y_0 = 2a \cos \varphi_0,$$

kde φ_0 je parametr bodu hypopédy na hraně AS . Pro centrální průmět bodu φ máme

$$\xi = 2a \sin \varphi \frac{\sin \varphi_0 - \sin \varphi}{1 - \alpha \sin \varphi}, \quad \eta = 2a \sin \varphi \frac{\cos \varphi - \cos \varphi_0}{1 - \alpha \sin \varphi}. \quad (7)$$

Pro polární souřadnice s pólem A a amplitudou $\Theta = \frac{1}{2}(\varphi + \varphi_0)$ dostaneme

$$r = -\frac{4a}{\alpha} \sin(\varphi_0 - \Theta) + \frac{4a}{\alpha} \cdot \frac{\sin(\varphi_0 - \Theta)}{1 - \alpha \sin(2\Theta - \varphi_0)}. \quad (7a)$$

Jeví se tedy uvažovaná centrální projekce jako *cisoidála*⁵⁾ kruhu o poloměru $\frac{2a}{\alpha} = AS_1$ a kuželosečky, která jde pólem A jako kruh a má AS_1 za normálu. Společná sečna kuželosečky a kruhu jeví se z A pod pravým úhlem; střed kruhu je tedy Frégierův bod kuželosečky odpovídající bodu A .⁶⁾

⁵⁾ Cisoidálou zoveme křivku, jež vzniká odčítáním vektorů dvou křivek. Viz na př. též Wieleitner, Spezielle eb. Kurven.

⁶⁾ T. j. střed involuce vyřáté na kuželosečce involucí pravoúhlou.

Jedna tečna trojného bodu jest $\Theta = \varphi_0$, kolmá ku S_1A , ostatní dvě půlí úhly této tečny s Ax .

Čtyři dvojně tečny s body dotyku dostaneme snadno pomocí tečen ke kruhu (a) z S_1 (obrys válce) a tečen z S_2 k druhému průmětu hypopedy. Právě tak vidíme, že průseky s kružnicemi, jež jdou bodem A a mají středy na AS_1 , se najdou přímo. Rovnice kruhu je skutečně $r = 2g \sin(\varphi_0 - \Theta)$ a z toho jde

$$(\alpha g + 2a) \sin(2\Theta - \varphi_0) = g.$$

Kruh se dotkne křivky, když poslední sinus je roven ± 1 ; máme tedy pro dotyčné kruhy

$$\alpha g + 2a = \pm g, \quad \text{t. j.} \quad g = \frac{2a}{\alpha \mp 1}.$$

Chceme-li získati křivost uvažované křivky v jistém bodě, můžeme užiti průsečné elipsy oskulační roviny křivky s rotačním válcem, neboť elipsa má v bodě φ tutéž křivost jako hypopéda. Oskulační rovina má rovnici (počátek O)

$$x(3 \sin \varphi + \sin 3\varphi) - y(3 \cos \varphi + \cos 3\varphi) + \frac{4a}{b}z = 6a \sin \varphi;$$

horizontální stopa jde bodem o polárních souřadnicích $2\varphi, -3a$; nanese tedy od M_1 na M_1O dvojnásobný průměr $4a$ a spojíme koncový bod s T . To je první stopa oskulač. roviny; druhou dostaneme pomocí bodu $(0, 0, \frac{3}{4}z)$ na Oz .

6. Předpokládejme, že střed promítání jest bod $S(x_0, y_0, z_0)$ na rotačním válci ($x_0 = a \cos 2\varphi_0, y_0 = a \sin 2\varphi_0$). Pro průmět do $z = 0$ dostaneme

$$x - x_0 = -\frac{2a \sin(\varphi - \varphi_0)}{1 - \alpha \sin \varphi} \sin(\varphi + \varphi_0),$$

$$y - y_0 = \frac{2a \sin(\varphi - \varphi_0)}{1 - \alpha \sin \varphi} \cos(\varphi + \varphi_0),$$

kde $\alpha = \frac{2b}{z_0}$. Učiníme-li počátkem $S_1(x_0, y_0)$, $x - x_0 = \xi, y - y_0 = \eta$, jest

$$\xi + i\eta = ire^{i(\varphi + \varphi_0)}, \quad \text{kde } r = \frac{2a \sin(\varphi - \varphi_0)}{1 - \alpha \sin \varphi}.$$

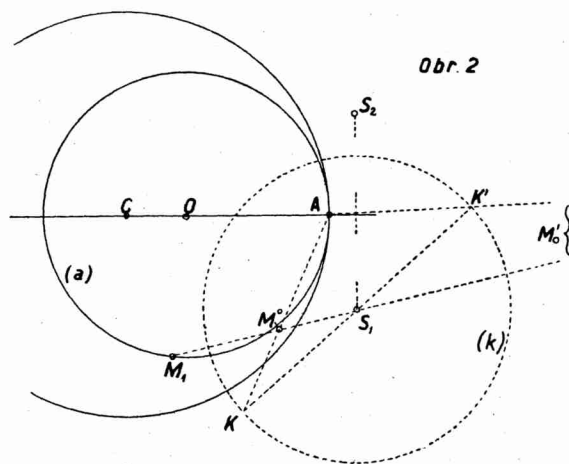
Poslední rovnice je polární rovnice průmětu k ose AS_1 a počátku S_1 . Vezmeme-li tuto přímku za osu úseček v nové soustavě a položíme $x \sin \varphi_0 - y \cos \varphi_0 = L$, dostaneme

$$(x^2 + y^2 + 2aL)^2 = \alpha^2 y^2 (x^2 + y^2). \quad (8)$$

Pro $\varphi_0 = \frac{1}{2}\pi$, t. j. střed na přímce $x_0 = a$, $y_0 = 0$ dostaneme *capricornu* Ponceletovu, jež se vyskytuje také v deskriptivní geometrii šroubových ploch.⁷⁾ Změníme-li směr osy a počátek dáme do $A'(-a, 0)$, jest její rovnice

$$r = \frac{2a \cos \varphi}{1 - \alpha \sin \varphi}.$$

7. Pro skutečné narýsování středového průmětu z bodu S položeného mimo přímku Az jest nejlépe považovati křivku za průsek válce (a) s rotačním kuzelem (2a). Buď pak k (v obr. 2)



stopa kuželu s vrcholem S rovnoběžného s (2a), M_1 bod na kružnici (a). Je-li KK' průměr rovnoběžný s AM_1 , jsou AK, AK' průměty površek kuželu, S_1M_1 průmět površky válece v rovině (M_1Az) a průsečíky M_0, M'_0 jsou dva body uvažovaného středového průmětu.

*

Remarques à la géométrie descriptive de l'hyppopède.

(Extrait de l'article précédent.)

Par l'hyppopède (1) passe un faisceau de quadriques (3) toutes de révolution, sauf une; les foyers de ces quadriques sont sur une cubique (4). La projection centrale de l'hyppopède prise d'un point de cette courbe, dans le plan $z = 0$, est une strophoïde, la

7) Teixeira, sv. 2, str. 319, 320 a 388.

projection prise du sommet comme centre sur le plan $x = 0$, est une cubique mixte. La perspective sur le plan $z = 0$ prise d'un centre situé sur la droite Az est une conchoïde focale de conique (5). La projection oblique parallèle à une génératrice du cône est un trifolium (6). La projection centrale prise d'un point du cône est une quartique pouvant s'obtenir comme la cissoïdale d'une conique et d'un cercle tangent (7). La projection d'un point du cylindre est une quartique (8) dont le cas spécial est la capricornne de Poncelet. Remarques concernant la courbure des diverses projections.

ČÁST FYSIKÁLNÍ.

An application of the method wherein φ - and κ -methods are combined for the determination of the grating constant. Part II.

Swami Jnanananda, Praha.

(Received April 10, 1936.)

The method wherein the φ - and the κ -methods are combined for the determination of the grating constants of crystals is applied for the precise adjustment of the Bragg's reflecting plane of the crystal in the axis of the spectrograph. The values of the fictive grating constants d_1 , d_2 and the real grating constant d_∞ obtained in this case from the glancing angle φ agree with those obtained from the differential glancing angle κ . The precision of the obtained values is discussed and they are used for the further application of the differential glancing angle κ .

A method is given for the measurement of the wave-lengths of X-radiation, with the help of the differential glancing angle κ of the same wave-length in two different orders and two fictive grating constants, by means of the equation

$$m\lambda = \frac{2d_m \sin \kappa_{m,n}}{\sqrt{\left(\frac{n}{m}\right)^2 \left(\frac{d_m}{d_n}\right)^2 - 2 \frac{n}{m} \frac{d_m}{d_n} \cos \kappa + 1}}, \quad \text{for } n > m.$$

This method is verified with a zinc sulphide (ZnS) crystal and the precise values of λ for the $K\alpha$ -lines of gallium are given. These measured values are compared with those obtained by Uhler and Cooksey with the help of Moseley's law as modified by Dolejšek and Pestrecov.

In the preceding part published in this Journal¹⁾ I have announced my results which give the values of the individual fictive grating constants of the zinc sulphide (ZnS) crystals. The results verify and show the special advantages of the method wherein the φ - and the κ -methods are combined for the precise determination of the grating constant of crystals. It has been shown that, by the application of this method it is possible to determine precisely the constant of crystal grating even with imperfect crystals, in as much as the said method eliminates the errors due to the defects of the crystal such as displacement. I have undertaken to determine precisely the individual fictive grating constants of the zinc

¹⁾ Swami Jnanananda, Časopis 65 (1936), 155.

First series with a displacement of 0,0015 mm.

Crystal No. II.

Table 1a.

Cu, φ_1

Plate No	Δ mm	Δ'	α	φ_t	$\Delta\varphi$ for $\Delta t^\circ \text{C}$	φ 18°C	mean value of φ 18°C
438	0,182	2' 29,4"	94° 56' 53,5"	23° 44' 50,7"	2,83"	23° 44' 53,5"	23° 44' 50,2"
439	0,179	2' 27,3"	94° 56' 55,5"	23° 44' 50,7"	3,15"	23° 44' 53,9"	
440	0,238	3' 15,4"	95° 2' 16,5"	23° 44' 45,0"	3,44"	23° 44' 48,4"	
441	0,244	3' 20,3"	95° 2' 26,5"	23° 44' 46,6"	3,28"	23° 44' 50,0"	
442	0,241	3' 17,8"	95° 2' 26,5"	23° 44' 47,2"	2,2"	23° 44' 49,4"	
443	0,262	3' 35,0"	95° 2' 27,0"	23° 44' 43,0"	2,1"	23° 44' 45,1"	
445	0,168	2' 17,9"	94° 56' 59,0"	23° 44' 49,0"	2,07"	23° 44' 51,1"	
446	0,172	2' 21,2"	94° 56' 49,0"	23° 44' 47,6"	2,51"	23° 44' 50,1"	

Table 1b.

Mo, φ_1

Plate No	Δ mm	Δ'	α	φ_t	$\Delta\varphi$ for $\Delta t^\circ \text{C}$	φ 18°C	mean value of φ 18°C
464	0,197	2' 41,7"	42° 41' 37,5"	10° 41' 4,8"	1,2"	10° 41' 6,0"	10° 41' 6,4"
465	0,207	2' 49,9"	42° 41' 35,5"	10° 41' 6,35"	0,9"	10° 41' 7,3"	
466	0,119	1' 37,7"	42° 45' 39,5"	10° 41' 5,45"	1,0"	10° 41' 6,5"	
467	0,117	1' 36,0"	42° 46' 0,0"	10° 41' 6,00"	0,9"	10° 41' 6,9"	
468	0,200	2' 44,2"	42° 41' 45,5"	10° 41' 7,4"	1,1"	10° 41' 8,5"	
469	0,199	2' 43,7"	42° 41' 44,5"	10° 41' 7,05"	1,2"	10° 41' 8,3"	
470	0,222	3' 02,2"	42° 47' 2,5"	10° 41' 0,0"	1,2"	10° 41' 1,2"	
471	0,215	2' 56,5"	42° 47' 10,0"	10° 41' 3,4"	1,1"	10° 41' 4,5"	

Table 1c.

Displacement of the crystal $\Delta \dots = 0,0015 \text{ mm}$
 $\varphi_1 \text{Cu K}\alpha_1 \dots = 23^\circ 44' 50,18''$
 $\varphi_1 \text{Mo K}\alpha_1 \dots = 10^\circ 41' 6,4''$
 $\varphi_1 \text{Cu} - \varphi_1 \text{Mo} = \alpha_1 \dots = 13^\circ 3' 43,78''$

sulphide crystal, because I use this crystal as a diffraction grating for the work in which I will show that the differential glancing angle $\kappa_{m,n}$ can be used not only for the determination of the grating constant of crystals, but also for the precise determination of the wave-lengths of X-radiation. Before I proceed to show the possibility of the said precise method of the absolute measurement of the wave-lengths, I will discuss the results of the previous parts with this in view, in the light of the results of my new measurements of the individual fictive grating constants of zinc sulphide crystals. In these new series of measurements, I have, calculating the amount of displacement with the aid of our method, readjusted the grating crystal in such a position that its Bragg's reflecting plane has

Table 2.
Representation of the first series of measurements and their results.
($\Delta = 0,0015$ mm).

$\frac{1}{2}\delta_1 = 1,2''$			
$\varphi_1\text{Cu meas.}$ 23° 44' 50,2"	$d_1 =$ 1908,81 XU	$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1\text{Cu} \sim \text{to } 1908,867 \text{ XU} \\ 23^\circ 44' 49,0'' \\ \text{corr.} \\ 13^\circ 3' 43,86'' \\ \text{corr. } d_1 = \\ 1908,866 \text{ XU} \end{array} \right.$	
mean κ_1 13° 3' 43,78"	$d_1 =$ 1908,867 XU		
$\varphi_1\text{Mo meas.}$ 10° 41' 6,4"	$d_1 =$ 1908,82 XU		
$\frac{1}{2}\delta_1 = 1,1''$			
Δ mm	mean Δ mm	$\frac{1}{2}\delta$	$\varepsilon\delta\kappa =$ $-(\frac{1}{2}\delta\text{Cu} - \frac{1}{2}\delta\text{Mo})$
Cu 0,00155	0,0015	{1,13"}	+ 0,08"
Mo 0,00145		{1,21"}	

coincided with the axis of the spectrograph as precisely as possible. Such a precision in the adjustment of an imperfect crystal cannot be obtained with the usual optical methods. In the group of measurements of the preceding part I have used different positions of the crystal, which have been away from the axis of the spectrograph from 0,015 mm to 0,05 mm. The corrections of the grating constant in these cases have been from 0,02 to 0,1 X. U. But the differences in the values derived from the glancing angle φ varied from 0,2 to 1 or more X. U. In this work I have adjusted the crystal with the mentioned process in such a way that the displacement of the reflecting plane from the axis is only 0,0015 mm. Such an adjustment can be obtained with the optical methods only in the case of perfect crystals. From the fact which can be seen in the preceding part that the displacement of 0,02 mm has an influence of approximately 0,02 X. U. in the value of the grating constant derived from the differential glancing angle κ , we note that the displacement of 0,0015 mm can have only an influence on the third decimal place of a X. U. Such a precision is however under the limits of the precision I could obtain with the spectrograph. With this adjustment of the crystal the application of the method wherein the φ - and the κ -methods are combined has no practical value, and the differential glancing angle κ in this case and in the limits of the precision gives the correct value of the grating constant. But from what I have mentioned it becomes obvious that if our spectrograph could have a scale having a precision of about 0,5" (which we could not obtain due to want of financial means) we could with the application of this method and with this adjustment of the crystal in a way guarantee the accuracy of our measurements to a thousandth part

of a X. U. (0,001 X. U.). The series of measurements and the results made with the said precise adjustment of the crystal are as in the previous part given in the Tables No. 1 (a, b, c), 2, 3 (a, b, c) and 4. From the results given in the Table No. 2 it can be seen that the values for d_1 obtained from the directly measured glancing angles φ of copper and molybdenum do not differ in the obtained limits of observation from the value d_1 derived from the differential glancing angle α , the difference between the values being 0,06 X. U. I have of course given the value of the grating constant to the third decimal of a X. U. to show that if the said precision is at our hand the derived value of d_1 from the uncorrected differential glancing angle α would be, in this case, with the kind of adjustment that I have, precise enough to the limit of 0,001 X. U.

It will now be shown how the defect only in a certain part of the reflecting plane of the crystal could enter into the value of the grating constant. Fig. 1 shows the spectrogram having two $K\alpha$ doublets, one of copper and the other of molybdenum. The spectrogram is taken for the measurement of the differential glancing angle α between $\text{Cu } K\alpha_1$ and $\text{Mo } K\alpha_1$ with the help of Siegbahn's

precise method. The difference Δ between the $K\alpha_1$ line of Cu and that of Mo is so chosen that the $K\alpha_1$ of molybdenum comes between the α_1 and α_2 of copper so that the two α_1 lines are near to each other. In this spectrogram the lines are not quite perfect and they show some irregularities in some places, which would influence the precision of the measurements of Δ . The said influence of these irregularities can be eliminated if we choose such places where the irregularities are uniform in both the lines for the measurements. In the said present series of measurements, I have tried as much as possible to obtain the reflection from the same position of the reflecting surface to avoid the errors which do not enter uniformly into either one of the expositions of each individual spectrogram.

The dispersion obtained with the zinc sulphide crystal has been

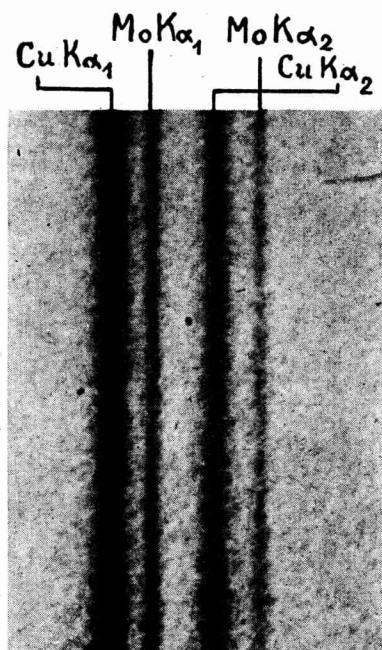


Fig. 1. ZnS-crystal (20 × enlarged).

at the said measurements very great as it can be seen from the spectrogram (Fig. 2a). This figure is an enlargement of the two $K\alpha$ doublets of Cu and Mo. The spectrogram of which this figure is an enlargement by 25 times is taken with zinc sulphide crystal, the distance slit-plate being 50 cm. If we compare the dispersion of our spectrogram (Fig. 2a) with the dispersion obtained by Valasek²⁾ at

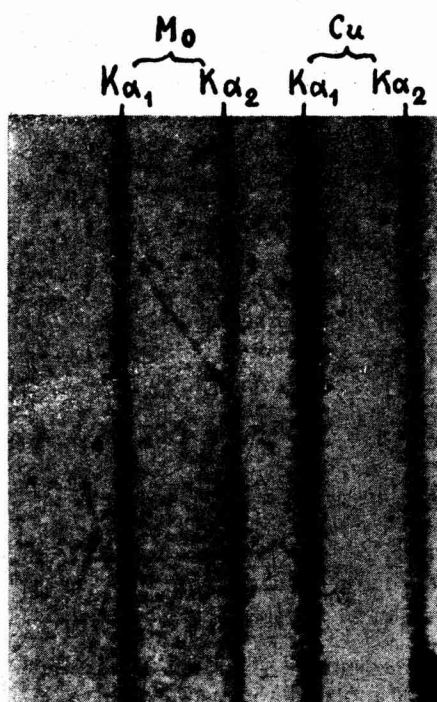


Fig. 2a. ZnS-crystal, distance slit-plate 50 cm (25× enlarged).

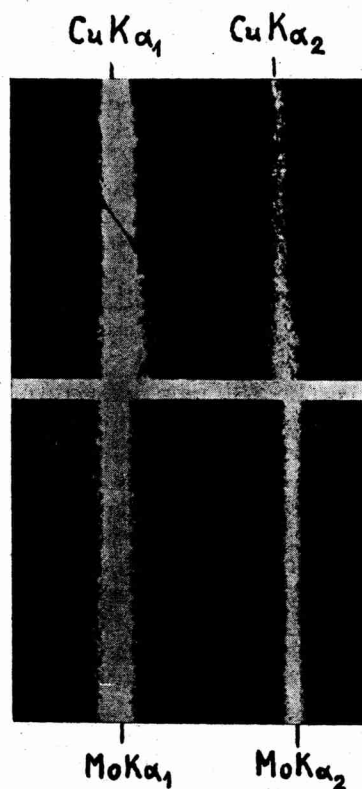


Fig. 2b. From the work of Valasek with great dispersion, distance slitplate 295 cm.

a great distance (slit-plate) of 3 metres (Fig. 2b), we see that for the copper lines the dispersion in our case is only a little less than that of Valasek and the dispersion of molybdenum lines which are sharper than the copper lines is approximately the same as that obtained by Valasek. I will at a later stage show from the spectro-

²⁾ J. Valasek, Phys. Rev. 35 (1930), 291.

gram that the zinc sulphide crystal as a diffraction grating is more advantageous for the shorter wave-lengths than for longer ones. Here I should like to point out that as a consequence of such a large dispersion with the zinc sulphide crystal we could obtain the highest possible precision in this direction.

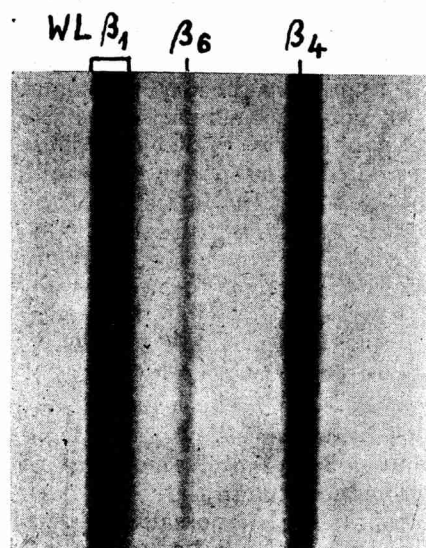
From the above discussion of the possible errors due to the irregularities in the lines and from a comparison of the values of the fictive grating constants d_1 given in the preceding part as well as the results which will be given at a later stage, it becomes evident that the precision of our measurements is limited by the systematic and accidental errors of the scale. If we note the comparison of the values of the fictive grating constant d_1 of the two said zinc sulphide crystals given in the preceding part and compare it with the results given in the Tables 1 and 2, we must say that the influence of the impurities on the values of the grating constants of both the zinc sulphide crystals is even less than what I have mentioned already (0,2—0,3 X. U.). Now in these series of measurements I have obtained for the second crystal $d_1 = 1908,87$ X. U., while the mean value of the grating constant d_1 of the first crystal is 1908,93 X. U. These values agree in the limits of the obtained precision.

Before I proceed to give the value of the fictive grating constant d_2 I should mention that I am not in a position to study and discuss the influence of the anomalous dispersion on the values of the grating constant derived from κ -method due to the inadequacy of precision of the scale of our spectrograph. The anomalous dispersion of the zinc sulphide crystal might have an influence on our results as zinc K-absorption edge from zinc sulphide crystal lies between the two wave-lengths $\text{Cu K}\alpha_1$ and $\text{Mo K}\alpha_1$ which I have used for the measurement of the grating constant of the zinc sulphide crystal. It can be concluded from the analogy of the other crystals that the said influence of the anomalous dispersion can cause only a small change in the value of the differential glancing angle κ , which we cannot verify with our obtained precision.

In connection with the anomalous dispersion, I will give here the spectrogram (Fig. 3) of the zinc K-absorption edge caused by the zinc sulphide crystal. The absorption edge just cuts through the $\text{L}\beta_1$ line of tungsten so that the line is split into two and the absorption edge of zinc appears as a white absorption line. The value of the wave-length of zinc K-absorption edge calculated from the L-tungsten lines amounts to 1280,5 X. U. when the edge of the white line is taken as the mentioned absorption edge. This value agrees with the value of the K-absorption edge of zinc free element $\lambda = 1280,5$ X. U. obtained by Dolejšek and Pestrecov,²⁾ Kievit

²⁾ V. Dolejšek-K. Pestrecov, C. R. 188 (1929), 164.

and Lindsay,⁴⁾ though the absorption edge is obtained from zinc sulphide. If we measure from the middle of the white line, we obtain the value 1280,4 X. U. From the comparison of these values of λ we can say that the difference between the values of the zinc and zinc sulphide K-absorption edges is, within the limits of observation, 0,1 X. U.



Zn K-abs.

Fig. 3. Zn K-abs. edge from ZnS-crystal, cutting the $L\beta_1$ line of tungsten ($5\times$ enlarged).

α . The use of the wave-lengths longer than those of copper is however of no value, because the lines of the longer wave-lengths especially in the second order are diffused in the case of zinc sulphide crystals. Fig. 4 is an enlarged reproduction of the spectrogram of two Mo $K\alpha$ doublets in the second order and Fig. 5 is that of two Cu $K\alpha$ doublets in the second order, both taken with the method of Siegbahn for the measurement of the glancing angle φ_2 . If we compare these two spectrograms (Fig. 4 and 5), we can see, that the zinc sulphide crystal is more advantageous for shorter wave-lengths than for longer ones.

I have mentioned in the preceding part that the value δ/λ^2 calculated from the fictive values of d_1 and d_2 is greater than the

The value of the fictive grating constant obtained from the new series of measurements which I have given in the Tables 3 (a, b, c) and 4 agrees with the value obtained from the series of measurements of the preceding part. This agreement in the two values of d_2 which is better than the agreement of the values of d_1 can be explained by the fact that the same errors of the scale in the case of greater glancing angles in the second order influence in a lesser degree the value of d than in the case of the smaller glancing angles in the first order. The adjustment of the crystal in this case has been the same as in the case of the measurements in the first order and with this kind of adjustment there is no practical value in the correction of the differential angle

⁴⁾ Kievit and Lindsay, Phys. Rev. **36** (1930), 648.

Second series with a displacement of 0 mm.

Table 3a.

Cu, φ_2

Plate No	Δ mm	Δ'	α	φ_t	$\Delta\varphi$ for $\Delta t^\circ \text{C}$	φ 18° C	mean value of φ 18° C
444	0,249	3' 24,16"	214° 36' 56,0"	53° 38' 13,0"	9,3"	53° 38' 22,3"	53° 38' 19,04"
447	0,500	6' 50,4"	214° 26' 4,0"	53° 38' 13,6"	7,1"	53° 38' 20,7"	
448	0,500	6' 50,4"	214° 26' 4,0"	53° 38' 13,6"	7,0"	53° 38' 20,6"	
449	0,396	5' 25,34"	214° 36' 55,5"	53° 37' 52,5"	6,9"	53° 37' 59,4"	
450	0,555	7' 31,32"	214° 26' 7,0"	53° 38' 24,6"	7,7"	53° 38' 32,3"	
451	0,597	8' 09,76"	214° 25' 50,0"	53° 38' 27,4"	6,6"	53° 38' 34,0"	
452	0,345	4' 43,04"	214° 36' 38,0"	53° 37' 58,7"	8,3"	53° 38' 7,0"	
453	0,232	3' 10,26"	214° 36' 37,5"	53° 38' 21,8"	8,4"	53° 38' 30,2"	
454	0,522	7' 08,76"	214° 26' 41,0"	53° 38' 27,4"	7,7"	53° 38' 35,1"	
455	0,450	6' 09,4"	214° 36' 56,5"	53° 38' 41,8"	7,0"	53° 37' 48,8"	

Table 3b.

Mo, φ_2

Plate No	Δ mm	Δ'	α	φ_t	$\Delta\varphi$ for $\Delta t^\circ \text{C}$	φ 18° C	mean value of φ 18° C
456	0,252	3' 27,3"	86° 59' 5,5"	21° 45' 38,2"	2,6"	21° 45' 40,8"	21° 45' 46,04"
457	0,249	3' 24,4"	86° 59' 15,0"	21° 45' 39,9"	2,7"	21° 45' 42,6"	
458	0,181	2' 28,6"	87° 5' 19,0"	21° 45' 42,6"	2,6"	21° 45' 45,2"	
459	0,185	2' 31,8"	87° 5' 23,0"	21° 45' 42,8"	2,1"	21° 45' 44,9"	
460	0,301	4' 07,1"	86° 59' 14,5"	21° 45' 50,4"	2,5"	21° 45' 52,9"	
461	0,272	3' 43,3"	86° 59' 14,5"	21° 45' 44,45"	1,9"	21° 45' 46,4"	
462	0,183	2' 30,6"	87° 5' 16,5"	21° 45' 41,475"	2,5"	21° 45' 44,0"	
463	0,202	2' 45,8"	87° 5' 59,0"	21° 45' 48,8"	2,7"	21° 45' 51,5"	

Table 3c.

Displacement of the crystal $\Delta \dots = 0$ mm (not estimable)

$\varphi_2 \text{Cu } K\alpha_1 \dots = 53^\circ 38' 19,04''$

$\varphi_2 \text{Mo } K\alpha_1 \dots = 21^\circ 45' 46,04''$

$\varphi_2 \text{Cu} - \varphi_2 \text{Mo} = \kappa_2 \dots = 31^\circ 52' 33''$

Representation of the second series of measurements and their results (Δ cannot be estimated).

Table 4.

$\varphi_2 \text{Cu meas.}$	$d_2 =$
53° 38' 19,0"	1909,11 XU
mean κ_2	$d_2 =$
31° 52' 33"	1909,11 XU
$\varphi_2 \text{Mo meas.}$	$d_2 =$
21° 45' 46,0"	1909,11 XU

value derived theoretically from the physical data. From these new measurements we obtain from the values of d_1 and d_2 the value of $\delta/\lambda^2 = 11,5 \cdot 10^{-12}$. It is greater than the value of δ/λ^2 derived from the density ($5,2 - 5,7 \cdot 10^{-12}$) or that derived from the number of

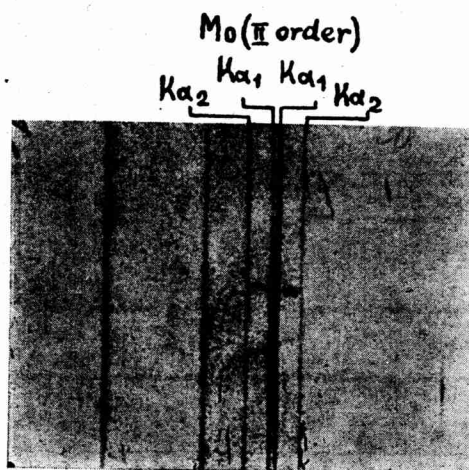


Fig. 4. ZnS-crystal ($6 \times$ enlarged).

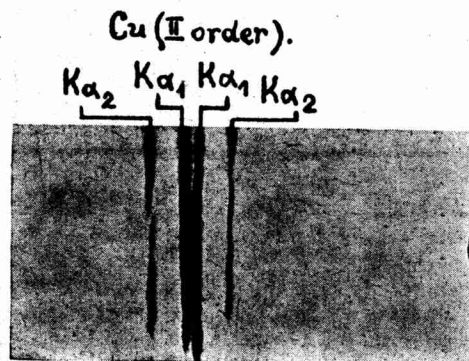


Fig. 5. ZnS-crystal ($6 \times$ enlarged).

the wave-lengths used. The value of δ/λ^2 can be derived from d_1 and $d_{1,2}$ by means of the Kunzl-Köppel's equation⁵):

$$\frac{\delta}{\lambda^2} = \frac{d_{1,2} - d_1}{3d^3} \cdot \frac{5 - 4 \cos \kappa_{1,2}}{4 - 2 \cos \kappa_{1,2}},$$

⁵) V. Kunzl-J. Köppel, C. R. 196 (1933), 787; 196 (1933), 940; Časopis 68 (1934), 109; Journ. de Phys. 5 (1934), 145.

electrons in a cubic centimeter of the crystal ($5,3 \cdot 10^{-12}$). The value of δ/λ^2 obtained from my measurements corresponds to a difference $d_2 - d_1 = 0,24 \text{ X. U.}$ This difference is very small and any small change in the values of d_1 and d_2 due to the errors of measurements causes proportionally very great change in the value of δ/λ^2 . The errors of the scale manifest themselves in another magnitude in the value of δ/λ^2 if we derive it from the fictive grating constants $d_{m,n}$ with the help of the already mentioned Kunzl-Köppel's equation. For molybdenum we obtain from our measurements $d_{1,2} = 1909,32 \text{ X. U.}$ while for copper we have $d_{1,2} = 1909,23 \text{ X. U.}$ The difference ($d_{1,2} - d_1$) between the fictive grating constants $d_{1,2}$ and d_1 is greater than the difference ($d_2 - d_1$) between the fictive grating constants d_2 and d_1 and depends upon

from which we obtain for copper $\delta/\lambda^2 = 11,7 \cdot 10^{-12}$ and for molybdenum $\delta/\lambda^2 = 14,6 \cdot 10^{-12}$.

The discussion of the precision of the above mentioned values of δ/λ^2 can be made after having derived the real grating constant with the help of the obtained values of δ/λ^2 . From d_1 and with $\delta/\lambda^2 = 11,7 \cdot 10^{-12}$ we have $d_\infty = 1909,20$ X. U.; putting $\delta/\lambda^2 = 14,6 \cdot 10^{-12}$ we obtain $d_\infty = 1909,28$ X. U. The difference between these two values of d_∞ is 0,08 X. U. This difference can be ascribed not only to the accidental errors but also to the systematic errors of the scale. From these various considerations we come to the conclusion that the systematic errors of the scale have greatly influenced the value of δ/λ^2 obtained from the data of molybdenum and that they have similarly influenced the value of δ/λ^2 derived from my other measurements and that therefore the value of δ/λ^2 derived from my measurements differs from the theoretical value. I have tried to measure the fictive grating constant $d_{1,2}$ of the mentioned ZnS crystal with $\text{NiK}\alpha$ lines, which after Kunzl-Köppel's equation is expected to agree with the real grating constant, and I have obtained the value 1909,20 X. U. which agrees well with the above mentioned value of the real grating constant d_∞ . I cannot however draw any further conclusions from this agreement as the lines of nickel in the second order are very much diffused.

Now when we compare the different measurements of each individual series we see that the error of the angle measured in the same place of the scale is approximately 0,5". But the systematic error of the scale amounts to some seconds and as an example, I mention that the values of the differential glancing angles measured on the left and on the right sides of the slit have differed by an amount of nearly 4". Though I tried to avoid measuring with such parts of the scale which would seem to be contributing great errors, the systematic errors of the scale which have entered in my measurements are such that they alone have caused a difference between the theoretical and the measured values δ/λ^2 . For a further application of the differential glancing angle α I have used the measured values of the fictive grating constants. To diminish the influence of the said systematic errors of the scale I have measured the differential glancing angle for the proposed application almost with the same part of the scale with which the angles for the determination of the fictive grating constants in the last group have been measured.

Here I give in the Table No. 5 the values of the fictive grating constants of the zinc sulphide crystal which I have obtained and whose precision can be said to be amounting to 0,04 X. U.

Table 5.

ZnS-crystal.

$$\left. \begin{array}{l} d_1 = 1908,87 \text{ X. U.} \\ d_2 = 1909,11 \text{ X. U.} \end{array} \right\} d_\infty = 1909,20 \text{ X. U.}$$

$$\text{Ni } d_{1,2} = d_\infty = 1909,20 \text{ X. U.}$$

$$\text{Cu } d_{1,2} = 1909,23 \text{ X.U. } d_\infty = 1909,2 \text{ X. U.}$$

$$\text{Mo } d_{1,2} = 1909,32 \text{ X.U. } d_\infty = 1909,28 \text{ X. U.}$$

In the preceding parts, I have given a method wherein the φ - and the κ -methods are combined for the determination of the grating constant of crystals. In this method it could be possible only to use two wave-lengths in the same order as was done by Valouch⁶⁾ and Bouchal-Dolejšek.⁷⁾ In the said method wherein the φ - and the κ -methods are combined it is not possible to make use of the same wave-length in two different orders as was done by Kunzl-Köppel⁸⁾ in the manner of Pavelka.⁹⁾

Just as the differential glancing angle κ is used for the precise determination of the constant of crystal grating with special advantages, it can also be used with similar advantages for the determination of the wave-lengths of X-radiation. For the absolute measurement of the said wave-lengths, it is not possible to measure the differential glancing angle κ from two wave-lengths in the same order. This is however possible only for relative measurements in a manner analogous to the method of Lang.¹⁰⁾ He has precisely measured in this way the chief lines of the K-series of some of the elements relatively to the $K\alpha_1$ of copper. Schrör¹¹⁾ has measured with the same method some of the lines of L-series with reference to Cu $K\alpha_1$ which is used as normal.

For the absolute measurement of the wave-lengths of X-radiation it is only possible to measure the differential glancing angle $\kappa_{m,n}$ of the same wave-length in two different orders m and n ($n < m$). Such a determination of the wave-lengths from $\kappa_{m,n}$ is, in a way, an analogue of the Kunzl-Köppel's method for the determination of the grating constant of crystals. Kunzl and Köppel in working out their method have shown that there exists a difference between the fictive grating constants derived from the angle φ and those derived from the angle $\kappa_{m,n}$. It was shown that

⁶⁾ M. A. Valouch, Bull. de l'Acad. de Sc. de Bohême 28 (1927), 31.

⁷⁾ F. Bouchal-V. Dolejšek, C. R. 199 (1934), 1054; Časopis 65 (1935), 34.

⁸⁾ V. Kunzl-J. Köppel, C. R. 196 (1933), 787; 196 (1933) 940; Časopis 63 (1934), 109; Journ. de Phys. 5 (1934), 145.

⁹⁾ A. Pavelka, Bull. de l'Acad. de Sc. de Bohême 28 (1927), 442.

¹⁰⁾ K. Lang, Ann. d. Phys. 75 (1924), 489.

¹¹⁾ J. Schrör, Ann. d. Phys. 80 (1926), 297.

the fictive grating constants derived from the differential glancing angle κ in two different orders of the same line, where

$$\kappa = \varphi_n^* - \varphi_m^* \text{ for } n > m, \quad (\text{A}')$$

are not functions of each individual index separately as it is in the case of

$$m\lambda = 2d_m \sin \varphi_m, \quad (1)$$

$$n\lambda = 2d_n \sin \varphi_n, \quad (2)$$

where

$$\kappa = \varphi_n - \varphi_m, \quad (\text{A})$$

φ_m and φ_n being directly measured glancing angles, but are the functions of both indices, m and n simultaneously. In this case, therefore, the Bragg's law must be expressed thus:

$$m\lambda = 2d_{m,n} \sin \varphi_m^*, \quad (1')$$

$$n\lambda = 2d_{m,n} \sin \varphi_n^*. \quad (2')$$

From the original equation of Bragg, Pavelka¹²⁾ has deduced an equation showing the relation between φ and κ which runs thus:

$$\sin \varphi_m = \frac{m\lambda}{2d} = \frac{\sin \kappa}{\sqrt{\left(\frac{n}{m}\right)^2 - 2 \frac{n}{m} \cos \kappa + 1}} \quad (3)$$

$$d = \frac{m\lambda}{2 \sin \varphi_m}.$$

This equation, as the original equation of Bragg, does not hold precisely true. Kunzl and Köppel¹³⁾ however having grasped the difference between φ^* and φ , which I have already pointed out, have deduced the following equation which gives the relation between φ^* and κ and from which precise values of the fictive grating constants can be derived:

$$\sin \varphi_m^* = \frac{m\lambda}{2d_{m,n}} = \frac{\sin \kappa}{\sqrt{\left(\frac{n}{m}\right)^2 - 2 \frac{n}{m} \cos \kappa + 1}} \quad (3')$$

$$d_{m,n} = \frac{m\lambda}{2 \sin \varphi_m^*}.$$

From the equations (1'), (3') and the Kunzl-Köppel's equation expressing the direct connection between the fictive grating constants $d_{m,n}$, d_m and d_n :

¹²⁾ A. Pavelka, loc. cit.

¹³⁾ V. Kunzl-J. Köppel, loc. cit.

$$d_{m,n} = d_m \sqrt{\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^2 - 2 \frac{n}{m} \cos \kappa + 1}{\left(\frac{n}{m}\right)^2 \left(\frac{d_m}{d_n}\right)^2 - 2 \frac{n}{m} \frac{d_m}{d_n} \cos \kappa + 1}}$$

I have derived an equation for the precise determination of the wave-lengths, which needs the measurement of the differential glancing angle κ , of the same wave line in two different orders m and n and the fictive grating constants d_m and d_n . It runs:

$$m\lambda = \frac{2d_m \sin \kappa_{m,n}}{\sqrt{\left(\frac{n}{m}\right)^2 \left(\frac{d_m}{d_n}\right)^2 - 2 \frac{n}{m} \frac{d_m}{d_n} \cos \kappa + 1}}$$

AgK α_1 , AgK α_2 (1st order)
AgK α_1 , AgK α_2

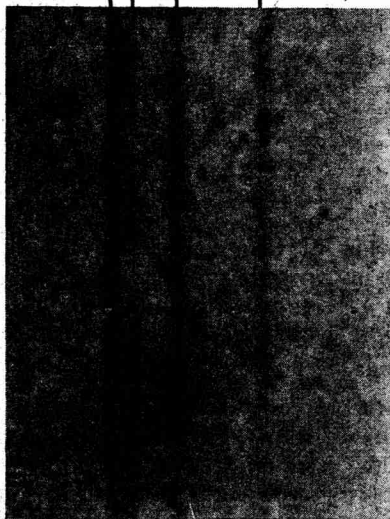


Fig. 6. ZnS-crystal, distance slit-plate 50 cm (25 $\times$ enlarged).

Now in order to verify this equation I have measured the wave-length λ of K α_1 of Ag which has been measured precisely by different authors. I have also measured the K α_1 line of Ga which has been until now measured only by one author and the measured data are not sufficient. I give here a series of measurements of the differential glancing angle κ of Ag K α_1 in the Table No. 6. The value of the wave-length of Ag K α_1 558,11 X. U. is derived from the use of the measured angle κ and the mentioned values of the fictive grating constants d_m and d_n of the zinc sulphide crystal. The silver lines obtained with zinc sulphide have been very sharp and we could with the obtained dispersion and with our method guarantee the precision of our values of λ to the third decimal place of a X. U. From the spectrogram of the Ag K α_1 lines in the first

and in the second orders for $\kappa_{1,2}$ measurements given in the Fig. No. 6 it can be seen, that the use of zinc sulphide crystal as a diffraction grating for this region of shorter wave-lengths is very advantageous. But as the differential glancing angle κ is small and as the mentioned errors of the scale influence the value of the measured

glancing angle, which is comparatively small, we can only say that the said value of λ of Ag $K\alpha_1$ agrees within the limits of the obtained precision and observation with the values determined by different authors mentioned in the Table No. 6.

Table 6.

A series of measurements of the differential glancing angle $\kappa_{1,2}$ of silver (Ag $K\alpha_1$).

Plate No	Δ mm	Δ'	α	$\kappa_{1,2}; t$	$\Delta\kappa$ for $\Delta t^\circ \text{C}$	κ 18°C	mean value of κ 18°C
473	0,138	1' 53,3"	17° 12' 50,0"	8° 35' 28,3"	0,99"	8° 35' 29,3"	8° 35' 31,0"
480	0,167	2' 17,1"	17° 8' 43,0"	8° 35' 30,1"	0,83"	8° 35' 30,9"	
482	0,197	2' 41,7"	17° 8' 20,0"	8° 35' 30,9"	1,17"	8° 35' 32,1"	
484	0,129	1' 45,6"	17° 12' 48,0"	8° 35' 31,2"	0,61"	8° 35' 31,8"	

From Ag $K\alpha_1$ differential glancing

angle $\kappa_{1,2} = 8^\circ 35' 31,0''$;
 and ZnS crystal $d_1 = 1908,87 \text{ XU}$,
 $d_2 = 1909,11 \text{ XU}$ } Ag $K\alpha_1 \lambda = 558,11 \text{ XU}$
 Lang (rel. to Cu $K\alpha_1$) ... 558,18 XU
 Leide 558,21 XU
 Edlen 558,28 XU.

Another verification of this method I give through the measurement of the wave-length of gallium $K\alpha_1$ whose glancing angle φ and the differential glancing angle $\kappa_{m,n}$ are comparatively greater than those of Ag and the errors of the scale have smaller influence on the wave-length λ of $K\alpha_1$ of gallium than in the case of silver. The obtained gallium lines have been sharp enough for the precise measurements. These measurements and the results are given in the Table No. 7a and 7b. In the Table No. 7a we have a series of measurements of the glancing angle φ_1 and in the Table No. 7b a series of measurements of the differential glancing angle $\kappa_{m,n}$. From the angle φ I have obtained a value of λ for Ga $K\alpha_1 = 1337,19 \text{ X. U.}$ and from the differential glancing angle $\kappa_{m,n}$ a value of $\lambda = 1337,35 \text{ X. U.}$ In these measurements with the said adjustment of the crystal the influence of the errors of the scale is greater than the influence of the error due to the displacement of the reflecting plane of the grating crystal. But in the measurements of the differential glancing angle $\kappa_{m,n}$, though the influence of the errors of the scale is similar to that in the measurement of the glancing angle φ , the errors of the adjustment of the crystal are very much diminished in the value of the wave-length derived from the differential glancing angle $\kappa_{m,n}$. Therefore the value

A series of measurements of the glancing angle φ_1 of Ga $K\alpha_1$.

Table 7a.

Plate No	Δ mm	Δ'	α	φ_t	$\Delta\varphi$ for $\Delta t^\circ \text{C}$	φ 18°C	mean value of φ 18°C
500	0,337	4' 36,6"	82° 4' 56,5"	20° 30' 05,0"	2,60"	20° 30' 07,6"	20° 30' 11,0"
501	0,311	4' 15,3"	82° 4' 59,0"	20° 30' 10,9"	2,38"	20° 30' 13,3"	
502	0,241	3' 17,8"	81° 57' 20,0"	20° 30' 09,5"	2,13"	20° 30' 11,6"	
503	0,246	3' 21,9"	81° 57' 22,0"	20° 30' 11,0"	2,28"	20° 30' 13,3"	
504	0,254	3' 59,7"	82° 4' 25,5"	20° 30' 06,5"	2,03"	20° 30' 08,5"	
505	0,269	3' 40,8"	82° 4' 22,5"	20° 30' 10,4"	2,25"	20° 30' 12,7"	
506	0,238	3' 15,4"	81° 57' 20,0"	20° 30' 08,9"	2,35"	20° 30' 11,3"	
507	0,231	3' 09,6"	81° 57' 20,0"	20° 30' 07,4"	2,30"	20° 30' 09,7"	

From Ga $K\alpha_1$ $\varphi_1 = 20^\circ 30' 11,0$;
and ZnS crystal $d_1 = 1908,87 \text{ XU}$ } Ga $K\alpha_1$ $\lambda = 1337,19 \text{ XU}$

A series of measurements of the differential glancing angle $\kappa_{1,2}$ of Ga $K\alpha_1$.

Table 7b.

Plate No	Δ mm	Δ'	α	κ_t	$\Delta\kappa$ for $\Delta t^\circ \text{C}$	κ 18°C	mean value of κ at 18°C
485	0,283	3' 52,3"	47° 51' 58,1"	23° 57' 50,2"	4,02"	23° 57' 54,2"	23° 57' 44,4"
486	0,255	3' 29,3"	47° 51' 49,1"	23° 57' 39,2"	4,50"	23° 57' 43,7"	
490	0,201	2' 45,0"	47° 58' 21,4"	23° 57' 48,2"	4,80"	23° 57' 53,0"	
491	0,249	3' 24,4"	47° 52' 01,6"	23° 57' 43,0"	4,60"	23° 57' 47,6"	
492	0,250	3' 25,2"	47° 58' 25,6"	23° 57' 30,2"	3,50"	23° 57' 33,7"	
493	0,219	2' 59,8"	47° 58' 28,6"	23° 57' 44,4"	3,05"	23° 57' 47,5"	
494	0,250	3' 25,2"	47° 58' 35,6"	23° 57' 35,2"	3,50"	23° 57' 38,7"	
495	0,250	3' 25,2"	47° 58' 36,0"	23° 57' 35,4"	4,26"	23° 57' 39,7"	
496	0,243	3' 19,5"	47° 51' 55,9"	23° 57' 37,7"	3,80"	23° 57' 41,5"	

From Ga $K\alpha_1$ differential glancing angle
 $\kappa_{1,2} = 23^\circ 57' 44,4$;
and ZnS crystal $d_1 = 1908,87 \text{ XU}$,
 $d_2 = 1909,11 \text{ XU}$ } Ga $K\alpha_1$ $\lambda = 1337,35 \text{ XU}$

$\lambda = 1337,35 \text{ X. U.}$ derived from the differential glancing angle $\kappa_{m,n}$ is taken as the precise value of the wave-length of gallium $K\alpha_1$. Uhler and Cooksey¹⁴⁾ have obtained $\lambda = 1337,15 \text{ X. U.}$ In their determination of the said value of λ they have taken a value for the grating constant of calcite (CaCO_3) other than the usual value which is used for the precise determination of the wave-lengths of other elements. Siegbahn¹⁵⁾ has recalculated this value with the

¹⁴⁾ H. S. Uhler-C. D. Cooksey, Phys. Rev. 10 (1917), 645.

¹⁵⁾ M. Siegbahn, Spektroskopie, Berlin, 1931.

normal value of the grating constant $d_1 = 3029,04$ X. U. and has obtained 1337,8 X. U. Just either one of these two values of Uhler and Cooksey shows a discontinuity from the values given in its neighbourhood after Moseley's law. The values obtained from Uhler and Cooksey, therefore, must have a certain discrepancy. The precision of these values as well as that of the values which I have obtained from the glancing angle φ and the differential glancing angle $\kappa_{m,n}$ can be compared with the help of Moseley's law.

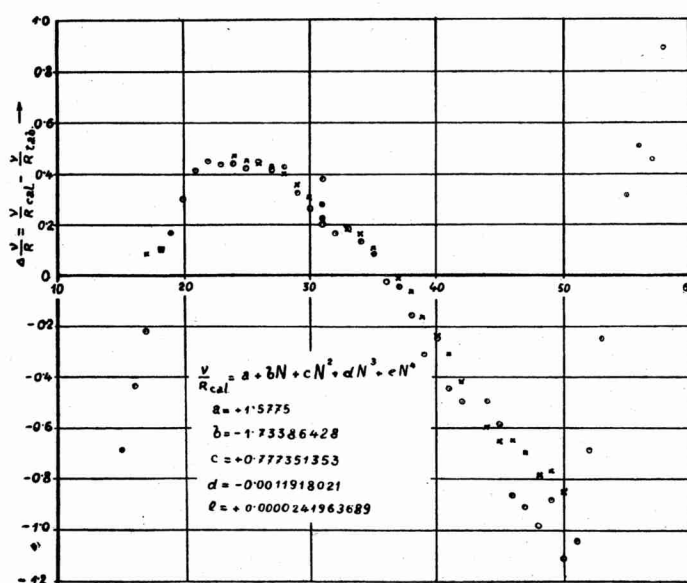


Fig. 7.

For a crucial test of the precision of the measurements of λ Ga $K\alpha_1$ I have made use of the Moseley's law after the modification of Dolejšek-Pestrecov.¹⁶⁾ Dolejšek and Pestrecov have utilized the equation:

$$\frac{\nu}{R} = a + bN + cN^2 + dN^3 + eN^4,$$

¹⁶⁾ V. Dolejšek-K. Pestrecov, C. R. 188 (1929), 164; Zs. f. Phys. 53 (1929), 566.

V. Dolejšek-K. Pestrecov, l. c. and Phys. Zs. 30 (1929), 898.

K. Pestrecov, Publications de la fac. des Sc. de l'univ. Charles, No. 90, 1929.

V. Kunzl, Publications de la fac. des Sc. de l'univ. Charles, No. 180, 1930.

where N is the atomic number and a, b, c, d and e are constants which are so determined that the equation holds true for the elements of the group of rare gases. It is with this equation, that the values of ν/R are calculated for the other elements. The difference between these calculated values and the values derived from the direct measurements are taken as the functions of the atomic numbers. With this modification we have thus a schematic course and the precision of the measurements can be tested very well through the survey of each and every discontinuity in the said course. In the Fig. 7, I give in the above mentioned system the graphical representation of the values $\Delta(\nu/R)$ between the measured values and the calculated values $\Delta(\nu/R) = \nu/R_{\text{calc.}} - \nu/R_{\text{mes.}}$, as a function of the atomic number. From this graph it can be seen for gallium and its neighbourhood that the value of λ obtained from φ_1 of Ga $K\alpha_1$ lies in the curve course of the older measurements which are signified by small circles. The value of λ obtained through $\kappa_{1,2}$ lies on the curve obtained from the latest measurements, marked with the symbols of multiplication. I have denoted my measurements of gallium with black circular dots. Though the precision of our measurements has been limited by the precision of the scale, the value obtained with our method is of such a precision which is obtained only by the latest methods of precise measurements.

Now from these observations it can be seen that the value of the wave-length obtained through κ is more precise than that obtained from φ . A further test of the precision of this value of λ of Ga $K\alpha_1$ is also possible by new precise measurements of its neighbouring element germanium (Ge, atomic number 32) for which there is only one older value by Leide.¹⁷⁾ From this graph it can further be seen that in this region of elements for $K\alpha_1$ -lines with our value of the λ of Ga $K\alpha_1$ obtained from $\kappa_{1,2}$ there exists no discontinuity greater than nearly 0,05 X. U.

In relation to the value of λ of Ga $K\alpha_1$ which I have obtained from the differential glancing angle $\kappa_{1,2}$ I have measured the wave-length of Ga $K\alpha_2$. From the measurements I have obtained the difference $\Delta\varphi = 3' 47,0''$ which corresponds to $\Delta\lambda = 3,94$ X. U. Thus the following values of λ are obtained for gallium

$$K\alpha_1 = 1337,35 \text{ X. U.}$$

$$K\alpha_2 = 1341,29 \text{ X. U.}$$

From the test of the precision of the measurements of λ of $K\alpha_1$ obtained from $\kappa_{1,2}$, as can be noted from the above mentioned graph, it becomes evident that the use of the differential glancing angle κ for the measurement of the wave-lengths offers the same

¹⁷⁾ Leide, Dissert. Lund, 1925.

advantages in diminishing or eliminating the errors due to the displacement of the Bragg's reflecting plane from the axis of the spectrograph as in the case of the measurements of the constants of crystal grating as it has been already shown. If we compare from the graph the $\Delta(\nu/R)$ of the older values of the elements at. number 30 and 32 which are the neighbouring elements of Ga (at. number 31) we note that they differ from the new and more precise values given by the Siegbahn's school by about 0,1 X. U. From these facts which I have mentioned it becomes obvious that such a difference can be caused also in the case of a perfect crystal through a small displacement error (some thousandths of millimetre) in the adjustment.

This research work, the results of which I have announced in these pages of this Journal, has been carried in the Spectroscopic Institute of Prof. Dr. V. Dolejšek (Charles University, Prague), to whom I offer my sincerest thanks not only for receiving me cordially as a research scholar in his laboratory, but also for kindly putting all the necessary requisites for my experimental work at my disposal.

*

Aplikace metody vzniklé kombinací metod φ a κ na určení mřížkové konstanty.

(Obsah předešlého článku.)

Výsledků uvedených v předešlé části, kde se zabýval měřením fiktivních mřížkových konstant, použil autor k přesné justaci Braggovy odrazové roviny do osy spektrografu. Tímto způsobem podařilo se mu docílit toho, že odchylka Braggovy roviny reflexe od osy spektrografu byla asi 0,001 mm. Tohoto postavení krystalu lze dosáhnouti pomocí optické metody jen u krystalů s bezvadnými reflektujícími plochami. S ním provedl autor nová měření fiktivních konstant sfaleritu. Při diskusi výsledků měření ukázal, že přesnost měření byla omezena jediné přesností škály, a kdyby maximální chyba škály byla 1", bylo by možno pomocí této metody zaručiti přesnost mřížkových konstant na 0,001 X jednotek.

V další části ukázal autor, že lze měřením rozdílového úhlu κ téže linie ve dvou různých řádech stanovit absolutní hodnoty vlnových délek linií ze vzorce

$$m\lambda = \frac{2d_m \sin \kappa_{m,n}}{\sqrt{\left(\frac{n}{m}\right)^2 \left(\frac{d_m}{d_n}\right)^2 - 2 \frac{n}{m} \frac{d_m}{d_n} \cos \kappa_{m,n} + 1}}$$

Tento vzorec verifikoval autor experimentálně měřením čar $K\alpha$

u stříbra a galia. V diskusi výsledků ukázal, že užití metody κ pro měření vlnových délek má tytéž výhody jako pro měření mřížkových konstant. Způsob měření linií autorem udaný vychází z metody Kunzlovy a Köpplovy pro přesná měření mřížkových konstant.

Aplikace metody na měření mřížkových konstant pomocí dvou linií v témže řádě, jak ji udali Valouch, Bouchal a Dolejšek, není pro absolutní měření vlnových délek možná, nýbrž lze ji užít jen pro měření relativní, podobně jak to učinili Lang a Schrör precisním měřením linií relativně k $\text{Cu K}\alpha$ jako normálu.

Pomocí Dolejškovy a Pestrecovy modifikace Moseleyova zákona srovnává autor hodnoty, které měřil pro $\text{Ga K}\alpha_1$ ($\lambda = 1337,35$) a $\text{K}\alpha_2$ ($\lambda = 1341,29$) s hodnotami sousedních prvků a s hodnotami $\text{Ga K}\alpha$, které měřili Uhler a Cooksey. Ukazuje, že hodnoty stanovené metodou κ souhlasí s nejnovějšími přesnými hodnotami sousedních prvků.

Šířka Luny v klínopisné tabulce Kidinnu-ově.

Dr. Arnošt Dittrich, Stará Ďala.

(Došlo dne 1. října 1935.)

Sloupec věnovaný v tabulce Kidinnu-ově šířce Luny vyjádříme cosinem, čímž se zbavíme chyb, jež jsou od archaické početní techniky Babyloňanů. Pak můžeme pomocí tabulky předpovídati zatmění. Nalezneme dvě, jež jsou ob jednu lunaci od sebe. Z babylonských délek Luny určíme si přibližnou dobu roční těchto dvou zatmění a hledáme je pak v Oppolzerově „Canonu“. Nalezneme čtyři data ob saros od sebe vzdálená. Právě datum vybereme z nich dvojí cestou: jednak z okolnosti, že první zatmění padlo na 28 Arah-samna babylonského kalendáře, jednak z okolnosti, že v tabulce Kidinnu-ově objevuje se jednou Elul II. Obě cesty vedou k témuž datu, jež se shoduje s epochou, kterou udává okraj tabulky v éře Arsasovců i Seleukovců. Též ostatní zatmění z tabulky předpověděná shodují se svými intervaly přesně s Oppolzerovým „Canonem“. Tabulka vyjadřuje šířku Luny uspokojivým způsobem.

Znalost šířky je důležitá pro předpovídání zatmění slunečních a měsíčních. Padne-li nov měsíční blízko uzlu, lze čekati zatmění slunce. Stojí-li úplněk blízko uzlu, lze čekati zatmění měsíce. Na Kidinnuově tabulce nového světla¹⁾ nalézá se sloupec věnovaný šířce Luny bezprostředně za sloupcem D pro poloviční noc a před sloupcem F pro rychlost Luny. Je to sloupec E z tab. 1.

Všimněme se babylonských slůvek num (= eliš, t. j. severně, nahore) a sik (= šapliš, t. j. jižně, dole). To je náhrada našich znamének + a —. Nulla, průchod uzlem označen slovem bar (bod průchodní, uzel).

Původně pozorovalo se bez nástrojů. Jak mohl takový pozorovatel stanoviti šířku Luny? — To není jinak možno, než když mu ekliptika nějakým způsobem je dána. Zhruba lze večer na modrém nebi určití ekliptiku pomocí planet (na př. Venuše a Jupi-

¹⁾ Viz články: „Matematické prostředky babylonských astronomů“. Časopis 63 (1933), 17. — „Náhrada astronomických tabulek babylonských trigonometrickými vzorci“. Časopis 63 (1934), 82.

Tab. 1.

Z tab. pro nové světlo Luny*) č. 272, 81-7-6.

No.	<i>E</i>				<i>e*</i>
0.					
1.	6	5	30	sik	— 4,28°
2.	9	46	30	sik	— 4,94
3.	5	54		sik	— 4,21
4.	2	1	30	sik	— 2,31
5.	1	51		bar	+ 0,24
6.	2	43	30	num	+ 2,72
7.	6	36		num	+ 4,44
8.	9	16		num	+ 4,92
9.	5	33	30	num	+ 4,02
10.	1	31		num	+ 2,00
11.	2	21	30	bar	— 0,58
12.	3	14	0	sik	— 3,00
13.	7	6	30	sik	— 4,19
14.	8	45	30	sik	— 4,88
15.	4	53		sik	— 3,81
16.	1	0	30	sik	— 1,68
17.	2	52		bar	+ 0,92
18.	3	44	30	num	+ 3,27
19.	7	37	0	num	+ 4,70
20.	8	15		num	+ 4,81
21.	4	22	30	num	+ 3,58
22.	0	30	0	num	+ 1,35
23.	3	22	30	bar	— 1,26
24.	4	15	0	sik	— 3,52
25.	8	7	30	sik	— 4,79
26.	7	44	30	sik	— 4,73
27.	3	52	0	sik	— 3,34
28.	0	0	30	bar	— 1,01
29.	0	53		num	+ 1,59
30.	4	45	30	num	+ 3,75
31.	8	38		num	+ 4,87
32.	7	14		num	+ 4,61
33.	3	21	30	num	+ 3,07
34.	0	31	0	bar	+ 0,67
35.	1	23		sik	— 1,92
36.	5	16		sik	— 3,97
37.	9	8	30	sik	— 4,91
38.	6	43	30	sik	— 4,48
39.	2	51		sik	— 2,89

*) Kugler: Mondrechnung. 12, 13.

tera) a slunce na obzoru. Zavřeme jedno oko a napneme pro druhé šňůru tak, aby procházela co nejtěsněji mezi planetami jdouc přesně středem kotouče slunečního. Tak dostaneme přibližnou polohu ekliptiky a je-li měsíc vidět, máme i úsudek o jeho šířce. Přesněji lze dostati ekliptiku na nočním nebi. Lze určit rovnou její polohu vůči stálícím. Při dlouho trvajícím úplném zatmění měsíce stojí Luna, když je nejhloub vnořena do stínu země, skoro v uzlu, a tedy i v ekliptice. Poloha ztmělého měsíce vůči stálícím určuje tedy i jeden bod ekliptiky na klenbě nebeské. Každé další takové zatmění poskytne i další bod na hvězdném nebi, jímž ekliptika prochází. Tak lze časem zjistiti polohu ekliptiky vůči stálícím. Pozorovatel, jenž zná polohu ekliptiky, může ji kdykoliv pro své oko realizovati napnutou bílou šňůrou, jež se mu do ní promítá. Pak může průměr Luny užiti jako míry a odhadnouti, jak daleko v této míře stojí Luna od ekliptiky. Při přepočítání na naši míru úhlovou položí se průměr Luny roven polovině obloukového stupně. To pro odhadovou metodu stačí.

Taková nějaká prostá měření tušíme za sloupcem E. — Odložme pro začátek interpretaci sloupce a studujme jej jen jako oscilaci neznámé veličiny, jež vyjádřena po babylonském způsobu aritmetickou řadou. Užijeme techniku, kterou jsem podrobně vysvětlil v článku, „Matematické prostředky babylonských astronomů“. Psaní čísel v sloupci E z tab. 1 jest šedesátičné. Jednotka prozatím není známa. Vyjma tam, kde je jednoduchá či dvojitá čára nalezneme obecně tutéž diferenci $3^I 52^{II} 30^{III}$, kde římské cifry nahoře mají obdobný význam jako úhlové značky $^{\circ} '' ''$.²⁾ Volíme římské značky, protože hodnota jejich pro začátek není nám známa. Víme jen, že

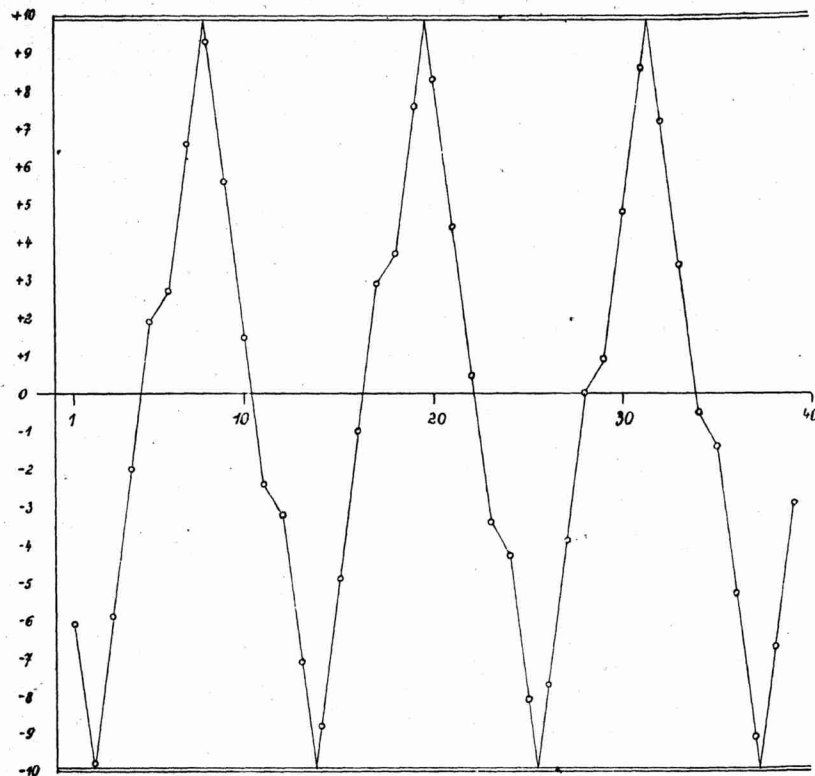
$$1^I = 60^{II}, 1^{II} = 60^{III}.$$

Ale jakou úhlovou měrou jest 1^I prozatím nevíme. Nevíme ani, je-li to vůbec míra úhlová. Toho se jen per analogiam dohadujeme.

Kde jest jednoduchá neb dvojitá čára v tab. 1 sloupce E, nalezneme obvyklou početní technikou Babyloňanů ideální (záporné) minimum neb (kladné) maximum. Absolutní hodnoty obou extrémů se shodují a činí $9^I 52^{II} 15^{III}$. Jen u členů následujících po znamení bar objeví se důsledně difference $0^I 52^{II} 30^{III}$ místo $3^I 52^{II} 30^{III}$, tedy hodnota o 3^I sražená. To je něco nového. Zjednejme si graf tabulky E, abychom tuto zvláštnost přehlédlí. Viz graf na obr. 1.

Na grafu vidíme, že se nejedná o normální babylonskou oscilaci, která se vyjadřuje serií lomených úseček, jež tvoří jako by paprsek světelný mezi dvěma rovnoběžnými zrcadly sem tam reflektovaný. Kdysi se patrně takového schematického vyjádření,

²⁾ F. K. Kugler: Die babylonische Mondrechnung, 38—40, 1900.



Obr. 1.

jak naznačeno na obr. 2, užívalo. Difference byla $3^I 52^{II} 30^{III}$, ale amplituda byla větší o $1^I 30^{II}$. Perioda této vlny τ vyjádřená jednotkou T_s plyne z relace

$$\tau = \frac{4A}{d} = \frac{4 (9^I 52^{II} 15^{III} + 1^I 30^{II})}{3^I 52^{II} 30^{III}} = 11 \frac{343}{465} T_s. \quad (1)$$

Perioda jest sice dobrá, jak později uvidíme, ale amplituda je příliš veliká. My bychom zavedli jednoduše jinou diferenci δ , jak ji vyžaduje zmenšená amplituda, a počítali bychom δ z relace

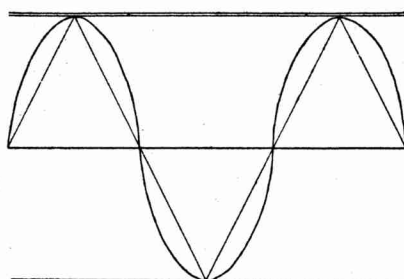
$$\frac{4(A - 1^I 30^{II})}{\delta} = \frac{4A}{d},$$

takže

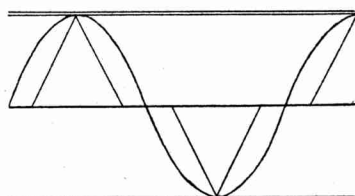
$$\delta = d \left(1 - \frac{1^I 30^{II}}{A} \right).$$

Babyloňané — nevíme prozatím proč — chtěli si zachovat dife-

renci starou; proto snížení amplitudy způsobí ztrátu kontinuity. Na obr. 3 vidíme jak sníženou vlnu aproximují vsunutými trojúhelníky. Mají při reflexních čarách tytéž úhly vrcholové jako dříve. Ale nyní se již nespojují základny jejich na ose vlny v nepřerušenu přímku. Vždy po překročení této osy objeví se v tabulce bar. Pak se místo d přidá jen $(d - 3)$, čím se přehoupneme na rameno sousedního trojúhelníka. To se stane — viz obr. 1 — jednou při sestupu a jednou při vzestupu, takže amplituda sníží se o $\frac{3}{2}$.



Obr. 2.



Obr. 3.

Co znamená amplituda $9^I 52^{II} 15^{III}$? — Přírozenou měrou pro stanovení šířky, je odhadování její v průměrech Luny à $30'$. V čas novu a úplňku je podle Tycho Brahe-a největší šířka $4^\circ 58' 30''$.³⁾ Přepočítejme to, berouce $\frac{1}{2}$ stupně za míru a dostaneme $9^I 57^{II} 00^{III}$; tím přiblížili jsme se babylonské amplitudě na 0,7%. Zajisté má Kugler pravdu, když klade $1^I = 0,5^\circ$.

Dosud je výklad sloupce E šířkovým pohybem Luny jen míněním. Jsou však v číselném materiálu již sděleném doklady, že tím jsme na správné cestě. Všimněme si vzorce (1), který jsme objevili jako periodu klikatiny na obr. 1. Plyne z něho

$$\tau = \frac{5458}{465} T_s. \quad (2)$$

Čitatel 5458 je však znám z Hipparchova sdělení, jež zachoval Almagest.⁴⁾ Značí-li T_a dračí oběh Luny, jest

$$5458 T_s = 5923 T_a. \quad (3)$$

Tím je nalezen most od sloupce E v babylonské tabulce k šířce Luny. Čitatel má 4 cifry. Čtyrciferných čísel je 10 000. Je tedy pravděpodobnost nahodilé shody 1 : 10 000. — Tu poskytuje číslo 5458. Ale také číslo 5923 je ve vzorci (2) ukryto. Dostane se sečtením čitatele a jmenovatele. Jde tedy o shodu na 8 cifer.

³⁾ Kugler: Mondrechnung, 45.

⁴⁾ K. Manitius: Ptolemäus Handbuch der Astronomie, I, 198. 1912.

Pravděpodobnost její nahodilosti jest 10^{-8} , činí jen stotinu jedné miliontiny.

Dračí oběh

$$T_d = 27^d, 21222 \quad (4)$$

je o

$$2^d, 31837,$$

kratší než synodický

$$T_s = 29^d, 53059. \quad (5)$$

Protože po čase T_d šířka se restituuje, udává difference

$$d = 3^I 52^{II} 30^{III}$$

změnu šířky, jež nastane za čas

$$T_s - T_d.$$

Protože Babyloňané svými primitivními prostředky kladou tuto změnu úměrnou uplynulé době, jest

$$\frac{d}{T_s - T_d} = \frac{4A}{T_d}.$$

Z toho plyne dosazením

$$\frac{3^I 52^{II} 30^{III}}{T_s - T_d} = \frac{4 (9^I 52^{II} 15^{III} + 1^I 30^{II})}{T_d}.$$

Čísla v čitatelích známe ze vzorce (1). Je tedy

$$\frac{\tau}{T_s} = \frac{T_d}{T_s - T_d} = 11 \frac{343}{465},$$

z čeho dostaneme relaci (3), dosud spojovanou se jménem Hipparchovým.

Babylonské sešnutí, jímž se trhá kontinuita není šťastnou myšlenkou. Marně pokusil jsem se z grafu 1 o předpovídání a identifikaci zatmění. Ale k tomu nebyla tabulka Kidinnu-ova pořízena; slouží ku stanovení nového světla a k tomu hrubé údaje o šířce stačí. Musil tu být asi vážný důvod, když Babyloňané tak nedokonalou tabulku snášeli. Když bychom počítali se stálou hodnotou d nedbajíce o korekci při bar, stala by se perioda tabulky — až na 3% — siderickým měsícem. Snad kdysi Babyloňané pokládali dračí uzly za nepohyblivé vůči stálícím. Tu by arci návrat od uzlu do téhož uzlu žádal siderický měsíc. — Zase tu narážíme na primitivnost, začátky a opravy prvních pokusů, jak je způsobuje konfrontace teorie se skutečností.

Lépe dopadneme, když klikatiny grafu 1 nahradíme hladkou sinusoidou a určíme přibližné šířky z ní. Rovnice pro šířku n -tého řádku tabulky zní:

$$e_n^* = A \cos \frac{2\pi}{\tau} (n - \nu),$$

kde amplituda

$$|A| = 9^I 52^{II} 30^{III} = 4^\circ 56' 15'' = 4,93750^\circ.$$

Délka vlny jest v jednotce T_s , kterou nyní nepíšeme:

$$\tau = \frac{5458}{465}.$$

Třeba ještě určití fasovou konstantu ν . Když $n = \nu$, je $\cos = 1$, ale šířka podle obr. 1 rovná se zápornému extrému. Na tab. 1 vidíme, že extrému $-|A|$ dosáhne se nejprve mezi $n = 1$ a $n = 2$. Pro nalezení hodnoty

$$\nu = 1 + x,$$

kde x je kladný zlomek, řídme se obr. 1. Vidíme v tab. 1, že pro $n = 1$ jest šířka rovna $6^I 5^{II} 30^{III}$; nechme ji nyní rovnoměrně klesati po čas x stálou rychlostí $3^I 52^{II} 30^{III}$ až dosáhneme spodní extrém $-9^I 52^{II} 30^{III}$. Pak je hledaný zlomek x definován rovnicí:

$$-6^I 5^{II} 30^{III} - x(3^I 52^{II} 30^{III}) = -9^I 52^{II} 30^{III},$$

z čehož

$$x = 0,9763440,$$

takže nejmenší

$$\nu = 1,97634.$$

Propočítejme

$$e_n^* = -4,93750^\circ \cos \frac{360 \cdot 465}{5458} (n - 1,97634),$$

z čehož

$$e_n^* = -4,93750^\circ \cos (30,67057^\circ n - 60,61560^\circ). \quad (7)$$

V tab. 1 nalezneme ve sloupci e^* serii hodnot pro $n = 1 \dots 39$. Použijme této tabulky k stanovení jednoho průchodu uzlem. Dostali jsme již v předchozím, že v čas $= 1,97634$ byla Luna v největší jižní šířce. Podle schematické teorie babylonské byla v uzlu vzestupném o čas $T_d/4$ později. Učiníme-li ve vzorci pro ν jednotku času T_s viditelnou, je onen vzestupný uzel v čas

$$1,97634T_s + T_d/4.$$

Držíme se raději uzlu než extrému. Okamžik maxima a minima vždy pozorováním těžko se určuje. Extrémy šířky mohli Babyloňané vůbec nanejvýš hrubě odhadnouti. Průchod uzlem mohli aspoň občas na zatměních kontrolovati. Zejména úplné neb kruhové zatmění určovalo průchod uzlem i okamžik novu na zlomek dne. Mohl se stanoviti pomocí klepsydry neb hodin slunečních.

Tabulka Kidinnu-ova je opatřena datem. Můžeme proto nov označený číslem $n = 2$ umístiti v našem kalendáři. Při tom nesmíme zapomenouti, že tabulka čítá střední novy babylonské. Tyto jsou ob $T_s = 29,53059$ od sebe vzdáleny. Ale jak leží vůči pravým novům nám (prozatím) není známo. Pravé novy mají od sebe vzdálenosti tu menší, tu větší než T_s , takže tato veličina je jejich střední hodnotou, kol které kolísají. My bychom střední novy umístili podle požadavku metody nejmenších čtverců. Tabulku pravých i středních novů v tom smyslu pro 3555 let propočítal Dr. Guinness v „Creation centered in Christ,, vol. II. 1896. V nich je viděti, že pravý nov nevzdaluje se od středního o víc než $0,59^d$.⁵⁾

Kugler má zajisté pravdu, když míní, že Babyloňané počítali své střední novy od nějakého úplného neb kruhového zatmění, že tedy i jejich první střední nov byl novem pravým. Babylonské střední novy vznikají pak tím, že se tento pravý nov přenáší kroky vždy T_s dnů dlouhými do budoucnosti. Následkem toho střední novy babylonské mohou se vzdáliti od pravých novů až o tolik, kolik mohou býti od sebe — až na celistvý násobek konstanty T_s — dva novy pravé. To je ale dvakrát tolik než mohou střední novy Guinness-ovy vzdáliti se od pravých, čili $1,18^d = 1^d 4^h 19^m$.

Průchod vzestupným uzlem, jež chceme propočítati, opozdí se za druhým středním babylonským novem o

$$\frac{1}{4}T_d - 0,02366T_s = 6,104361^d = 6^d 2^h 30^m.$$

Hodnoty T_d a T_s jsou udány u čísel (4) a (5).

Pravý druhý nov byl r. — 103. 21 dubna v $7^h 5^m$ večer babylonského času. Datum stanoveno pomocí té doby nejlepších tabulek Schoch-ových.⁶⁾ Je spolehlivé až na několik málo minut.⁷⁾

Druhý střední babylonský nov je od nahoře udaného pravého vzdálen o $\pm 1,18^dk$, kde k je kladný zlomek. Uzel vzestupný, o který se zajímáme, padne o $6^d 2^h 30^m$ později. Byl tedy s nejistotou až $1^d 4^h 19^m$ průchod onen r. — 103, 27. dubna v $9^h 35^m$ večer, t. j. uzlem stoupal měsíc mezi 26. dubnem v $5^h 16^m$ večer až 29. dubna $1^h 54^m$ ráno.

Vypočítejme nyní délku Luny λ a šířku její β pro půlnoc, již začíná 28. a 29. duben. Počítám pomocí Schochových tabulek⁸⁾ na desetiny stupně. Přesnější počet nemá smyslu. Neboť Babyloňané nevěděli o paralaxe měsíční. Jejich údaje polohy jsou ideální, odpovídají našim geocentrickým. Když, ale opírali své počty o kruhovitá a totální zatmění, tedy o pozorování, jsou ideální polohy, jež

⁵⁾ H. Ludendorff: Das Mondalter in den Inschriften der Maya. Berl. Ber. Separ. 8. 1931.

⁶⁾ Langdon, Fotheringham, Schoch: The Venus tablets of Ammizaduga, Oxford, 1928.

⁷⁾ P. V. Neugebauer: Astronomische Chronologie, I, 78. 1929.

⁸⁾ K. Schoch: Planeten-tafeln für Jedermann, XIX, 8. 1927.

chtěli dostat rušeny paralaxou jako kolísavou chybou. Chyba v poloze je obecně zlomek aequatoreální horizontální paralaxy $57' 2,70''$. Za těchto okolností počítání na desetinu stupně je skoro ještě nadměrné, neboť $0,1^\circ = 6'$.

Nalézám, že r. — 103 o půlnoci babylonského času, již den začíná bylo

	λ	β
28. dubna	103,0°	— 0,9°
29. dubna	115,9	+ 0,2

Interpolací nalezneme, že průchod uzlem (vzestupným) byl dne 28. dubna 7^h 38^m večer.

Druhý střední babylonský nov byl o 6^d 2^h 30^m dříve. Tedy 22. dubna 5^h 08^m odpoledne.

První střední babylonský nov je o synodický střední oběh

$$T_s = 29^d 12^h 44^m 2,8^s$$

dříve, tedy dne 24. března 4^h 24^m ráno.

Tak jsme vyčíslili absolutní hodnotu babylonského začátku tabulky. Výsledek ten nesmí se však přeceňovati co do přesnosti. Logický důsledek babylonské teorie nemusí býti ve shodě se skutečností. Babyloňané nekladli na logickou kontinuitu tolik váhy jako my. Vždyt užívají v různých sloupcích téže tabulky různé konstanty a vezmou pro své pohodlí třeba i méně přesnou, ač exaktní hodnotu znají. Jejich ideálem je právě vědecké pohodlí. Mají jinou estetiku vědeckou než my.

Zmínil jsem se již o marných pokusech svých předpověděti zatmění pomocí originální šířkové kolony Babyloňanů, pomocí sloupce E z tab. 1. — Nejde to, protože vyjádření šířkových změn klikatinou z obr. 1 je příliš nešikovné. Nejde tu o opravdové pochybení — asi jako zanedbání paralaxy měsíční — ale jen o ideovou těžkopádnost, nevhodnou historičkost, t. j. ovlivnění minulostí a vývojem. To vše jsme odstranili ve sloupci e*. Je tedy naděje, že pomocí něho se předvídání zatmění zdaří, což bude vítanou kontrolou.

Největší absolutní hodnota šířky při níž je zatmění slunce ještě možno činiti $1^\circ 34,4'$. — Pro zatmění měsíce čini hranice $1^\circ 2,6'$.⁹⁾ Vybereme si nyní z tab. 1 ze sloupce e* ty hodnoty n, pro něž příslušné e* zůstává pod kritickou hranicí sluneční $1,573^\circ$. Šířky e* vztahují se sice na střední novy babylonské, ale máme už vyšetřeno, že tyto nejsou daleko od pravých, tedy, že i naše hodnoty e* nemohou býti daleko od těch, jež přísluší pravým novům. Tak nalezneme, že zatmění sluneční lze očekávati pro novy příslušné

⁹⁾ Kugler: Mondrechnung, 134.

čísům

$$n = 5, 11, 17, 22, 23, 28, 34, \\ 6 - 6 - 5 - 1 - 5 - 6$$

V druhém řádku udány jsou intervaly od jednoho zatmění k následujícímu v celistvých lunacích.

Nyní bychom se mohli pokusit o ryze astronomické určení stáří tabulky. Není starší takové tabulky než z r. — 200 a není již žádných z doby po Kr. Naši tabulku umístíme tedy někde v prvních dvou stoletích před Kr. K tomu potřebujeme tabulku zatmění slunečních pro tato první dvě století, jež udává v lunacích intervaly od jednoho zatmění ke druhému. Tabulku tu pořídil jsem na základě Oppolzerova „Canonu“ zatmění.

Neotiskuji ji zde, protože tento nasnadě ležící postup nevede k cíli. Snažil jsem se nejprve o umístění serie

$$6-6-5-1-5-6$$

ve zmíněné tabulce. Hledal jsem skupinu 5-1-5 mezi serií šestek předcházejících i následujících. Mezi rokem — 200 až 0-tým našel jsem jich celkem sedmáct! —

Tento chudobný výsledek může být od toho, že naše serie 6-6-5-1-5-6 je příliš krátká. Pokusil jsem se o její doplnění na celý saros. Ze vzorce pro e^* stanovil jsem přímo hodnoty n , pro něž zůstane e^* pod sluneční hranicí $1,573^\circ$.

Tabulka moje pomocná čítala 11 sarů. Nyní byla otázka, kde se dá saros doplněný pomocí vzorce pro e^* umístiti. — Ukázalo se, že nikde! Nejde to. Vysvětlení je v tom, že stanovení saru zatmění naším způsobem je přece jen hrubé. Oppolzer pracuje s pravými novy, v Kidinnu-ově tabulce jsou přibližné šířky pro střední novy babylonské, jež se mohou od pravých vzdáliti o víc než jeden den. Proto se při stanovení pomocného saru může státi, že vypočteme interval 6 lunací mezi dvěma sousedními zatměními a máme míti místo 6 skupinu 5-1 neb 1-5.

Z pouhého sloupce pro šířku tedy stáří tabulky neurčíme. Musíme přibrati ještě jiné sloupce. V tabulce šířkové je vyznamenaná hodnota $n = 22$, kdy bylo zatmění, tím, že hned po ní pro $n = 23$ zase bylo zatmění. Dvaadvacátý střední nov babylonský měl podle sloupce tabulky Kidinnu-ovy délku $251,6^\circ$. Podle sloupce F byla rychlost Luny za den pro $n = 22$

$$F_{22} = 14^\circ 54' 10'' = 14,9^\circ.$$

Střední nov babylonský může se od pravého novu vzdáliti až o $\pm 1,18^\circ$, čemuž přísluší pro $n = 22$ změna délky o $17,6^\circ$. Je tedy pravý nov délkou mezi $234,0^\circ$ až $251,6^\circ$. To jsou však babylonské délky, jež kladou slunovrat zimní na $278,25^\circ$.¹⁰⁾ Pravý nov spojený

¹⁰⁾ Délka dne v babylonských tabulkách měsíčních. Vyjde později.

se zatměním byl tedy $8,65^\circ$ až $44,25^\circ$ před zimním slunovratem. Roku — 200 padl zimní slunovrat na 24,6/XII a roku 0-tého na 23,2/XII. Přijmeme zhruba, že slunce urazí za den 1° , pak jest datum zatmění, jež přísluší číslu $n = 22$ mezi 9/XI až 16/XII. Datum to je charakterisováno tím, že o lunaci později bylo znovu zatmění.

Nyní budeme v Oppolzerově „Canonu,, hledati zatmění v prvních dvou stoletích př. Kr., jež padnou mezi udaná dvě data a byla po měsíci zase sledována zatměním. Jsou jen čtyři:

— 138. XI. 11, — 120. XI. 21, — 102. XII. 3, — 84. XII. 13.

Tyto čtyři hodnoty jsou ob saros od sebe. Tato neurčitost je v povaze věci samotné. Když užíváme k stanovení stáří tabulky zjev jako zatmění, jež se ob saros vrací, objeví se tato perioda i v chronologickém výsledku.

Někdo by mohl myslit, že mezi jednotlivými sary vybereme pravé datum pomocí rychlosti Luny, kterou jsme při horním počtu skutečně i použili. Ale tato se přibližně ob saros také restituuje, t. j. nemůže sloužit k individualisaci horních čtyř sarů. Chceme-li se dostat dál, musíme přibrati další materiál, nějaké dosud nepoužité sdělení tabulky. Naše těžkosti — čtyři data místo jediného — jsou od toho, že jsme pracovali s babylonskými středními novy. Ale tabulka ve sloupci L sdílí i pravé novy: udává jejich měsíc, den i zlomek jeho, čítaný od půlnoci, jako náš železniční čas. Pro $n = 22$ sdílí tabulka, že pravý nov byl 28. měsíce Arah-samna. Babylonský kalendář opírající se o 19letý cyklus Meltonův od r. — 382 do r. 0 byl Kuglerem přesně stanoven.¹¹⁾ Schoch mohl vypracovati tabulky, jež dovolují převod dne 28. Arah-samna v datum juliánské.¹²⁾ Převodeme-li ono babylonské datum pro čtyři nalezená léta dostaneme:

— 138, — 120, — 102, — 84
11. XII, 22. XI, 3. XII, 14. XI.

Srovnáme-li se serií čtyř horních dat, vidíme, že první a poslední je vyloučeno. Je tu rozchod o celou lunaci. Přesná je shoda jen u data třetího. Jednodenní rozdíl nalezneme u data druhého.

Za obvyklých okolností nepozastavovali bychom se nad rozdílem o jeden den. Babylonský kalendář byl měsíční a první den každého měsíce závisel na pozorování nového světla. Tenoučkový srp ve večerních červánkách může však ujíti pozornosti, je-li obzor zakalen. Tím po případě začátek měsíce o jeden den zpozdí. Schochovy začátky měsíce jsou ideální, průměrné, jež vylučují takové potíže, jako kalnost obzoru. Kdyby datum 28 Arah-samna pochá-

¹¹⁾ Sternkunde und Sterndienst in Babel. II, 435. 1924.

¹²⁾ Schoch: Planetentafeln, XLI, 15.

zelo ze smlouvy, dopisu a pod., zkrátka, kdyby to bylo opravdové datum, řekli bychom, že nové světlo včas přehlédli a tím se stalo, že zatmění v 21-XI padlo jim na 27 Arah-samna. Ale pravý nov tabulky babylonské i nové světlo je také počítáno a to docela slušnou aproximační technikou. — Proto se nemůžeme vymlouvat na přehlédnutí nového světla: musíme i druhé číslo zamítnouti, třebaže rozdíl činí nyní jen jediný den.

Zbývá nám tedy pro $n = 22$ zatmění slunce v den 3/XII r. — 102. Datum toto jest v přesné shodě s nápisem na tabulce, jímž datována tato v éře Seleukovců i Arsasovců.¹³⁾ Kdyby nám umístění těchto ér v našem kalendáři nebylo přesně známo, dostali bychom je z předchozí úvahy, kdyby nejistota umístění byla menší než jeden saros.

Výběr mezi čtyřmi zatměními lze provésti ještě jinou cestou. Při $n = 8$ objeví se v tabulce Kidinnu-ově Elul II. Ten se ale objeví v kalendáři posledních 200 let př. Kr., jen jednou ob 19 let. Léta obsahující přestupný Elul dává vzorec¹⁴⁾

$$- 293/2 + 19n.$$

Rok označen dvěma čísly, protože babylonský rok začíná Nisanem, jarním měsícem, zhruba naším časem velkonočním. Číslo n jest celistvé.

Mezi $n = 8$ (Elul II) a $n = 22$ (Arah-samna) vsouvá se jediný Nisan pro $n = 15$. Den 28. Arah-samna se zatměním je proto v roce dalším, jenž dán vzorcem

$$Z = - 292/1 + 19n. \quad (8)$$

Protože Arah-samna je osmý měsíc, padne (viz data 22-XI, 3-XII) do předního roku. Rok zatmění dán tedy vzorcem

$$Z = - 292 + 19n.$$

Položme postupně

$$Z = - 138, - 120, - 102, - 84,$$

- a dostaneme z relace (8) příslušné

$$n = 8\frac{2}{9}, 9\frac{1}{9}, 10, 10\frac{8}{9}.$$

Jen jediná hodnota n jest celistvá, totiž ta, jež přísluší roku — 102. Tím je ono datum ověřeno po druhé způsobem, jenž musí uznati i ten, komu by se zdálo, že rozdíl o jeden den (27. či 28. Arah-samna) má malou váhu.

Váha tohoto rozdílu závisí na spolehlivosti předpovědí zatmění

¹³⁾ Kugler: Mondrechnung, 10, 32.

¹⁴⁾ Kugler: Sternkunde und Sterndienst in Babel. II, 599. 1924.
— Tam užil Kugler po prvé šířky Luny k stanovení stáří pomocí zatmění v polemice se Schnablem.

z tabulky Kidinnu-ovy. Srovnajme proto ještě zatmění z babylonských šířek Luny, předpověděná se zatměními z Oppolzerova „Canonu“. Jsou to zatmění:

— 103.	VII.	19.	
			6
— 102.	I.	12.	
			6
— 102.	VII.	8.	
			5
— 102.	XII.	3.	
			1
— 101.	I.	1.	
			5
— 101.	V.	29.	
			6
— 101.	XI.	22.	

Za nimi udány intervaly v lunacích. Vypíšeme-li je do řádku

6-6-5-1-5-6,

dostaneme tutéž serii, kterou jsme dostali z tabulky Kidinnu-ovy. Babylonské šířky korigované na čistou vlnu mohou tedy skutečně sloužit ku předpovídání zatmění. Následkem toho i použití zatmění při stanovení stáří tabulek je důvěryhodno.

Určení stáří i tabulky datované, jako tato, není zbytečné. — Což kdyby datování bylo porušeno chybou? — Vždyť tabulky nejsou obecně originály, ale leckdy jen výtahy z opisů, t. j. jsou z třetí ruky. Není divu, že v nich chyby, přepsání i nedorozumění jsou dosti častá. Není-li tabulka datována je stanovení data přímo z jejího obsahu naprostou nutností, jedinou naší nadějí. — Vždyť pozorování astronomické bez data vůbec jako pozorování nehodnotíme.

*

La latitude de la Lune sur la table cunéiforme de Kidinnu.

(Extrait de l'article précédent.)

Les Babyloniens connaissaient un art inconnu pour nous avec lequel ils fixaient approximativement la latitude de la Lune. Ils exprimaient les oscillations de la latitude à l'aide d'une série arithmétique. Cette technique habituelle est compliquée encore sur la table de Kidinnu par la correction, qui apparaît régulièrement après le passage par le noeud. Nous remplaçons le zigzag des Babyloniens (vois l'image No 1) par une sinusoïde et nous trouvons son expression dans la formule (7). De cette manière nous délivrons la table des fautes qui sont causées par le fait que les Babyloniens

remplacent le sinus par une série arithmétique croissante et décroissante. De la colonne *e* de la table No. 1, on peut prédire l'éclipse. À l'aide de deux éclipses éloignées de deux lunaisons j'ai tâché de fixer une époque de la table de Kidinnu. Des longueurs babyloniennes de la Lune nous fixons approximativement la saison de ces éclipses et nous les cherchons ensuite dans les deux derniers siècles avant J. Ch. en se servant du Canon de l'éclipse de Oppolzer. Nous trouvons quatre dates éloignées de saros l'une de l'autre. La date juste peut être choisi de ce quatrième par deux méthodes D'un côté, parce que la première de deux éclipses voisines eut lieu le 28 Arah-samna, de l'autre côté, parce qu'on trouve dans la table Elul II ce qui a eu lieu une fois dans 19 ans. Les résultats correspondent et sont d'accord avec l'époque indiquée sur la marge de la table dans l'ère des Arsacides et des Séleucides. Puis, j'ai étudié la solidité des prédictions de l'éclipse pour toute l'étendue de la table en la comparant avec le Canon d'Oppolzer, les deux séries des intervalles entre les deux éclipses voisines exprimées en lunaisons s'accordent précisément. Les latitudes approximatives de la Lune sur la table de Kidinnu se sont alors montrées justes dans notre épreuve.

Journal Tchécoslovaque de Mathématiques et de Physique.

Éditeur: Jednota československých matematiků a fysiků, Praha

Année 65

1935—36

OBSAH — SOMMAIRE

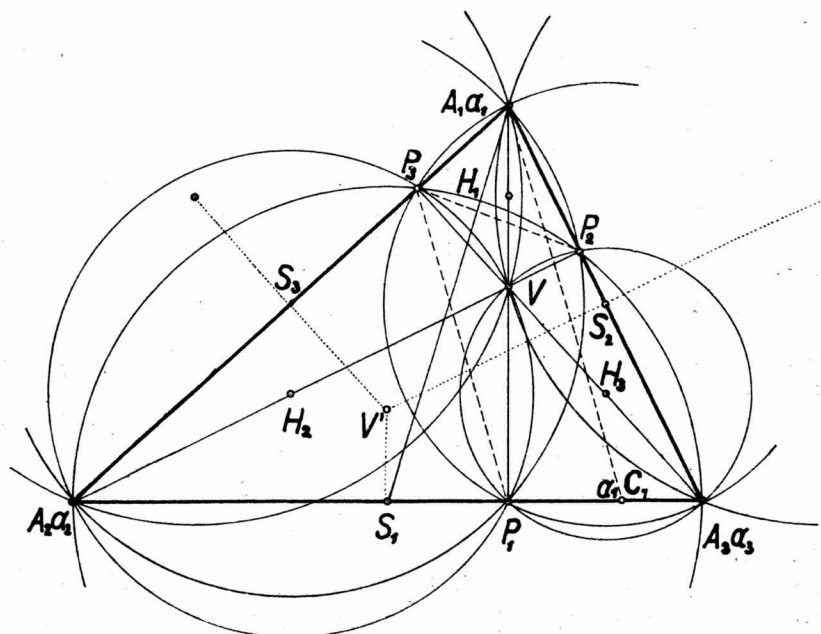
Část matematická — Travaux mathématiques	Str.
Bohumil Bydžovský, Praha: Sur les matrices orthogonales symétriques — O souměrných maticích ortogonálních	189
Hans Heilbronn, Cambridge — Edmund Landau, Berlin — Peter Scherk, Praha: Alle grossen Zahlen lassen sich als Summe von höchstens 71 Primzahlen darstellen — Všechna velká čísla lze vyjádřiti jako součet nejvýše 71 prvočísel	117
Vojtěch Jarník, Praha: Sur une propriété des fonctions continues — O jedné vlastnosti spojitých funkcí	53
Bohuš Jurek, Žilina: Sur la dérivabilité des fonctions à variation bornée — O derivabilitě funkcí s variací konečnou	8
Josef Klíma, Brno: O ploše Möbiova listu — Sur la surface de la feuille de Möbius	211
Vladimír Knichal, Praha: Dyadische Entwicklungen und Hausdorffsches Mass — Dyadické rozvoje a Hausdorffova míra	195
Rostislav Košťál, Praha: Contribution à la théorie des équations du n -ième degré — Příspěvek k teorii rovnic n -tého stupně ..	28
Edmund Landau, Berlin, v. Heilbronn	
Bedřich Pospíšil, Brno: Sur un problème de MM. S. Bernstein et A. Kolmogoroff — O jistém problému S. Bernsteina a A. Kolmogorova	64
Ladislav Seifert, Brno: Příspěvek k deskriptivní geometrii Eudoxovy hypopédy — Remarque à la géométrie descriptive de l'hypopéde	217
Peter Scherk, Praha, v. Heilbronn	
Jan Srb, Nový Bohumín: O rozkladu rovinných kolineací v produkt harmonických homologií — Sur la décomposition des homographies planes en produit des homologues harmoniques	77
Jan Srb, Nový Bohumín: Poznámka k článku „O rozkladu rovinných kolineací“ — Remarque à l'article „Sur la décomposition des homographies planes“	84
† Augustin Vondráček, Bratislava: Rovinná kvintika rodu 2 — Courbe plane de 5 ^{ème} ordre de genre deux	142
George Neville Watson, Birminhgam: Über eine Formel für numerische Berechnung der bestimmten Integrale — O jednom vzorci pro numerický výpočet určitých integrálů	1
Leo Zippin, Princeton: On a problem of Čech — O jednom Čechově problému	49

František Bouchal, Praha — Václav Dolejšek, Praha: An extension of the precise method of Kunzl and Köppel for determining the constants of a crystal grating — Rozšíření přesné metody Kunzlovky-Köppelovy pro měření mřížkových konstant krystalu	33
Arnošt Dittrich, Stará Ďala: Šířka Luny v klínopisné tabulce Kidinnu-ově — La latitude de la Lune sur la table cunéiforme de Kidinnu	245
Václav Dolejšek, Praha — Swami Inanananda, Praha: A precise method of determining the constant of crystal grating by the combination of φ - and κ -methods — Přesná metoda mřížkové konstanty krystalu spojením metod φ a κ	97
Václav Dolejšek, Praha, v. Bouchal	
Swami Inanananda, Praha: An application of the method wherein the φ - and κ -methods are combined for the determination of the grating constant — Aplikace metody vzniklé kombinací metod φ a κ na určení mřížkové konstanty	155, 226
Swami Inanananda, Praha, v. Dolejšek	
Miroslav Jahoda, Praha: Les oscillations du magnétron avec la triode — Oscilace triodového magnetronu	88
Rostislav Košťál, Praha: Sur la stabilisation des oscillations par couplage — Stabilisace kmitů spřažením	40
V. Kunzl, Praha: Einige schwache Linien der N-Serie bei U, Th und Bi — Některé slabé linie N-serie u U, Th a Bi	179
Václav Petržílka, Praha: Über Torsionsschwingungen von kreisförmigen Platten — O torsních kmitech kruhových desek	110
Jan Potoček, Brno: Huyghensův princip v teorii vedení tepla — Application du princip de Huyghens à la théorie de la chaleur	171
Résumés de quelques articles tchèques publiés dans la partie Enseignement-Communications-Analyses	116

Z geometrie trojúhelníka.

Vojtěch Tuček (Brno).

1. Označme vrcholy trojúhelníka $A_1 A_2 A_3$ znaky A_{n-1}, A_n, A_{n+1} , jeho strany a_{n-1}, a_n, a_{n+1} , vnitřní úhly $\alpha_{n-1}, \alpha_n, \alpha_{n+1}$, středy stran S_{n-1}, S_n, S_{n+1} a pod. dále; znakem (S, a) rozumějme kružnici



Obr. 1.

o středu S a poloměru a . Podle kosinusové věty je $a_n^2 = a_{n+1}^2 + a_{n-1}^2 - 2a_{n+1}a_{n-1} \cos \alpha_n$, což lze psát:

$$a_n^2 = a_{n+1}^2 + a_{n-1}^2 - 2a_{n+1}a_{n-1} \cos \alpha_n = a_{n+1}^2 + a_{n-1}^2 - 2a_{n-1}a_{n+1,n-1},$$

kde $a_{n-1,n+1} = A_n P_{n+1}$ značí ortogonální průmět strany a_{n-1} do a_{n+1} (obr. 1). Součinný člen $a_{n+1}a_{n-1,n+1}$ anebo $a_{n-1}a_{n+1,n-1}$ značí, jak se lze snadno přesvědčiti, mocnost vrcholu A_n vzhledem k $(S_n, \frac{1}{2}a_n)$; označme ji $M_{A_n}^{S_n}$. Potom dostaneme relaci

$$2M_{A_n}^{S_n} = a_{n+1}^2 + a_{n-1}^2 - a_n^2. \quad (1)$$

a) Sečtíme dvě rovnice z těchto tří rovnic; dostaneme

$$M_{A_{n+1}}^{S_{n+1}} + M_{A_{n-1}}^{S_{n-1}} = a_n^2, \quad (2)$$

což znamená,

že strana trojúhelníka je přepona pravoúhlého trojúhelníka, jehož odvěsny mají délky tečen, vedených z koncových bodů oné strany ke kružnicím opsaným nad dvěma druhými stranami jako průměry.

Je-li v trojúhelníku $\alpha_n = 90^\circ$, je $M_{A_{n+1}}^{S_{n+1}} = a_{n-1}^2$, $M_{A_{n-1}}^{S_{n-1}} = a_{n+1}^2$, přepona, a vztah přejde ve větu Pythagorovu.

Je-li úhel při A_n tupý, je $M_{A_n}^{S_n} < 0$; vrchol A_n leží uvnitř kružnice $(S_n, \frac{1}{2}a_n)$ a místo tečny z A_n k této kružnici třeba vzít polovici nejkratší tětivy vrcholem A_n .

Součet všech rovnic (1) dá vztah

$$2\Sigma M_{A_n}^{S_n} = \Sigma a_n^2, \quad (3)$$

což znamená, že součet čtverců nad stranami trojúhelníka je roven součtu čtverců nad všemi šesti tečnami, které lze vésti z vrcholů trojúhelníka ke kružnicím opsanými nad protějšími stranami jako průměry.

b) Mocnosti vrcholů trojúhelníka vzhledem ke kružnicím $(S_n, \frac{1}{2}a_n)$ lze vyjádřiti ještě několika jinými výrazy. Především jest, jak známo, délka těžnice $A_n S_n \equiv t_n = \frac{1}{2} \sqrt{2(a_{n+1}^2 + a_{n-1}^2) - a_n^2}$. Potom mocnost $M_{A_n}^{S_n} = t_n^2 - \frac{1}{4}a_n^2 [= \frac{1}{4}(a_{n+1}^2 + a_{n-1}^2 - a_n^2)]$.

Jiný výraz (obr. 1) dostaneme, uvažíme-li, že v podobných trojúhelnících $A_n P_n A_{n-1}$ a $A_n V P_{n+1}$ (kde P_n jsou paty výšek v_n a V je průsečík výšek a $\overline{VA_n} = h_n$) jest

$$v_{n+1} : a_{n+1} = a_{n-1,n+1} : h_n,$$

z čehož plyne

$$a_{n+1}a_{n-1,n+1} = M_{A_n}^{S_n} = v_n h_n.$$

To lze dokázati jinak planimetricky, sestrojíme-li opsané kružnice v tětivových čtyřúhelnících $VP_{n-1}A_{n+1}P_n$ a $VP_nA_{n-1}P_{n+1}$, neboť tu jest A_n střed mocnosti všech tří kružnic $(S_n, \frac{1}{2}a_n)$, $(H_{n+1}, \frac{1}{2}h_{n+1})$, $(H_{n-1}, \frac{1}{2}h_{n-1})$, kde H_{n+1} , H_n , H_{n-1} jsou středy úseků resp. h_{n+1} , h_n , h_{n-1} , a jdou jím všechny tři chordály $A_{n+1}A_n$, $A_{n-1}A_n$, P_nA_n . Proto je netoliko $M_{A_n}^{S_n} = a_{n+1}a_{n-1,n+1} = a_{n-1}a_{n+1,n-1}$, ale i $A_n P_n \cdot A_n V = v_n h_n$.

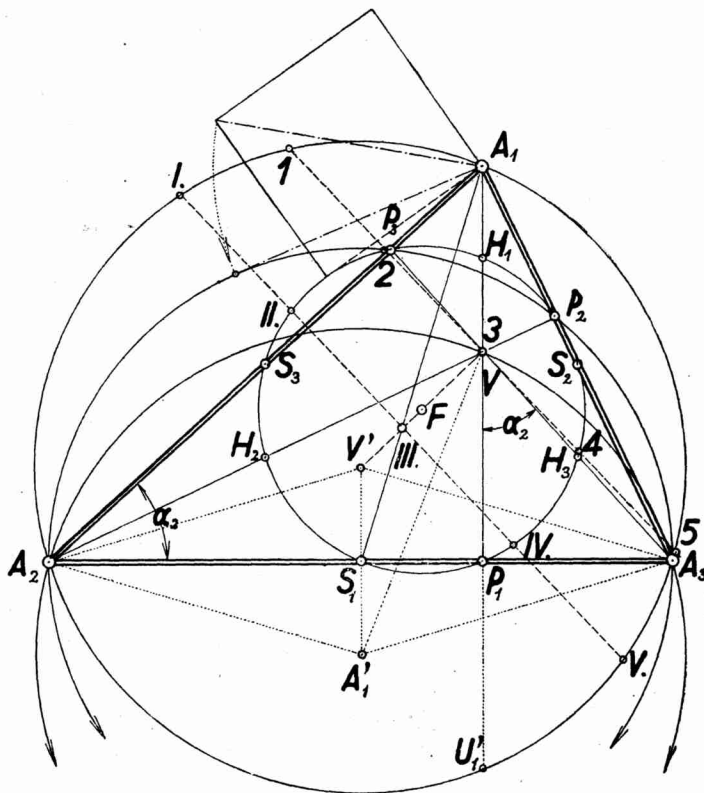
Uvažíme-li konečně podobné trojúhelníky $A_n P_{n+1} P_{n-1}$ a

$C_n A_{n+1} A_n$, a označíme-li o nich $\overline{P_{n+1} P_{n-1}} = p_n$, $\overline{A_n C_n} = g_n$, jest $p_n : a_{n+1, n-1} = a_{n-1} : g_n$, proto

$$a_{n-1}a_{n+1,n-1} = M_{A^n} S_n = g_n p_n.$$

Jest tedy celkem

$$M_{A_n} S_n = a_{n\pm 1} a_{n\mp 1, n\pm 1} = v_n h_n = g_n p_n = \frac{1}{2} (a_{n+1}^2 + a_{n-1}^2 - a_n^2). \quad (4)$$



Obr. 2.

Poznamenati třeba ještě, že $M_{An}^{Sn \pm 1} = 0$.

2. Odvozené vztahy a vlastnosti ve spojení s mocností M_{An}^{Sn} vedou také k úvahám o mocnostech jiných bodů vzhledem k význačným kružnicím v trojúhelníku. (Obr. 2).

a) Mocnost vrcholu A_n vzhledem k Feuerbachově kružnici $(F, \frac{1}{3}r)$ jest

$$M_{An}^F = \overline{A_n P_n} \cdot \overline{A_n H_n} = \frac{1}{2} v_n h_n = \frac{1}{4} (a_{n+1}^2 + a_{n-1}^2 - a_n^2) \quad (5)$$

a součtové vztahy zní

$$M_{A_{n+1}^F} + M_{A_{n-1}^F} = \frac{1}{2}a_n^2; \quad 4\Sigma M_{A_n^F} = \Sigma a_n^2. \quad (6)$$

Spojíme-li výsledky odst. 1 a 2, jest

$$\begin{aligned} 2(M_{A_{n+1}^F} + M_{A_{n-1}^F}) &= M_{A_{n+1}^{S_{n+1}}} + M_{A_{n-1}^{S_{n-1}}} = a_n^2, \\ 4\Sigma M_{A_n^F} &= 2\Sigma M_{A_n^{S_n}} = \Sigma a_n^2, \\ M_{A_n^F} : M_{A_n^{S_n}} &= 1 : 2, \end{aligned}$$

s příslušnými měřickými interpretacemi. Mezi jiným plyne z úměry, že úhlopříčka ve čtverci nad tečnou vedenou z vrcholu A_n ke kružnici $(F, \frac{1}{2}r)$ má stejnou délku $\sqrt{M_{A_n^F}} \cdot \sqrt{2}$ jako tečna z téhož vrcholu ke kružnici $(S_n, \frac{1}{2}a_n)$. (Obr. 2.)

b) Mocnosti bodu V .

Vzhledem ke kružnici $(S_n, \frac{1}{2}a_n)$ jest

$$M_V^{S_n} = d_n h_n, \quad (d_n = \overline{VP_n}),$$

a má tutéž hodnotu pro všechny tři hodnoty indexu n , poněvadž jsou výšky $A_n P_n$ chordály všech tří kružnic a V je střed mocnosti.

Stejně nezávisí na hodnotě indexu n mocnost bodu V vzhledem k Feuerbachově kružnici (obr. 2)

$$M_V^F = \overline{H_n V} \cdot \overline{VP_n} = \frac{1}{2}d_n h_n,$$

a vzhledem ke kružnici opsané

$$M_V^{V'} = \overline{A_n V} \cdot \overline{VU'_n} = 2h_n d_n,$$

kde U'_n je průsečík opsané kružnice (V', r) s výškou $A_n P_n$; pro souměrnost kružnic $(A'_n, r)^1$ a (V', r) vzhledem k $A_{n+1}A_{n-1}$ jest $\overline{A'_n S_n} = \overline{S_n V'}$

$d_n = VP_n = P_n U'_n$. Tak dostaneme ve spojení

$$M_V^{V'} = 2M_V^{S_n} = 4M_V^F = 2d_n h_n. \quad (7)$$

Je-li trojúhelník ostroúhlý, leží orthocentrum V uvnitř všech tří kružnic; jeho mocnosti vzhledem k nim jsou čtverce nejkratších púlťetiv, jdoucích bodem V . Poněvadž středy V' a F — kružnice opsané a Feuerbachovy — spolu s orthocentrem V leží na centrále, kterou jest zde Eulerova přímka, je nejkratší púlťetiva ve jmenovaných dvou kružnicích kolmice k Eulerově přímce v bodě V . A poněvadž jest $\sqrt{M_V^{V'}} = 2\sqrt{M_V^F}$, $2\sqrt{M_V^{V'}} = 4\sqrt{M_V^F}$, jest nejkratší tětiva v opsané kružnici, vedená orthocentrem V kolmo k $V'FV$ — v trojúhelníku ostroúhlém — rozdělena Feuerbachovou kružnicí a bodem V na čtyři stejně dlouhé úseky.

¹⁾ A'_n je střed kružnice jdoucí body A_{n+1}, A_{n-1}, V a platí pro něj:

Je-li úhel při A_n tupý, leží V vně trojúhelníka i uvažovaných tří kružnic, a z bodu V jsou možné tečny k nim. Jejich čtverce jsou pak uvažované mocnosti; tečny z V ke kružnicím (V', r) a $(F, \frac{1}{2}r)$ mají délky v poměru 2 : 1 a v témž poměru jsou i poloměry obou kružnic. Spojnice $V'FV$ je společná centrála, a proto je orthocentrum v tupoúhlém trojúhelníku vnější bod podobnosti obou kružnic; tečna vedená z bodu V k jedné, dotýká se i druhé.

c) Nyní můžeme jednoduchým způsobem určití délku Eulerovy úsečky $V'V = e$.

Především dostaneme z podobných trojúhelníků VP_nA_{n-1} a $A_{n+1}P_nA_n$ (obr. 2),

$$d_n : a_{n+1,n} = a_{n-1,n} : v_n, \quad h_{n-1} : a_{n+1,n} = a_{n-1} : v_n,$$

z čehož plyne napřed

$$d_n = \frac{(a_{n-1}^2 + a_n^2 - a_{n+1}^2)(a_n^2 + a_{n+1}^2 - a_{n-1}^2)}{8a_n\Delta},$$

použijeme-li vedle kosinové věty pro a_{n-1} také vztahu $4a_n^2v_n = 8a_n\Delta$, kde Δ je obsah trojúhelníka.

Potom dostaneme

$$h_n = \frac{a_n(a_{n+1}^2 + a_{n-1}^2 - a_n^2)}{4\Delta}.$$

Pak vypočteme

$$\begin{aligned} M_{V'V} &= 2d_n h_n = \\ &= \frac{(a_{n+1}^2 + a_{n-1}^2 - a_n^2)(a_{n-1}^2 + a_n^2 - a_{n+1}^2)(a_n^2 + a_{n+1}^2 - a_{n-1}^2)}{16\Delta^2} \end{aligned}$$

Nahradíme-li trojčleny známými výrazy z kosinové věty a Δ výrazem

$\frac{\Pi a_n}{4r}$, je $M_{V'V} = r^2 \Pi 2 \cos \alpha_n = r^2 - e^2$ a dostaneme

$$e = r \sqrt{1 - 8 \cos \alpha_{n-1} \cos \alpha_n \cos \alpha_{n+1}}. \quad (8)$$

d) Mocnosti těžiště T .

S ohledem na vztahy $V'T = \frac{1}{3}e$, $TF = \frac{1}{3}e$, jest $M_{TV} = \frac{1}{9}e^2 - r^2$, $M_{TF} = \frac{1}{9}e^2 - \frac{1}{4}r^2$, tedy $M_{TV} = 4M_{TF}$ (obr. 2).

Poněvadž bod T leží vždycky uvnitř kružnic (V', r) i $(F, \frac{1}{2}r)$, a Eulerova přímka jest jejich centrála, určují obě kružnice na nejkratší tětivě bodem T , kolmé k $V'V$, čtyři stejně dlouhé úseky.

Poněvadž je $TS_n = \frac{1}{3}t_n$, jest mocnost vzhledem k $(S_n, \frac{1}{3}a_n)$ $M_{TS_n} = \frac{1}{9}t_n^2 - \frac{1}{4}a_n^2$, a dosadíme-li sem dříve uvedenou hodnotu

pro t_n , dostaneme

$$M_T^{S_n} = \frac{a_{n+1}^2 + a_{n-1}^2 - 5a_n^2}{18}.$$

• Je-li v trojúhelníku $a_n > a_{n-1} > a_{n+1} (> 0)$, nemůže být $5a_n^2 \leq a_{n+1}^2 + a_{n-1}^2$. Kdyby platila tato nerovnost, platila by, s ohledem na vztah $a_{n+1}^2 + a_{n-1}^2 = a_n^2 + 2a_{n+1}a_{n-1} \cos \alpha_n$ a známou větu: $|a + b| \leq |a| + |b|$, nerovnost $|\cos \alpha_n| \geq \frac{2a_n^2}{a_{n+1}a_{n-1}}$. Ale z podmínky $a_n > a_{n-1} > a_{n+1}$ vychází $2a_n^2 > a_{n+1}a_{n-1}$, tedy $|\cos \alpha_n| > 1$, což není možné pro reálné úhly. Musí tedy být $5a_n^2 > a_{n+1}^2 + a_{n-1}^2$ a $M_T^{S_n}$ jest záporné; leží tedy bod T uvnitř kružnice $(S_n, \frac{1}{2}a_n)$, je-li a_n nejdelší strana. Naproti tomu těžiště může ležeti uvnitř, vně nebo na kružnici sestrojené nad nejkratší stranou. Lze totiž podobně ukázat, že může být $M_T^{S_{n+1}} \leq 0$.

Mají-li mocnosti $M_T^{S_{n+1}}$ a $M_T^{S_{n-1}}$ stejná znaménka, jest

$$|M_T^{S_{n+1}}| + |M_T^{S_{n-1}}| = \left| \frac{2(a_{n+1}^2 + a_{n-1}^2) - a_n^2}{9} \right| = \frac{4}{9} t_n^2; \quad (10)$$

mají-li tyto mocnosti pro všechny hodnoty indexu n stejná znaménka, jest

$$6 \sum |M_T^{S_n}| = \sum a_n^2, \quad (11)$$

což opět umožňuje jednoduchou měrickou interpretaci uvažíme-li, že $\sqrt{M_T^{S_n}}$ značí délku příslušné tečny, případně nejkratší pultětivy.

e) Mocnosti výškových pat P_n .

Vzhledem ke kružnici $(S_n, \frac{1}{2}a_n)$ jest zřejmě (obr. 2)

$$M_{P_n}^{S_n} = a_{n+1,n} a_{n-1,n} = \frac{(a_{n+1}^2 + a_n^2 - a_{n-1}^2)(a_{n-1}^2 + a_n^2 - a_{n+1}^2)}{4a_n^2}.$$

Tutéž hodnotu mají netoliko mocnosti $M_{P_n}^{V'}$ a $M_{P_n}^{A'n}$, ale i $M_{P_n}^{A'n+1}$, neboť jest v obr. 1

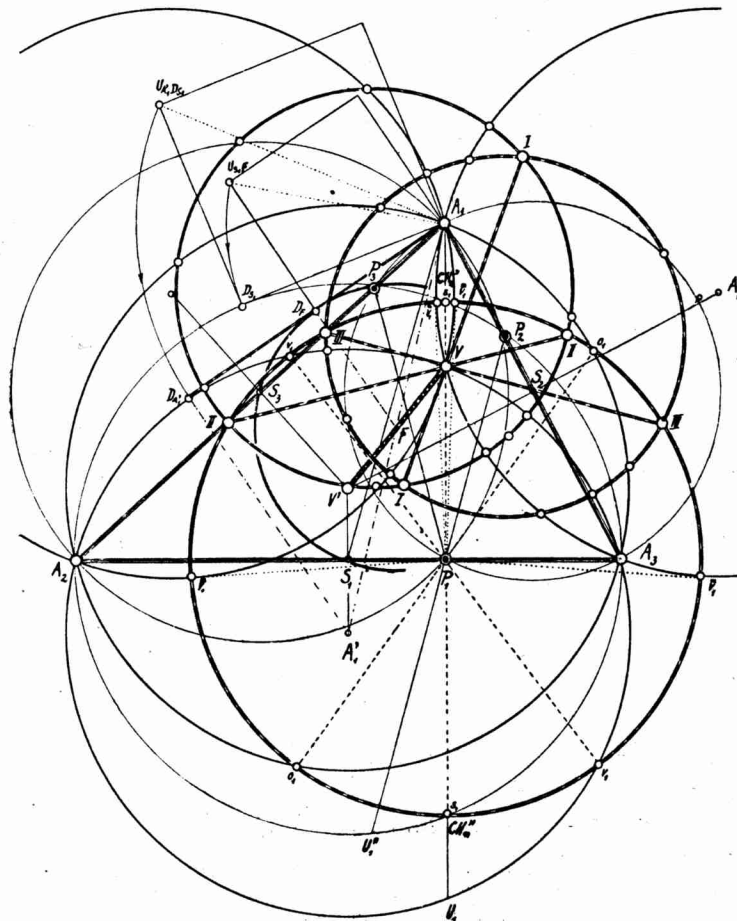
$$M_{P_n}^{A'n+1} = v_n d_n = \frac{v_n(a_{n+1}^2 + a_n^2 - a_{n-1}^2)(a_{n-1}^2 + a_n^2 - a_{n+1}^2)}{8a_n \Delta}$$

jak plyne z c), z čehož dostaneme též výraz jako pro $M_{P_n}^{S_n}$, dosadíme-li $v_n = \frac{2\Delta}{a_n}$. Je tudíž v celku

$$\begin{aligned} |M_{P_n}^{S_n}| &= |M_{P_n}^{A'n}| = |M_{P_n}^{A'n+1}| = |M_{P_n}^{V'}| = \\ &= \left| \frac{(a_{n+1}^2 + a_n^2 - a_{n-1}^2)(a_{n-1}^2 + a_n^2 - a_{n+1}^2)}{4a_n^2} \right| \end{aligned} \quad (12)$$

a druhá odmocnina z těchto výrazů určuje délku tečen případně nejkratších pultětiv vedených patou P_n v příslušných pěti kruž-

nicích. Sestrojíme-li tečny nebo nejkratší pŕltětiny (obr. 3), dostaneme deset koncových bodů, které určují kružnici opsanou ze středu P_n poloměrem



Obr. 3.

$$\sqrt{|M_{P_n} S_n|} = r_n^M = \frac{1}{2a_n} \sqrt{(a_{n+1}^2 + a_n^2 - a_{n-1}^2)(a_{n-1}^2 + a_n^2 - a_{n+1}^2)}.$$

Tímto způsobem dostaneme tři kružnice (P_n, r_n^M) a můžeme ukázati, že jejich střed mocnosti jest v průsečíku výšek V , t. j.

že se jejich tři chordály protínají v průsečíku V (obr. 3). Uvážíme-li totiž, že $\sqrt{M_{P_n} S_n}$ je nejkratší púlětřiva kružnice $(S_n, \frac{1}{2}a_n)$ vedená patou P_n kolmo k $A_{n+1}A_{n-1}$, že tedy jejími koncovými body jde kružnice (P_n, r_n^M) , dostaneme, že výška P_nA_n je chordála kružnic $(S_n, \frac{1}{2}a_n)$, (P_n, r_n^M) , a mocnost průsečíku V má vzhledem k těmto oběma kružnicím stejnou hodnotu, kterou jsme určili v b) t. j. $M_V S_n = d_n h_n =$

$$= \frac{(a_{n+1}^2 + a_{n-1}^2 - a_n^2)(a_{n-1}^2 + a_n^2 - a_{n+1}^2)(a_n^2 + a_{n+1}^2 - a_{n-1}^2)}{32\Delta^2},$$

to je však výraz, jehož hodnota nezávisí na indexu n a tedy mocnost orthocentra V vzhledem ke všem třem kružnicím (P_n, r_n^M) jest stejná.

Isotopy.*)

Rudolf Brdička, Praha.

Daltonovým spisem *New System of Chemical Philosophy*, který vyšel r. 1808, byla zahájena moderní éra v chemii. V něm byly položeny vědecké základy k atomové teorii.

Základním postulátem Daltonovy atomové teorie byla existence nejmenších nedělitelných částíček nazvaných atomy, z nichž je složen každý prvek. Atomy téhož prvku mají podle Daltona stejné chemické vlastnosti a jsou stejně těžké; atomy různých prvků jsou vahově rozdílné. Tento postulát je dnes pouze zpoloviny správný. Dnešní pojem prvku se sice kryje s pojmem, který měl na mysli Dalton — že totiž prvek je látka, která má konstantní chemické vlastnosti a již nelze chemicky rozdělit na další komponenty — ale postulát o stejné váze atomů téhož prvku byl přímými důkazy vyvrácen.

Je zajímavé sledovati vývoj názorů na tento problém, než se dospělo k jeho definitivnímu rozřešení.

Daltonův postulát, že vahový poměr, ve kterém se prvky slučují odpovídá poměru vah jejich atomů, obrátil na počátku XIX. stol. zřetel chemiků ke stanovení atomových vah, v nichž byla spatřována fundamentální atomová konstanta. Podle prvních hrubších stanovení byly atomové váhy celé řady prvků přibližně celistvými čísly a to vedlo anglického lékaře Prouta (1815) k vyslovení hypotézy, že veškeré atomy jsou vlastně polymery vodíku. Přesná kontrola atomových vah, kterou provedl ve svých klasických pracích německý chemik Stas, způsobila zavržení této

*) Předneseno na I. sjezdu pro středoškolskou pedagogiku a didaktiku v Praze 1936.

hypothesy. Odmítnutí Proutovy myšlenky bylo však jen dočasné, neboť předpoklad celistvosti čísel pro atomové váhy nebyl ještě zcela ztracen. Vedle možnosti, že váhy atomů jsou zlomky celistvých čísel, byla tu ještě druhá možnost, že prvek je směs atomů o různé váze, což je ovšem v rozporu s uvedeným Daltonovým postulátem.

Tuto druhou možnost diskutoval r. 1886 sir William Crookes, který pracoval se vzácnými zeminami. Podnět vyšel ze studia frakcí yttriových. Crookes ukázal, že at. váhy jednotlivých komponent, které nazývá metaelementy, jsou různé, ačkoliv jejich chemické vlastnosti jsou skoro stejné. Generalisací těchto poměrů na ostatní prvky dovozoval, že váhy jednotlivých atomů v určitém prvku jsou různé. Mohou to být čísla celistvá a chemicky stanovená at. váha je pak jen hodnota průměrná. Nelze se diviti, že tato představa nenalezla v oné době mnoho přívrženců, tím spíše pak, když se ukázalo, že její experimentální podklad byl vadný. Crookesovy metaelementy nebyly totiž ničím jiným, než skutečnými prvky o různém spektru a at. váze, třebaže vykazovaly chemicky značnou podobnost.

Neočekávaný obrat v řešení a rozhodnutí této otázky nastal objevem radioaktivních prvků. V řadách prvků vyznačujících se radioaktivitou byly nacházeny prvky chemicky naprosto identické, avšak s různými vlastnostmi radioaktivními a také s různou at. vahou.

Tak v r. 1906 objevil Boltwood ionium, které se podobalo chemickými vlastnostmi (ne však radioaktivními) thoriu a směs obou nepodařilo se ani jemu ani jiným pracovníkům chemicky oddělit. Stejně tak mesothorium objevené r. 1907 Hahnem a chemicky podobné radium se nedalo od tohoto oddělit.

V r. 1910 poukázal Soddy na bezpečně zjištěnou chemickou identitu ionia, thoria a radiothoria, dále radia a mesothoria I, olova a radia D a na pravděpodobnou identitu i jiných radioaktivních prvků.

Dokonalý přehled chemicky indentických radioaktivních prvků byl získán na základě posouvacího zákona, vysloveného Soddym (1911) a později v úplnější formě nezávisle Russellem a Fajensem (1913). Podle tohoto zákona vznikne z radioaktivního atomu vyzářením α -partikule a dvou β -partikulí nový atom, který se nachází v periodickém systému na témže místě, jeho atomová váha je však o 4 jednotky menší.

Vycházeje z chemické identity těchto určitých radioaktivních prvků, učinil Soddy důležitý a nutný závěr, že chemická homogenita není bezpečnou zárukou, že daný element není směsí atomů o různé váze a tento závěr rozšířil i na prvky neradioaktivní.

Pro takové atomy, které se nacházejí na stejném místě v periodické soustavě, lišící se však atomovou vahou, našel Soddy název isotopy. Isotopy téhož prvku jsou tedy látky chemicky identické a fyzikálně se liší jen v takových vlastnostech, které závisí přímo na hmotě; v jiných fyzikálních vlastnostech jsou podle Soddyho rovněž identické.

Po bezpečném objevu isotopie u radioaktivních prvků pátralo se po isotopech u prvků neradioaktivních. Zpočátku byl velký odpor proti těmto názorům, neboť o at. vahách bylo známo, že jsou dokonalými konstantami, stejně tak jako byly neproměnné i jiné at. konstanty. U plynů pak byla vždy shledávána dokonalá homogenita, která nikterak nenasvědčovala jejich složení z různých těžkých částic.

Jediná experimentální metoda, která tehdy mohla stanovit hmotu atomu, či lépe řečeno, poměr náboje ke hmotě, byla Thomsonova analýza pozitivních paprsků.

Positivní paprsky byly objeveny Goldsteinem r. 1886 při elektrickém výboji za nízkého tlaku a nazvány byly paprsky kanálovými. Jsou to v podstatě pozitivně nabitě atomy nebo molekuly vznikající ve výbojové trubici ionisací, které se pohybují vlivem potenciálního spádu značnou rychlostí směrem ke katodě. Tento jejich charakter byl seznán z chování v elektrickém a magnetickém poli. Částice o hmotě m nesoucí náboj e a letící rychlostí v ve směru kolmém na siločivky homogenního magnetického pole intenzity H , je vystavena při průchodu tímto polem účinku síly velikosti $H \cdot e \cdot v$, která působí kolmo na její směr a kolmo k siločivkám pole. Vlivem této síly vykoná částice v poli dráhu kruhovou, jejíž poloměr r je určen podmínkou

$$H \cdot e \cdot v = \frac{mv^2}{r}.$$

Zamění-li se pole magnetické za homogenní elektrické o intenzitě I , při jinak stejném uspořádání působí na částici síla $I \cdot e$ a to ve směru siločivek. Částice pohybuje se pak po parabole, která resultuje složením pohybu rovnoměrného v původním směru paprsku a pohybu rovnoměrně zrychleného s urychlením $e \cdot I/m$ ve směru siločivek.

Z úchylky dráhy nabitě částice v elektrickém nebo v magnetickém poli by bylo možno číselně stanovit poměr e/m , kdyby byla známa rychlost oné částice. Rychlost dá se však eliminovat, jestliže se zjistí úchylka paprsku při současné aplikaci elektrického a magnetického pole, jejichž siločivky jsou rovnoběžné a při tom kolmé ke směru paprsku (obr. 1).

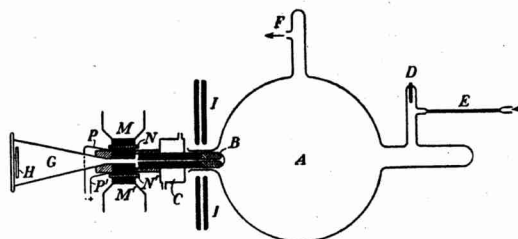
Dopadají-li paprsky po průchodu těmito poli na stínítko, nebo fotografickou desku, jejíž rovina je kolmá k původnímu směru

paprsku, objeví se úchylka

$$y = k \frac{H \cdot e}{mv} \text{ ve směru kolmém na silokřivky a}$$

$$x = k' \frac{I \cdot e}{mv^2} \text{ ve směru silokřivek;}$$

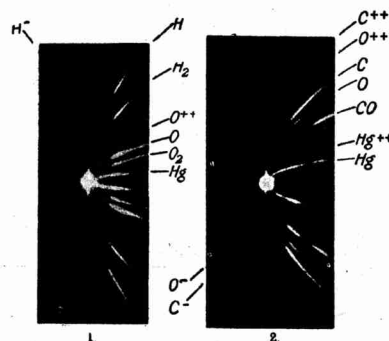
k a k' jsou konstanty závislé na rozměru přístroje.



Obr. 1. Thomsonův přístroj k analýze pos. paprsků. A výbojová baň, D anoda, B katoda opatřená vývrtem, P a P' póly kondensátoru, M a M' póly magnetu, H fot. deska, nebo stínítko.

Poměr y^2/x je měrou e/m a nezávisí na rychlosti.

Pro pozitivní paprsek skládající se z částic o stejném e/m , ale o různé rychlosti v , nezíská se na stínítku nebo desce přístroje jen



Obr. 2. Fotografie typických Thomsonových parabol.

jediný bod, nýbrž souvislá křivka, která je parabolou. Z každého bodu této paraboly lze vypočítati e/m . Vrchol této paraboly bude ležet v počátku, kam směřuje původní paprsek. Podle rychlosti částic řídí se úchylka x a y . Částice o velké rychlosti budou uchylvány méně než částice s malou rychlostí. Obrácením magnetického pole se získá symetrická část paraboly podle osy x ; mají-li paprsky záporný náboj, objeví se větev paraboly v protilehlém quadrantu (obr. 2).

To je princip t. zv. Thomsonovy parabolické metody, pomocí níž J. J. Thomson analysoval po prvé hmotné paprsky a pomocí níž první stanovil hmoty atomů, vzav za základ hmotu atomu kyslíku $O = 16$. Touto metodou s poměrně malou rozlišovací schopností a citlivostí nepodařilo se mu nalézt žádný isotop, který hledal u vodíku, uhlíku, dusíku a kyslíku.

V r. 1913 objevil však pozoruhodnou okolnost při analýze pozitivních paprsků získaných ionisací neonu. Našel dvě paraboly: silnější odpovídající hmotě 20 a slabší hmotě 22. To znamenalo první objev isotopů v řadě prvků neradioaktivních. Zmíněný důkaz nebyl však tehdy dosti přesvědčivý a proto byl veškerý zájem obrácen k tomu, aby oba isotopy neonu byly od sebe alespoň částečně odděleny. Pokusy s frakcionovanou destilací a diffusí skončily naprostým nezdarem.

Další slibný pokrok v analýze pozitivních paprsků byl přerušen světovou válkou. V té době bylo chemicky potvrzeno přesvědčení Soddyho, že at. váha olova v uranu bude menší než olovo v thoriu. Radioaktivní přeměna uranu vede totiž k olovu o at. váze 206 a thoria k olovu o at. váze 208, zatím co obyčejné olovo má at. váhu 207,22. At. váhu olova z minerálu thoritu stanovil Hönigschmid a našel pro ni hodnotu 207,77. Skoro současně stanovil Richards (1914—16) at. váhu olova původu uranového v cleveitu a našel hodnotu 206,08.

Po těchto nezvratných faktech přestalo se již o existenci isotopů pochybovati a hledány nové cesty jak, je odkrývati.

Poněvadž byla poznána marnost pokusů o makroskopické dělení isotopů nabízela se k jejich studiu jediné analyza pozitivních paprsků. Výsledek závisel na zdokonalení experimentální techniky.

Tohoto úkolu se ujal žák Thomsonův F. W. Aston v Cambridgi a jemu vděčíme za znalost většiny isotopů, o kterých dnes víme. Své proslulé práce s hmotným spektrografem zahájil v roce 1919. Základem jejich je opět analyza pozitivních paprsků, jakou prováděl J. J. Thomson. Principiální zdokonalení spočívá ve fokussaci hmotných paprsků se stejným poměrem e/m , ale s různou rychlostí do stejného místa na fotografické desce, nebo na stínítku. Positivní paprsky byly produkovány opět výbojem při nízkém tlaku.

Po průchodu dvěma úzkými štěrbinami rozdělí se úzký paprsek sestávající z částic o určitém e/m v poli kondensátoru v elektrické spektrum, jehož šířka je dána rychlostmi, s jakou se tyto částice pohybují. Z pole vyjdou tedy paprsky divergentní, k nimž lze nalézt virtuální střed. Část těchto paprsků odchýlená od původního směru o úhel θ projde nyní magnetickým polem postaveným kolmo k elektrickému, které uchyluje paprsky opačným směrem o úhel ϕ (obr. 3).

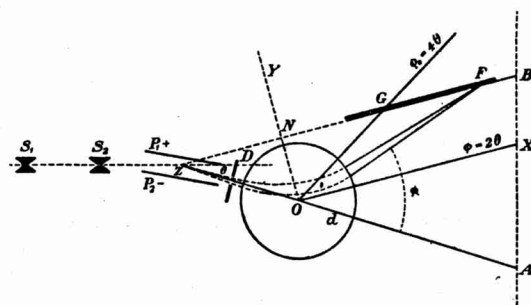
Pro malé úhly platí prakticky přesně

$$\Theta v^2 = l e / m \text{ a } \Phi v = L H e / m,$$

kde l a L jsou příslušné délky dráhy paprsku v elektrickém a magnetickém poli.

Výrazy Θv^2 a Φv jsou pro dané e/m konstantami a pro změnu úchylek se změnou rychlosti platí diferenciální rovnice:

$$\frac{d\Theta}{\Theta} + \frac{2dv}{v} = 0 \text{ a } \frac{d\Phi}{\Phi} + \frac{dv}{v} = 0.$$



Obr. 3. Diagram Astonova hmotného spektrografu. S_1 , S_2 štěrby, kudy vchází pos. paprsek do el. pole, P_1 , P_2 póly kondensátoru, D diafragma s otvorem, propouštějícím jen úzký svazek divergentních paprsků s virtuálním středem Z , O střed magn. pole, F dopad fokusovaných paprsků na desku.

Eliminací v z těchto rovnic obdrží se vztah

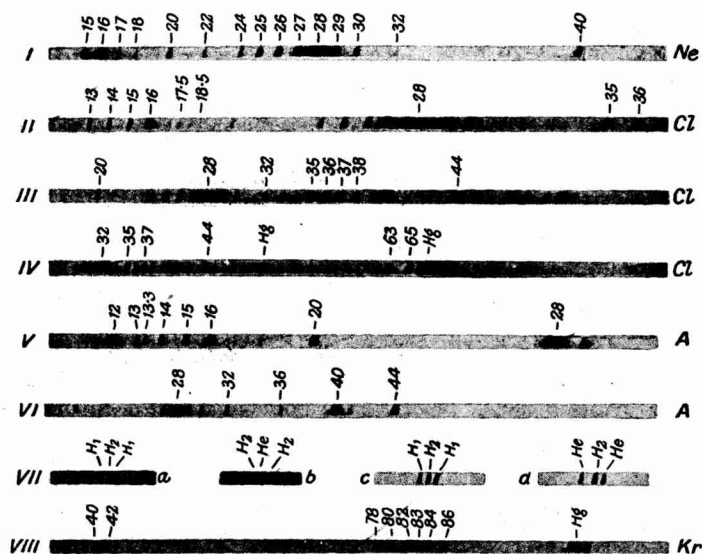
$$\frac{d\Theta}{\Theta} = -\frac{d\Phi}{\frac{1}{2}\Phi}.$$

Význam tohoto vztahu je takovýto. Má-li být dosaženo stejných změn úchylek v elektrickém a magnetickém poli ($d\Theta$ a $d\Phi$), jež se vztahují k určité změně rychlosti dv , pak musí být mezi úhly Θ a Φ splněn vztah $2\Theta = -\Phi$. Paprsky vystupující z magnetického pole budou v tomto případě rovnoběžné.

Z uvedených podmínek dá se dále dokázat, že úzký divergentní svazek paprsků uchýlený o úhel Θ v elektrickém poli a o malém rychlostním rozmezí stane se sbíhavým po průchodu magnetickým polem, uchýlí-li ho toto o úhel Φ , který je větší, než dvojnásobná úchylka v elektrickém poli a opačného smyslu. To je Astonova podmínka pro fokusaci hmotných paprsků. Jsou-li v paprsku částice o různém e/m , získává Aston t. zv. hmotné spektrum, ve kterém každému poměru e/m odpovídá jedna linie (obr. 4). Rozlišovací mohutnost tohoto prvního hmotného spektrografu byla 1 : 300 a citlivost 1 : 1000. Zkoumaná část hmotného spektra

obsahující vždy jen určitý obor linií přiváděla se na desku regulací intenzit elektrického a magnetického pole. Sklon fotografické desky byl upravován tak, aby na ni byly fokusovány paprsky odpovídající extrémním poměrům e/m , které vytvářejí hmotné linie na obou koncích desky.

Vedle iontů s jedním pozitivním nábojem nacházejí se v pozitivních paprscích také ionty o více pozitivních nábojích (C^+ ,



Obr. 4. Hmotné spektrum získané Astonem pomocí prvního hmotného spektrografu.

C^{++} a p.), čímž vznikají linky t. zv. druhého, popřípadě vyšších řádů. Částice samy pak mohou být jednoduchými zbytky atomů, ale také zbytky molekul. Tak na př. při analýze pozitivních paprsků kyslíku najdou se e/m odpovídající hodnotám

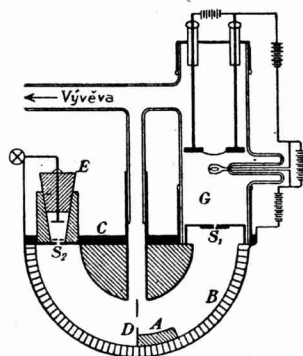
$$\begin{aligned} 32 & \text{ pro } O_2^+ \\ 16 & \text{ pro } O^+ \\ 8 & \text{ pro } O^{++}. \end{aligned}$$

U molekul se zpravidla neobjevuje více nábojů než jeden. Za standard se bere hmotná linie atomu kyslíku, pro niž je volena hmotnost jako v chemii $O = 16$.

Když Aston sestavil v roce 1919 tento hmotný spektrograf, zvolil si jako první problém zjištění konstituce neonu a našel bezpečně linky, odpovídající hmotám 20 a 22. Ještě v témž roce objevil

isotopy chloru a rtuti a v následujícím roce objevil isotopické složení dalších 15 prvků. V té době už se nikdo neodvažoval pochybovati o existenci isotopů a další rozvoj výzkumu tohoto problému postupoval ku předu převážně v rukou Astona.

V roce 1920 ohlásil v Chicagu isotopickou konstituci magnesia G. P. Dempster, který konstruoval (1918) rovněž přístroj k analýse pozitivních paprsků na poněkud jiném principu (obr. 5). Positivně



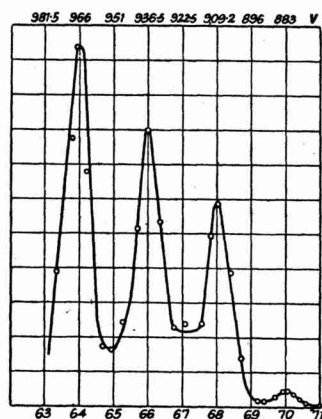
Obr. 5. Dempsterův hmotný spektrograf. *G* skleněný válec, ve kterém jsou pot. spádem urychlovány pos. ionty uvolněné z horké anody, *S*₁, *S*₂, *D* štěrbin v prostoru magn. pole *A*, jimiž musí projít paprsek, aby dopadl na desku elektrometru *E*.

nabité ionty získával z horké anody obsahující látku, jejíž isotopickou konstituci chtěl studovati. Aby získal pozitivní paprsky, urychloval ionty určitým potenciálním spádem *P*. Za těchto podmínek při vhodném experimentálním uspořádání docílil, že všechny pozitivně nabitě jednomocné částice měly na konci spádu stejnou kinetickou energii bez ohledu na hmotu *m*. Malou štěrbinou vymezil si úzký pozitivní paprsek, který byl zaveden do silného magnetického pole kolmo k jeho siločávkám. V magnetickém poli jsou jednotlivé částice přinuceny opisovati kruhové dráhy, jejichž poloměr závisí při daném *H* a *P* toliko na *e/m*. Rychlost těch částic je funkcí potenciálního spádu *P* a je pro dané *e/m* jen jediná. Heterogenní paprsek pozitivní rozdělí se tedy na řadu kruhových drah, z nichž nejkrivější přísluší nejmenším hmotám. Přístroj je sestaven tak, že paprsky mohou konat jen dráhu polokruhovou a ze všech těch drah vybere se jen ta, která má poloměr *r*, daný rozměrem aparatury. Dráha tohoto paprsku je vymezena úzkými štěrbinami a vede k deštičce spojené s elektrometrem, pomocí něhož se paprsek zkonstatuje a změří jeho intensita. Podmínka, aby částice definovaná poměrem *e/m* opsala v magnetickém poli

polokruh o poloměru r zní

$$\frac{e}{m} = \frac{2P}{H^2 r^2}.$$

Potenciální spád urychlující částice je proměnlivý a jeho plynulým zvětšováním fokusuje Dempster na deštičku postupně částice se zvětšujícím se poměrem e/m a měří elektrometrem příslušnou intensitu. Získá tak graf, na jehož úsečky nanáší P , nebo m a na pořadnici příslušnou intensitu proudovou (obr. 6). Pro



Obr. 6. Dempsterova křivka pro isotopy zinku.

každou hmotnou částici v pozitivním paprsku najde se určité P , při kterém se v grafu ukáže prominentní maximum intensity. Výška onoho maxima udává relativní zastoupení oné částice v hmotném paprsku.

Touto metodou získal Dempster o rok později isotopy kalcia a zinku a celou řadu isotopů jiných nezávisle na měření Astonově s výsledky souhlasnými.

Do roku 1925 už byla známa isotopická konstituce více než poloviny prvků, většina z nich shledána komplexní a jen některé jednoduché.

Podle tehdejší přesnosti 1 : 1000 byly hmoty všech isotopů velmi blízké celistvým číslům, a dnes tato celistvá čísla, která jsou nejbližší hodnotám nalezeným pro příslušnou hmotu isotopu, označujeme jako hmotná čísla. Přes to však už tenkrát konstatoval Aston malé úchyly od těchto celistvých čísel a viděl, že je třeba zvýšit přesnost své aparatury. Nutnost této úpravy vyžadovalo i studium hmot těžších atomů, kde přesnost 1 : 1000 byla nepostačující. Další nesnáze byly v tom, jak získati u všech látek

positivní paprsky, neboť všechny je neposkytují stejně snadno. Aston použil k tomu účelu ve svém druhém typu přístroje dalšího zařízení. Jak již bylo uvedeno užíval původně elektrického výboje v plynu za nízkého tlaku. Tento způsob předpokládá, aby studovaná látka byla plynem, nebo, aby byla dostatečně těkavá. V případech, kde nelze tuto podmínku splnit získává positivní paprsky t. zv. anodovým výbojem, kde zkoumaná látka je podobně jako u Dempstera nanášena na anodu, která za horka emituje positivní ionty.

Avšak ani tímto způsobem nebylo možno získati donedávna positivní paprsky palladia, iridia, platiny a zlata. Zásluha za zjištění jejich isotopické konstituce patří Dempsterovi, který použil nového zdroje k produkci positivních iontů těchto tvrdších kovů. Užil k tomu jiskrového výboje mezi kovovými elektrodami ve vysokém vakuu. Nejlepší výsledek získal pomocí jiskry induktivně spřažené s vysokofrekvenčním oscilačním jiskřícím kruhem. Tak neexistuje dodnes už ani jediný přístupný prvek, jehož isotopické složení by nebylo známo.

Zmíněný druhý přesnější typ hmotného spektrografu byl konstruován Astonem v letech 1924—1929 a s tímto přístrojem provádí v Cavendishově laboratoři analýsy dodnes. Přístroj má pateronásobnou rozlišovací schopnost proti původnímu a jeho citlivost je 1 : 10000. Délka spektra obnáší 16 cm a uzavírá asi oktávu prvků, již lze voliti podle aplikovaných silových polí. Zvětšení rozlišovací mohutnosti a citlivosti bylo docíleno zdvojením úchylek v elektrickém a magnetickém poli. V poslední době dosahuje Aston citlivosti 1 : 10^5 , která mu umožňuje přesné rozlišení hmotných linií, jež u starší aparatury dopadaly téměř na stejné místo ($D^+ - H_2^+$, $He^+ - D_2^+$, $C^{++} - D_2^+$, $O^+ - CH_4^+$).

Otázka přesnosti stanovení atomových vah isotopů má eminentní důležitost pro teorii, která z úchylek těchto vah od celistvých čísel usuzuje na složení a stabilitu atomového jádra.

Existence atomového jádra byla prokázána Rutherfordem (1911), když studoval rozptyl α -částic při průchodu plynem. Zjistil, že atomové jádro má objem nepatrný vzhledem k rozměrům atomu, při čemž je v něm koncentrována veškerá hmota atomu a že nese positivní náboj. Velikost tohoto positivního náboje byla shledána totožnou s číslem měnícím se přesně po jednotkách v Moseleyho zákoně Röntgenových spekter a sice od jednotky pro vodík až po 92 pro uran. Anomální postavení draslíku a argonu, niklu a kobaltu a telluru a jodu v periodickém systému na podkladě atomových vah bylo zákonem Moseleyho uvedeno na pravou míru, neboť seřazením prvků podle stoupajícího náboje jádra dostaly se zmíněné dvojice prvků na místa, na která přísluší podle svých chemických vlastností. Tím bylo současně dokázáno, že to co

charakterisuje veškeré vlastnosti atomu není atomová váha, nýbrž pozitivní náboj jádra atomu vyjádřený přesně celistvým číslem, kterému říkáme atomové číslo. Příčina svrchu uvedených anomalí v atomových vahách je průhledná, vezmeme-li v úvahu isotopickou konstituci prvků a možnost výskytu určitého isotopu ve větším množství.

Kolem atomových jader pohybují se planetární elektrony v počtu rovnajícím se přesně pozitivnímu náboji jádra. Uspořádání těchto planetárních elektronů diktuje chemické vlastnosti atomů a udává charakter optických i Röntgenových spekter, kdežto váha a radioaktivní vlastnosti, které se projevují přirozeně, nebo umělým zásahem jsou vlastnostmi atomového jádra.

Nález odvozený z předchozích výzkumů pomocí hmotného spektrografu, že váhy všech isotopů jsou s dosti velkou přesností celistvými čísly, odstranil nejvážnější námitku proti unitární teorii hmoty, jejímž průkopníkem byl Prout.

Nepatrné úchytky od celistvých čísel konstantované přesně pomocí zdokonaleného hmotného spektrografu nemohly již býti podstatnou námitkou proti takové představě. K výkladu oněch úchytek přispěl Einsteinův zákon o ekvivalenci hmoty a energie, odvozený ze zákona relativity, který zní; zdánlivá hmota m^*) násobená čtvercem světelné rychlosti má kinetickou energii $E = m \cdot c^2$.

Vzniklo-li atomové jádro těsným semknutím volných částic o určité zdánlivé hmotě, zničí se určitá frakce takto kombinované zdánlivé hmoty, při čemž zničení hmoty se projeví ekvivalentním vyzářením energie určené podle Einsteinova zákona. Je to jakási analogie exothermní chemické reakce, kde ovšem uvolněná tepelná energie je proti jaderným energiím nesrovnatelně malá a ztráta hmoty našimi prostředky nekonstatovatelná.

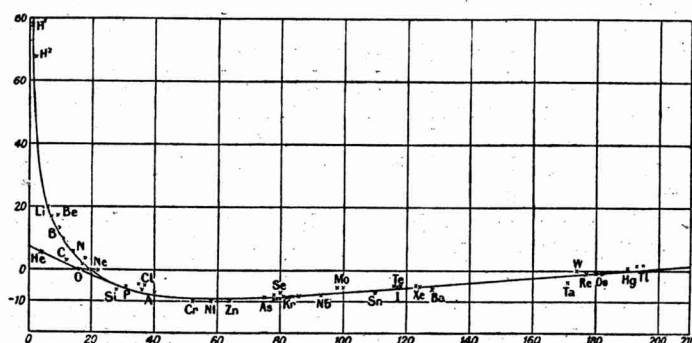
Velikost vyzářené energie při synthese atomového jádra je současně měrou jeho stability. Čím větší nastal při ní hmotný úbytek, tím stabilnější je toto jádro. Proto nabývá znalost hmotných úbytků u jednotlivých atomů fundamentálního významu pro studium struktury jádra. Při tom je však nutno znáti z jakých partiкул toto jádro bylo synthetisováno.

Tato otázka je ještě hypotetickou, ale data získaná přesnými experimenty pomocí hmotného spektrografu mohou kontrolovati, zda učiněné předpoklady odpovídají kvantitativně skutečnosti. K tomu je si nutno uvědomiti, co znamenají Astonovy atomové hmoty.

Veškerá stanovení atomových hmot zakládající se na analýse pozitivních paprsků vztahují se konvencionálně podobně jako v che-

*) Zdánlivou hmotou je rozuměna hmota, jak ji měříme v určité fyzikální soustavě.

mii na standard kyslíkový, jemuž se připisuje hmota $0 = 16$. Vzhledem k tomuto standardu dá se zdokonaleným Astonovým spektrografem stanovit hmota jednotlivých isotopů na šest číslic. Procentuální difference mezi vahou isotopu a nejbližším celistvým číslem, jež je nazýváno hmotným číslem označuje se pojmenováním „packing fraction“ a vyjadřuje se počtem dílů připadajících na 10 000 dílů. Tato „packing fraction“ mění se od isotopu k isotopu podle určité zákonitosti, která je patrná, nanese-li je do souřadnicového systému proti příslušným hmotným číslům (obr. 7). Získá



Obr. 7. Závislost „packing fraction“ na hmotném čísle.

se tak křivka, která s výjimkou několika prvních lehkých atomů se sudým hmotným číslem (He^4 , C^{12} , O^{16}) je přibližně hyperbolou.

Největší a pozitivní hodnota pro „packing fraction“ se vyskytuje u vodíku (+ 77,8), v okolí fluoru nabývá hodnoty nulové a dosahuje minima u chromu, kde obnáší hodnotu -10 . Poté je průběh křivky zhruba lineární až k největším hmotným číslům, jaká známe.

Millikan užil po prvé této křivky k studiu kosmických vztahů mezi hmotou a energií.

Gamov, Guernsey a Condon na základě znalosti přesných hmot atomů vybudovali kvantovou teorii jádra, pomocí níž vykládají s úspěchem radioaktivitu a vůbec strukturu atomového jádra. Důležitou veličinou v jejich výpočtech je svrchu zmíněný úbytek hmoty při tvorbě jádra, který je označován pojmem „mass defect“. Je to rozdíl mezi hmotou atomu a hmotou všech partiкул, ze kterých je atom složen.

Předpokládáme-li, že kyslík sestává ze čtyř heliových atomů, je atom kyslíku lehčí o 16násobnou hodnotu „packing fraction“ příslušející heliu. Úbytek hmoty při synthese kyslíku ze čtyř heliových atomů byl by tedy $0,00864$ a ten odpovídá energii $8,1 \cdot 10^6 \text{ eV}$.

kteřá by se při tom vyzářila. Obě udaná čísla jsou zároveň měrou stability kyslíku. Kdyby měl hmotný úbytek hodnotu nulovou, nebylo by vůbec možno, aby se kyslík takto utvořil, neboť by tu nebyla síla, která by jádro držela pohromadě. Že hmotný úbytek je skutečně měrou stability jádra lze ukázati na umělých přeměnách lehkých atomů. Atomy se sudými hmotnými čísly, které mají větší „mass defect“ jsou stálejší vůči bombardování korpuskulami než liché, jejichž mass defect je menší.

Také zákon ekvivalence hmoty a energie lze verifikovati na radioaktivních přeměnách. Při celkové spontánní radioaktivní transformaci uranu na olovo vyzáří se úhrnná energie $45 \cdot 10^6$ elektron. Volt. Tato energie se uvolní ve formě vyzáření osmi α -částic a šesti β -částic, jejichž úhrnná hmota obnáší 32,012. Hmotný ekvivalent energie $45 \cdot 10^6$ e. V je 0,048, podle kterého teoretická difference mezi hmotou uranu a olova má být 32,06. Podle Astonovy křivky průběhu „packing fraction“ lze se přesvědčiti, že tomu tak skutečně je.

Pro obecný výpočet hmotných úbytků všech atomových jader je třeba znáti všechny konstituenty, které je skládají. Podle dnešního stavu vědy je zjištěno, že atomová jádra jsou složena z protonů, neutronů a případně i heliových jader. O neutronech se ví, že to jsou hmotné částice o váze přibližně stejné jako protony, ale jsou bez náboje. Elektronů v jádře patrně vůbec není a β -aktivity, nebo emise positronů vznikající při umělé radioaktivitě je velmi pravděpodobně zjev sekundární, mající původ v materializaci γ -kvantu. Positron je částice objevená při studiu kosmického záření; její hmota je stejná jako hmota elektronu, její náboj je však pozitivní.

Synthesa prvků z uvedených konstituent se děje pravděpodobně na horkých hvězdách, kde ubývání hmoty je zdrojem ohromných energií vysílaných do prostoru. Synthesu provází současně i desintegrace, která převládne, jestliže zmizely podmínky pro synthesu (na zemi a planetách).

Vedle at. váhy isotopů je důležitá ještě jedna jeho konstanta a to jest jeho poměrné množství, v jakém je obsažen v normálně přicházejícím prvku v přírodě. Bylo totiž pokusy bezpečně dokázáno, že až na olovo původu radioaktivního a bor, je isotopická konstituce prvků v přírodě, ať je jakékoliv proveniencie, naprosto konstantní.

Poměrné množství isotopů v prvku určuje se podle Dempstera, jak již bylo zmíněno. Mnohem více prvků však bylo proměřeno Astonem, který zjišťuje fotometricky intensitu linií ve hmotném spektru. Poměr začernání linek isotopů téhož prvku na fotografické desce je roven poměru množství částic, které na desku dopadly za stejnou dobu. Je-li intensita linie N^{20} asi 10krát větší než

intenzita linie N^{22} značí to, že v přirozeném neonu je asi desetkrát více lehčího isotopu než těžšího.

Je-li známo poměrné zastoupení všech isotopů v prvku, lze vypočítat jeho at. váhu na podkladě ryze fyzikálním a to přesněji, než jak ji lze stanovit chemicky a při tom ještě s materiálem nečistým. Astonovo fyzikální stanovení at. vah zavedlo podnět k revidaci chemických at. vah v případech, kde byly konstatovány větší nesrovnalosti. Správnost fyzikálního nálezu byla vždy potvrzena. Ježto chemický standard je počítán na kyslík $O = 16$, který však obsahuje isotopy $O = 17$ a $O = 18$, liší se tento od fyzikálního standardu vztaženého na hmotu isotopu kyslíku $O = 16$. V důsledku toho jsou chemické at. váhy o něco větší než fyzikální, které je nutno násobit převodním faktorem 1,0002.

Přehledneme-li isotopickou konstituci jednotlivých prvků — dodnes už máme hlavně zásluhou Astona a Dempstera prostudovány po této stránce všechny přístupné prvky — je patrna celá řada zákonitostí (viz tabulku).

Přehled prvků a jejich přirozených isotopů 1936.

Prvek	Symbol	At. číslo	At. váha*	Hmotná čísla isotopů podle jejich poměrného množství**
Vodík	H	1	1,0078	1, 2, 3
Helium	He	2	4,002	4,
Lithium	Li	3	6,940	7, 6,
Beryllium	Be	4	9,02	9, (8), (10),
Bor	B	5	10,82	11, 10,
Uhlík	C	6	12,00	12, 13,
Dusík	N	7	14,008	14, 15,
Kyslík	O	8	16,000	16, 18, 17,
Fluor	F	9	19,00	19,
Neon	Ne	10	20,183	20, 22, 21,
Sodík	Na	11	22,997	23,
Hořčík	Mg	12	24,32	24, 25, 26,
Hliník	Al	13	26,97	27,
Křemík	Si	14	28,06	28, 29, 30,
Fosfor	P	15	31,02	31,
Síra	S	16	32,06	32, 34, 33,
Chlor	Cl	17	35,457	35, 37,
Argon	A	18	39,944	40, 36, 38,
Draslík	K	19	39,096	39, 41, 40,
Vápník	Ca	20	40,08	40, 44, 42, 43,
Skandium	Sc	21	45,10	45,
Titan	Ti	22	47,90	48, 46, 47, 50, 49,
Vanad	V	23	50,95	51,
Chrom	Cr	24	52,01	52, 53, 50, 54,
Mangan	Mn	25	54,93	55,
Železo	Fe	26	55,84	56, 54, 57,
Kobalt	Co	27	58,94	59,
Nikl	Ni	28	58,69	58, 60, 62, 61,
Měď	Cu	29	63,57	63, 65,
Zinek	Zn	30	65,38	64, 66, 68, 67, 70, (63), (65),

Prvek	Symbol	At. číslo	At. váha*	Hmotná čísla izotopů podle jejich poměrného množství**
Gallium	Ga	31	69,72	69, 71,
Germanium	Ge	32	72,60	74, 72, 70, 73, 76,
Arsen	As	33	74,91	75,
Selen	Se	34	78,96	80, 78, 76, 82, 77, 74,
Brom	Br	35	79,916	79, 81,
Krypton	Kr	36	83,7	84, 86, 82, 83, 80, 78,
Rubidium	Rb	37	85,44	85, 87,
Strontium	Sr	38	87,63	88, 86, 87,
Yttrium	Y	39	88,92	89,
Zirkon	Zr	40	91,22	90, 92, 94, 91, 96,
Niob	Nb	41	92,91	93,
Molybden	Mo	42	96,0	98, 96, 95, 92, 94, 100, 97,
Masurium	Ma	43		
Ruthenium	Ru	44	101,7	102, 101, 104, 100, 99, 96, (98),
Rhodium	Rh	45	102,91	103,
Palladium	Pd	46	106,7	104, 105, 106, 108, 110, 102,
Stříbro	Ag	47	107,880	107, 109,
Kadmium	Cd	48	112,41	114, 112, 110, 111, 113, 116, 106, 108, 115, (118),
Indium	In	49	114,76	115, 113,
Cín	Sn	50	118,70	120, 118, 116, 119, 117, 124, 122, 121, 112, 114, 115,
Antimon	Sb	51	121,76	121, 123,
Tellur	Te	52	127,61	130, 128, 126, 125, 124, 122, 123, (127),
Jod	I	53	126,92	127,
Xenon	Xe	54	131,3	129, 132, 131, 134, 136, 130, 128, 126, 124,
Cesium	Cs	55	132,91	133,
Baryum	Ba	56	137,36	138, 137, 136, 135,
Lanthan	La	57	138,92	139,
Cer	Ce	58	140,13	140, 142,
Praseodym	Pr	59	140,92	141,
Neodym	Nd	60	144,27	142, 144, 146, 143, 145,
Illinium	Il	61		
Samarium	Sm	62	150,43	152, 154, 147, 149, 148, 150, 141,
Europium	Eu	63	152,0	151, 153,
Gadolinium	Gd	64	157,3	158, 155, 156, 157, 160,
Terbium	Tb	65	159,2	159,
Dysprosium	Dy	66	162,46	164, 162, 163, 161,
Holmium	Ho	67	163,5	165,
Erbium	Er	68	167,64	166, 168, 167, 170,
Thulium	Tm	69	169,4	169,
Yterbium	Yb	70	173,04	174, 172, 173, 176, 171,
Lutecium	Lu	71	175,0	175,
Hafnium	Hf	72	178,6	180, 178, 177, 179, 176,
Tantal	Ta	73	180,88	181,
Wolfram	W	74	184,0	184, 186, 182, 183,
Rhenium	Re	75	186,31	187, 185,
Osmium	Os	76	191,5	192, 190, 189, 188, 186, 187,
Iridium	Ir	77	193,1	193, 191,
Platina	Pt	78	195,23	195, 196, 194, 198, 192,
Zlato	Au	79	197,2	197,
Rtuť	Hg	80	200,61	202, 200, 199, 201, 198, 204, 196, 197, 203,

Prvek	Symbol	At. číslo	At. váha*	Hmotná čísla izotopů podle jejich poměrného množství**
Thalium	Tl	81	204,39	205, 203,
Olovo	Pb	82	207,22	208, 206, 207, 204, (209), (210), (203), (205),
Vismut	Bi	83	209,00	209,
Polonium	Po	84		(210), (218, RaA)***)
		85		
Radon	Rn	86	222	222, (219, An), (220, Tn),
		87		
Radium	Ra	88	226,05	226, (224, ThX), (228, MsTh),
Actinium	Ac	89		(227),
Thorium	Th	90	232,12	232, (230, Jo), (234, UXI),
Protactinium	Pa	91	231	(231, Pa), (234, UXII),
Uran	U	92	238,14	238, 235, (AcU), (234, UII).

Prvky o lichém at. čísle s výjimkou vodíku a kalia nemají nikdy více než dva izotopy, nebo jsou jednoduché. Lehčí izotop bývá hojnější.

Prvky o sudém at. čísle mají značnější počet izotopů. Z nich největší počet izotopů má cín a sice 11, pak xenon, kadmium, rtuť a olovo, které mají po devíti izotopech a všechny ostatní mají jich méně.

Není zajisté jen shodou okolností, že i elementy se sudým at. číslem jsou zastoupeny ve větším množství na zemi než elementy s číslem lichým.

Zajímavý je také vztah atomového čísla k hmotnému číslu. Hmotné číslo nejlehčího izotopu není nikdy menší než dvojnásobek jeho atomového čísla. Jedině vodík s hmotným číslem 1 činí opět výjimku. Do vápníku s hmotným číslem 40 známe skoro všechny ony nejlehčí izotopy, u těžších atomů je hmota vždy nad tímto dvojnásobkem. Toto pravidlo souvisí nesporně se strukturou jádra a značí, že na každý proton musí připadat v jádře nejméně jeden neutron.

S pojmem izotopu je úzce spojen pojem isobarů. Jsou to atomy stejně těžké, ale chemicky různé, tedy s různým at. číslem. Je jich známa celá řada a patří sem na př. argon a vápník o at. váze 40, nebo zirkon, molybden, ruthenium o at. váze 96 a p.

Doposud bylo pojednáváno o rozlišování izotopů analýsou pozitivních paprsků. Izotopy dají se však konstatovati i jiným způsobem, kterým bylo skutečně také objeveno několik nových izotopů.

*) Hodnoty mezinárodních at. vah pro rok 1936.

**) Hodnoty podle F. W. Astona v monografii: Mass-spectra and isotopes. Londýn, 1933, doplněné údaji z literatury až do roku 1936.

***) Hmoty radioaktivních izotopů nebyly většinou přímo stanoveny. Z velkého jejich množství jsou uvedeny pouze některé.

Patří sem především metody optické. V dřívějších experimentech nebylo nalezeno rozdílu mezi optickými spektry jednotlivých izotopů (na př. thoria a ionia). Isotopický efekt u atomových spekter je totiž příliš nepatrný, než aby byl konstatován spektroskopem s běžnou dispersí. Dnes je však optické spektrum při zdokonalené technice spektroskopické skoro tak důležité pro poznání homogeneity prvků jako hmotný spektrograf. Hodí se k tomu hlavně studium spekter molekulárních.

Vezměme si na příklad molekulu sestávající ze dvou atomů a mající jistý elektrický moment. Atomy této molekuly kmitají proti sobě podél své osy, čímž se mění velikost elektrického momentu; celá molekula rotuje pak ještě kolem osy kolmé na spojnici atomů. Frekvence kmitání jader ω je nepřímo úměrná druhé odmocnině redukované hmoty molekuly μ

$$\mu = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2},$$

kde m_1 a m_2 jsou hmoty atomů v molekule.

Uvažujeme-li konkrétně molekuly HCl^{35} a molekuly HCl^{37} , projeví se rozdílnost ve vibraci a rotaci obou těchto izotopních molekul v infračerveném spektru, které vzniká kvantovanou změnou vibrační a rotační energie. Přejít z jednoho kvantového stavu do druhého je provázen serií rotačních kvantových změn; vzniká tak rotační struktura vibračního pásu, jenž sestává z řady rotačních linií s dvěma sekvencemi: *R*-větev s pozitivními kvantovými čísly a *P*-větev s negativními.

Jedná-li se o isotopické molekuly HCl^{35} a HCl^{37} bude kmitání u HCl^{37} pomalejší než u HCl^{35} . Následkem toho objeví se ve spektru rozdíl ve vlnočtu linií příslušejících HCl^{35} a HCl^{37} . Isotopický vibrační efekt objeví se u všech rotačních linií vibračně rotačních pásů. Na straně menší frekvence každé rotační linky HCl^{35} objeví se slabší satellit vzdálený o 2 cm^{-1} v jednotkách vlnočtu pro kvantový přechod vibrační energie $0 \rightarrow 1$. Pro změnu $0 \rightarrow 2$ je ten efekt větší a obnáší $4,5 \text{ cm}^{-1}$ (obr. 8). Rozdíl nepatrně roste pro jednotlivé rotační linie a v tom spočívá rotační efekt izotopu definovaný změnou momentu setrvačnosti, který je pro oba izotopy rozdílný.

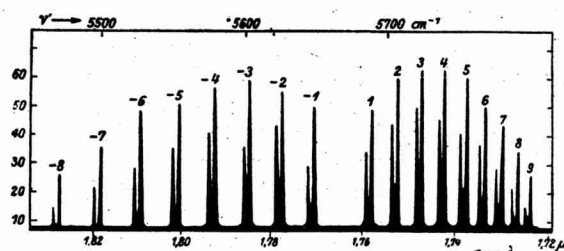
Tento vibrační isotopický efekt u chlorovodíku byl po prvé vysvětlen Loomisem a Kratzerem r. 1920 a rotační Sutherlandem r. 1932. Při dostatečné dispersi spektroskopu lze počítati ze spekter hmoty isotopických molekul.

Tímto způsobem byly objeveny i nové isotopy. Tak r. 1925 našel Mulliken isotope křemíku Si^{30} , r. 1929 GIAUQUE a JOHNSTON isotopy kyslíku O^{16} a O^{18} a téhož roku BABCOCK O^{17} a O^{18} . O rok později pak byl takto nalezen isotope dusíku N^{15} a uhlíku C^{13} .

Analýzou vibračně rotačního pásu byla rovněž potvrzena existence isotopu vodíku o hmotě 2 a to v chlorovodíku, kde byly bezpečně nalezeny linie příslušející hmotám HCl a H^2Cl .

Tento těžší isotope vodíku stojí za zvláštní zmínku, neboť má výjimečné postavení mezi ostatními isotopy vzhledem k svému lehčímu isotopu. Toto mimořádné postavení je způsobeno velikým rozdílem hmot a je vskutku ku podivu, že byl objeven až mezi posledními isotopy.

První experimentální průkaz, ne však dosti jistý, existence



Obr. 8. *R*- a *P*-větev rotačně vibračního pásu HCl^{35} , HCl^{37} , odpovídající vibrační změně $0 \rightarrow 2$.

isotopu vodíka o hmotě 2 podal Allison a jeho spolupracovníci (1930) pomocí magnetooptické metody.

V r. 1931 porovnávali Birge a Menzel váhový poměr vodíku ke kyslíku stanovený cestou chemickou a z hmotných spekter. Nesouhlas byl větší, než by bylo možno připsati experimentální chybě a proto autoři vyslovili přesvědčení, že ve vodíku musí být přítomen těžký isotope.

Přesný důkaz jeho existence provedli teprve v r. 1932 američané Urey, Brickwedde a Murphy.

Urey si vypočetl, že atomové spektrum tohoto isotopu vodíka mělo by se značně lišit od spektra jeho lehkého isotopu. Vlnčet spektrální serie atomu vodíka s ohledem na hmotu jádra je dána známou formulí

$$\nu = \frac{2\pi^2 e^4}{c \cdot h^3} \cdot \frac{M m_e}{M + m_e} \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

kde M je hmota jádra, m_e hmota elektronu, n' kvantové číslo nižšího energetického stavu, n kvantové číslo vyššího energetického stavu.

Je-li přítomen isotope o hmotě M_i , objeví se u každé linie satellit o vlnčet ν_i , který se bude lišit od vlnčet příslušné spektrální linie o obnos

$$\nu_i - \nu = \frac{2\pi^2 e^4}{c \cdot h^3} \cdot \left(\frac{M_i m_e}{M_i + m_e} - \frac{M m_e}{M + m_e} \right) \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) = \\ = \frac{m_e (M_i - M) \nu}{M \cdot M_i}.$$

Tímto způsobem si autoři vypočetli, že linie těžkého isotopu vodíka v Balmerově serii budou posunuty k nižšímu vlnočtu a to $H\alpha$ o 4,16, $H\beta$ o 5,61, $H\gamma$ o 6,29 a $H\delta$ o 6,65 cm^{-1} . Tyto linie byly jimi experimentálně vskutku nalezeny a to přesně v těch místech jak bylo vypočteno.

Aby důkaz nabyl přesvědčivosti, připravili se frakcionovanou destilací vodíku při -250°C tři frakce, v nichž bylo možno předpokládat různý obsah těžkého isotopu. Ve frakci těžkým isotopem nejbohatší byly zmíněné satelity nejintenzivnější, čímž byla existence těžkého isotopu bezpečně dokázána. Je to jeden z nejzajímavějších objevů dnešní vědy.

Brzy potom nastal ohromný pokrok v metodách, snažících se obohatiti normální přirozený vodík těžkým isotopem. Zmínky zasluží hlavně elektrolysa alkalických vodných roztoků na niklových elektrodách, při níž se hromadí těžký vodík ve zbytku ve formě t. zv. těžké vody H_2^{20}O . Pro výjimečné vlastnosti těžkého vodíku a pro poměrně snadnou jeho oddělitelnost od svého lehkého isotopu užívá se pro těžký isotope zvláštního pojmenování deuterium o symbolu D, jako by to byl samostatný prvek. Poměr v jakém přichází normálně ve vodě vzhledem k lehkému vodíku je asi 1 : 5000. Vedle tohoto isotopu vodíku je znám ještě isotope o hmotě 3, který byl připraven uměle a který přichází též v přírodě. Nazývá se tritium o značce Tr. Praktického významu celkem nemá, neboť jeden jeho atom připadá na 10^9 atomů lehkého vodíku. Jeho jádro je však velmi stálé.

Ke konci je nutno se zmíniti ještě o umělém makroskopickém dělení isotope. Postup je v každém případě velmi pracný. Starší pokusy všechny selhaly, teprve v novější době se zdařily díky značně zdokonalenému technickému provedení. Dělení spočívá na podkladě takových vlastností, které závisejí přímo na hmotě.

Sem patří především frakcionovaná difuze, kde největšího úspěchu dosáhl Hertz (1932). Jemu se podařilo rozdělit přirozený neon obsahující 90% lehčího isotopu o hmotě 20 a 10% těžšího isotopu o hmotě 22 na dvě frakce o složení:

1. frakce těžká: 71,5% Ne^{22} a 28,5 Ne^{20} ,
2. frakce lehká: 1% Ne^{22} a 99% Ne^{20} .

Difusi prováděl při nízkém tlaku speciálním porézním materiálem kontinuálně, při čemž pracovalo současně 24 rtuťových pump. Získané frakce byly analysovány hmotným spektrografem a výsledek byl potvrzen.

Ještě dokonalejšího úspěchu dosáhl Hertz (1933) při frakcionované difusi vodíku, kdy připravil frakci deuteria prakticky prostou lehkého vodíku. Spektrální linie lehkého isotopu v této frakci se vůbec neobjevily.

Čím vyšší je hmota isotopu, tím obtížnější je dělení, neboť podmínky pro takové dělení se stávají nepříznivé pro relativně malý rozdíl hmot takových isotopů. Proto měl tak malé výtěžky isotopického dělení u HCl Harkins, který pracoval na tomto problému téměř po deset let (1916—1926).

S úspěchem bylo použito také frakcionované destilace, která se však zdařila opět jen u vodíku a neonu.

Zmínky zasluhuje ještě separace isotopů vypařováním za nízkého tlaku, které se zdarem použili Brönsted a Hevesy. Vypařovali rtuť do vakua při teplotě 40—60° C a kondensovali její páry při teplotě kapalného vzduchu. Kondensovaná frakce měla atomovou váhu o něco menší než frakce vypařovaná.

Kromě znamenitých výsledků s neonem a vodíkem jsou tedy celkově efekty makroskopického dělení isotopů nepatrné a prakticky bezvýznamné.

Všemi přirozenými isotopy o kterých zde bylo pojednáno a které jsou součástí prvků, jak je v přírodě nacházíme, není daleko vyčerpán jejich počet. Před necelými třemi léty dostala se radioaktivita do nového období, ve kterém byla objevena možnost přípravy umělých isotopů s nestálým jádrem, které se podobají prvkům radioaktivním. A tak vedle všech těch přirozených isotopů, kterých dnes čítáme na 260, bez radioaktivních, známe dnes téměř u všech prvků ještě jejich umělé isotopy radioaktivní.

Monografie pojednávající o isotopech:

F. W. Aston, *Isotopes*. Londýn, 1922. — F. W. Aston, *Isotope*. Lipsko 1923. (Německý překlad.) — A. Damiens, *Les Isotopes*. Paříž 1923. — Mme Pierre Curie, *L'isotopie et les éléments isotopes*. Paříž 1924. — F. W. Aston, *Mass-spectra and Isotopes*. Londýn 1933.

Obrázky k textu jsou pořízeny podle uvedené Astonovy monografie, obrázek č. 8 z Euckenovy *Lehrbuch der chemischen Physik*, Lipsko, 1930.

VYUČOVÁNÍ.

K otázce orientování přímky v analytické geometrii.

Jaroslav Friedrich, Praha.

Téma tolikráté již projednané a přece, jak se zdá, ani pro půdu školskou dosud neuzavřené! A to ne snad co do rozsahu v používání, ale dokonce v jádru věci, ve způsobu, jak orientování prováděti! K této věcné stránce stůjž zde proto aspoň náčrtek rozboru — jako podnět k znovuuvážení věci!

Pro jedinou přímku v rovině je rozhodnutí jak o kladném smyslu, tak o stranách¹⁾ zásadně volné a není také věcnou nějakou vzájemností vázáno. Rovněž nerozhoduje p -orientace, t. j. orientace pro přímku p již provedená, o orientování dalších přímek $q, r, \dots$, nicméně k vůli soustavnosti v geometrii jejich celku, k vůli požadavku jednotnosti v metodě i výsledcích sáhne se zajisté aspoň k zásadě jednotné vzájemnosti mezi oběma kladnými směry. Tato může býti po případě i nějak formálně motivována (obdobou, případným vzhledem pro určité stanovisko pozorovatelovo a j.) Zůstalo by pak pro každou přímku ještě při volnosti jedné volby, čehož je třeba, aby se mohlo vyhověti podmínkám úlohy (na př. projednávání trojúhelníka orientovaného a pod.). Na tuto potřebu se často zapomínává.

Jde-li o řešení problému geometrií analytickou, přistupuje nová okolnost, totiž koexistence x -orientace. A tu nastává dvojitá možnost: Buď se analytická geometrie postarala o to, aby svými prostředky mohla vyhověti provedenému již rozhodnutí o orientaci v daném útvaru, anebo si stanovila samostatně jisté interní zásady orientace bez ohledu na možné vnější potřeby, i jest pak ovšem otázkou, zda se orientace předeepsaná, po případě povahou problému přímo žádaná, do tohoto analyticky systemisovaného rámce dá zasaditi. Možnost kolise je tu evidentní. Proto, co se týče onoho orientování analyticky založeného, jest žádati vytažitelnost ke všem (korektním) potřebám a dáti přednost způsobu, který poskytuje nezávislost na poloze sou-

¹⁾ Samá otázka vhodnosti těchto názvů zasluhovala by úvahy.

řádné soustavy. Kromě toho je požadavkem — ovšem samozřejmým, ale na tomto poli zvláštní péči vyžadujícím — důslednost jak v stanovení orientačních zásad, tak při jejich používání.

Přihlédněme nyní k tomu, do jaké míry vyhovují výtčeným zde zásadám jednak způsob v našich učebnicích dosud běžný pro zavedení orientace na základě normální rovnice přímky, jednak návrh kolegy Vrány, podložený již učebněmu postupu v metodické příručce kolegy dr. Simerského.²⁾

I. Prvnímu lze právem vytýkati toto:

1. Nevystačí na obě alternativy orientace a nehoví tedy zásadě volnosti volby. — Tím totiž, že se úsečka vedená z počátku soustavy kolmo k přímce označuje pro kteroukoli polohu znaménkem jednotným (kladným), je rozhodnuto i o jednotnosti poloroviny obsahující počátek, i je také orientace všem přímkám jdoucím mimo počátek jednotně předurčena. Orientace odchýlná není tedy tímto způsobem vyjádřitelná, leč pro přímky jdoucí počátkem, kterýžto případ s vytýkanou „neurčitostí“ se obvykle posuzuje právě naopak jako nedostatek a proto slabá stránka této metody.³⁾

2. Orientace závisí na volbě místa pro počátek soustavy. — Není tedy pevnou, s útwarem srostlou, nýbrž při transformaci se pro jistou síť přímek zvrátí. K jednomu účelu se však naopak dá této závislosti s prospěchem využiti. Vzhledem k závadě sub 1. lze totiž mnohdy aspoň přiměřenou volbou počátku docíliti toho, aby případ s hotovou již orientací byl analyticky tímto typem vyjádřitelný. Jindy ani této možnosti není (na př. pro trojúhelník záporně orientovaný).

3. Nemálo ruší nedůslednost v sledování kladného směru na normále zavedeného. — Způsob, že se zde udává vzdálenost bodu od přímky⁴⁾ ve směru kolmice z bodu spuštěné, nesouhlasí

²⁾ Fr. Vrána: Základní úlohy o přímce v analytické geometrii; Časopis 61 (1931/32), Příloha did.-met., str. D 1.

RNDr. Jaroslav Simerský: Jak učiti analytické geometrii na reálných gymnasiích; Praha, JČMF, 1936, ve Sbírce metodik pro střední školy.

³⁾ Jestliže pro takovou přímku orientace jest již dána, resp. zvolena, je možno jednu i druhou její alternativu vystihnouti, neboť pro normální rovnici tohoto typu je α odchylkou normály z prostoru kladného vystupující. Jinak je právě zněním té rovnice jednoznačně určena.

⁴⁾ Veličiny „vzdálenost přímky od bodu“ a „vzdálenost bodu od přímky“ směrově korektně a důsledně rozlišuje Vrána v cit. článku. Simerský dodržuje zásadu „od přímky“ i pro případ kolmé úsečky d z počátku na přímku spuštěné, ačkoli tato délka má pro různé přímky roviny vzhledem k počátku obdobnou určující funkci jako na př. pořadnice y pro různé body roviny vzhledem k ose z jako východisku měření a měla by tedy býti obdobně měřena od počátku. Záměna ta nezůstává bez následků; vede totiž pro vzdálenost dvou rovnoběžek p, q ke vzorci od obvyklého pravidla odchýlnému $PQ = d_p - d_q$.

totiž s oním základním, který je zaveden v soustavě souřadnic. Tím se stalo, že poloroviny obdržely znaménko obrácené, že kladný polopaprsek normály je osou poloroviny záporné a že k výpočtu takto orientovaných vzdáleností bodů od přímek je třeba onoho činitele — 1.

II. Způsob druhý volí si kladně stranu „nad“ přímkou, smysl pak je určován nikoli podle pevné vzájemnosti smyslu a strany, nýbrž podle zásady „vzhůru“.⁵⁾ Odtud již shledáváme po uvažovaných stránkách následující:

a) Orientace je rovněž predestinována, což má v zápětí tytéž následky jako u způsobu předcházejícího. — Předpis pro stranu selhává zde pro přímky rovnoběžné s osou y -ovou. Jen pro tyto zůstává tedy volnost obojí alternativy, oba autoři však určují kladnost i zde pevně (směrem kladné osy x -ové), nepočítajíce s eventuální potřebou orientace protivné. Zásadu smyslu „vzhůru“ sledují pak důsledně i v tom, že podle ní přisuzují znaménko i jednotlivé délce (vzájemné vzdálenosti dvou bodů), ač teprve koexistence dvou neb několika úseček rovnoběžných, resp. o dvou směrech vzájemně kolmých zavedení relativnosti požaduje, kdežto naopak orientace předurčená může vésti k rozporu, resp. k nutnosti od zavedeného znaménkového pravidla upustiti (na př. pro délku lomené linie, obvod trojúhelníka, planimetrický⁶⁾ výpočet obsahu trojúhelníka).

b) Orientace je rovněž závislá na poloze soustavy souřadné, tentokrát však na směru osy y -ové. — Následky jsou ovšem tytéž jako u způsobu Hesseova.

c) Tento způsob orientování nevyhovuje ve všem požadavku jednotnosti. — Způsob Hesseův obsahuje jednotnou vzájemnost smyslu a strany, odchylka α se mění spojitě od 0° do 360° , i vy-

⁵⁾ Termíny užívané oběma autory jako definiční pro popis této orientace jsou vzhledem k možné různosti v poloze osy y -ové neudržitelné. R. v. Lilienthal, jenž první snad na tento způsob orientování upozornil článkem „Note zur Hesseschen Normalform der Gleichung einer Ebene“ (Math. Annalen 42 (1893), 497), vyjadřuje základní myšlenku pro stanovení smyslu na přímce v prostoru takto: Části, ve které je přímka rozdělena bodem P_0 , považujeme za kladnou a zápornou podle toho, jakého znaménka jest první nemizící rozdíl $z - z_0$, $y - y_0$, $x - x_0$. Též zásady pak užívá i pro kladný smysl normály k rovině (první nemizící směrový kosinus z pořadí $\cos c$, $\cos b$, $\cos a$ má být kladný), čímž je rozhodnuto o straně roviny.

Jednodušší a názornější byla by formulace využívající kinematické představy o kladném smyslu „orientující“ osy: Přechodu z prostoru před útvaru do prostoru za útvaru k rozlišení stran, vzrůstu pak stejnojmenné souřadnice k stanovení kladného smyslu přímky.

⁶⁾ Je sice správné, že Vrána odsuzuje (na str. D 2 cit. článku) počítati v anal. geometrii obsah trojúhelníka z pouček planimetrických, ale to ještě neznamená, že by se mohlo pro eventuální aplikaci této metody nedbati rozporu.

značuje se proto jednotností v metodě i výsledcích. V tomto systému oněch podmínek jednotnosti není. Tam na př. lze vysloviti obecně platnou větu, že se osa úhlu, jež tvoří kladné polopaprsky, obdrží součtem normálních rovnic, zde je nutno teprve podle znaménka směrnic rozhodnouti, zda jest sčítati či odčítati. Podobná dvojakost jest pro dělicí poměr ve svazku paprsků. Anebo: Na stanovení odchylky dvou přímek orientovaných metoda tato samotným počtem podle obecné zásady — tedy bez obrazce, resp. bez představy získané o situaci posouzením směrnic — nevystačí (nedostatkem je tu omezení na $\alpha < 180^\circ$).

III. Po seznání nedostatků a závad není nesnadno vyhledati způsob plně vyhovující.

α) Aby bylo možno pro touž polohu přímky vyjádřiti obojí možnou orientaci co do stran, je třeba orientovati normálu důsledně *podle boční orientace přímky* — nejvhodněji směrem do prostoru kladného — a nikoli tedy směrem od počátku. Tím právě je zároveň také vyloučena závislost na poloze počátku soustavy. Početné jsou oba případy rozlišeny *různou hodnotou odchylky* α , jež se měří ovšem od kladné poloosy x -ové důsledně kladnou rotací ke kladnému polopaprsku normály n (od 0° do 360°).

β) Aby bylo možno k téže orientované normále vystihnouti rovnicí všechny přímky k ní kolmé, je třeba do počtu zavésti jejich *vzdálenost od počátku* (n_0), ovšem s příslušným znaménkem podle orientace pro normálu již zavedené.

Za těchto definic má normální rovnice přímky tvar

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - n_0 = 0,$$

a substituce souřadnic libovolného bodu ležícího mimo přímku do jejího trojčlenu podává jeho vzdálenost *od přímky* bezprostředně s patřičným znaménkem.

γ) Kladný smysl přímky samotné zde prozatím nepřichází v úvahu, i mohlo by vlastně býti o něm rozhodnuto libovolně. Ale zvláště na půdě analytické geometrie je k vůli jednotnosti⁷⁾ a, aby se čelilo eventuálním kolísím, záhodno stanovit *vzájemnost smyslu a strany pevně*. Výběru není, neboť znění rovnice jest implicitě již výrazem fakta, že $\widehat{xy} = +90^\circ$, i musí tudíž býti i $\widehat{pn} = +90^\circ$. Požadavek jednotnosti vede tudíž k jednotnému vztahu $\alpha = \varphi + R$ čili $\varphi = \alpha + 3R$ ⁸⁾.

⁷⁾ Jednotnost přináší pravidelně také tu výhodu, že nejsme při aplikacích vázáni na určité zvláštní pořadí, jako tomu jest na př. při stanovení úhlů trojúhelníka metodou Vránovou (str. D 38).

⁸⁾ Kdyby šlo o to, aby také smysl přímky byl vystižen kvantitativním výrazem analytickým, bylo by nutno přibrati rovnici

$$p = x \sin \alpha - y \cos \alpha,$$

Způsob zde sestavený není neznámý a je dlouho již v užívání, nicméně v učebnicích velmi hojně dosud se vyskytuje jednostranný původní způsob Hesseův přes některé své nedostatky. Jsou toho příčinou mimo jiné zajisté i dobré důvody didaktické. Dotknu se zde, aby nebylo snad nedorozumění stran poměru této úvahy k vyučování, pouze jednoho momentu, jenž jest v souvislosti se zaujatým zde stanoviskem a užitým postupem. Byl tu proveden rozbor dvou metod, a shledané nedostatky přímo ukazovaly cestu řešení: Hledati k orientaci dané, resp. zvolené vyhovující analytický její výraz. Ve škole však je situace jiná. Dosud aspoň vlastnost orientovanosti nebyla pojata do začátků kapitoly o přímce, nýbrž byla teprve poznáním význačné vlastnosti normální rovnice do učebního pásma vnesena. A tu nelze neuznati, že pro účel pouhého odvození normální rovnice byla volba Hesseova, odpovídajíc i volbě souřadnic polárních, na první pohled zcela případná, a že naopak zřetel k nějaké orientaci dané by býval čímsi neorganicky jako přítěž navěšeným. — Je z toho vidno, že úplné didaktické vyřešení tohoto tématu, čítajíc v to i aplikování tohoto obsažnějšího typu normální rovnice na známé základní případy, poskytne učitelům hojně ještě úkolů.

Matematika a studium speciální mapy.

Václav Skalický, Pardubice.

Úvod. Základním požadavkem správné výchovy jest, aby se veškeré vyučování opíralo o žákův zájem. To vede k volbě takových metod a prostředků, které použity při zpracování předepsané látky vedou k co největší samočinnosti žákově, které budují na jeho vlastních zkušenostech, a jež dávají v něm vznikati pocitu užitečnosti vědeckých metod a nutnosti hledati nejúčelnější z nich. Proto jest nutno, aby vyučování matematické vycházelo, pokud je možno, z praktických problémů. Žák musí být přesvědčen o praktické ceně matematiky, ba přímo o její nutnosti; nesmí ji považovati za pouhou gymnastiku logického usuzování. Napřed byl praktický problém, pak jeho řešení, a teprve později abstraktní věda.

Není ovšem možno sáhnouti namátkou mezi spoustu praktických problémů matematické povahy a voliti celkem bez něja-

jež vyplývá z n -orientace zcela obdobně jako

$$n = x \cos \alpha + y \sin \alpha - n_0$$

z p -orientace. Tento pár rovnic představuje, jak patrně, transformaci ze soustavy (x, y) do soustavy (p, n) .

kého zvláštního výběru některé z nich k našemu úkolu. Úspěch bude zaručen jen v tom případě, kde zvolíme problém, jenž bude aspoň z větší části též žakovým problémem, nebo u něhož můžeme doufat, že žáka přimějeme k tomu, aby ho přijal za svůj. Není jich málo, a jest úkolem učitelovým zvoliti vhodný z nich na správném místě a ve správný čas.

Každý snad zná, kolik půvabu je pro mládež, vždy aspoň trochu povahy dobrodružné a romantické, v pozorování mapy a jejích tajů. Jak zábavné je pro většinu mládeže listovati v atlantech otců a starších bratrů, sledovati klikaté toky řek, zlézati výšiny a dávatii fantasii volnost v podnikání dalekých cest! Oč rozmanitější možnosti se však mohou otevřít tam, kde mapa přestává býti pouhým podněcovatelem fantasie, kde se stává rádcem a průvodcem, kde potvrdí naše dohady a vyvrátí pochyby, a kde doplní naše poznatky cestováním získané tím, že je uvede v soustavu! Je žádoucí, aby škola zachytila tento zájem mládeže, aby jej obrátila pravým směrem a dala mu řádný základ.

Osnovy učebné žádají na příslušných místech, aby již na stupni nižším se žáci seznámili s mapou speciální. Mluví-li se pak na jiném místě osnov o doplňování školní práce vycházkami do přírody a řešením různých praktických úloh ve škole i venku, plyne z toho sama sebou žádoucnost praktických cvičení s mapou. Naučí-li se žáci správně mapy speciální užívat, a hlavně, ukáže-li se jim, co vše je v mapě obsaženo, co vše, je možno z ní se dovědět, stoupne tím značně jejich zájem o tuto věc tak veliké praktické důležitosti. Na onom poučení budou participovati nejrozmanitější vyučovací předměty. Osnovy samy uvádějí spojitost zeměpisu s matematikou (měření, odhady a výpočty s tím spojené), s fyzikou a astronomií (vědecký základ celé řady geografických pojmů, orientace podle nebeských objektů) a konečně s tělesnou výchovou. Pochodová cvičení mohou být vhodně spojována s výcvikem ve čtení mapy.¹⁾ Také rýsování může (ve třídě čtvrté) vytěžit leccos pro sebe ze studia mapy (sestrojování profilu, určení sklonu z hustoty vrstevnic a pod.). Spolupráci pokud možno všech učebných předmětů, jež je tak žádoucí a dosud poměrně málo pěstována, je tu otevřeno široké pole.

Není třeba připomínati, že taková cvičení jsou velmi užitečná pro zvýšení brannosti po stránce všeobecné, i jako příprava pro

¹⁾ Po této stránce vnucuje se úvaha o organizaci těchto cvičení. Má-li být pochodové cvičení spojeno s uvedeným výcvikem, je naprosto nutno, aby jednomu vedoucímu byl svěřen daleko menší oddíl, než bývá zvykem, dále, aby vedoucí postupoval podle náležité promyšleného plánu, t. j., aby úkol spojený s pochodem byl předem, pokud jen je možno, podrobně uvážěn a určen. Taková organizace nachází však dosud málo porozumění a naráží ostatně i na nedostatek přiměřených instrukčních pomůcek.

eventuální budoucí odborný výcvik vojenský. Zařazují se plně v rámec vymezený ministerským výnosem o branné výchově z 1. II. 1934.

V dalších odstavcích budiž učiněn pokus sestavit výběr úloh a cvičení týkajících se mapy speciální, pokud se mohou uplatnit v učivu středoškolské matematiky. Nebudiž posuzován po stránce úplnosti; vybírány jsou jen úkoly nepříliš nesnadné, k jejichž řešení není třeba příliš odbíhati od normálního způsobu vyučování, a naopak takové, jež podle mého soudu dobře poslouží k tomu, aby různým poučkám matematickým a početním metodám vdechly trochu větší životnost, než bývá zpravidla domovem v šedi učebnic.

„Matematicko-kartografické praktikum“, jehož nástin v dalším uvedu, musí být doplněno praktickým cvičením v odhadu úhlů a vzdáleností primitivními prostředky. O návod k němu a vřazení jeho do matematiky na střední škole se pokusím ve zvláštním článku.

Část praktická.

I. *Mapové měřítko.* Číselné měřítko, jež udává poměr vzdálenosti dvou míst na mapě k vzdálenosti oněch míst ve skutečnosti, je v našem případě 1 : 75 000. Budiž podáno poučení o mapovém měřítku vůbec, a o tomto zvláště. Budiž podotčeno, že vzdálenosti zjištěné z mapy speciální odpovídají horizontálním odlehlostem (t. zv. topografickým vzdálenostem) v terénu. Mapa speciální představuje kolmý průmět terénu do vodorovné roviny ve zmenšeném měřítku.

Úlohy početní: 1. Přepočtení zvolené vzdálenosti v terénu (X) na vzdálenost na mapě (x) a naopak. [$x = X/75\,000$, $X = x \cdot 75\,000$.]

2. Vysvětlení volby měřítka 1 : 75 000; 75 cm = 1 krok. Kolika krokům odpovídá vzdálenost 1 cm na mapě? [1000 kroků.]

3. Přepočtení kroků v metry a naopak. [n kroků = $\frac{1}{3}n$ metrů = $(n - \frac{1}{3}n)$ metrů; m metrů = $\frac{3}{2}m$ kroků = $(m + \frac{1}{2}m)$ kroků.]

4. Změř na mapě šířku proužku značícího potok, silnici a pod. Jaká by měla být podle toho šířka skutečná? [Příklad: Silnice, znázorněná proužkem $\frac{1}{4}$ mm, by měla mít šířku 37,5 m, potok ($\frac{1}{16}$ mm) 7,5 m.] Zobrazení „nad míru“. Na silnice, vodní toky a pod. na mapě jest pohlížeti jako na značky, ne průměty skutečných objektů.

Úlohy v terénu: 5.—7. Ověření poznatků z úloh 1.—3. pochodem, na př. po přímé silnici (kilometrové kameny!). Pro rychlejší přepočtení kroků v metry doporučuje se počítati dvojkroky (à 150 cm). [n dvojkroků = $(n + \frac{1}{2}n)$ metrů.]

8. Pozoruj šířku komunikací, vodních toků atd.! [Státní silnice aspoň 5 m a pod.] Mnohé serpentiny silnic nemohou být (pro zobrazení „nad míru“) zakresleny detailně správně do mapy.

Grafické měřítko je proužek vhodně dělený, a udávající svou škálou skutečnou délku zvolené vzdálenosti v mapě přímo v kilometrech nebo krocích.

Úlohy početní: 9. Zhotovení měřítka; může být z průsvitného papíru, celofánu, celuloidu, aby mohlo být položeno přímo na mapu. [12 km je

na mapě znázorněno 16 cm; proužek této délky rozdělíme buď na 12 dílů po 1 km, nebo na 16 dílů po 1000 krocích.]

Úlohy v terénu: 10. Odhad doby pochodu z *A* do *B* podle mapy a kontrola za pochodu.

II. *Velikost mapy a zobrazeného území.* Mapy speciální zobrazují části povrchu zemského v podobě sférických lichoběžníků, ohraničených poledníky s rozdílem $\frac{1}{2}^\circ$ zem. délky a rovnoběžkami s rozdílem $\frac{1}{4}^\circ$ zem. šířky. Ježto se délka jednostupňového oblouku na poledníku mění se zeměpisnou šířkou jen nepatrně (vlivem zploštění Země), liší se jednotlivé listy mapy speciální co do výšky jen nepatrně. Zato délka jednostupňových oblouků na rovnoběžkách klesá velmi značně s rostoucí zeměpisnou šířkou; jest proto očekávati větší rozdíly mezi jednotlivými mapami, pokud se délky týče.

Úlohy početní: 11. Krajiní rovnoběžky map speciálních, zobrazujících naši republiku, jsou $47\frac{1}{4}^\circ$ a $51\frac{1}{4}^\circ$ sev. šířky. Urči rozdíl v délce mapy pro tyto krajiní případy! [Valouchovy Tabulky udávají délky jednostupňových oblouků na rovnoběžkách 45° , 50° , 55° : 78,85 km, 71,70 km a 64,00 km; interpolací obdržíme pro krajiní rovnoběžky 75,28 km a 69,77 km. Na mapě budou půlstupně v těchto šířkách znázorněny 50,2 cm a 46,5 cm.]

12. Mezi krajiními rovnoběžkami je 15 pásem map; jaký je tedy průměrný rozdíl dolního a horního okraje mapy? [(50,2 cm — 46,5 cm) : 15 = 0,25 cm.]

13. Urči přibližný výškový rozměr mapy! [1° šířkový v šířce kol 50° = 111,2 km; $\frac{1}{4}^\circ$ bude zobrazeno asi 37,1 cm.]

14. Urči plošný obsah mapy a zobrazeného území! V jakém jsou poměru? [Plocha mapy zobrazuje přibližně 1000 km². Poměr plošných obsahů mapy a zobrazeného území jest 1 : 75 000².]

15. Kolik map speciálních by zobrazilo povrch celé Země? [720 sloupců (sférických dvojúhelníků po 720 mapách. Celkem $720^2 = 518\,400$ map.]

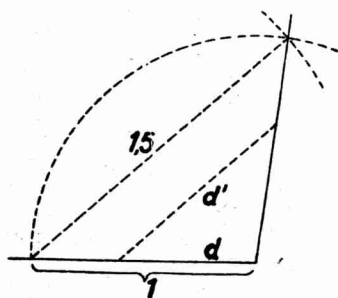
III. *Zvětšování úseku mapy.* Často se může vyskytnouti potřeba zhotoviti náčrt plánu menšího území v měřítku jiném než na mapě (na př. jako přílohu k písemnému hlášení a pod.). Jednoduše provedeme zvětšení tak, že mapu pokryjeme čtvercovou sítí o straně na př. 1 cm, a zvětšíme napřed tuto síť; do zvětšené sítě vkreslujeme pak objekty významné vzhledem k účelu, pro který náčrtek hotovíme. K zvětšování odměřených úsečků užíváme výhodně redukčních úhlů rozmanitého druhu.

Úlohy početní a grafické: 16. Chceme část mapy narýsovat v měřítku 1 : 50 000 (místo 1 : 75 000); užijeme síť centimetrové. Urči jednotku sítě zvětšené (*x*) a sestroj příslušný redukční úhel! [$x : 1 = 75 : 50$; $x = 1,5$ cm. Dva různé druhy redukčních úhlů viz v obr. 1 a 2; *d* = úsečka původní, *d'* zvětšená.]

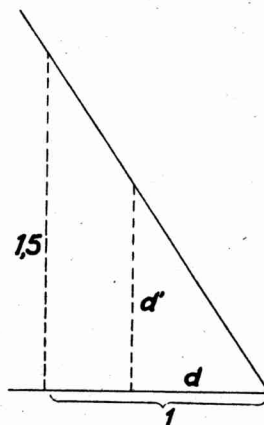
17. Úsek mapy zvětšíme *n*-krát. Jaké bude měřítko číselné a grafické tohoto náčrtku? [Číselné: 1 : 75 000/*n*. Grafické: Dílky, znázorňující určité délky, počty kroků atp., musíme *n*-krát zvětšiti; ponecháme-li grafické měřítko beze změny, musíme k dílkům připsati čísla *n*-krát menší.]

IV. *Orientace mapy.* Směr severojižní určujeme: a) magnetickým kompasem, b) za (jasné) noci podle Polárky, c) z postavení Slunce. V případě a) je třeba dbáti magnetické deklinace. K pří-

padu b): Ježto deklinace Polárky není 90° , nýbrž asi $88^\circ 58'$, netkví Polárka na témž místě, nýbrž opisuje kol světového pólu malou kružnici poloměru asi $1^\circ 02'$; určení severu polohou Polárky je jen přibližné. Příklad c): Znamé pravidlo uváděné v příručkách pro turisty, skauty, v rukověti branné výchovy a jinde, jež poučuje, kterak najíti jih pomocí kapesních hodinek, je zvláště v určitých dobách příliš hrubé. Přírůstek hodinového úhlu Slunce (pravého času), jenž je roven polovičnímu úhlu, který opiše malá ručička za týž přírůstek času, není roven přírůstku azimutu Slunce. Pravidlo by bylo správné, kdybychom hodinky drželi tak,



Obr. 1.



Obr. 2.

aby rovina ciferníku byla rovnoběžná s rovinou světového rovníku. To však předpokládá znalost polední přímky, kterou právě pravidlem určujeme. Matematický rozbor ukazuje, že nejméně se osvědčuje pravidlo v 9^h a 15^h (tedy právě v dobách, kdy by bylo nejužitečnější), zvláště dne 21. června. „Jih“, určený podle pravidla, kolísá během tohoto dne v mezích $\pm 24^\circ 10'$ kol správného směru. S takovou odchylkou odhadne zkušenější pozorovatel přírody jih stejně přesně, ne-li přesněji, i bez hodinek.²⁾

Početní úlohy o chybě v orientaci pomocí nebeských objektů jsou dobrým cvičením pro trigonometrii sférickou. Jednodušší

²⁾ Problémem zabýval se *Koppe* (Zeitschrift f. math. u. naturwiss. Unterricht 48, str. 89). Řešení jeho je však jen přibližné, na podkladě grafického znázornění. Sestrojil též jakýsi náhradní „ciferník“ (sluneční kompas), jehož pomocí lze určit strany světové přesně. Zdokonalenou formu dal slunečnímu kompasu *Luckey* (v témže časopise 52, str. 168. — Ve zvláštním článku podávám početní řešení chyby hodinkového kompasu a přesná určení jejích extrémů.

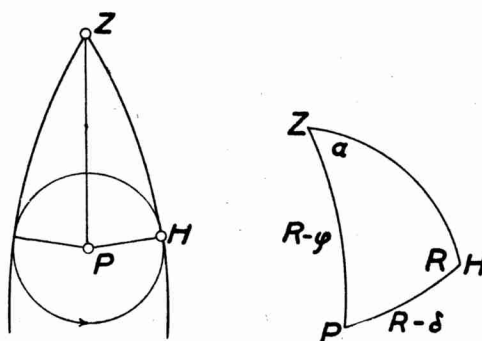
výrazy však dostáváme u Slunce jen pro nulovou deklinaci, tedy pro rovnodennosti.³⁾

Úlohy početní: 18. Urči největší chybu v zjištění severu pomocí Polárky! [Obr. 3: Trojúhelník PHZ , tvořený pólem, Polárkou v t. zv. největší digresi a zenitem, je pravoúhlý s pravým úhlem při Polárce H . Odtud:

$$\sin a = \frac{\cos \delta}{\cos \varphi}$$

$$a = 1^\circ 33'.$$

Největší chyba je tedy asi $1\frac{1}{2}^\circ$.



Obr. 3.

19. Jaké chyby se dopustíme, určíme-li jih hodinkami v 9h dne 21. března? [Trojúhelník zenit-pól-Slunce je pravostranný (strana pól-Slunce je pravý úhel). Proměnou v polární trojúhelník pravoúhlý⁴⁾ a užitím Neperova pravidla dostáváme:

$$\cotg a = \cotg t \sin \varphi.$$

Numericky: pro $t = 9h = 135^\circ$ je $a = 127^\circ 17'$ a chyba $t - a = 7^\circ 33'$.]

V. *Výškové rozdíly*. Není-li místo náhodou přímo kótováno, určíme jeho nadmořskou výšku pomocí vrstevnic. Zjistíme kóty dvou sousedních vrstevnic, mezi nimiž se nalézá ono místo. Tam,

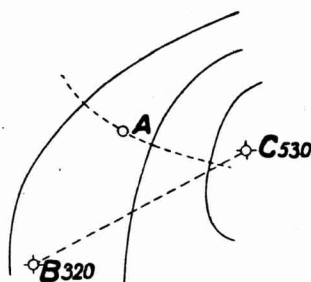
³⁾ Ježto čas počítáme v občanském životě od půlnoci do půlnoci jednotným číslováním 0h—24h, jest užitečno počítati t. zv. hodinový úhel od deklinační polokružnice příslušné severnímu bodu obzoru, a ve shodě s tím i azimut od severu (obojí ve směru denního pohybu oblohy). Je v tom také ta výhoda (proti počítání od jihu), že se vyhneme diskontinuitě počítání obou veličin v bodě jižním. Počítá-li se od jihu, jest možno ji odstraniti jen počítáním „—“ směrem k východu. V úlohách násl. je a i t počítáno od severu.

Pozn. red.: Otázkou touto se zabývá ve spojitosti se změnou počítání data v astronomii — totiž od spodní kulminace Slunce — Ruoss v Zeitschrift für math. u. naturw. Unterricht 58 (1927), 321. Frch.

⁴⁾ *Pozn. red.:* Lze také přímo počítati z pravoúhlého trojúhelníka sférického, jež tvoří rovník s obzorníkem a výškovou polokružnicí Slunce. Frch.

kde vrstevnice protíná okraj mapy, jest označena číslem; v jiných případech vyhledáme kótovaný bod mezi vrstevnicemi a podle něho je očíslováme. Nadmořskou výšku bodu mezi vrstevnicemi určíme interpolací z kót obou vrstevnic. Odhad provádíme podél spádnice (křivky protínající vrstevnice kolmo), jejíž směr ukazují šrafy.

Úlohy početní: 20. Odhadni nadmořskou výšku bodu A v situaci obr. 4! [Kótované body 320 a 530 určují kóty vrstevnic (zleva do prava 300, 400, 500 m). Interpolací odhadem na čáře čárkované získáváme pro A výšku asi 360 m.]



Obr. 4.

21. Jaká je skutečná vzdušná vzdálenost dvou kótovaných bodů? Speciálně bodů na obr. 4? [Je-li topografická vzdálenost, jak ji nacházíme v mapě, rovna d a výškový rozdíl obou míst Δv , je hledaná vzdálenost $x = \sqrt{d^2 + (\Delta v)^2}$, nebo trigonometricky $x = d/\cos \alpha$, kde α je sklon spojnice obou míst. Speciálně: BC (odměřeno z mapy) = 32 mm, ve skutečnosti 2400 m, výškový rozdíl 210 m, $x = 2409$ m, $\alpha = 5^\circ$.]

Úlohy v terénu: 22. Urči nadmořskou výšku stanoviště a nějakého jiného vyššího nebo nižšího bodu v okolí pomocí mapy!

23. Vypočti přímou i topografickou vzdálenost těchto míst!

VI. *Vrstevnice*. Jsou to geometrická místa bodů téže nadmořské výšky. Bývají zpravidla zobrazovány jen ty, které značí výšky vyjádřené celými stovkami metrů. Z jejich definice plyne, že v místě, kde jsou zhuštěny (zředěny), má terén větší (menší) sklon. Tam, kde terén stoupá v úhlu 45° , je topografická vzdálenost dvou sousedních vrstevnic rovněž 100 m, tedy na mapě 1,33 mm; stoupá-li v úhlu α , je tato vzdálenost (v metrech) $100 \cotg \alpha$, na mapě $1,33 \cotg \alpha$ (mm). Je proto možno z hustoty vrstevnic usouditi, jaký sklon má určitá část terénu.

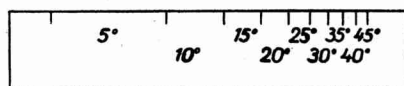
Úlohy početní: 24. V kterém úhlu stoupá silnice protínající vrstevnice 200 a 300, je-li vzdálenost obou průseků na mapě rovna 18 mm? [$1,33 \cotg \alpha = 18$, $\alpha \doteq 4\frac{1}{4}^\circ$.]

25. Jaká je vzdálenost sousedních vrstevnic zobrazujících svah 30° ? [$1,33 \cotg 30^\circ = 2,3$ mm.]

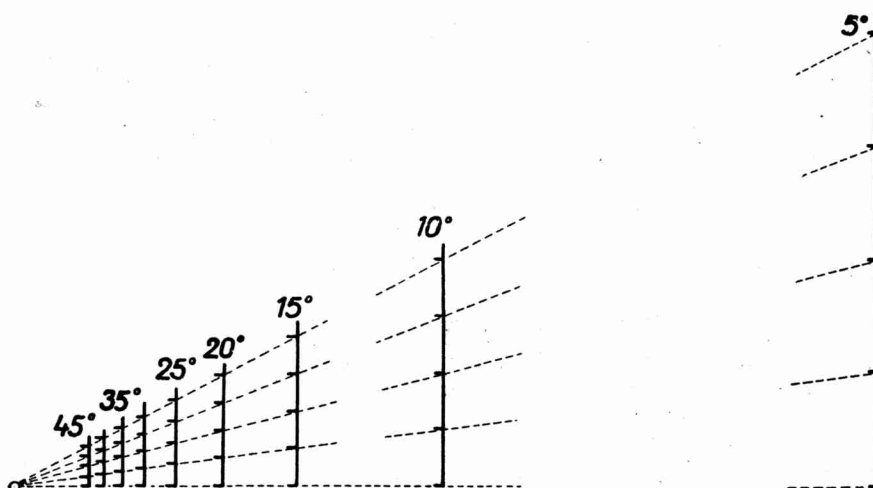
26. Sestroj grafické měřítko sklonu na základě hustoty vrstevnic! [Provedení A (obr. 5): Na přímku nanášíme vedle sebe úsečky $1,33 \cotg \alpha$, pro $\alpha = 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, \dots$, t. j. asi 15,2; 7,55; 4,95; 3,64; 2,84; 2,3; 1,89; 1,58; 1,33; ostatní je z obrazce patrné.

Provedení B (obr. 6): Na vodorovnou přímku nanese z téhož bodu A délky $\cotg \alpha$ (na př. v cm); největší z nich ($\cotg 5^\circ$) bude tedy 11,43 cm. Na kolmici sestrojenou v koncovém bodě této úsečky nanese stupnici, jejíž jednotka je rovna vzdálenosti vrstevnic při sklonu 5° (15,2 mm). Tato stupnice představuje hustotu vrstevnic při tomto sklonu; hustota pro sklony ostatní je znázorněna stupnicemi zmenšenými v poměru příslušných kotangent.

Úlohy v terénu: 27. Pozoruj skloněné terénní útvary, komunikace a pod., a cvič se v odhadu jejich sklonu! Kontrola užitím mapy a pomůcek z úlohy 26.



Obr. 5.

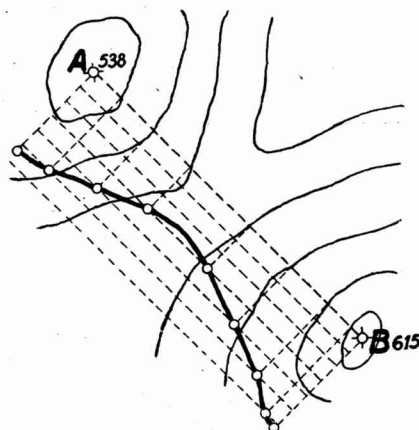


Obr. 6.

VII. *Profily a jejich užití.* Profilem nazýváme křivku, v níž protíná terén svislá obecná plocha válcová, jež v nejčastějším případě je svislá rovina. V tomto případě mluvíme o profilu přímém, v případě obecném o profilu křivé čáry, na př. komunikační (silnice, trati a pod.). Profily sestavujeme, chceme-li se podrobněji poučiti o stoupání a klesání terénu podél určité čáry, a dále tehdy, chceme-li posouditi, je-li určité místo viditelné z místa jiného, nebo je-li samo překážkou viditelnosti nějakého objektu. Při sestavení profilu užíváme metod známých z deskriptivní geometrie.

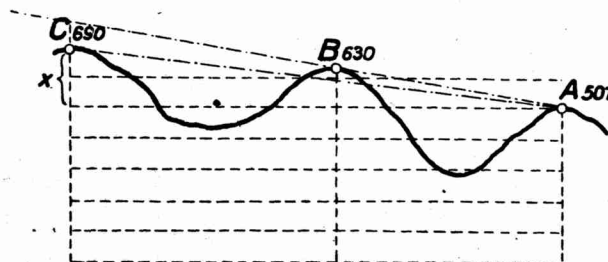
Úlohy početní a grafické: 28. Sestroj profil určité přímé čáry v mapě speciální, na př. mezi místy A a B! [Obr. 7. Místa spojíme přímkou, v prů-

sečíci s vrstevnicemi vztyčíme k ní kolmice, na něž nanášíme v mapovém měřítku nadmořské výšky příslušných vrstevnic. Získané body spojíme křivkou. Aby tvar křivky profilové lépe vynikl, můžeme na kolmice nanášeti úsečky na př. 3krát, 4krát atp. větší, to jest, sestrojiti profil převýšený. Profil, ať již absolutní nebo převýšený, můžeme ovšem sestrojiti na zvláštní list papíru. Pak se osvědčuje narýsovat si předem osnovu rovnoběžek vzdálených vzájemně o 1,33 mm (nebo příslušný násobek podle stupně převýšení.)]



Obr. 7.

29. Sestroj profil dané linie křivé! [Rozdělíme v části přibližně přímé, t. j. rozvineme křivou čáru v přímku (rektifikujeme ji); k částem přímým sestrojíme profily.]



Obr. 8.

30. Ze sestrojeného profilu podél přímé čáry ABC posuď viditelnost bodu C z bodu A ! [Obr. 8. Na sestrojeném profilu spojíme místa A a C přímkou (zorným paprskem); ježto B leží nad ní, není C z A viditelné.]

31. Jsou-li topografické (t. j. horizontální vzdálenosti bodů A , B a B , C rovny na mapě 30 mm a 35 mm, urči výpočtem, zda je C z A viditelné! [Určíme výškový rozdíl A , B a A , C (129 m a 189 m); příslušné vodorovné vzdálenosti jsou 2250 m a 4725 m. Spojnice AB sahá ve vzdá-

lenosti C do výše x m nad A . Z úměry

$$x : 129 = 4725 : 2250.$$

vychází $x = 270$ m. Ježto je C jen 189 m nad A , není C z A viditelná.]

Úlohy v terénu: 32. Ověřuj poznatky získané předem předchozími metodami!

Závěrečná poznámka. Studium speciálních map může být velmi dobře individualisováno tím, že jednotlivým žákům přidělíme zcela zvláštní samostatné úkoly. Užijeme k tomu starších, vyražených map, ovšem s přesnou formulací úkolu. Takových problémů můžeme za jistý čas nastrádati celou řadu, kterou připojíme k jiným obdobným sbírkám: tabulkám sloužícím za podklad grafického znázornění, částem grafických i obyčejných jízdních řádů a pod. Zda je tím naznačena též jedna z nemnohých dosud pěšinek k žádoucímu zavedení t. zv. pracovní metody i do matematiky, o tom učiní soud teprve jistá dávka zkušeností získaných v praxi. Předpoklady tu jistě jsou (úzká souvislost s praktickými problémy, často dokonce volba východiska v konkrétní praktické úloze, spojitost s příbuznými předměty, pěstování mechanické zručnosti a grafické dovednosti vyjadřovací, snadná možnost individualisování a pod.). Pohodlnější tyto cesty jistě zrovna nejsou, kdyby však rozhodující slovo měla mít tato okolnost, pak bychom se mohli přímo vrátit k starobylé metodě pouhého přednášení.

Poznámka literární. Místo obšírného shánění literatury o speciálních mapách budiž upozorněno jen na pěkně vypravenou a po všech stránkách poučnou knížku: Št. kap. B. Tetour: Mapa v obrazech. Speciální mapa (2. opr. vyd. Praha 1934. 8° 175 str. obr. Kč 25,—). Čtenář najde tu i seznam další literatury. — Po stránce praktického užívání mapy najdou žáci leccos i v Rukověti branné výchovy, nižší stupeň (Praha 1934. 8° 260 str. obr. Kč 8,—).

K metodice složitého úrokování.

Jaroslav Friedrich, Praha.

Aby nevyzněla výzva kol. dr. Simerského v článku o metodice složitého úrokování (zde str. D 23) tak zcela na prázdno, připojuji k témuž thematicu aspoň těchto několik poznámek.

Především míním se dotknouti jedné věci zásadní, ve které se stanoviskem kol. Simerského plně nesouhlasím. Jsem rozhodně také pro omezení počtu vzorců k pamatování na míru nejnutnější, ale není mi tímto minimem vzorec $K_n = K_0 q^n$ samotný, byť to doporučoval sám Lietzmann. Praxe žádá si tabulky střadatelů, žák byl uveden do základní úlohy pravidelného strádání, poznal pravidlo $A = aQ_n$, i patří, myslím, k věci, aby si byl dobře vědom toho, že za jistých podmínek a za kterých právě smí pravidla toho použití bezprostředně. Proto je třeba, aby

v učebnicích i od učitelů bylo výslovně a důrazně připomenuto, že onen vzorec udává hodnotu úspory pouze v případě shodnosti lhůt ukládacích a úrokovacích a to pro konec lhůty po posledním vkladu. A podobně pro hodnotu zásoby $B = bR_n$ počátkem lhůty před prvním důchodem b a pro splátku $d = DU_n$ připadající na konec lhůty po zápůjčce D . Kdekoli jsou příslušné podmínky splněny, nechť žák rovnou užívá uvedených vzorců, jistě snadno i s podmínkami zapamatovatelných. Rozmanitost úloh — při účelné ovšem jich přípravě — poskytne zajisté dosti příležitosti cvičiti i případy do tohoto základního rámce nezapadající, jednoduché i kombinované, aby byl pěstován také vztah a přesun těchto součtových veličin. Přirozeně bych tedy nechával v úloze první (str. D 18) shrnutí platy b jediným krokem v součet bQ_{10} , v úloze třetí (str. D 21) podobně a posunutí pak B_{24} o rok kupředu k hodnotě A_{25} , v úloze čtvrté konečně (str. D 22) přenést úsporu $A_{10,5} = uQ_{20}$ jako celek přes 9 pololetí na termín převodní. Právě tohoto zacházení s celky, jehož předpokladem jsou rozvržení úlohy v dílčí výkony, posouzení podmínek a jasná orientace, jest, myslím, potřeba, aby mohl žák od nadbytečnosti kroků elementárních vyspěti k vyšší schopnosti konceptní.

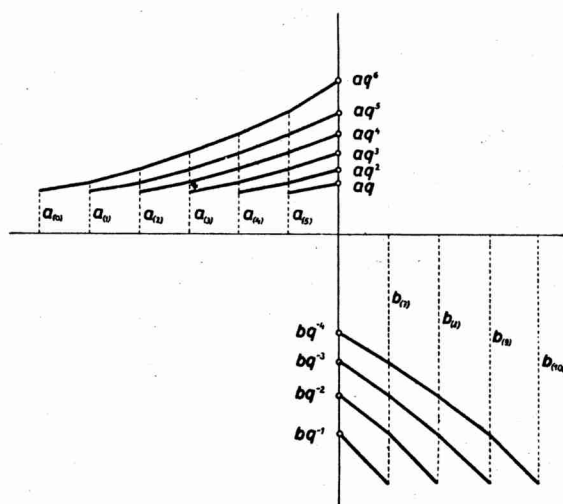
Druhá poznámka týká se oněch schemat. Jistě dobře se jimi poslouží k podpoře správných představ o sounáležitosti částek a k názornějšímu vyznačení příslušných časových vzdáleností. Pomocných čar využilo by se však vydatněji, kdyby byly vedeny tak, aby každá svým průběhem naznačovala současně, byť jen zhruba, časový vzrůst příslušné částky, jak je to doporučitelné již při úloze základní. Při provedení přesném¹⁾ — napoprvé žádoucím — šlo by takto o osnovu lomených linií typu křivky exponenciální. Obrazec znázorňuje případ důchodu (pod osou) plynoucího z pravidelných vkladů úsporných (nad osou). Ostatně soudím, že schemat plných nebude třeba v tak značné míře. Užije se jich s prospěchem v příkladech úvodních a nějaké ukázké úlohy kombinované, nadále pak vystačí se zajisté již jen se zápisem dat na jediné časové ose²⁾ k vůli přehledu po dislokaci částek.

Při této příležitosti je však záhodno připomenouti si jednu okolnost, která se téměř pravidelně při projednávání složitého úrokování vyskytuje a sama o sobě potřebu nějaké názorné pomůcky vyvolává. Když se totiž od kapitoly o jedné jistině postoupí

¹⁾ K docílení značnějšího rozchodu čar je třeba užiti buď vyššího procenta (srovnej s pozn. 6 pod čarou!) anebo při procentu běžném větší jistiny za současného posunutí měřítka na ose jistin.

²⁾ Při tom považuji za bezpečnější označovati samy lhůty (viz schemata č. 1 až 4 v citovaném článku), než jejich meze, jak převzato z učebnice ve schematě č. 5. Také vypsání pořadí slovem (první, druhý, atd.) per extensum se dobře osvědčuje.

k problému strádání, sáhne se obvykle — ani učebnice tu metodicky přiměřeně neuvádívají — ihned k případu pravidelnosti, ač je v životní praxi nejméně častý. Je to krok unáhlený a škodlivý, neboť daleko-li je k tomu, aby tu mezi časovým pořadím stejných vkladů a pořadím ve vyvozené geometrické řadě, braným dokonce jednou v tom, po druhé v onom směru, vznikla pro žáka konfuse. Kdyby se předeslaly jeden, dva příklady o různosti jednak vkladů, jednak intervalů, byl by již tím potřebný obraz postupu žákovi podložen.



Jinak jest v oné didakticky nepříznivé situaci pochopitelná snaha některých autorů učebnic a učitelů odlišiti jednotlivé vklady aspoň indexy odpovídajícími příslušnému termínu. Proti tomu má Simerský námitku, opřenou o požadavek stejného znaku pro stejné částky. Podle toho, co výše uvedeno, bylo by však právě případné počínati vklady nestejnými, sestaviti pro ně výsledek nejprve pouze ve tvaru $aq^n + bq^{n-1} + cq^{n-2} + \dots$, resp. $a_1q^n + a_2q^{n-1} + a_3q^{n-2} + \dots + a_nq$, a přejíti teprve dodatečně k rovnosti.³⁾ Ale ani při supponovaných částkách stejných nemusily by indexy prohlášené výslovně pouze za udavatele místa žáky másti. Nicméně je toto označení přece zatíženo jistou závadou, jejíž původ jest však jinde, a to v nevyhovující, nedostatečně vyvinuté symbolice tohoto počtu. Proto pojednám dříve o této.

V samém úvodu dostává se do počtu nová veličina „úročitel“

³⁾ Viz na př. v Algebře Hozově, vyd. 2 (1901), str. 193. Podobného kroku se užívá ze známých důvodů při odvozování poučky binomické.

jakožto kvocient vznikající geometrické posloupnosti pro vzrůst jistiny. Použití téže značky q nejví se prozatím nepřípadným. Rušivost — zvláště pro školu citelná — vystoupí teprve při kterékoli geometrické řadě, která vzniká z řady pravidelných platů, ať jest její kvocient q či $1/q$ či q^2 neb pod. — Nemáme sjednáno, jak na znaku q odlišovati různost procenta od změny v důsledku jiné lhůty úrokovací. — Označení hodnoty kapitálu k jistému termínu je celkem ustáleno, a to zcela případně připojením indexu udávajícího čas právě uplynulý, přes to však leckdy jest si přáti, aby se dalo prováděti také pro hodnoty počátkem lhůt.⁴⁾ — Pro převod částek mnohdy by bylo třeba indexu dvojitého. — Nemáme také nedvojsmyslného prostředku, abychom si různé hotovosti v úloze označili indexy podle jejich časové dislokace. Tak na př. značka j_8 sama o sobě neříká žákovi, zda jde o peníz j na konci osmého roku ve zvoleném časovém rámci, takže číselně $j_8 = j$, či o zúrokovanou, pozměněnou hodnotu jistiny j z termínu základního neb vůbec jiného, takže by v tomto smyslu číselně bylo $j_8 = jq^8$, resp. jq^{8-t} .⁵⁾

Právě nedostatek posléze uvedený způsobuje onu závalu v zapisování stejných úsporných vkladů formou $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. Odpomoc je tu však dosti snadná, rozhodneme-li se pro zásadu, index udávající pouze časové umístění hodnoty písmenem označené uzávorkovati. Podle toho, použijeme-li i při této funkci indexu důsledně zásady zaznamenávati čas uplynulý, zněla by ona posloupnost $a_{(0)}, a_{(1)}, a_{(2)}, \dots, a_{(n-1)}$, a mohlo by jí bez nebezpečí nedorozumění od žáka býti používáno. I při jiných příležitostech by tento způsob přispíval k zřetelnosti. Tak na př. výše uvedené kroky v příkladech byly by výstižněji vyjádřeny vzorci

$$B_{(24)} = rR_{n-24}, \quad A_{(25)} = aQ_{25}, \quad B_1 = B_{(24)}q, \\ A_{(10,5)} = uQ_{20}, \quad A_{4,5} = A_{(10,5)}q^9.$$

A základní vztah součtů A, B ekvivalentních serií n pravidelných platů by zněl $B_{(-1)} = A_{(n)} q^{-(n+1)}$.

⁴⁾ Příklady rovněž hojně se vyskytující, kde lhůtami jsou roky lidského věku, takže může rušiti konfuse s roky kalendářními, vyžadují z tohoto důvodu jednak opežřelé stylisace, jednak zásadního, interního ujednání o hranici lhůt.

⁵⁾ Uvedené nedostatky nutí učitele k svépomoci. Je toho dokladem na př. Simerského způsob přisovávání procentového indexu k úročiteli q . Sám jsem si pro pololetní úrokování vypomáhal někdy užitím čárky (reservovati raději pro eventuální druhé procento úlohy!), jindy značkou q místo q . Rozlišování termínu počátkem a koncem lhůty bylo by sice možné a výjimečně v případě zvláštní potřeby přípustné formou na př. K_{VII} (pro počátek), xK (pro konec), takže by platilo $xK = K_{VII}q^4$, ale zásadně jest se stříci nadměrného a proto didakticky nezdravého formalismu i nevystavovati žáky nebezpečí kolise vzhledem k ustálenému již významu značky K_{10} . — Snad by aspoň k některým z těchto potřeb mohlo býti zaujato stanovisko komisi pro symboliku v matematickém vyučování.

Ze svých zkušeností konečně ještě dodávám, že zásada ekvivalence peněžních částek nesoučasných a na ní založené řešení převodem z termínu na termín vyžadují podrobnější průpravy a hojnějšího cviku, než se obvykle za to má. Míval jsem dojem, že se přes zdánlivě postačující vysvětlení věci některým žákům přece jen bezděčně vtírá — patrně pod vlivem číselné nerovnosti ekvivalentních hodnot a při nevyvinutém ještě vlastním smyslu pro proměnlivost peněz s časem — myšlenka jakéhosi zisku resp. ztráty, jež je ovšem ujmoutí se zásady ekvivalence a libovolnosti převodního termínu na překážku. Proto soudím, že je radno, jakmile se dospěje k úlohám na porovnávání, výměnu a slučování kapitálů, cvičiti tyto přesuny především na příkladech se schystanými vhodnými čísly,⁶⁾ v malém jen časovém rozmezí, s početním psaným aparátem co nejmenším a v četných variantách.

A jak s tou libovolností převodního termínu? Že pro žáky není v každém případě samozřejmostí a že se dokonce proti vámi navrženému postupu mohou ozvat námitky, o tom se můžete přesvědčiti při první příležitosti, kde byste zamýšleli dát úrokovati neb diskontovati kapitál po dobu, během které nezůstává nedotčen, resp. není celý ještě vytvořen. Tak tomu bývá při výpočtu zbytku z kapitálu důchodem nestráveného a mohlo by se to vyskytnouti také při výpočtu neznámého základního kapitálu, jímž vedle pravidelných příplatků úsporných byla založena určitá celková úspora. Než sahati v takovém případě k nějaké jen fiktivní konstrukci situace, která by oprávněnost postupu v první chvíli se přičicího dovodila a může tu ostatně jako

⁶⁾ Data vhodná k tomuto cvičebnímu účelu převodovému připraví si žáci sami jednorozměrnými kroky ze základu náležitě dělitelného. Při vzrůstu 4%^{ním} potřebují dělitelnost 25 a směrem zpětným 26, tedy pro časový rozsah 4 let hověl by tomuto požadavku základ $26^4 \cdot 25^4$, t. j. číslo 422 500. To se pro zbežnou tuto manipulaci, jejíž jednou podmínkou je nezatížený přehled, nehodí. Teprve vzrůst 10%^{ní} poskytuje ze základu $11^2 \cdot 10^3$ serii vhodnějších ekvivalentních hodnot

10 000, 11 000, 12 100, 13 310, 14 641

a evt. 25%^{ní}(!) pro rozsah 6 let

4 096, 5 120, 6 400, 8 000, 10 000, 12 500, 15 625.

Takto připravená data umožňují i z paměti hravě zodpověděti na př. otázky: Někdo si vypůjčil na 10% 10 000 Kč a po 3 letech ještě 20 000 Kč; jak výše doroste jeho dluh koncem roku čtvrtého? — Polovinu pohledávky 13 310 Kč splatné až po 3 letech žádá věřitel již koncem roku prvního; kolik by to činilo? — Na kolik let by stačila jistina 25 000 Kč k vyplácení ročního důchodu 12 500 Kč při 25%^{ní}(!) úrokové míře a jak asi velký by byl zbytkový důchod poslední?

K námitkám proti neživotnosti podotýkám, že lze ovšem taková cvičení konati i pro obvyklá procenta a základ libovolný, vzdáme-li se výhod z vhodnosti a úplnosti čísel.

dodatečné vysvětlení původu shody býti i zcela na místě, je zajisté didakticky rozumnější, provést především výpočet přirozenou a pochybnosti vylučující cestou faktického průběhu, t. j. propočítati stav rok za rokem a ukázati shodu⁷⁾ s výsledkem převodu všech částek jednotlivě.

Otázkou pro sebe jest a předmětem zvláštní úvahy měla by býti životnost příkladů v této kapitole projednávaných, jakož i poměr její k ostatním didaktickým a vzdělávacím potřebám.

Edisonův efekt.

Josef Šoler, České Budějovice.

Předloni bylo tomu 50 let, co Edison provedl tento pokus, na němž se zakládají elektronové lampy. Ve „Fysice“, vydané v letošním škol. roce pro vyšší třídy, četl jsem takovýto výklad: „Připojíme lístky elektroskopu k vodivému obalu žárovky (posíťbřené nebo obalené staniolem), nabijeme lístky a obal elektroskopu spojíme se zemí, načež žárovku na okamžik rozsvítíme. Rozestup lístků klesne, měly-li náboj kladný, zůstane, byly-li nabity záporně. Žhoucí vlákno vysílá elektrony, které proniknou sklem na vodivý obal a vyrovnávají kladný náboj elektroskopu.“ — Vysvětloval jsem — nemoha najíti v literatuře výkladu tohoto pokusu — zjev na základě kondensátoru. Laskavostí p. redaktora této rubriky byl jsem upozorněn na to, že stejného mínění jsou tito autoři: H. Greinacher podle referátu v Zeitschrift für den phys. u. chem. Unt. 37 (1924), 193: „Die Ursache ist das Entweichen negativer Elektronen aus dem Glühdraht, die sich an der Glaswand ansammeln und die $+E$ auf dem Stanniolring binden.“ — E. Mosch v Lehrbuch der Physik (1927), str. 120: „Da sich zwischen dem ionisierenden weissglühenden Metalldraht und dem Elektroskop die isolierende Glasbirne befindet, so kann die Entladung des Elektroskops nur dadurch erfolgt sein, daß positive Ladung durch Influenz von den Blättchen auf den Metallstreifen gezogen wurde. Diese influenzierende Wirkung muss von negativen Ladungen ausgegangen sein, die die Innenseite der Glasbirne bedecken und diese negativen Ladungen können nur von dem weissglühenden Metalldraht herrühren.“ — K. Hahn-P. Henckel v Lehrbuch der Physik (1933), str. 286: Žárovka starého typu je tu ovinuta měděným drátem, spojeným s elektroskopem;

⁷⁾ Tak třeba v případě zbytku po tříletém důchodu uspokojí žáky plně teprve poznatek, že výraz $\{(Bq - b)q - b\}q - b$ vede skutečně k hodnotě $Bq^3 - bq^3 - bq - b$, získané přímo oním doporučeným převodem, byť obsahovala záročení peněz vybraných.

k tomu výklad: „Die Erscheinung kann auf folgende Weise erklärt werden. Ein glühender Körper sendet nicht nur Licht, sondern auch Elektronen aus. Diese schlagen sich auf der Glaswand der Glühlampe nieder und laden sie negativ auf. Ist das Elektroskop positiv geladen, so wird die gesamte Ladung im Augenblick des Einschaltens in den Kupferdraht gezogen, der mit der Innenwand der Röhre einen Kondensator bildet.“

O tom, který názor vyhovuje, lze se přesvědčiti tímto pokusem: Staniolový obal jsem na žárovku nepřilepil. Položil jsem na ni volně plášť kužele z papíru, na obou stranách polepeného staniolem, a připojil k elektroskopu (stačí citlivý stéblový).

Je-li nabit kladně, přitáhnou se elektrony ke sklu žárovky. Sklem neproniknou, studené sklo je izolátorem. Na jedné straně skla žárovky je pak kladně nabitý obal, na druhé prostorový náboj záporných elektronů, tísnících se těsně u skla přímo proti obalu. Je to tedy kondensátor: jeden jeho polep, záporně nabitý, tvoří elektrony, sklo je dielektrikem a kladný obal je druhým polepem. Přiblížíme-li se ke kladně nabitému elektroskopu záporně nabitou deskou, klesnou lístky ne proto, že by snad záporná elektřina s desky přešla na elektroskop a vyrovnávala jeho kladný náboj, ale dostanu vlastně kondensační elektroskop, elektřiny se váží a proto stéblo klesne.

A z téhož důvodu klesne i při Edisonově efektu. — Dokud obal je přilepen na žárovku, nedalo se zjistit, že jen tento výklad je správný. Kladná elektřina elektroskopu a záporná elektronů váží se tak dobře, že jich elektroskop neukáže. Je-li však obal pohyblivý, jako při mé úpravě pokusu, pak jej mohu za izolující rukojeť (zkusnou kuličkou) zvedat a jako při pokusu s Voltovým kondensačním elektroskopem vidím, jak se zas pomalu stéblo vychyluje na důkaz, že se jeho kladný náboj elektrony nezrušil, a že dosáhne původního potenciálu. Když obal zase nasazuji, ovšem zas výchylka klesá. — Je dobře zkusiti při nerozsvícené žárovce týž pokus, a kdyby se snad obal při zvedání třením trochu zelektroval, buď užití méně citlivého elektroskopu, aneb zvedati opatrněji. — Je viděti, proč „se pokus lépe dařil“, když byl obal těsně nasazen (přilepen): byla větší kapacita, a stéblo tedy více kleslo. — Ještě více překvapí tento pokus: Když při Edisonově pokusu polepu nenabiji, ale jen uzemním a po chvíli uzemnění odstraním, pak zvedám-li „polep“, ukáže se, že je nabit kladně. Je k tomu třeba citlivějšího pozlátkového elektroskopu. Neukáže se na něm záporný náboj, jak by tomu musilo být, kdyby naň pronikly sklem elektrony (ne „setrvačností“, neboť jsou k obalu přitahovány indukovanou elektřinou kladnou). — Tento druhý pokus snad nejlépe ukazuje, který výklad vyhovuje.

Plyne to však i z referátu v Časopise 62 (1932/33), Rozhledy 12 (1932/33), R 72 o elektronové trubici s vnějším řízením, již uvedla na berlínskou radiovýstavu firma Telefunken. Uvnitř je jen anoda a katoda. Řídicí elektroda („mřížka“) je vně lampy. Má tvar velmi plochého válce a obklopuje lampu. Stejnosměrné předpětí na mřížce nemá vlivu, neboť kladné předpětí na vnější elektrodě způsobí jen, že se vnitřní stěna trubice nabije na stejné velké záporné napětí. Je-li na řídicí mřížce záporné předpětí, kompenzuje se částečně s kladným nábojem iontů uvnitř trubice, jež se vyskytují i při dobře vyčerpaných lampách, zvláště pak u trubic plněných plynem. Lampa hodila se jen pro zesilovače, kde není mřížkového proudu; nedalo se jí užít pro detekci, kde je potřeba slabých mřížkových proudů. To nejlépe dokazuje, že elektrony sklem projít nemohou. Lampa se vůbec neosvědčila, ač byla patentována.

Nevím, zda se uvedený pokus vůbec hodí za základní.

1. Zdá se totiž, že Edison umístil pomocnou elektrodu hned dovnitř lampy, ne vně, aspoň podle referátu o Bronkové článku z dějin elektronové trubice (Zeitschrift für den phys. u. chem. Unt. 37 (1924), 134, takže mu tuto úpravu připisujeme snad neprávem.

2. Zjev je v obyčejné lampě dost komplikovaný, neboť v žárovce, zvláště v „plněné“, je nebo vznikne dosti kladných iontů, takže často jsem mívával žárovku, kde zjev probíhal právě naopak (stéblo klesalo při záporném náboji lépe, než při kladném). Každý správce proto mívá zvláště schovánu žárovku „se kterou se dá provést Edisonův pokus“ (mrzelo mne kdysi, že se dal provést se žárovkou starého typu s kovovým vláknem, ne však Edisonovou s uhelným vláknem novější výroby).

3. Oneh kondensátor má konečnou kapacitu, pročez často zůstane po počátečním náhlém poklesu lístek státi trvale na určitém nižším potenciálu.

Proto by snad bylo i pro pokus i pro výklad lépe užítí přímo diody, kde uváděné nesnáze se nevyskytnou.

ZPRÁVY A DROBNOSTI.

Dr. Antonín Pleskot †. Dne 30. listopadu 1935 zemřel v Praze čestný člen naší Jednoty dr. Ant. Pleskot, býv. dlouholetý profesor první čs. st. reálky v Plzni; před několika lety odstěhoval se do Prahy. Při pohřbu rozloučil se s ním předseda Jednoty. Ocenění jeho činnosti z pera prof. Petra přinese příští ročník Časopisu.

Osobní zprávy. Řádnými profesory na vysoké škole speciálních nauk při českém vysokém učení technickém v Praze byli jmenováni dosavadní mimořádní profesori této školy, dr. Karel Dusl (pro matematiku) a dr. Jaroslav Janko (pro matematiku pojistnou a matematickou statistiku). — Vrchní školní rada Ing. Václav Pajer, zemský školní inspektor v Praze, byl jmenován vládním radou. — Václav Ingriš, prof. reál. gymnasia v Praze. XVI, byl pověřen funkcí zem. šk. inspektora pro střední školy s čsl. jazykem vyučovacím v zemi České. — Adolf Slavík, profesor reál. gymnasia v Šumperku, byl jmenován ředitelem reálky v Mor. Ostravě. — František Vosyka, profesor při zem. školní radě v Praze, byl jmenován ředitelem dívčího reál. gymnasia „Krásnohorské“ v Praze II. — Královská česká společnost nauk zvolila mimořádným členem dr. Vincence Nechvíle, soukr. docenta Karlovy university; zahraničními členy byly zvoleni Emile Borel (Paříž), Jacques Hadamard (Paříž), Vito Volterra (Řím) a George Neville Watson (Birmingham); dopisujícím členem byl zvolen Jovan Karamata (Bělehrad). — Dne 22. března t. r. dožil se sedmdesáti let Ing. dr. Josef Petřík, profesor českého vysokého učení technického v Praze.

Jubilé de M. Marcel Brillouin. (Paris 1935. VIII, 441 str.) V prosinci roku 1935 shromáždili se žáci a ctitelé seniora francouzských fysiků Marcela Brillouina (nar. 19. prosince 1854), aby mu projevíli svou úctu. Přípravný výbor, jehož členy byli H. Villat (předseda), M. Abraham, L. Brillouin, A. Cotton, P. Langevin, Ch. Maurain, J. Perrin a E. Thouzelier, redigoval tuto krásnou knihu, která obsahuje 48 článků ze všech oborů fysiky; jsou to práce sepsané žáky a ctiteli Marcela Brillouina, jenž jako originální badatel i jako profesor (učil na různých vysokých školách ve Francii, na Collège de France byl profesorem po dobu 31 let) měl veliký vliv na svoje žáky. Obsah sborníku je příliš bohatý, než abych mohl zde podrobněji referovati. Upozorňuji jen na Abrahamův článek, ve kterém je dán nový výklad

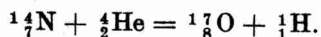
zjevům, které vedly k domněnce o t. zv. expansi všehomíra. Spektra vzdálených mlhovin jsou posunuta k červenému konci, a to tím více, čím je mlhovina vzdálenější. Z toho usoudili někteří podle Dopplerova principu, že se mlhoviny od Země vzdalují, a to rychlostí tím větší, čím dále jsou od ní. H. Abraham usuzuje zcela jinak. Pripustíme podle Eddingtona, že světový prostor je vyplněn velmi řídkým „elektro-
novým plynem“, takže na 1 litr objemu přijde asi jeden elektron. Světlo vysílané mlhovinou setkává se s těmito volnými elektrony a nastává Comptonův zjev; délka vlny se prodlužuje. Při ohromných vzdálenostech mlhovin od Země je takových srážek světelného paprsku s elektrony mnoho a je jich tím více, čím je mlhovina vzdálenější. A to právě stačí k vysvětlení zjevu, takže není nutno se uchýlovat k domněnce o „expansi“. Podobně se dá vysvětliti také „rudý posuv“ spektra slunečního.

Bohuslav Hostinský.

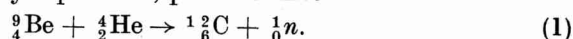
Mikrochemický důkaz helia vzniklého rozbitím atomu. Usiloval o něj již několik let Paneth a jeho spolupracovníci. Před nedávnem se konečně tento zajímavý, a můžeme říci dokonce epochu v dějinách rozbíjení atomů tvořící důkaz podařil. (*Nature* 136 [1935], 950 a 137 [1936], 560.)

Paneth se zabývá mikrochemií vodíku a helia, zejména pro helium docílil velké citlivosti stanovení; až 10^{-7} cm³. Ještě toto množství helia podařilo se mu spektroskopicky dokázati a kvantitativně stanoviti zvláštním manometrem. Musíme si však uvědomiti, že získati 10^{-7} cm³ umělého helia při nějakém rozbíjecím ději není tak snadné. Ponechme stranou pokusy, při nichž je k rozbíjení prvku užíváno uměle zrychlovaných částíček ve zvláštních výbojových trubiciích. U nich jsou sice výtěžky pokusů mnohonásobně větší, protože trubice dodávají bombardujících střel mnohonásobně více než nejsilnější radioaktivní preparáty. Radioaktivním preparátem však lze ozařovati po dobu prakticky jakkoli dlouhou, na př. několik dnů neb týdnů, což u dnešních výbojových trubí dosud není možné. Můžeme tedy pouze technickým překážkám přičítati dosavadní nedostatek snah, aby mikrochemický důkaz byl proveden v rozbíjecím pokuse při použití bombardujících částíček z výbojové trubice. V dohledné době k tomu však jistě dojde a bude to ještě důležitější epocha v dějinách rozbíjení atomů.

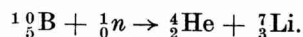
Vraťme se nyní k pokusům Panethovým, při nichž atomy prvků byly bombardovány a rozbíjeny částicemi alfa radonu (rad. emanace). Použité množství radonu bylo až 2000 mc (= milicurie; 1 curie radonu je množství emanace radiové, které je v radioaktivní rovnováze s jedním gramem radia). Kdybychom zářením alfa vysílaným tímto množstvím radonu bombardovali nějaký prvek, nedocílili bychom dostatečného množství plynu, aby bylo lze je dokazovati mikrochemicky. Uvažujme na př. známou rozbíjecí rovnici, objevenou r. 1919



Bombardováním dusíku částicemi alfa (= He) vzniká kyslík a vodík; při tom sotva na jednu částici alfa ze 100.000 připadá rozbití dusíkového jádra. 2 mc radonu (i s produkty rozpadu) vyšlou za 1 sec zhruba $2 \cdot 10^{11}$ částic alfa, po celodenním bombardování vzniklo by asi 10^{12} atomů vodíku, jejichž celkový objem by byl řádu 10^{-8} cm³. Takové množství vodíku nestačí pro mikrochemické stanovení. I helia, jehož stanovení je citlivější, muselo by býti alespoň desekrát více. Paneth proto nepoužil k bombardování prvku částic alfa, nýbrž neutronů, jejichž bombardovací účinnost je větší. Neutrony si vyráběl smíšením 2 mc radonu s beryliovým práškem, podle rovnice



Bombardováním berylia částicemi alfa vzniká uhlík a neutrony. Jeden neutron připadne tu asi na 10 000 částic alfa, což je účinnost o řád vyšší než při rozbití atomů v předešlém případě. Rovnice (1) vlastně také představuje rozbití atomu berylia, jenom že na pravé straně se vyskytuje neutron ${}^1_0\text{n}$; mikrochemicky nelze tu dokazovati ani uhlík, ani neutrony; o nějaké chemii neutronů vůbec lze míti těžko představu. Paneth proto užil získaných neutronů k bombardování boru podle rovnice



Jádro atomu boru zasažené neutronem rozpadá se na jádra helia a lithia. Když se bombardující neutrony nejprve zpomalí průchodem parafinovou deskou (nárazy na atomy prakticky stejně těžkého vodíku), jejich bombardovací účinnost značně stoupne a dosáhne skoro 100%; téměř každý neutron rozbije atom boru. Vzniká tedy skoro stejný počet heliových atomů jako neutronů. V konečném výtěžku helia dostáváme se o řád výše než u vodíku vzniklého rozbitím dusíku. Množství řádu 10^{-7} cm³ možno již dokazovati mikrochemicky. Důkaz se skutečně Panethovi podařil a vznik „umělého helia“ byl prokázán kvalitativně i kvantitativně.

V. Santholzer.

Záporné zbytky v t. zv. postupném dělení (Eukleidově algoritmu). V článku „Několik poznámek k numer. dělení“*) byla ukázána možnost užití záporných zbytků. Také při výpočtu největší spol. míry postupným dělením vedou někdy záporné zbytky rychleji k cíli. Věta: „Největší spol. míra dělence a dělitele je zároveň největší společnou měrou dělitele a zbytku“ platí evidentně pro zbytky jak kladné, tak i záporné, jak je patrné z vyjádření dělence a pomocí dělitele b a zbytku $-z$: $a = bn - z$. Vizme na př.

1. $M(1664, 240)$

Způsobem obvyklým:

1664	240	6
224	16	1
0	<u> </u>	14

Užitím záporného zbytku:

1664	240	7
1680		
<u>-16</u>	0	-15

*) ČMF 64, str. D 78.

Počet výkonů při způsobu prvním: 3 odhady podílu, 3 násobení, 2 odčítání (neseparováno); při užití způsobu druhého: 2 odhady podílu, 2 násobení, 1 odčítání. Znaménka (—) psána být nemusí. Druhému způsobu je ovšem k tíži zapisování součinu (1680).

2. *M* (1636, 236).

Způsobem obvyklým:

1636	236	6
220	16	1
12	4	13
0	<u> </u>	1
		3

Užitím záporných zbytků:

1636	236	7
1652		
<u>— 16</u>	240	— 15
0	<u>— 4</u>	4

(5 odhadů, 5 násobení, 4 odčítání). (3 odhady, 3 násobení, 2 odčítání).

Zvláště výhodný je tento způsob u dvojic, kde jedno z čísel se málo liší od desetinásobku druhého. Příklady:

$$\begin{array}{r|rr} 1. & 5269 & 528 & 10 \\ & 5280 & & \\ \hline & -11 & 0 & -48 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rr} 2. & 10892 & 1092 & 10 \\ & 10920 & & \\ \hline & -28 & 0 & -39 \\ \hline \end{array}$$

V těchto případech ani nemusí být prvý součin (5280, 10920) zapisován.

Václav Skalický.

Zpráva o I. sjezdu pro středoškolskou pedagogiku a didaktiku (obor přírodovědný). Sjezd konal se ve dnech 2.—7. dubna 1936 v Praze s podporou ministerstva školství a nár. osvěty za účasti skoro 500 středoškolských profesorů a četných hostů.

Zahájení sjezdu se účastnil p. ministr školství a národní osvěty dr. E. Franke s presidiálním šéfem min. radou E. Šubertem a personálním referentem min. radou dr. J. Rackem, zástupce české techniky rektor dr. J. Svoboda, zástupce hl. města Prahy, vicepresident z. š. r. dr. A. Dvořák, předseda JČMF vl. rada L. Červenka, řed. A. Vančura, předseda Pedagogické jednoty Komenského, čeští i němečtí zemští školní inspektoři a j.

JČMF vyslala do přípravného výboru svého předsedu vl. r. L. Červenku, řed. dr. M. Šmoka, prof. dr. J. Březinu, z. š. i. V. Ingríše, dr. A. Wanglera a dr. F. Vyčichla. V pořadatelském výboru byli činnými její členové prof. dr. Č. Kohlmann a dr. F. Vyčichlo jako pořadatelé pro matematiku, fysiku a deskr. geometrii.

V teoretických přednáškách byl čteným účastníkům sjezdu oboru M, F, G, jichž bylo přes 200, ukázán jednak přehled novějšího vývoje jednotlivých odvětví matematiky, jednak byly jim předneseny některé partie matematické, deskr. geometrické a fysikální, k nimž by měla střední škola přihlížeti zvýšenou měrou v zájmu dobré přípravy abitu-

rientů pro vysoké školy a pro život. Přednášející se snažili jednak rozšířit vědomosti středoškolských profesorů tím, že navázali na poznatky, které jim dala v jednotlivých disciplínách vysoká škola, a ukázali jim, jakým směrem jde v těchto disciplínách badání v nové době. Ukázali jim také, jak lze teorii nacvičenou ve škole aplikovati na četné příklady z praktického života, hlavně v úlohách měřických a kartografických (prof. dr. Šalamon). Přednášky z oborů M, F, G byly prosloveny tyto:

Prof. dr. J. Březina: Fyzikální praktika.

Univ. prof. dr. V. Hlavatý: Nové směry a cíle v geometrii se stanoviska diferenciální geometrie.

Prof. techn. dr. V. Hruška: Vybrané stati z nomografie.

Univ. prof. dr. V. Jarník: Teorie množin a nové směry v nauce o funkcích.

Prof. techn. dr. J. Kounovský: Techniky a konstr. geometrie na stř. školách.

Prof. techn. dr. F. Nachtikal: Jednotné fyzikální názvosloví.

VI. r. inž. V. Pajer: Standardisace učebních pomůcek.

Dr. H. Slouka: Stavba vesmíru.

Doc. dr. J. Šafránek: Televise s demonstracemi.

Univ. prof. dr. B. Šalamon: Měřické a kartografické úlohy na stř. školách.

Univ. prof. dr. Q. Vetter: Nové směry v matematickém vyučování.

Prof. techn. dr. J. Vojtěch: Elementární geometrie s vědeckého hlediska.

Prof. dr. A. Wangler: Pracovní metoda ve vyučování fyzice.

Univ. prof. dr. A. Žáček: Vybrané partie z experimentální fyziky.

Litovati jest, že univ. prof. dr. B. Bydžovský nemohl přednáseti „O nových směrech a cílech v geometrii se stanoviska topologie“. Jeho přednášku „Základní myšlenky nových osnov“ přečetl z. š. i. V. Ingriš.

Mimo všeobecné přednášky o brannosti prof. V. Čížka „Brannost a střední škola“ a pplk. g. št. Č. Kudláčka „Branná výchova a stř. škola“ byla řešena konkrétně také otázka, jak lze speciálně v matematice, geometrii (z. š. i. V. Ingriš), fyzice (dr. A. Wangler) a chemii (dr. F. Jahoda) přispěti k zvýšení zájmu o armádu a její úkoly u středoškolského studentstva.

Debaty vesměs byly věnovány novým osnovám, zkušenostem s nimi, jejich přednostem a nevýhodám. Z debat vznikly resoluce odborníků, matematiků, fyziků a deskriptivářů, které budou částí úhrnné resoluce sjezdové, na jejíž konečné redakci pracuje přípravný výbor sjezdu. Speciální požadavky oborů M, F, G jsou uvedeny v resoluci takto:

Rovnováha v počtu vyučovacích hodin. I. sjezd pro středoškolskou pedagogiku a didaktiku došel k přesvědčení, že dnešní význam přírodních a matematických věd pro civilizaci, techniku a braňnou zdatnost

občanstva vyžaduje rovnováhy mezi počtem hodin, určených pro předměty z oboru těchto věd a věd filologických.

V matematice budiž proto:

a) ve 4. třídě reál. a ref. reál. gymnasií přidána jedna hodina k řádnému procvičení učebné látky, aby se mohl položit pevný základ pro vyšší stupeň těchto typů středních škol;

b) v 7. třídě reál. gymnasií určena ještě hodina k prohloubení funkčního myšlení a vysvětlení základů infinitesimálního počtu, potřebného ve fyzice;

c) v 8. třídě na gymnasiích buďtež hodiny matematiky po celý rok k zvýšení úrovně tohoto typu.

Doporučovalo by se zavést v 1. třídě všech středních škol místo nepovinných ručních prací výchovných, kterým se na většině středních škol nevyučuje, povinné technické praktikum (zhotovování modelů a pod.) v jedné týdenní hodině v rámci řádného rozvrhu hodin.

V rýsování ve čtvrté třídě všech typů středních škol budiž zvýšen počet vyučovacích hodin o 1 hodinu, aby se mohla v průmětně vyvíjet náležitá představivost, potřebná na vyšším stupni nejen v desk. geometrii, ale i v matematice a v mineralogii, a aby bylo dost času na technický výcvik, prováděný ve škole.

Deskriptivní geometrie v 7. a 8. třídě Rrg a Rg nebudiž předmětem elektivním a budiž jí zvýšen v 7. třídě těchto typů počet hodin na tři, aby bylo dosti času položit pevný základ, využití desk. geometrie po stránce výchovné a připravit dostatečně absolventy těchto typů pro studium na vysoké škole technické. Aby tento úkol mohla desk. geometrie splnit i při minimálním počtu hodin, který jest pro ni určen, doporučuje se zavést opět funkci asistentů v rýsování. Vyučování rýsování budiž svěřeno odborníkovi.

Ve fyzice budiž v nejvyšší třídě počet hodin na všech typech středních škol stejný, a to takový, jaký byl před návrhem učebních osnov. Praktická cvičení buďtež povolována co nejblahovolněji.

Osnovy. I. sjezd pro středošk. ped. a did. se usnáší:

V matematice jest učivo upraveno a rozvrženo psychologicky a didakticky vhodně, až na tyto závady, které buďtež odstraněny: V 5. třídě reál. pro obsáhlost osnovy aritmetiky partie o rovnicích exponentiálních a logaritmických buďtež posunuty do třídy 6, v níž složitější úlohy o trojúhelníku buďtež vynechány a probírány raději praktické aplikace trigonometrické (pro brannou výchovu a topografii). — Pro 6. tř. Rrg, Rg, G budiž osnova doplněna soustavami rovnic o dvou neznámých vyšších stupňů, zvláště těch, které mají užití v analytické geometrii v 7. třídě.

Ve fyzice (na nižším stupni) buďtež provedeny z důvodů metodických některé přesuny částí učiva z třídy do třídy.

Vedle přednášek a debat měli účastníci příležitost shlédnouti při exkursích, pořádaných pro matematiky, fysiky a deskriptiváře, Voj. zeměp. ústav, výstavu přístrojů pořádanou STAKO, továrnu na učebné pomůcky FY SMA a její výrobky, ateliery na Barandově, Voj. letecký ústav a voj. továrnu na letadla, práce České graf. Unie a j. JČMF uspořádala ve fysik. ústavě přírod. fakulty Karlovy university výstavku knih a publikací, které vydala nebo prodává, a také výstavku některých nových přístrojů a modelů FY SMY. Mimo to pořádala pro své členy a zájemce — účastníky sjezdu — společnou schůzku večer 4. dubna v Nár. domě na Kr. Vinohradech.

Na schůzce řed. dr. M. Valouch seznámil přítomné s činností Jednoty, osvětlil její finanční stav a vyložil její plány, zejména v oboru nakladatelském. Na jeho výklad se navázala velmi čilá a zajímavá diskuse, které se kromě ředitele účastnili zejména pp. V. Hlavatý, Praha, V. Ingriš, Praha, K. Koutský, Brno, V. Lamparter, Žilina, A. Lebeda, Něm. Brod, O. Maška, Brno, B. Matas, Praha, K. Rotrekl, Hranice, J. Simerský, Treboň, B. Slavík, Duchcov, L. Staněk, Brno, M. Šmok, Praha, M. A. Valouch, Praha, J. Vavřinec, Ml. Boleslav, F. Veselý, Sl. Ostrava, A. Wangler, Praha, a j. Cenné podněty a návrhy přednesené účastníky, jež se týkaly zvláště úpravy Rozhledů a Časopisu, učebnic a ostatních publikací, činnosti FY SMY atd., byly předsedou vl. r. L. Červenkou s povděkem kvitovány a jistě přispějí ke zdokonalení další činnosti Jednoty. Bylo vysloveno přání, aby se takové schůzky členů JČMF konaly častěji i mimo Prahu a aby mimo to členové svá přání a posudky zasílali výboru Jednoty ve větší míře než dosud. Debata této schůzky bude předmětem jednání výboru i redakce.

V celku lze říci, že se sjezd zdařil a že prospěje vyučování realistickým předmětům a tím celé střední škole.

F. V.

LITERATURA.

A. Recenze vědeckých publikací.

Selecta. Jubilé scientifique de M. Jacques Hadamard. Paris 1935, 432 stran. Kč 216,—.

Tento svazek věnují Hadamardovi, velikému mistru matematiky, jeho obdivovatelé, přátelé a žáci u příležitosti jeho jubilea (nar. 8. prosince 1865, první jeho práce vyšly r. 1884). Jsou zde otištěna, většinou beze změny nebo ve stručném výtahu, některá Hadamardova pojednání z teorie funkcí, z teorie čísel, o diferenciálních rovnicích, z variačního a z funkčního počtu, z geometrie a z hydrodynamiky.

Svazek jest ukončen podrobným seznamem všech Hadamardových publikací; je jich tam uvedeno 280; rozmanitost témat, kterými se obíral, je nesmírná. I v tom výboru z jeho prací, jež zde nalézáme otištěny, je tolik zajímavých věcí z nejrůznějších oborů počínaje elementární geometrií až do funkční analýsy, že snad není matematicky vzdělaného čtenáře, jenž by zde nenašel něco, co jej upoutá; tato kniha je skvělá čítanka pro každého matematika.

Bohuslav Hostinský.

Casimír Kuratowski: Topologie I. Monografie matematyczne, sv. 3. Warszawa 1933. IX, 285 str. Kč 122,—.

Kuratowského „Topologie“, která celá bude mít pravděpodobně tři svazky, chce podati soustavný a úplný přehled celé topologie. Pokud lze souditi z prvního svazku, řeší tento úkol skvěle. Myslím, že po dlouhou řadu let bude nejlepší pomůckou každému, kdo se věnuje dalšímu badání ať už v topologii samé, či v některém z těch četných odvětví matematiky, které topologii stále více a více aplikují. Je to jedna z mála knih, které dobře připravený čtenář může číst znovu a znovu, a pokaždé s novým ziskem. Za to ovšem není zrovna vhodnou četbou pro začátečníka, kterému asi nejen bude vaditi, že spoustu nových pojmů jen zcela výjimečně uvidí doprovázeny ilustrativními příklady, ale který také mnohde zůstane málo poučen důkazem, jenž sice je po formální stránce bezvadný, ale nezkoušenému zpravidla málo poví o intuitivním jádru věci.

Prvá kapitola jedná o obecných topologických prostorech. Čtenář začátečník nechtě myslí třeba na obyčejný prostor elementární geometrie, nebo, chce-li mít už hodně obecný příklad, tedy na „prostor“ P , který vznikne z obyčejného prostoru tím, že podržíme jenom některé body (tvořící jakkoli složitý geometrický obrazec) a na ostatní body „zapomeneme“. Je-li nyní A libovolná „bodová množina“ (t. j. libovolná část prostoru P), pak nazveme uzávěrem množiny A a označíme $\bar{A}$ bodovou množinu, která vznikne z prostoru P tím, že vynecháme každý bod p , jemuž lze přiřaditi $\varepsilon > 0$ tak, že vzdálenost bodu p od každého bodu množiny A je $> \varepsilon$. Na základě této názorné definice uzávěru snadno nahledneme, že platí následující tři vlastnosti. Předně uzávěr součtu dvou bodových množin A a B je roven součtu uzávěrů jednotlivých množin A a B . Za druhé $\bar{A} = A$ v tom jednoduchém případě, kdy množina A obsahuje

pouze jeden bod. Za třetí uzávěr uzávěru libovolné bodové množiny A je roven uzávěru množiny A samé. Prostor P jsme mohli voliti mnohem obecněji. Stačilo by, vzít za P prostor, jehož „body“ jsou jakékoli objekty, jen když každým dvěma bodům p a q je přiřazeno jako „vzdálenost“ číslo $\varrho(p, q) = \varrho(q, p)$ určené podle nějakého zákona voleného tak, že $\varrho(p, p) = 0$, $\varrho(p, q) > 0$ pro $p \neq q$; a že platí „trojúhelníková nerovnost“ $\varrho(p, q) + \varrho(q, r) \geq \varrho(p, r)$. Takový P se nazývá metrický prostor. Příklad dostaneme, když za „body“ zvolíme spojitě funkce $f(x)$ v intervalu $0 \leq x \leq 1$ a když za „vzdálenost“ dvou takových funkcí $f(x)$ a $\varphi(x)$ prohlásíme maximální hodnotu čísla $|f(x) - \varphi(x)|$. Jiný příklad dostaneme, když za „body“ zvolíme funkce $f(x)$ s konečnou variací v intervalu $0 \leq x \leq 1$ a když za „vzdálenost“ dvou takových funkcí $f(x)$ a $\varphi(x)$ prohlásíme součet čísla $|f(0) - \varphi(0)|$ a totální variace funkce $f(x) - \varphi(x)$. Tyto dva příklady nejsou uměle voleny. Naopak nejhezčí a nejdůležitější aplikace topologických vět jsou právě aplikace takových a podobných „funkcionálních“ prostorů. Je-li obecně P jakýkoli metrický prostor, můžeme definovati uzávěr $\bar{A}$ libovolné bodové množiny zcela stejně jako výše, užívající ovšem „abstraktní“ vzdálenosti, jak je definována v P , a opět nalezneme, že hořejší tři vlastnosti jsou splněny. Stanovisko první kapitoly je však ještě mnohem obecnější. Obecný topologický prostor P je množina jakýchkoli objektů, jejichž „vzdálenosti“ nemusí býti vůbec definovány; za to se předpokládá, že každé „bodové množině“ A je přiřazena nová bodová množina $\bar{A}$ podle nějakého zákona, jehož volba je podrobena pouze té podmínce, že hořejší tři vlastnosti jsou splněny. Tedy stanovisko je „axiomatické“; pojem uzávěru je nedefinovaný „primitivní“ pojem, podrobený třem axiomům. Tyto axiomy jsou, jak čtenář vidí, logicky mnohem jednodušší než na př. kterýkoli ze známých systémů axiomů pro elementární geometrii. Řada nových pojmů, jejichž studiu je právě věnována první kapitola, dá se logicky převést na pojem uzávěru. Jsou to především pojmy uzavřené a otevřené množiny; množina A je uzavřená, když $\bar{A} = A$, a je otevřená, když $P - A$ je uzavřená. S tím souvisí obecnější pojem Borelovy množiny; systém všech Borelových množin je definován jako nejmenší systém φ bodových množin s následujícími třemi vlastnostmi: předně, každá uzavřená množina patří do φ ; za druhé, když A patří do φ , také $P - A$ patří do φ ; za třetí, když každá z množin A_n patří do φ , také množina $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ patří do φ . Z jiných pojmů studovaných v první kapitole uvedme pojem množiny husté (A je hustá, když $\bar{A} = P$), řídké (A je řídká, když $P - \bar{A}$ je hustá) a množiny první kategorie (A je první kategorie, když $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$, kde každá z množin A_n je řídká). Základní vlastnosti těchto pojmů jsou zde vyloženy úplně a obratně, ovšem jsou většinou dnes již klasické. Méně známá je pouze Banachova věta, která praví, že každá množina A , která není první kategorie, obsahuje aspoň jeden bod p , který má následující vlastnost: množina AG (t. j. množina všech bodů společných oběma množinám A a G) není první kategorie pro žádnou otevřenou množinu G obsahující bod p . Poprvé je zde knižně zpracován důležitý pojem množiny s Baireovou vlastností. O množině A pravíme, že má Baireovu vlastnost v širším smyslu, když A vznikne z otevřené množiny tím, že nejprve přidáme a pak ubereme množinu první kategorie. O množině A pravíme, že má Baireovu vlastnost v užším smyslu, když pro každou uzavřenou množinu F platí, že, když AF považujeme za bodovou množinu prostoru F , AF má Baireovu

vlastnost v širším smyslu. Důležitost Baireovy vlastnosti je v tom, že každá „prakticky“ se vyskytující množina (mimo jiné každá Borelova množina) má Baireovu vlastnost, dokonce v užším smyslu, ač na druhé straně už v prostoru reálných čísel existují množiny, které nemají Baireovu vlastnost ani v širším smyslu.

Prvá kapitola tvoří společný základ pro všechny další. Každá z ostatních kapitol má být věnována některé speciální vlastnosti prostoru. Tak ve druhé kapitole běží o prostory separabilní, ve třetí o prostory úplné. Tím končí první svazek. Podle předmluvy bude věnována čtvrtá kapitola prostorům kompaktním a pátá prostorům souvislým.

Separabilní prostor je metrický prostor, který obsahuje nějakou hustou spočetnou množinu. Separabilní prostor vyhovuje nejen výše uvedeným třem axiomům, ale ještě čtvrtému a pátému. Čtvrtý axiom praví: Když dvě uzavřené množiny F_1 a F_2 se neprotínají, pak existují dvě otevřené množiny G_1 a G_2 , které se také neprotínají, při čemž G_1 obsahuje celou F_1 a G_2 obsahuje celou F_2 . Pátý axiom praví: Existuje spočetný systém φ otevřených množin takový, že každá otevřená množina je rovna součtu některých množin systému φ . Důležitá Urysohnova věta praví, že mimo separabilní (tedy metrické) prostory žádný jiný topologický prostor nevyhovuje těmto pěti axiomům. Dále je ve druhé kapitole přehled Menger-Urysohnovy teorie dimenze, založený v podstatě na Hurewiczových metodách. Tento přehled není ovšem úplný, protože několik důležitých vět nelze za dnešního stavu vědy dokázat bez užití pojmu kompaktního prostoru, takže je autor vyloží až ve druhém svazku. Velmi přehledný a obratný výklad o Borelových množinách a Baireových funkcích (doplňný řadou důležitých bodů ve třetí kapitole) tvoří snad nejzdařilejší část celého svazku.

Úplný prostor je metrický prostor, ve kterém platí známé Bolzano-Cauchyovo kritérium: Bodová posloupnost $\{p_n\}$ je konvergentní (t. j. existuje bod p takový, že se vzdálenosti $\varrho(p_n, p)$ blíží nule), když každému $\varepsilon > 0$ lze přiřadit index N tak, že $\varrho(p_m, p_n) < \varepsilon$, kdykoli oba indexy jsou $> N$. Důležitost pojmu úplného prostoru je jednak v tom, že lze každý metrický prostor vnořit do úplného prostoru, dále v tom, že hlavní prostory vyskytující se ve funkcionální analýze jsou úplné, konečné v Baireově větě, která praví, že $A \neq P$, když A je množina první kategorie v úplném prostoru P . Baireova věta je snad „nejplodnější“ topologickou větou vůbec; celá řada vět z analýzy, na př. existence spojitých funkcí bez derivace, dá se chápat jako speciální případ Baireovy věty, užitá na vhodný funkcionální prostor.¹⁾ Z dalšího bohatého obsahu třetí kapitoly zde upozorňuji pouze na velmi pěkný přehled Lusin-Sierpiňského teorie analytických a projektivních množin. Bodová množina A v úplném prostoru P se nazývá analytická, když je spojitým obrazem Borelovy množiny, t. j. když existuje v P Borelova množina B a spojitě zobrazení f množiny B na (celou) množinu A . Množina B je Borelova, když a jen když obě množiny B a $P - B$ jsou analytické. Projektivní množiny první třídy jsou identické s analytickými množinami. Množina A je projektivní množina třídy $2n$, když $P - A$ je projektivní množina třídy $2n - 1$; A je projektivní množina třídy $2n + 1$, když je spojitým obrazem projektivní množiny třídy $2n$. Množiny „prakticky“ se vyskytující v obyčejném prostoru jsou zpravidla Borelovy; ale ve „vyšších“ prostorech zcela jednoduché problémy vedou na projektivní množiny, které nejsou Borelovy. Tak na př. v „prostoru“ všech uzavřených množin intervalu $0 \leq x \leq 1$ systém všech nespočetných uzavřených množin tvoří množinu analytickou, která není Borelova. Čech.

¹⁾ Banach, Hurewicz, Jarník, Mazurkiewicz a j. užili s úspěchem Baireovy věty na četné problémy v analýze a geometrii. V. na př. Jarníkův „Dodatek“ k mým „Bodovým množinám“.

Wacław Sierpiński: *Hypothèse du continu*. Monografie matematyczne, sv. 4. Warszawa 1934. V, 192 str. Kč 95 —.

Hypothese kontinua dá se vysloviti takto: Každá nespočetná množina reálných čísel má stejné kardinální číslo jako množina všech reálných čísel. Je-li tato hypothesis správná, není známo; problém je tak těžký, že mnozí věří, že to nikdy nebude známo. Studovati důsledky hypothesis kontinua je důležité především proto, že podaří-li se dáti odpověď na nějakou otázku pomocí hypothesis kontinua, je aspoň „pravděpodobné“, že odpověď je správná, a je „beznadějné“ snažiti se dokázat, že je nesprávná. Autor po řadu let pečlivě studoval důsledky hypothesis kontinua a podává nyní soustavný přehled výsledků, k nimž dospěl.

Uvedu jako příklad nejprve dvě věty ekvivalentní s hypothesis kontinua, z nichž prvou dokázal autor a druhou Hurewicz. I. Existují dvě posloupnosti $\{f_n\}$ a $\{g_n\}$ (nespojité) funkcí reálné proměnné takové, že pro každý bod (x, y) v rovině existuje index n takový, že je buďto $y = f_n(x)$ nebo $x = g_n(y)$. II. V Hilbertově prostoru existuje nespočetná množina, jejíž žádná nespočetná podmnožina není homeomorfní s podmnožinou euklidovského prostoru.

Jako další příklad uvedu dvě věty, které plynou z hypothesis kontinua, jež obě dokázal autor. I. Existuje posloupnost reálných funkcí reálné proměnné x , která konverguje pro každé x , ale nekonverguje stejnoměrně na žádné nespočetné množině. II. Existuje reálná funkce f reálné proměnné taková, že, ať A je jakákoli nespočetná množina reálných čísel, množina $f(A)$ nikdy není měřitelná (v Lebesgueově smyslu). *Čech.*

G. Bruhat: *Cours de Mécanique Physique* Paris 1934. VIII, 708 str. Kč 180,—.

Tato kniha je napsána pro studenty, kteří se zabývají matematikou a fyzikou buď jako budoucí profesori matematiky a fyziky nebo jako budoucí inženýři, kteří se budou zajímati o technické aplikace.

První část knihy nazývá se statika. Jsou tu vyloženy základní pojmy z vektorového počtu, z kinematiky a ze statiky. Ve druhé části jedná se o základech dynamiky. Třetí část nadepsaná metrologie obsahuje výklad o měření délek, o vahách a o měření hmot, o jednotkách a o odhadu pozorovacích chyb. Ve čtvrté části je vyložena teorie kyvadla a užití kyvadla k měření času a gravitačního pole; pak se obšírně jedná o tlumených kmitech a o sprzęžených kyvadlech. V páté části jsou vysvětleny základní vlastnosti tekutin, pak hlavní věty o rovnováze tekutin, o zjevech kapilárních a začátky hydrodynamiky. Šestá část je věnována šíření vln a kmitavým pohybům v kapalinách a v plynech; sedmá. (poslední) část jedná o deformacích a o kmitech pružných látek.

Ačkoli se matematické formulace užívá ve všech kapitolách knihy, přece tvoří formule poměrně malou část celého textu; kniha, která je pečlivě zpracována, věnuje zvláštní pozornost přesnému a podrobnému výkladu nejdůležitějších pojmů mechaniky, které jsou objasněny jednak se stanoviska ryze pojmového, jednak se stanoviska názorového s ohledem na aplikace. Zajímavé jsou četné příklady technických aplikací; autor nezachází do podrobností, nýbrž omezuje se v každém případě na výstižné vysvětlení hlavní věci. Dílo p. G. Bruhata, profesora na pařížské Faculté des Sciences, je znamenitá pomůcka pro každého, kdo začíná studovat matematiku a fyziku.

Bohuslav Hostinský.

H. Bouasse: *Bibliothèque scientifique de l'ingénieur et du physicien*. 45 svazků se 20.655 stranami textu. Paris; ukončeno 1931.

První vydání Bouasseovy fyziky vyšlo před válkou v šesti svazcích pod názvem *Cours de Physique*. Některé svazky, jakož i jeho učebnice vyšší matematiky a astronomie, vycházely v nových vydáních a byly tak přepracovány, že v posledním vydání tvoří soubor těchto učebnic obrovskou

encyklopedii, která zahrnuje všechny obory fyziky, s úvodem do vyšší matematiky a do astronomie. Bouasse, profesor fyziky na universitě v Toulouse, vydal těch 45 svazků (v posledním vydání) během poměrně krátké doby asi 12 let; na titulních listech sedmi z těchto svazků jsou uvedena jména spolupracovníků E. Turrière, Fouché, Marty, Carrière.

Bouasseovým heslem je co nejvíce vědy, ale se zřetelem k aplikacím. To je zřetelně vidět ve dvou svazcích věnovaných vyšší matematice (Cours de Mathématiques générales; Exercices et compléments de M. g.). Jen to, čeho právě je potřeba k výkladu fyziky, je do těchto dvou knih pojato. A jsou to věci, jak autor praví, vesměs nejméně sto let staré.

Mechanika a akustika mají dohromady 22 svazků. Úvod do kinematiky (Théorie des vecteurs, Cinématique, Mécanismes) a do statiky (Statique) je podán elementárně a je doprovázen dlouhou řadou příkladů, které zajímají fyziku i techniku. Ve svazku o základech mechaniky (Dynamique générale) dovede Bouasse zaujmouti čtenáře zrovna tak upozorněním na Routhovo jednoduché odvození Lagrangeových rovnic jako výkladem o různých manipulacích a hračkách, které člověk může vidět na pouti. Zvláštní svazek je věnován problémům o pohybu tělesa s jedním pevným bodem a o pohybu projektilů (Gyroscopes et Projectiles), dva svazky pak kmitavým pohybům kyvadel, pružin a ladiček (Pendule, Spiral, Diapason) a užití jich k měření tíže a času; obšírně jedná o různých problémech hodinářství. Kniha o pružnosti (Résistance des matériaux) vyniká bohatostí témat z nauky o pružnosti a zejména znamenitým a velmi přesným výkladem hlavních rovnic. Je ku podivu, že právě v této knize, kde Bouasseovo pochopení pro přesnost ve formulaci základních pojmů tak vyniká, nalézáme předmluvu o „zbytečnosti matematiky pro vzdělání ducha“. Mechanika tekutin je rozdělena na hydrostatiku (Hydrostatique. Manomètres, baromètres, pompes, Équilibre des corps flottants), kapilaritu (Capillarité. Phénomènes superficiels), na knihu o vodních paprscích a proudění v potrubích (Jets, tubes et canaux), na dva svazky o vírech (Tourbillons, Forces acoustiques, Circulations diverses), na knihu o vlnách na vodě (Houle, ride, Seiches et marées) a pak o proudění v tekutinách dokonalých i viskózních (Hydrodynamique générale); v knize o odporu tekutin (Résistance des fluides) se jedná o letu aeroplanů a o letu ptáků, o tom, jak plave ryba ve vodě, dále o vrtulích a větrných mlýnech a o řízení lodí. Způsob, kterým Bouasse pojímá a vykládá akustiku, zejména v jejích vztazích k hudebním otázkám, jest opravdu jedinečný. Již před lety ukázal se mistrem tohoto oboru v knížce o fyzikálních základech hudby (Bases physiques de la Musique). Nyní, neukládá si žádné rezervy co do rozsahu, podává soustavný, hluboce promyšlený a mnohostranně propracovaný výklad o vzniku zvuku, o šíření akustických vln (Acoustique générale), o strunách a membránách a o hudebních nástrojích se strunami a membránami (Cordes et Membranes), o píšťalách a rezonátorech (Tuyaux et Résonateurs); po stránce matematické je zajímavý zjednodušený výklad Helmholtzovy teorie o otevřených píšťalách, o kmitech tyčí, desek a zvonů (Verges et Plaques) a konečně ve dvou svazcích (Instruments à vent) o vzniku tónu v dechových nástrojích, o lidském hlase a o základech fonetiky. Není snad jediné otázky z oborů, kde se hudba stýká s fyzikou, o které bychom zde nenalezli aspoň nějaké vysvětlení. Bouasseových šest svazků je nejlepší učebnicí akustiky, která kdy byla napsána. Pripomeňme ještě, že zvláštní svazek jedná o šíření elastických vln ve vnitřku a na povrchu Země, o zemětřeseních a o jich pozorování (Séismes et Sismographes).

Základy termodynamiky a nauka o tepelných strojích jsou obsahem

dvou svazků (Thermodynamique générale, gaz et vapeurs; Machines thermiques, Chimie physique), elementy nauky o elektřině a o magnetismu jsou probrány ve třech svazcích (Cours de magnétisme et d'électricité).

Skvělou částí encyklopedie jest optika, která dohromady s elektro-optikou má čtrnáct svazků. Geometrická optika (Optique géométrique élémentaire; O. g. supérieure) je zejména ve druhém svazku zpracována i v těžších partiích o zobrazování tak podrobně a zajímavě, jak ji jinde nenajdeme. Vedle knihy o optických měřeních a základních přístrojích (Appareils de mesure et d'observation) najdeme tu ve zvláštním svazku úvahy o vidění a o reprodukci barev i tvarů (Vision et reproduction des formes et des couleurs), pak dva svazky o interferenci a ohybu (Interférences; Diffraction) a čtyři svazky o optice krystalů i o jiných jejich vlastnostech s krásně psanou krystalografií (Cristallographie géométrique; Phénomènes liés à la symétrie; Double réfraction; Polarisation rotatoire). K tomu přistupují dva svazky o elektrických oscilacích a vlnách (Oscillations électriques; Ondes hertziennes), pak jeden o emisi tepla a světla (Émission, Chaleur solaire) a jeden o šíření světla, o odrazu a dispersi (Propagation de la lumière). Tyto knihy mají velikou cenu jak svou vysokou úroveň po stránce ryze teoretické, tak tím, že obsahují nespočetné pokyny, které přijdou vhod fysikům pracujícím s optickými přístroji a které Bouasse, bývalý asistent Mascartův, zde uvádí na základě svých po dlouhá léta sbíraných zkušeností. Čteme-li kteroukoli z jeho knih, máme dojem, že všechno od jednoduchých manipulací až do měření rychlosti světla sám pokusně prostudoval. V posledně uvedeném svazku o šíření světla diskutuje velmi podrobně o tom, co víme (podle měření a úvah Newcombových a Michelsonových) o rychlosti světla pro různé barvy. Bouasse dochází k závěru, že obvyklé teoretické pojmy, jichž užíváme při rozboru disperse (na př. pojem skupinové rychlosti), nestačí k tomu, aby daly uspokojivou interpretaci experimentálních dat. Víme velmi málo; Bouasse výstižně nás přesvědčuje o složitosti problémů, jež se vyskytují v úvahách o šíření světla a zamítá teorii relativity.

Konečně uvádím dva svazky (Astronomie théorique et pratique; Géographie mathématique), které dávají výborný přehled o základních pojmech astronomie a matematického zeměpisu.

Každý svazek má obšírnou předmluvu, takže celá encyklopedie má vedle dvaceti tisíc šesti set stran vlastního textu ještě asi tisíc stran předmluv. Tyto předmluvy, kde Bouasse vykládá svoje názory na to, jak se fysika má pojímat a jak pěstovat, jsou velmi zajímavým dokumentem o jeho úsilí vypracovati každou myšlenku k největší zřetelnosti a aplikovati fysiku všude, kde je to vůbec možno; pochopíme pak jeho neobyčejně prudké výpady proti tradičnímu způsobu vyučování, proti přílišnému užívání matematiky, proti nedomyšleným teoriím a proti nedostatku smyslu pro skutečnost.

Bouasse jest obdivuhodný pro svou ryzí originalnost a pro jasný způsob podání všech otázek; jeho knihy budou dlouho nejspolehlivějšími pomůckami při studiu fysiky.

Bohuslav Hostinský.

J. Heyrovský: Polarographie. Monografie v druhém díle spisu Physikalische Methoden der analytischen Chemie, Leipzig, 1933—36, vydávaného W. Böttgerem.

V recenzi vědeckých publikací tohoto časopisu (t. ročn. D 124) bylo celkově posouzeno dr. V. Majerem svrchu uvedené Böttgerovo dílo, mající za účel podati analytickému chemikovi přehled veškerých fysikálních metod, jichž lze prakticky využít pro chemickou analýsu a současně vyložiti princip těchto metod po stránce fysikální.

Mezi jednotlivými samostatnými monografiemi, z nichž se Böttgerovo dílo skládá, vyšlo také pojednání sepsané profesorem Karlovy university dr. J. Heyrovským. Poněvadž tu běží o zcela originální dílo vybudované výhradně prací samého autora a jeho školy a přijímané všeobecně jako významná samostatná kapitola elektrochemie, zasluhuje tato monografie prof. Heyrovského pojetá do Böttgerovy sbírky, aby zde bylo o ní podrobněji referováno.

Článek Heyrovského o polarografii obsahuje 62 stran, 42 vyobrazení, 3 tabulky a diagram polarografického spektra. Přes poměrně malý rozsah, jaký mu byl vymezen, vyčerpává všechny důležité směry polarografického badání, a to zvláště se zřetelem k analytickému a praktickému využití, při kterém polarografie podle Böttgerova hodnocení se stává zvláště důležitou a ekonomickou metodou pro analytika. Autorovi polarografické metody se tu podařilo mistrně vměstnati v dokonale přehledném uspořádání do osmi kapitol bohatý materiál, pocházející většinou z autentického pramene, s jasným fyzikálním výkladem, takže čtenář, jenž se dosud ne-seznámil s původní literaturou hodící se spíše pro specialisty, může si učiniti přesný a ucelený názor o této metodě. Všimněme si tu polarografické metody ve smyslu autorova podání, a to více po stránce fyzikální.

Polarografická metoda se zabývá studiem elektrodové polarisace při speciálním elektrolytickém uspořádání. Z tvaru křivek intensity a napětí, které jsou automaticky registrovány, dá se určovati touto metodou povaha a množství depolarisujících součástí roztoku, který je elektrolysován v nádobce se rtuťovou kapkovou katodou, resp. anodou a s pomocnou referentní elektrodou. Výhoda rtuťové kapkové elektrody pro studium elektrochemických dějů záleží v naprosté reprodukovatelnosti křivek, která je umožněna pravidelným odkapáváním, takže čerstvý povrch rtuti ve styku s roztokem stále vylučuje závislost výsledků elektrolyse na době jejího trvání. K tomu přistupuje ještě dokonalá polarisace rtuťové elektrody a vysoké přepětí vodíku na rtuti, jež znemožňuje rušení elektrolyse jeho vylučováním z vodných neutrálních a alkalických roztoků.

Matematická analýza křivek intensity a napětí ukazuje, že křivky vyhovují teoreticky odvozeným formulím a že lze pomocí nich definovati nové absolutní elektrolytické konstanty, t. zv. potenciály půlvln. Podle teorie Heyrovského a Ilkoviče jsou to potenciály, při nichž nastává inflexe křivky intensity a napětí, a dá se dokázati, že se tato inflexe objeví při reversibilních redukcích tehdy, když proudová intensita dosáhne hodnoty rovnající se polovině difusního proudu způsobeného příslušným depolarisátorem, tedy hodnota experimentálně snadno přístupná. Tato konstanta nezávisí na rychlosti kapání elektrody, na citlivosti galvanometru, nebo volbě souřadnic, ba ani na koncentraci depolarisátoru, takže autor srovnává její význam s významem spektrální linie a hovoří o elektrochemickém spektru. Ionizační energii v optickém spektru určené vlnou, resp. frekvencí příslušné linie ($h\nu$) odpovídá analogicky elektronová afinita iontu v roztoku, definovaná potenciálem půlvlny násobeným příslušným kapacitním faktorem. Intensita spektrální linie udávající kvantitu zdroje má pak obdobu ve velikosti difusního proudu depolarisátoru. Pomocí potenciálů půlvln a difusních proudů je tedy určen depolarisátor kvalitativně i kvantitativně.

Vedle studia normálního vylučování nebo redukce depolarisátorů ubírá se polarigrafické badání podle autorova přehledného rozdělení ještě dalšími dvěma směry. Je to jednak výzkum velmi reprodukovatelných maxim proudové intensity na křivkách intensity a napětí, která jsou nejcharakterističtější pro rtuťovou kapkovou elektrodu a která jsou klasické elektrochemii zcela neznáma, jednak katalysované elektrodové procesy, jejichž společná podstata tkví ve snižování přepětí vodíku na rtuti. Oba

tyto směry jsou snad nejzajímavějším úsekem polarografie, neboť přinášejí nejvíce nové a originální tvorby autorovy do zdánlivě uzavřeného oboru elektrochemie. Rtuťová kapková elektroda ve spojení s citlivým galvanometrem je nejideálnější elektrolytický přístroj k studiu oněch delikátních procesů odehrávajících se v mezifázi rtuť-roztok, o jehož vlastnostech se pak dovídáme z charakteru křivek intensity a napětí. O těchto zjevech týkajících se povrchu rtuti, mezifázi a blízkého okolí elektrody je pojednáno v monografii s hlediska teoretického přirozeně jen stručně, co je třeba k pochopení jejich principu, z něhož lze prakticky těžiti.

Monografie obsahuje dále zevrubný popis aparatury a pracovního postupu, stanoví citlivost metody a uvádí přehled kationtů, aniontů a molekul, jež lze určovati polarograficky. Probírá dále použitelnost metody k analýze a popisuje objektivně všechny výhody i nevýhody této metody a její omezení. Bylo by nesprávné hleděti na polarografickou metodu, jak uvádí autor, jakožto na nevýhodnější pomůcku k obecné systematické analýze. Její největší praktický význam tkví v řešení speciálních případů, zvláště mikrochemických, nebo takových, kde jiné metody jsou nepoměrně pracnější. Mezi takové vhodné případy, které jsou v monografii kriticky probrány, patří zkoušky na čistoty preparátů, analýsy minerálních vod, některé speciální problémy biochemické, cukrovarské a kvasné chemie, analýsa keramických hmot, užitkových vod, plynů atd.

Toto jasné a přehledné zpracování problémů, které jsou jinak obsaženy ve více než dvou stech původních pojednání v různých časopisech, nutno co nejvřeleji doporučiti především těm, kdo chtějí s úspěchem používat polarografické metody po stránce praktické, a dále i těm, kdož se chtějí důkladně obeznámit s jejími principy. Je třeba však připomenouti, že přes veškeré úspěchy při praktickém použití tkví hlavní význam polarografické metody v čisté elektrochemii. Podle slov profesora Toľloczka je tato metoda novým okénkem do mechanismů fyzikální chemie. Proto se těšíme na autorem připravovanou anglickou monografii, v níž bude polarografická metoda probrána s tohoto hlediska. *Rudolf Brdička.*

Sir William Bragg: Die Welt des Lichtes. Přel. G. Nagelschmidt. Braunschweig 1935. Str. 222, obr. 109 a XXVI fotograf., resp. barev. tab. Cena Kč 40,—, v pl. 52,80.

Přednášky na téma „The Universe of Light“, které konal W. Bragg o vánocích r. 1931 v Royal Institution, byly autorem rozšířeny a vydány knižně pod stejným názvem. Způsobem každému vzdělanému laikovi přístupným vykládá W. Bragg obsah celé nauky o záření. K výkladu užívá vlnové teorie až potud, pokud tato dovede vysvětliti příslušné zjevy, a teprve při výkladu fotoelektrického zjevu ukazuje, jak zde tato teorie selhává, takže je nutno se vrátiti k předčasně zavržené teorii korpuskulární. V závěru poslední kapitoly naznačuje autor, jakým způsobem je možno tyto dvě dříve navzájem se vylučující teorie sloučiti. Ačkoliv je to jen populární výklad nauky o „světle“, jsem přesvědčen, že každého středoškolského učitele fyziky tato kniha zaujme mistrným způsobem, jímž jsou některé obtížnější partie optiky vyloženy, a že mu dá hodně didaktických i metodických podnětů. Mimo to se tu každý čtenář jistě dozví řadu zajímavých podrobností, jimiž lze vyučování fyziky zpestřiti. Proto neváhám tuto knihu kolegům vřele doporučiti. Nyní, když vyšla v německém překladu, bude přístupnější širšímu okruhu čtenářů. *F. Veselý.*

O. Schlosser: Die Rezensionstätigkeit von Leibniz auf mathematischem und physikalischem Gebiet, Bottrop i. Westf. 1934, VII + 59 str.

Předložená knížka je výtah z disertace. Zajímavá je tím, že osvětluje velkého matematika z nové stránky. Recenze Leibnizovy nebyly dosud známy, ač vyšly v „Acta eruditorum“, neboť tam byly recenze psány

anonymně. Teprve podrobným studiem nejen recensí, a ne vždy spolehlivých okrajových poznámek ve starých exemplářích tohoto časopisu, nýbrž i korespondence Leibnizovy a Menckeovy se podařilo autorovi zjistiti Leibnizovo autorství jednotlivých recensí. Vlastním recensím předeseilá autor stručný úvod, ocenění významu recensí vůbec a život Leibnizův osvětlený právě s hlediska jeho činnosti recensí. Pak se obrací autor k recensím, celkem 42, ze všech oborů matematiky a fyziky, a to jak vyšly od r. 1676 do r. 1716. Recenze nejsou tu uvedeny v plném znění, nýbrž jen ve svých podstatných částech, za to však stručně charakterisování spisovatelé recensovaných knih a okolnosti, jak k recensím došlo. Bohaté poznámky osvětlí čtenáři recensované dílo. Jeho očím otvírá se tu zajímavý pohled do stavu matematických věd v poslední čtvrtině XVII. a na počátku XVIII. stol. Doplnky k Ravierově „Bibliographie de Leibniz“ a seznam použité literatury končí tento zajímavý spisek. Q. Vetter.

D. E. Smith-J. Ginsburg: A History of Mathematics in America before 1900. (The Carus Mathematical Monographs, 5). Mathematical Association of America, Chicago, 1934, X + 209 str.

Senior amerických historiků matematiky se spojil s profesorem Ginsburgem, vydavatelem nové revue „Scripta mathematica“, aby napsali pěknou instruktivní knížku o matematice v Americe. Vývoj naší vědy ve Spojených státech je rozdělen do čtyř kapitol (XVI. a XVII. století, XVIII. století, všeobecný přehled XIX. století, období 1875—1900). Leží v povaze věci, že poslední kapitola zaujímá polovinu knihy. V jednotlivých kapitolách je látka seskupena podle obsahu matematických prací. Hodně místa je věnováno také matematickému vyučování, odborným časopisům a učebnicím. Zajímavý je i zřetel na evropské vlivy, čímž je nám vysvětlen vývoj americké matematiky právě s hlediska souvislosti s ostatním světem i ukázáno na proudění přes oceán následkem studií amerických matematiků v Evropě. Spis není zatěžován matematickými detaily, takže je lehce přístupný a přece informativní. Hojná bibliografie do textu vtroušená činí jej vhodnou příručkou. Q. Vetter.

Odpověď na posudek pana Otomara Pankraje o mém spise *Méthodes générales du Calcul des Probabilités.*

V posudku uveřejněném ve 3. sešitu „Časopisu“ (str. D 124) je jednak projeveno politování nad tím, že nečiním bližší zmínky o podstatě zákonů o sečítání a násobení pravděpodobností, za druhé pak nad tím, že jsem neužítkoval pojmu závislosti a nezávislosti jevů a konečně za třetí postrádá se v mém spise zmínka o tom, co třeba považovati za „příčinu“ a co za „účinek“ (vycházím totiž z Poincaréových názorů, podle kterých jsou náhodné zjevy výsledkem příčin buď velmi malých nebo velmi složitých; viz str. 1 a 57).

K tomu odpovídám: 1. Sbírka *Mémorial des Sciences mathématiques*, ve které můj spis vyšel, jest určena pro pokročilé čtenáře; všechno, čeho je potřeba věděti o sečítání a o násobení pravděpodobností, najde se v různých učebnicích. Ostatně na 2. straně cituji Borelovu Encyklopedii počtu pravděpodobností, kde jsou ony věty vyloženy. 2. Největší část spisu je věnována výkladu o Markovových řetězech; to je právě zvláště významný a důležitý případ závislých pravděpodobností. V odst. 14 ukazují, že Bernoulliův klasický problém nezávislých pravděpodobností je v Markovově obsažen jakožto speciální případ. Uvádím různé vzorce pro střední hodnoty a pro dispersi a to jak pro případ obecný tak pro případ Bernoulliův; pojmy závislosti a nezávislosti jsou zde zužitkovány. 3. Poincaréovy práce o pojmu náhody jsou v mém spise výslovně citovány a na str. 57 uvádím, v čem spočívá složitost příčin v problému o míchání karet. Spis tohoto druhu by se zbytečně zatěžoval výklady o tom, co je příčina a co jest účinek.

Bohuslav Hostinský.

B. Recenze didaktických publikací.

F. Ondrák: Metodika přírodopytu pro čtvrtý ročník učitel-
ských ústavů. Praha 1936, 116 str.; váz. 10 Kč.

Učitelským ústavům scházela až dotud učebnice metodiky přírodo-
pytu, která by důkladně přihlížela k novým směrům pedagogickým a di-
daktickým i k nově upraveným normálním osnovám učebním. Kniha
Ondrákova přišla proto velmi vhod. Referujeme zde o ní, protože přináší
mnoho cenných příspěvků i pro metodiku přírodopysného vyučování na
střední škole, zvláště mladým kolegům fysikům.

Učebnice je rozdělena ve čtyři části s dodatkem, kde je uvedena v pře-
hledu odborná literatura, hlavně metodická.

V úvodní stati autor pěkně navazuje na poznatky kandidátů učitel-
ských ústavů z logiky (heuristiky a systematiky) III. ročníku, dává nahléd-
nout do dílny vědeckého pracovníka, do metod vědeckého badání.

V druhé části, opíraje se o normální učebné osnovy pro obecné školy,
vyvozuje autor úkol a cíl přírodopysného vyučování, uvádí zásady pro
vhodný výběr učiva (platné i pro ostatní předměty) a pro uspořádání učiva,
při čemž dobře přihlíží k novým metodám vyučovacím. Ve stati o prostře-
cích učebních autor vyzdvihuje význam vycházek do přírody, do průmy-
slových závodů, podává návod k přípravě pro ně předem ve škole a vysvětluje
jejich následné využití. Také stať o přístrojích přináší mnohé, co prospěje
v nižších třídách střední školy učitelům při výkladech, právě tak, jako návod
o úpravě sbírek, jakosti přístrojů a o zacházení s nimi. Zásady vyučovací,
jasně vytčeny, přijdou mladému učitelovi na střední škole jistě vhod. Jest
v nich shrnuto mnoho praktických poznatků (na př. zásada „dbej samočin-
nosti žáků“, nebo „vyučování vzdělávejž jazyk žáků“.). Výklad o formách
vyučovacích, o metodách induktivní a deduktivní, problémové, každý
odborník si přečte se zájmem. To, co autor poznamenává o školení pozoro-
vacích schopností žáků, platí v plném rozsahu pro střední školy. Důkladně
pojednává autor o významu a ceně žákovských pokusů a jadrně pak o nejdů-
ležitějším činiteli, podmiňujícím zdar vyučování, o učitelovi.

V třetí části ve volných kapitolách uvádí hlavní vývojové rysy přírodo-
pysného vyučování ve vztahu k dnešním cílům a metodám.

Ve čtvrté části na několika praktických ukázkách (páka, kyslíčník
uhličitý, telefon a mikrofon, odraz světla) je ukázán vyučovací postup.

Kniha si zaslouhuje opravdového zájmu všech kolegů odborníků na
středních školách, kteří v ní najdou mnohé, čeho při svých výkladech a práci
ve škole mohou s výhodou využít; zvláště pak je ji třeba doporučit jako
vhodnou pomůcku k ustanovovacím zkouškám profesorským.

Josef Ledvinka.

C. Původní publikace československých matematiků a fysiků

Fr. Běhounek: Radioactivity of oil-waters in Czechoslovakia.
Nature 136 (1935), 910.

Fr. Běhounek: Methods and results of testing thermal springs
for radioactivity. Archiv. of Medical Hydrology, April 1936.

Fr. Běhounek: Zwei neue Apparate zur unmittelbaren Be-
stimmung des in Wasser und in Luft enthaltenen Radons.
Phys. ZS. 37 (1936), 203.

F. Erhart: Význam rychlosti kritické (zvukové) v aero-
dynamice a letectví. Strojnický obzor 15 (1936), čís. 23.

Autor dokládá příklady významu kritické rychlosti a rychlosti zvuku pro zjevy aerodynamické se zřetelem ke stlačitelnosti prostředí.

J. Hrdlička: Volba vzdálenosti při fotometrování světlo-
metů. Elektrotechnický Obzor 23 (1934), str. 679—681 a 711—714.

J. Hrdlička: Studie homogenity skla. Sborník Masarykovy
akademie práce IX (1935), č. 4, str. 30—35.

J. Hrdlička: Sur la précision des mesures photométriques.
IXe Congrès international de photographie scientifique et appliquée,
Paris, 1935; 9 str.

J. Hrdlička: L'influence d'un éclairage préalable. IXe Congrès
international de photographie scientifique et appliquée, Paris, 1935; 6 str.

M. Jahoda: Über die Erzeugung von Magnetronschwingun-
gen mittels Dreielektrodenröhren. Hochfrequenztechn. u. Elektroak.
47 (1926), 22.

Viz Časopis 65 (1936), 88.

Jos. Kaucký: Le problème des itérations dans un cas des
probabilités dépendantes. Comptes rendus de l'Ac. des sc. de Paris
202 (1936), 722—724.

Z. Kopal: Axial Rotation of Globular Star Clusters. Nature
187 (1936), 621.

Z. Kopal: A few Remarks on the Dynamical Tidal Theory
of the Solar System. Astr. Nachr. 258 (1936), 382.

Z. Kopal: Further Remarks on the Dynamical Tidal Theory
of the Solar System. Astr. Nachr. 258 (1936), 383.

Z. Kopal: Über die periodischen Korrektionsglieder der
Elemente von Bedeckungsveränderlichen und ihre physika-
lische Deutung. Astr. Nachr. 258 (1936), 395.

Vl. Novák: Pokusné potvrzení teorie vah na jednoduchém
modelu. Sborník č. vys. školy techn. v Brně 10 (1936), spis 36.

Na modelu vah potvrzuje autor teoretický vzorec pro citlivost
a dobu kyvu vah.

V. Petržilka: Užití podélných kmitů turmalinových deštiček
k buzení vysilačů. Slaboproudý obzor 1 (1936), čís. 4.

J. Svoboda: Versuche mit dem künstlichen Meteor. Viertel-
jahrschr. d. Astronom. Gesellschaft, 70 (1935), 305.

J. Svoboda: Spiegelastrolab, ein neues Instrument zur Zeit-
und Breitenbestimmung. Vierteljahrschr. d. Astronom. Gesellschaft, 70
(1935), 299.

J. Svoboda: Almukantar s lomeným dalekohledem. Země-
měřický Věstník, 24 (1936), 113.

SPOLKOVÝ VĚSTNÍK.

Zprávy z členských schůzí

Matematická sekce vědecké rady pořádala tyto schůze:

Dne 12. března přednášel prof. dr. VOJTĚCH JARNÍK: O ortogonálních řadách.

Přednášející podal hlavně referát o knihách: A. Zygmund, Trigonometrical Series; S. Kaczmarz a H. Steinhaus, Theorie der Orthogonalreihen. Podrobnosti viz v recenzi těchto knih v tomto ročníku Časopisu, str. D 117.

Dne 19. března 1936 přednášel dr. OTAKAR ZICH: O aritmetisaci logické syntaxe.

Přednášející promluvil nejprve obecně o logické syntaxi formalisovaných řečí a přešel k vlastnímu tématu, aritmetisaci syntaxe. Uvedl užití aritmetisace na problém bezspornosti formalisovaného systému, jež vede ke konstrukci věty, nedokazatelné prostředky syntaxe v řečech, jež obsahují také aritmetiku. Tato část přednášky byla opřena o výsledky Gödelovy a Carnapovy. Poté podal společný výklad nedokazatelných vět, ukázal na rozdílný význam substituce čísla a věty do formule, a konečně pojednal o větách, jež vyjadřují samy svoji formu a v souvislosti s nimi o interpretaci logistických formulí.

Dne 7. května 1936 přednášel dr. OTOMAR PANKRAZ: K hospodářské teorii profesora K. Engliše.

Přednášející podává formulaci některých hospodářských principů pomocí pojmů teoretickomnožinových. Aby měl konkrétní podklad, zvolil si k tomu hospodářskou teorii, jak jest vyložena v knize profesora K. Engliše Theorie státního hospodářství. Speciálně dokazuje, že rozpad hospodářského procesu v oblast opatřování prostředků a v oblast upotřebování statků souhlasí s konstrukcí množiny o dvou elementech, při čemž každý z těchto elementů jest opět množina (s konečným počtem prvků).

Středoškolská komise pořádala tuto schůzi:

Dne 12. prosince 1935 a dne 25. března 1936 přednášel ZDENĚK PÍRKO: Příspěvek středoškolské matematiky k branné výchově a Příspěvek k branné výchově ve středoškolské matematice.

V první přednášce byla podána všeobecná charakteristika technické branné předvýchovy a zdůrazněna nutnost a únosnost exaktních disciplín pro vojenské aplikace. Z vojenské aplikované matematiky byly vybrány ty partie, které bez zvláštních obtíží lze připojit k obsahu středoškolské geometrie analytické; zejména parabolická teorie (šikmý vrh ve vakuu), teorie obou základních svazků drah a analytické základy zvukoměření. V rozpravě po přednášce byl vysloven požadavek, aby další část byla buďto příklady doprovázena nebo přímo v příkladech podána.

Tím byla pozměněna osnova druhé přednášky, v níž byly většinou podány příklady (obecné i číselné), týkající se v podstatě teorie střelby a jejich účinků. Přednáška byla doplněna přehledem vzorců z teorie vrhu ve vakuu, umožňujících řešení příkladů resp. sestavení příkladů nových.

Návrh jednotného označení a názvosloví pro elementární matematiku (aritmetiku i geometrii),

sestavený komisí, kterou tímto úkolem pověřil výbor Jednoty čs.
matematiků a fysiků.

Komise ve více než 20 schůzích pracovala o návrhu na jednotné označení a názvosloví. Nejdříve byl sestaven návrh na jednotnou symboliku a byl rozeslán širšímu kruhu korporací i jednotlivců v minulém roce se žádostí, aby připomínky k němu byly zaslány Jednotě do konce dubna 1936. Dříve než tato lhůta uplynula, ukončila komise také jednání o návrhu na jednotnou terminologii a předkládá nyní celý elaborát obsahující symboliku i terminologii. Z četných připomínek, týkajících se symboliky, jež dosud došly, mohla komise jednati zatím jen o některých; ostatní budou vzaty v úvahu až při celkovém závěrečném jednání o symbolech i termínech. Děkuje za připomínky k symbolice dosud nám laskavě zasláné, prosíme, aby další poznámky k návrhu nyní rozesílanému, týkající se terminologie i symboliky, byly zaslány Jednotě čs. matematiků a fysiků v Praze II, Žitná 25, nejpozději do konce září 1936.

Všechny připomínky budou bedlivě uváženy; upravený návrh bude pak otištěn v Časopise pro pěst. m. a f., aby po krátkém čase ustoupil definitivní normální terminologii a symbolice, která by byla pro budoucí časy závaznou.

Po českém názvosloví bude brzo sestaveno i jednotné názvosloví slovenské; pracuje o něm Matematicko-fysikální kroužek v Bratislavě za pomoci Šafaříkovy učené společnosti.

V Praze, v dubnu 1936.

Dr. Jan Vojtěch

L. Červenka

Dr. F. Vyčichlo

V. Ingriš

Zásady.

1. Jest záhodno, aby se matematické vyučování (na všech typech a stupních škol, ovšem také jiné obory matematiky) po stránce formální, v názvech a značkách, též ve rčeních, aspoň v základě sjednotilo; ve věcech podružnějších lze ponechati volnost vyjadřování.

2. Při stanovení názvů a značek jest přihlížeti k dosavadním zvyklostem našim (nezaváděti změn bez důvodů); jest si také všimati zvyků a norem cizích.

3. Termíny a symboly mají býti, pokud možno a aspoň v omezeném oboru, jednoznačné; s druhé strany jest voliti pro každý pojem jen jeden termín a symbol nebo nejvýše dva (nehledě k překladům).

4. Mají býti přiměřeně jednoduché, přesné a v příbuzných věcech důsledné; hledisko krátkosti lze uplatnit (v dalším používání) i na úkor úplné přesnosti (na př. obvod místo délka obvodu, povrch místo obsah povrchu, obsah elipsy místo obsah části roviny elipsou omezené).

5. Mají býti, pokud není jiných důvodů, tak voleny, aby usnadnily zapamatování (na př. prvky a útvary geometrické lze často označiti počátečními písmeny názvů).

6. Je dobře, liší-li se odborné názvy od běžných (třebas zakončením nebo odchylným tvarem téhož slova); také cizí názvy jsou proto vhodné pro pojmy odbornější (české jest přijímati pro důležité pojmy elementární, jež jsou předmětem obecného zájmu).

7. Pro sdružené pojmy jest voliti názvy i značky stejnorodé (oba české nebo oba cizí, tvarem i smyslem sobě odpovídající); jejich značky se odlišují čárkou nebo indexy ($A, A'; a_1, a_2$); pro řadu souřadných pojmů jest voliti indexy souhlasné s pořadím ($a_1, a_2, a_3, \dots$).

8. Značek jest užívati střídavě, t. j. jenom, je-li toho potřeba (není-li uveden název); není vhodné užívati jich v běžném textu (mimo vzorce a rovnice).

9. V součinech jest klásti činitele zvláštní před obecné, konstantní před proměnné; odmocniny a funkce s připojeným argumentem, pokud možno, na konci.

10. Po stránce jazykové: zdvojené souhlásky cizích slov obecných se zpravidla píší jednoduše (na př. nula, iracionální, elipsa; ale afinní, homogenní, ...); jména přídavná obyčejně jednovýchodná, pro rozli-

šení trojvýchodná (na př. normální, polární, reálný, . . .); slova z latiny pocházející se volí podle tohoto jazyka (na př. parciální, regulární, . . .) a tvoří se podle kmene (na př. sinový); latinská písmena c (vyslovované k) q, s, x se píší k, kv, s, x (na př. kosinus, kvocient, inverse, exponent); řecká hláska théta se přepisuje th (na př. homothetie; u slov otřelých t, na př. logaritmus); řecká koncovka is se mění v e (analysis—analyse jako krisis—krise); vlastní jména cizí se nemění (na př. Eukleides, Apollonios, Descartes, Leibniz, . . .).

11. Tisknou se antikvou čísla zvláštní, jednotky míry, zvláštní funkce; kursivou čísla obecná, funkce obecné, symboly geometrických prvků a veličin; tučně vektory.

12. Rýsované a tištěné obrazce geometrické se popisují písmem normalisovaným; písma příbuzného typu se doporučuje užívat při označování prvků také v textu.

Aritmetika.

1. Číslice (cifra); její hodnota vlastní a místní v čísle ● řád číslice ● ciferný součet čísla;

2. číslo obecné ● č. zvláštní. Pro čísla obecná se užívá v tisku kursivy, pro čísla zvláštní antikvy: na př. $2x^3 + 5y^2$ ● č. relativní ● č. kladné n. pozitivní a značí se $+a$ ● č. záporné n. negativní a značí se $-a$ ● č. reálné ● č. imaginární; imaginární jednotka ($i = \sqrt{-1}$) ● č. soujenné n. komplexní; čísla soujenná sdružená n. komplexní konjugovaná ● č. algebraické, transcendentní ● č. racionální, iracionální ● č. celé, přirozená řada číselná (čísel) ● č. lomené n. zlomek ● č. smíšené ● č. desetinné; desetinná místa se od celků oddělují desetinnou čárkou: na př. 18,32 (osmnáct celých 32 setiny), 0,245; před desetinnou čárkou a za ní není větší mezery; 0,345, ne tedy 0, 345 nebo 0,345 nebo 0, 345 ● desetinné č. ryze periodické; perioda (občísli) se píše jen jednou a značí se vodorovnou čárkou nad celou periodou: na př. 0,3333 . . . se píše $0,3\overline{3}$; $0,356356 \dots = 0,356\overline{356}$ ● desetinné č. neryze periodické: na př. $9,3878787 \dots = 9,387\overline{87}$ ● prvočíslo (č. kmenné) ● č. složené (t. j. číslo, které lze rozložit v součin prvočísel neboli prvočinitelů) ● absolutní (prostá) hodnota čísla n. modul; absolutní hodnota čísla x se píše $|x|$ ● amplituda č. soujenného ● obor číselný;

3. dělení, měření, rozdělování, dělení dokonané, nedokonané ● dělenec ● dělitel ● podíl ● zbytek ● znaménko dělení : , nebo zlomková čára —: na př. $10 : 3$; $\frac{1}{3}$ ● postupné dělení;

4. dělitel (míra) ● společný dělitel ● největší společný d. čísel a, b, c se značí: $D(a, b, c)$ ● dělitelnost celých čísel ● znak (kriterium) dělitelnosti číslem ● čísla soudělná, nesoudělná;

5. determinant; jeho sloupec a řádek, úhlopříčka ● minor n. subdeterminant determinantu;

6. hodnota převrácená n. reciproká;

7. logaritmus; logaritmování ● základ (base) logaritmu ● l. dekadický n. brigický se značí log: na př. $\log 100 = 2$ ● l. přirozený (t. j. se základem e) se značí lg: na př. $\lg x$ ● logaritmus čísla n pro základ a se píše $\log_a n$ ● charakteristika logaritmu ● mantissa logaritmu ● tabulky logaritmické ● interpolace (příklad, prokládání) v logaritmických tabulkách ● extrapolace ● difference tabulková ● stupnice logaritmická ● pravítko logaritmické; jeho části: základní pravítko, šoupátko, běhoun ● levá, pravá hlavní značka stupnice ● index n. ukazatel běhounu ● počítání na logaritmickém pravítku;

8. mocnina (potence) n -tá: na př. druhá (ne dvojmoc), třetí (ne trojmoc) atd. ● mocněnec, základ n. base mocniny ● mocnitel (exponent) se píše k mocněnci vpravo nahoru; na př. x^n a čte se x na n -tou ● mocnina lichá (t. j. s lichým exponentem), m. sudá (t. j. se sudým exponentem) ● mocnění n. umocňování čísel (ne zmocňování čísel) ● umocňování dvěma, třemi, ... (ne zdvojnásobování atd.);

9. mnohočlen (polynom): jednočlen (monom), dvojčlen (binom), trojčlen (trinom) atd. ● m. stupně n -tého v x ● stupeň mnohočlenu ● uspořádati mnohočlen vzestupně, sestupně ● absolutní n. prostý člen mnohočlenu;

10. násobek čísla ● společný n. čísel ● nejmenší společný n. čísel a, b, c , se značí $n(a, b, c)$;

11. násobení ● násobenec ● násobitel ● činitel (faktor) při násobení ● součin ● součinitel n. koeficient ● znaménko násobení $\times$ nebo tečka dole nebo uprostřed řádky: na př. 4×3 ; $2 \cdot 7$; $\frac{3}{5} \cdot 4$. Znaménko násobení se může vynechat mezi dvěma činiteli, z nichž aspoň jeden je číslo obecné nebo výraz v závorce: na př. $a \cdot b = ab$; $3 \cdot x = 3x$; $(a + b) \cdot (a - b) = (a + b)(a - b)$;

12. odčítání ● menšenec ● menšitel ● rozdíl ● odčítati ● znaménko odčítání $-$: na př. $3 - 2$;

13. odmocnina čísla (ne odmocnina z čísla) ● odmocniti číslo číslem ● odmocněnec n. základ odmocniny ● odmocnitel ● odmocnítko (t. j. znaménko odmocňování) ● Odmocnitel se píše nad rozevřený úhel odmocnítko: na př. $\sqrt[n]{a}$. Vynechává se odmocnitel 2: na př. $\sqrt[2]{3} = \sqrt{3}$ ● odmocnina iracionální;

14. poměr (kvocient) ● hodnota poměru (ne udavatel) ● člen první (přední), člen druhý (zadní) poměru ● poměr postupný ● poměr převrácený n. reciproký (ne převratný) ● poměr složený;

15. průměr aritmetický n. průměrná hodnota ● p. geometrický n. střední geometrická úměrná ● p. harmonický;

16. sčítání ● sčítati čísla ● sčítanec ● součet ● znaménko sčítání $+$: na př. $2 + 3$. Znaménko $+$ se vynechává ve smíšených číslech, v nichž se vyskytují jen čísla zvláštní: na př. $3 + \frac{1}{5} = 3\frac{1}{5}$, ale nelze je vynechat na př. ve výrazu $a + \frac{1}{b}$;

17. slučování (t. j. sčítání a odčítání) ● algebraický součet ● Dva stejné členy opačných znamének při slučování se ruší;

18. soustava číselná ● základ (base) soustavy číselné ● s. dvojková, trojková, atd. ● 234_{VI} značí číslo 234 v soustavě šestkové ● s. desítková (dekadická) ● jednotky v soustavě desítkové: jedna, deset, sto, tisíc atd. milion (10^6), miliarda (10^9), bilion (10^{12}), trilion (10^{15}) atd. ● Vypisování čísel: tisíce, miliony atd. se zpravidla nevyznačují, jen se mezerami dosahuje přehlednosti: na př. 17 483 254, t. j. sedmnáct milionů 483 tisíce 254. Čísla zvláštní za sebou jdoucí se zpravidla oddělují středníkem: na př. $P_1(2; 3)$, $P_2(1,2; 0,5)$ ● nula se vyznačuje znakem 0 (ne $\emptyset$);

19. usměrňování jmenovatele zlomku;

20. výkon (operace) početní ● v. p. prvního stupně (sčítání, odčítání) ● v. p. druhého stupně (násobení, dělení) ● v. p. třetího stupně (mocnění, odmocňování);

21. výraz početní: jednoduchý, složený ● součást početního výrazu ● dosaditi do početního výrazu ● vyčísliti početní výraz ● hodnota početního výrazu ● Je-li nutno rozdělití početní výraz na dva řádky, opakuje se znaménko početního výkonu (obdobné znaménko rovnosti a j.);

22. vytýkání činitelů z mnohočlenů (před závorku n. mimo závorku);

23. vzorec n. formule: rekurentní (redukční), obecný ● dosazení do vzorce (ne vkládání);

24. zákon: asociativní ● distributivní ● komutativní;

25. závorky: okrouhlé $()$ ● lomené $[]$ ● složené $\{ \}$ ● úhlové $\langle \rangle$ pro obor; po případě malé i veliké ● pořádek závorek na př. $[(\{[()]\})]$ ● Při postupném odstraňování vnitřních závorek se nemění tvar závorek zbývajících: na př. $a + [b - (c - d)] - e = a + [b - c + d] - e$ atd. ● Pravidla závoreková. Základní pravidlo: Výraz, který je součástí jiného výrazu, se píše do závorky: na př. $(a + b) \cdot (a - b)$; $(a + b)^2$; $(a : b) \cdot (c + d)$ atd.

Závorky lze vynechat: a) mají-li výkony téhož stupně býti provedeny postupně od levé strany k pravé: na př. $[(a - 1) - 3] + 4 = a - 1 - 3 + 4$; $(5 \cdot 4) : 10 = 5 \cdot 4 : 10$;

b) mají-li býti vykonány vyšší výkony před nižšími: na př. $(a \cdot b) + (c \cdot d) = a \cdot b + c \cdot d$;

c) zlomková čára osamocuje (isoluje) čitatele i jmenovatele tak, že není třeba je dávat do závorek: na př. $\frac{(a+b)}{(c+d)} = \frac{a+b}{c+d}$;

d) součiny, v nichž je vynecháno znaménko násobení, jsou tím tak osamoceny, že je není třeba dávat do závorek: na př. $(a \cdot b) : (c \cdot d) = ab : cd$. Je radno psát činitele vedle sebe bez mezer. Výjimka u mocniny součinu: na př. $(ab)^n$; tu nelze vynechat závorku;

e) umístění výrazu do polohy mocnitele nebo odmocnitele osamocuje výraz, takže není třeba závorek: na př. $x^{3n-2n+1}$ nebo $(-1)^{2n+1}$ atd.;

f) je zvykem psát $\log x^2$ místo $\log(x^2)$, $\log^2 x$ místo $(\log x)^2$; podobně $\sin^3 x = (\sin x)^3$, $\operatorname{tg} x^3 = \operatorname{tg}(x^3)$ atd. Je-li nebezpečí z nedorozumění, je radno napsat závorky nadbytečně: na př. $(ab) : (xy)$; $(abc : x) : y$;

26. zlomek ● číselník ● jmenovatel ● nejmenší společný jmenovatel ● zlomková čára: —, píše se vždy vodorovně uprostřed řádky ve výši znaménka odčítání ● z. jednoduchý ● složený ● pravý ● nepravý, obyčejný (na př. $\frac{2}{3}$), desetinný (na př. $\frac{3}{100} = \frac{3}{10^2}$) ● zlomky stejnojmenné, nestejnojmenné ● jednotka lomená: na př. $\frac{1}{2}$ ● krácení a rozšiřování zlomku ● Dva stejné faktory v čitateli a jmenovateli se krátí;

27. znaménko rovnosti n. rovnítko: na př. $x = 5$ ● z. nerovnosti $\neq$: na př. $x \neq 5$ (t. j. x není rovno 5) ● „větší než“ se označuje znaménkem $>$, „menší než“ znaménkem $<$; vrchol úhlu jest u veličiny menší: na př. $5 > 3$; $3 < 5$ ● „větší nebo rovno“ se označuje $\geq$ ● „menší nebo rovno“ $\leq$ ● „větší nebo rovno nebo menší“ $\equiv$ ● „rovná se přibližně (asi)“ se vyznačí $\doteq$ n. $\approx$.

Rovnice.

1. Části rovnice: levá a pravá strana rovnice, znaménko rovnosti $=$: na př. $x = 5$ ● veličina neznámá n. neznámá ● Veličiny neznámé se zpravidla označují písmeny z konce abecedy: $x, y, z, \dots$; někdy také $\xi, \eta, \zeta, \dots$;

2. nerovnice (nerovnost): na př. $x - 1 < 7$;

3. rovnice určovací ● identita (n. stejnina);

4. rovnice algebraická n -tého stupně obecná (t. j. $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$) ● normální (ne redukovaná, t. j. rovnice, kde $a_n = 1$) ● prvního stupně n. lineární; obecný tvar r. lineární zpravidla se píše $ax + b = 0$ ● r. druhého stupně n. kvadratická, obecná: $ax^2 + bx + c = 0$; normální (ne redukovaná): $x^2 + px + q = 0$ ● r. třetího stupně n. kubická; redukovaná r. kubická $x^3 + px + q = 0$ ● člen kvadratický, člen lineární, člen prostý (absolutní) obecné kvadratické rovnice ● diskriminant algebraické, zvláště kvadratické rovnice.

Zvláštní případy algebraické rovnice: binomická (t. j. rovnice tvaru $ax^n + b = 0$), zvláště t. zv. ryze kvadratická (t. j. $ax^2 + b = 0$) ● iracionální ● reciproká (nikoliv převratná) ● trinomická ($ax^{2n} + bx^n + c = 0$);

5. rovnice transcendentní ● exponenciální ● goniometrická ● logaritmická;

6. rovnice o několika neznámých, raději soustava rovnic o několika neznámých ● homogenní ● kanonické ● nezávislé ● r. si odporující (n. sporné) ● r. závislé ● vyloučení (eliminovat) neznámou ze soustavy rovnic ● způsob dosazovací (substituční), přirovnávací (komparační), sčítací (adiční) pro řešení soustavy rovnic o několika neznámých;

7. řešení rovnici n. určití kořen r. (řešení r.) ● kořen r. se značí x_i ; kořen vyhovuje rovnici ● mnohonásobný (na př. dvojnásobný, trojnásobný, atd.) kořen ● řešení soustavy rovnic se píše na př. $(x_1; y_1; z_1)$ ● izolovat n. osamotit neznámou ● kořenový činitel $(x - x_i)$ ● souměrné (symetrické) funkce kořenů ● rozbor n. diskuse řešení rovnice ● upravení rovnici ● odstranění jmenovatele v rovnici;

8. úměra ● vnitřní a vnější členy úměry ● ú. harmonická ● postupná ● složená ● spojitá ● čtvrtá úměrná (viz planimetrie) ● střední geometrická úměrná (viz planimetrie).

Funkce.

1. Argument funkce n. nezávisle proměnná, se značí x nebo t a pod. (dvě zpravidla x, y);

2. funkce (závisle proměnná, ne odvisle proměnná) ● f. spojitá ● f. nespojitá (n. přetržitá) ● f. periodická ● f. klesající ● f. stoupající ● f. algebraická: racionální celistvá, na př. lineární, kvadratická a j., racionální lomená, iracionální ● f. transcendentní: na př. goniometrická, cyklometrická, exponenciální, logaritmická ● f. explicitní ● f. implicitní ● f. inverzní ● Označení pro funkce obecně se tisknou kursivou: na př. $f(x), \varphi(x), F(x), \Phi(t), f(x, y)$ a pod., pro funkce zvláštní antikvou: na př. $\log x, \sin 2x, \dots$, také $\frac{dy}{dx}$ ● v případě součtu argumentů píšeme vždy závorky: na př. $\log(x + y), \operatorname{tg}(x - y)$ atd.;

3. konstanta n. stálá;

4. úměrnost přímá (t. j. závislost vyjádřená rovnicí $y = kx$) ● ú. nepřímá (t. j. závislost vyjádřená rovnicí $y = \frac{k}{x}$).

Řady.

1. Členy řady označujeme: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, \dots, a_{n-1}, a_n$ ● sousední členy řady: a_k, a_{k+1} ;

2. difference n. rozdíl řady aritmetické 1. stupně: $a_k - a_{k-1} = d$;

3. interpolace (prokládání) řady;

4. kritérium n. znak konvergence (divergence) řady;

5. kvocient n. podíl řady geometrické: $\frac{a_k}{a_{k-1}} = q$;

6. řada: konečná ● sestupná ● vzestupná ● nekonečná ● divergentní ● konvergentní ● ř. absolutně konvergentní ● ř. relativně konvergentní ● ř. se střídavými znaménky ● ř. aritmetická n -tého stupně ● ř. geometrická;

7. součet řady ● součet n prvních členů označujeme s_n ● symbol pro součet n členů: $a_1 + a_2 + \dots + a_k + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ● součet nekonečného počtu členů: $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = s$ ● symbol pro součet nekonečného

počtu členů: $a_1 + a_2 + \dots + a_k + \dots$ in inf. $= \sum_{k=1}^{\infty} a_k$;

8. součin čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$ se značí symbolem:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k \cdot \dots \cdot a_n = \prod_{k=1}^n a_k.$$

Kombinatorika.

1. Binomická věta n. poučka;

2. faktoriál čísla n : $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n = n!$;

3. kombinační číslo n. binomický součinitel: $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$, čte se n nad k (ne n nad k -tou);

4. kombinace k -té třídy z n prvků: s opakováním, bez opakování ● zvláště kombinace druhé třídy n. amba, třetí třídy n. terna a j.;

5. permutace: základní ● cyklická ● permutovati n. přestavovati prvky;

6. variace k -té třídy z n prvků: s opakováním, bez opakování.

Počet pravděpodobnosti.

1. Naděje matematická (při hře);
2. počet případů příznivých určitému zjevu se označuje zpravidla a ● počet případů možných, při nichž zjev nastává, se označuje zpravidla m ;
3. pravděpodobnost matematická (jednoduchá) se značí p ● opačná (t. j. $1 - p = p'$) ● úhrnná ($p_1 + p_2 = p$) ● složená ($p_1 \cdot p_2$) ● m. p. deduktivní (a priori) ● induktivní (a posteriori);
4. zákon velkých čísel.

Praktická aritmetika.

- 1.*) Aritmetika pojišťovací ● počet x -letých l_x ● diskontovaný počet x -letých se značí $l_x \cdot v^x = D_x$ ● Další symboly: $D_x + D_{x+1} + \dots + D_\omega = N_x$ ● konečné stáří: ω (v tabulkách $\omega = 102$) ● $\frac{N_{x+1}}{D_x} = a_x$;
2. číslo nepojmenované (ne bezejmenné) ● pojmenované ● čísla mnohojmenná ● č. úplné n. přesné ● neúplné ● přibližná (aproximativní) hodnota čísla ● č. s určitou přesností (aproximací) ● přibližné počítání: přibližné sčítání, odčítání, a j. (ne zkrácené počítání) ● č. zaokrouhlené; zkrátiti č. na jednotky určitého řádu n. zaokrouhliti č. na jednotky určitého řádu ● Pravidla o zkracování:
 - a) Zaokrouhlujeme-li číslo číslicí, za kterou stojí číslice menší než 5, zůstane číslice beze změny: na př. $2,374 \doteq 2,37$;
 - b) zaokrouhlujeme-li číslo číslicí, za kterou stojí číslice větší než 5, nebo 5 s následujícími číslicemi různými od nuly, zvyšuje se číslice o jednu: na př. $4,276 \doteq 4,28$; $1,3756 \doteq 1,38$;
 - c) zaokrouhlujeme-li číslo číslicí, za kterou stojí číslice 5 s následujícími nulami, zvýší se ona číslice v číslici bezprostředně vyšší, je-li lichá; zůstane však nezměněna, je-li sudá (takže na posledním místě vzniká vždy sudá číslice): $1,27500 \doteq 1,28$; $1,28500 \doteq 1,28$;
3. nomogram: průsečíkový ● spojnicový;
4. počet procentový ● procento se značí $\%$ ● promille se značí ‰ ● počet procent se značí p ● základ z ● část $\check{c}$;
- 5.*) počet úrokový jednoduchý ● procento úrokovací n. úroková míra se značí p (počet procent) ● jistina (kapitál) K ● úrok se značí $ú$ ● doba se značí t ● počet úrokový složený (ne složitý) ● úroková míra n. procento úrokovací se značí p ● počet období n ●

*) Symbolů zde uvedených se užívá mezinárodně v pojišťovací matematice.

úročitel $1 + \frac{p}{100} = 1 + i = r$ (ne q) ● odúročitel: $\frac{1}{r} = v$ ● počáteční kapitál (jistina) se značí K , konečný K_n ● diskontovaná jistina ● diskonto ● Další symboly: $\frac{p}{100} = i$; $Kr^n = K_n$; $r \frac{r^n - 1}{i} = S_{n|}$ (ne střadatel Q_n); $\frac{1 - v^n}{i} = Q_{n|}$ (ne zásobitel R_n); $\frac{1}{Q_{n|}}$ ● umořovací částka (amortizační kvota) ● anuita (roční splátka) ● umořovací plán ● umořovací procento se značí u (počet procent);

6. stupnice funkční ● logaritmická stupnice;

7. trojčlenka n. počet trojčlenný ● t. jednoduchá ● t. složená ● vlašská praktika pro řešení trojčlenky.

Základy počtu infinitesimálního.

1. Číslo Eulerovo $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2,71828 \dots$;

2. derivace funkce explicitní $y = f(x)$ podle proměnné x ● první derivace n. první diferenciální poměr, značí se $y' = \frac{dy}{dx}$ n. $f'(x)$ ● druhá derivace značí se $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ n. $f''(x)$ ● r -tá derivace se značí $y^{(r)} = \frac{d^r y}{dx^r}$ n. $f^{(r)}(x)$;

3. extrémní hodnota funkce, t. j. maximum nebo minimum funkce;

4. integrál neurčitý n. neomezený, také původní n. primitivní funkce k dané derivaci $\int f(x) dx = F(x) + c$ ● i. určitý n. omezený $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$;

5. limita n. mezní hodnota řady, funkce a j., se značí $\lim$ ● veličina se bez omezení blíží určité hodnotě: $\rightarrow$ na př. $x \rightarrow a$; limita funkce $\frac{\sin x}{x}$ pro $x \rightarrow 0$ se značí $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$;

6. komplanace (t. j. stanovení povrchu tělesa nebo obsahu části křivé plochy);

7. křivka klesající ● stoupající v bodě ● inflexní bod (bod obratu) křivky ● k. vydutá (konkávní) ● vypuklá (konvexní) v bodě v určitém směru ● horní, dolní vrchol křivky vzhledem k určité přímce;

8. kubatura (t. j. stanovení objemu tělesa);

9. kvadratura (t. j. stanovení obsahu rovinné plochy, také vyčíslení integrálu);

10. rektifikace křivky (t. j. stanovení délky oblouku křivky).

Planimetrie.

1. Bod se značí velkým latinským písmenem $A, B, \dots, P$ ● body krajní (b. počáteční, koncový) u úsečky a oblouku ● b. dotykový (b. dotyku) dvou čar (raději než b. dotyčný);

2. čára obecně: č. křivá nebo křivka ● č. přímá n. přímka ● č. lomená (t. j. složená z úseček neb i oblouků) ● č. i její část se značí malým latinským písmenem $a, b, \dots, k$;

3. čtvrtá (geometrická) úměrná x ke třem úsečkám a, b, c vyhovuje úměře $a : b = c : x$;

4. čtyřstran (úplný) (t. j. čtyři přímky a šest jejich průsečíků, vrcholů), jeho tři úhlopříčky ● čtyřroh (úplný) (t. j. čtyři body a šest jejich spojníc, stran); jeho tři úhlopříčné vrcholy ● úhlopříčný (diagonální) trojúhelník (trojroh, trojstran);

5. čtyřúhelník: obecný, různoběžník (t. j. vylučují-li se případy zvláštní) ● lichoběžník ● rovnoběžník ● deltoid (t. j. souměrný jen podle jedné úhlopříčky) ● tečnový (t. j. opsaný kružnici) ● tětiový (t. j. vepsaný kružnici) ● dvojstředový (t. j. zároveň tečnový a tětiový) ● čtyřúhelník se značí svými vrcholy A, B, C, D obvykle v kladném smyslu ● strany $a = AB, b = BC, c = CD, d = DA$ ● (vnitřní) úhly α při A atd. ● vnější úhly α' při A atd. ● úhlopříčky $e = AC, f = BD$ ● jejich úhel ω (v němž a);

6. dělicí poměr (ne dělicí poměr) bodu X na přímce vzhledem ke dvěma základním bodům A a B je $\frac{AX}{BX}$; značí se λ ; obdobně u přímky ve svazku;

7. dvojpoměr čtyř bodů A, B, C, D na přímce je $\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$; značí se $(ABCD)$, δ ; obdobně pro přímky ve svazku;

8. ekvivalentní útvary (t. j. útvary obsahem sobě rovné, téhož obsahu);

9. geometrické místo bodů, také jiných prvků;

10. harmonická čtveřina (bodů na přímce, přímek ve svazku) ● body C a D jsou (spolu) harmonicky sdruženy vzhledem k bodům A a B , C a D harmonicky oddělují A a B ;

11. chordála dvou kružnic ● průsečík chordál tří kružnic;

12. inverse ● střed i . ● poloměr i . ● základní kružnice i ;

13. kolmost dvou přímek (směrů) ● dvě přímky k sobě (navzájem) kolmé ● přímka kolmá (normální) k přímce ● kolmice (t. j. kolmá přímka, normála) ● kolmá úsečka ● pata kolmice ● kolmice se spouští s bodu, vztyčuje se v bodě ● znak kolmosti $\perp$ ● přímka kosá (t. j. ne kolmá) k přímce (raději než šikmá);

14. korespondence (příbuznost) ● dva útvary sobě odpovídají, korespondují, jsou sdruženy (ne stejnohlé) ● dvojice sdružených bodů, přímek, ... se značí $P, P'; p, p', \dots; A_1, A_2; \dots$;

15. kružnice ● kruh (t. j. část roviny ohraničená kružnicí) ● střed k. (obyč. S) ● poloměr k. (obyč. r) ● průměr k. (obyč. d) ● číslo Ludolfovo se značí $\pi = 3,14159\dots$ ● kružítka (ne kružidla) ● k. opsaná, vepsaná mnohoúhelníku ● k. Apolloniova ● kruhová úseč (segment k.) a výseč (sektor k.) ● dvě k. soustředné (koncentrické) ● mezikruží, šířka mezikruží, výseč mezikruží ● dvě k. výstředné (excentrické) ● středná (t. j. spojnice středů, centrála), délka středné (obyč. c) ● svazek kružnic;

16. lichoběžník: obecný ● rovnoramenný ● označení jako u obecného čtyřúhelníka (tedy na př. $a \parallel c$) ● základna ● výška ● střední příčka lichoběžníka;

17. mocnost bodu ke kružnici;

18. mnohoúhelník (polygon), n -úhelník (má-li n vrcholů, ne rohů, n stran, ne hran): obecný ● vypuklý (konvexní, t. j. s úhly dutými) ● vydutý (konkávní, t. j. s úhlem vypuklým) ● pravidelný (jeho strana a_n , poloměr kružnice opsané r_n , vepsané ρ_n) ● pravidelný hvězdovitý;

19. oblouk (t. j. část křivky dvěma body ohraničená) ● o. s krajními body A, B se značí $\widehat{AB}$ ● délka oblouku obyč. s ● délka oblouku kružnice k středovému úhlu α příslušná a ;

20. obsah části plochy, o. mnohoúhelníka, kruhu, plochy (uzavřenou) čarou ohraničené ● značí se P (počátečním písmenem jména plochy);

21. obvod části plochy, o. mnohoúhelníka, o. kruhu (délka kružnice) ● značí se o ● obvod trojúhelníka se značí někdy $2s$;

22. otáčení, otočení (rotace) ● střed o. ● úhel o. ● smysl o. (+ proti smyslu o. u hodin);

23. perspektivnost (homologie, středová kolineace) ● střed p. ● osa p.;

24. podobnost, přímá a obrácená ● dva útvary sobě (navzájem) podobné ● znak podobnosti $\sim$ ● poměr p.;

25. polárnost ● pól přímky a polára bodu (sdružené) vzhledem ke kružnici ● polární útvary;

26. posouvání, posunutí (translace) ● směr p. ● velikost p. ● smysl p.;

27. projektivnost: kolineace n. homografie ● korelace n. reci-procita;

28. proměňování útvaru v ekvivalentní útvar (ne přeměňování);

29. průsečík (průsečný bod) dvou čar n. bod dvěma čarám společný ● p. čar a, b se značí ab ;

30. překlopení kolem osy;

31. příčka (transversála) dvou přímek ● p. trojúhelníka (t. j. přímka trojúhelník protínající n. úsečka spojující body jeho obvodu) ● p. svazku přímek;

32. přímka (n. paprsek, zejména ve svazku) ● p. i její část se značí $a, b, \dots, p$ ● incidence přímky a bodu se vyznačuje indexem: na př. a_A jest přímka a jdoucí bopem A ; podobně A_a znamená bod A na přímce a ● pravítka ● dva smysly přímky (navzájem opačné) ● p. orientovaná (t. j. se smyslem) ● polopřímka (n. polopaprsek), její smysl ● dvě přímky různoběžné n. různoběžky ● svazek přímek (paprsků n. paprskový), jeho střed;

33. rovnoběžnost dvou přímek ● dvě přímky k sobě (navzájem) rovnoběžné (paralelní) n. rovnoběžky ● přímka se vede rovnoběžně k přímce n. s přímkou ● znaménko rovnoběžnosti $\parallel$; jde-li též o smysl, užívá se znaménka $\uparrow\uparrow$ nebo $\uparrow\downarrow$ ● přímý pás (t. j. část roviny ohraničená dvěma rovnoběžkami);

34. rovnoběžník: obecný ● kosoúhlý (n. kosoúhelník) ● pravoúhlý (n. pravoúhelník) ● kosoúhelník nerovnostranný n. kosodélník ● kosoúhelník rovnostranný n. kosočtverec ● pravoúhelník nerovnostranný n. obdélník ● pravoúhelník rovnostranný n. čtverec ● základna ● výška;

35. rovnost je vztah, vyjadřující stejnou velikost dvou útvarů;

36. sečna (t. j. přímka křivku protínající);

37. shodnost (kongruence), přímá a obrácená ● znaménko shodnosti $\cong$;

38. souměrnost: osová ● osa souměrnosti ● dva útvary souměrně sdružené podle osy ● útvar podle osy (přímky) souměrný ● středová ● střed souměrnosti ● dva útvary souměrně sdružené podle středu ● útvar podle středu (bodu) souměrný;

39. stejnolehlost n. homothetie n. středová (perspektivní) podobnost ● dva útvary stejnolehlé n. homothetické ● střed s. ● poměr s.;

40. spojnice dvou bodů (t. j. přímka jdoucí dvěma body n. úsečka jimi ohraničená) ● s. bodů A, B se značí AB resp. $\overline{AB}$;

41. střední příčka trojúhelníka (t. j. úsečka spojující středy

dvou jeho stran) ● s. p. lichoběžníka (t. j. úsečka spojující středy jeho nerovnoběžných stran);

42. střední (geometrická) úměrná dvou úseček a, b vyhovuje úměře $a : x = x : b$; x je geometrický průměr úseček a, b ;

43. tečna (ne tečná) křivky ● společná (vnější, vnitřní) tečna dvou kružnic;

44. tětiva křivky (t. j. úsečka spojující dva její body);

45. transformace (proměna) ● grupa transformací;

46. trojúhelník s vrcholy A, B, C (obyč. v kladném smyslu) se značí $\triangle ABC$ ● jeho strany $AB = c, BC = a, CA = b$ ● (vnitřní) úhly α při A atd. ● vnější úhly α' při A atd. ● jeho výšky v_a, v_b, v_c ● průsečík výšek (orthocentrum) V ● jeho těžnice t_a, t_b, t_c ● průsečík těžnic (těžiště) T ● délky os jeho vnitřních úhlů (t. j. úsečky os souměrnosti vnitřních úhlů ohraničené vrcholem a protější stranou) u_a, u_b, u_c ● středy a poloměry kružnice jemu opsané O, r , vepsané S, ρ , vně vepsaných S_a, ρ_a atd. ● t. obecný, kosoúhlý (vylučuje-li se pravoúhlý; je-li potřeba, liší se ostroúhlý, tupoúhlý) ● různostranný ● rovnoramenný (základna c , vrchol v užším smyslu C , ramena $a = b$) ● rovnostranný n. pravidelný ● pravoúhlý (vrchol pravého úhlu C , přepona n. hypotenusa c , ne podpona, odvěsny n. kathety a, b , výška v , průměty odvěsen a, b na přeponě c_1, c_2);

47. úhel se značí malým řeckým písmenem $\alpha, \beta, \dots, \varphi$ ● ú. s vrcholem C a rameny CA n. a, CB n. b , se značí $\angle ACB$ n. $\angle ab$; znaménko úhlu $\sphericalangle$ se klade před jméno n. $\wedge$ nad jméno úhlu (jen tehdy, vzniklo-li by bez něho nedorozumění) ● ú. α v míře obloukové n. arkus α se značí $\text{arc } \alpha$, jednotka sluje radián ● ú. pravý ($R = 90^\circ = \frac{1}{2}\pi$) ● přímý ($2R = \pi$) ● plný ($4R = 2\pi$) ● ú. α ostrý (t. j. $\alpha < R$) ● tupý (t. j. $R < \alpha < 2R$) ● kosý (t. j. $\alpha < 2R, \alpha \neq R$) ● dutý (t. j. $\alpha < 2R$) ● vypuklý (t. j. $2R < \alpha < 4R$) ● ú. orientovaný (t. j. ú. se smyslem) ● ú. vnitřní a vnější mnohoúhelníka ● ú. středový a obvodový v kružnici ● dva úhly α, β doplňkové (t. j. $\alpha + \beta = R$), jeden je doplněk druhého ● výplňkové (t. j. $\alpha + \beta = 2R$), jeden je výplněk druhého ● dva úhly vrcholové ● styčné ● vedlejší ● ú. dvou přímek ● dva úhly souhlasné ● střídavé ● přilehlé;

48. úhlopříčka (diagonála);

49. úsečka (t. j. část přímky dvěma body ohraničená), krátce také její délka; značí se malým latinským písmenem n. při krajních bodech A, B se značí $\overline{AB}$, také AB ● ú. orientovaná (t. j. ú. se smyslem);

50. útvar rovinný;

51. věta Brianchonova o šestiúhelníku kružnici opsaném;

52. věta Ceva o spojnicích bodu s vrcholy trojúhelníka;

53. věty Eukleidovy o odvěsně a výšce pravoúhlého trojúhelníka;

54. věta Menelaova o průsečících přímky se stranami trojúhelníka;

55. věta Pascalova o šestiúhelníku kružnici vepsaném;

56. věta Ptolemaiova o úhlopříčkách čtyřúhelníka;

57. věta Pythagorova o stranách pravoúhlého trojúhelníka;

58. vzdálenost (ne odlehlost) bodu od bodu $\bullet$ v. bodu od přímky, od kružnice (t. j. minimální délka spojnice bodů);

59. základna trojúhelníka, rovnoběžníka (raději než podstava, ne půdice);

60. zlatý řez (t. j. řez, dělicí úsečku ve dvě části, z nichž větší je střední geom. úměrnou celé úsečky a části menší).

61. znaménko totožnosti $\equiv$.

Stereometrie.

1. Čtyrstěn (tetraedr): obecný $\bullet$ č. pravidelný;

2. ekvivalentní útvary (t. j. útvary objemem sobě rovné, téhož objemu);

3. hranol $\bullet$ jeho vrcholy (ne rohy) $\bullet$ podstava (raději než základna); její obsah P $\bullet$ stěny pobočné $\bullet$ plášť (značí se P') $\bullet$ hrany podstavné a pobočné $\bullet$ výška se značí v $\bullet$ h. n -boký $\bullet$ kosý (raději než šikmý) $\bullet$ kolmý (t. j. s pobočnými hranami kolmými k podstavě, ne přímý) $\bullet$ pravidelný (t. j. s pravidelným mnohoúhelníkem jako podstavou a kolmý, hrana podstavná se značí a , pobočná b) $\bullet$ rovnoběžnostěn;

4. jehlan $\bullet$ stěny, hrany a vrcholy jako u hranolu $\bullet$ j. n -boký, kolmý (t. j. aspoň s dvěma rovinami souměrnosti) $\bullet$ pravidelný (t. j. s pravidelnou podstavou a kolmý) $\bullet$ komolý;

5. klín $\bullet$ stěna klínu $\bullet$ hrana klínu $\bullet$ úhel klínu $\bullet$ dva klíny vedlejší $\bullet$ klíny vrcholové;

6. kolmost dvou přímek, dvou rovin $\bullet$ přímky a roviny k sobě kolmé atd. obdobně jako v planimetrii;

7. koule $\bullet$ kulová plocha $\bullet$ její střed (obyč. S) $\bullet$ poloměr (obyč. r) $\bullet$ průměr (obyč. d) $\bullet$ hlavní kružnice na kulové ploše $\bullet$ poloměr menších kružnic ρ $\bullet$ póly kružnice na kulové ploše (t. j. krajní body průměru kolmého k rovině kružnice) $\bullet$ sférický poloměr kružnice na kulové ploše $\bullet$ koule pravidelnému mnohostěnu opsaná, vepsaná, dotýkající se jeho hran $\bullet$ části koule: kulová úseč (ne skrojek), vrstva, výseč, kulový klín, prsten $\bullet$ části kulové plochy: kulový pás, vrchlík, sférický dvojúhelník, trojúhelník, mnohoúhelník;

8. krychle (ne kostka);

9. kužel ● podstava (raději než základna) ● plášť P' ● strana se značí s ● výška se značí v ● vrchol ● k. obecný ● kolmý ● k. druhého stupně n. kvadratický ● k. kruhový kosý (t. j. s kruhovou podstavou, pata výšky leží mimo střed podstavy, raději než šikmý) ● k. rotační (raději než kruhový kolmý) ● k. komolý ● kuželová plocha (ne oblina);

10. mnohohran, n -hran ● vrchol ● hrany ● stěny ● úhly (t. j. úhly sousedních stěn) ● strany (t. j. úhly sousedních hran) ● vypuklý ● pravidelný ● dva mnohohrany (navzájem) výplňkové ● polární;

11. mnohostěn (polyedr) (ne hranaté těleso): jeho vrcholy ● hrany ● stěny ● vypuklý ● pravidelný čtyřstěn ● šestistěn ● osmistěn ● dvanáctistěn ● dvacetistěn ● polopravidelný ● pravidelný hvězdovitý ● dva pravidelné mnohostěny (navzájem) polární;

12. otáčení (rotace) kolem přímky ● osa o. ● úhel o. ● smysl o. ● u bodu: rovina o., kružnice o., střed o., poloměr o.;

13. plocha křivá a rovinná; značí se malým řeckým písmenem $\alpha, \beta, \dots, \pi, \kappa, \rho$;

14. posouvání (translace) ● směr p. ● velikost p. ● smysl p.;

15. průsečná čára dvou ploch ● průsečnice dvou rovin; symbol $(\rho, \sigma) \equiv m$ čteme: roviny ρ a σ se protínají v průsečnici m ;

16. přímka dotyková plochy kuželové, válcové a tečné roviny ● přímky mimoběžné n. mimoběžky;

17. rotační těleso ● rotační plocha ● její poledník (meridián, t. j. čára v rovině jdoucí osou rotace, jež plochu vytvoří otočením o plný úhel) ● osový řez (t. j. oba poledníky v téže rovině) ● rovnoběžky (t. j. kružnice v rovinách kolmých k ose);

18. rovina se značí malým písmenem řeckým $\alpha, \beta, \dots, \rho$ n. písmeny svých ji určujících prvků (bodů, přímek) na př. $\rho \equiv (A, B, C)$ t. j. rovina ρ určená body A, B, C . Symbol $(A, a) \equiv \sigma$ čteme: bodem A a přímkou a jest určena rovina σ ● polorovina ● svazek rovin, jeho osa;

19. rovnoběžnost dvou přímek, dvou rovin; přímky a roviny obdobně jako v planimetrii ● dvě přímky k sobě rovnoběžné n. téhož směru ● dvě roviny k sobě rovnoběžné n. téže polohy ● rovinná vrstva (t. j. část prostoru ohraničená dvěma rovnoběžnými rovinami);

20. rovnoběžnostěn: obecný ● kvádr (raději než pravoúhlý r.);

21. řez (n. rovinný průsek) tělesa, plochy ● ř. kolmý (normální) u hranolu, válce (t. j. kolmý k pobočným hranám resp. ke straně);

22. souměrnost: podle bodu (středu) n. středová ● s. podle přímky (osy) n. osová ● s. podle roviny (ne rovinná) ● střed, osa, ro-

vina souměrnosti ● dva útvary souměrně sdružené podle středu, osy, roviny ● útvar souměrný podle středu, osy, roviny ● s. osová vyššího řádu (než druhého) ● osa souměrnosti n -tého řádu;

23. tečná rovina křivé plochy;

24. těleso ● jeho síť ● jeho povrch (t. j. soubor ploch těleso ohraničujících, také součet jejich obsahů) značí se S (lat. superficies) ● objem (ne krychlový obsah) se značí V (lat. volumen);

25. trojhran jako u mnohohranu;

26. úhlopříčka tělesa (tělesná, t. j. spojnice vrcholů, jež není hranou ani úhlopříčkou stěny);

27. útvar prostorový ● útvar sférický (t. j. na kulové ploše);

28. válec ● podstava ● plášť P' ● strana s ● výška v ● v. obecný ● v. druhého stupně n. kvadratický ● v. kosý (raději než šikmý) ● v. kolmý (t. j. se stranou kolmou k podstavě, ne přímý) ● v. kruhový (t. j. s kruhovou podstavou) ● v. rotační (raději než kruhový kolmý) ● válcová plocha (ne oblina);

29. věta Eulerova o mnohostěnech ● mnohostěny Eulerovy;

30. vzdálenost dvou bodů ● v. bodu od přímky, od roviny, od kulové plochy; označuje se na př. $d = A - | m$ (t. j. vzdálenost bodu A od přímky m) ● v. dvou rovnoběžek ● v. dvou mimoběžek ● v. dvou rovnoběžných rovin ● v. sférická dvou bodů ● v. bodu od kružnice na kulové ploše.

Trigonometrie.

1. Funkce goniometrické (úhloměrné, f. úhlu) ● sinus, značí se $\sin$ ● kosinus, značí se $\cos$ ● tangens, značí se tg ● kotangens, značí se cotg ● sekans, značí se $\sec$ ● kosekans, značí se cosec ● ko-funkce, značí se cof ● goniometrická čísla (t. j. hodnoty goniometrických funkcí) ● funkce cyklometrické (t. j. inverzní ke goniometrickým): arkussinus, značí se arcsin , atd.;

2. nadbytek (exces) sférického trojúhelníka, značí se ε ;

3. pravidlo Neperovo pro pravoúhlý trojúhelník sférický;

4. rovnice Cagnoliový;

5. rovnice Neperovy;

6. trojúhelník sférický: obecný ● pravoúhlý ● pravostranný ● rovnoramenný ● rovnostranný (pravidelný) ● mnohoúhelník sférický: obecný ● pravidelný;

7. věta kosinová (ne Carnotova) pro rovinný trojúhelník, pro stranu a pro úhel sférického trojúhelníka;

8. věta sinová pro rovinný trojúhelník, pro sférický trojúhelník;

9. věta tangentová;

10. věty součtové o goniometrických funkcích součtu úhlů.

Praktická geometrie.

1. Body trigonometrické (triangulační) různých řádů;
2. bubínek úhloměrný;
3. čas hvězdný, značí se ϑ ;
4. den a jeho části podle vzoru: $4^d 12^h 35^m 24^s = 4$ dny 12 hodin 35 minut 24 sekundy;
5. inversor;
6. katastr;
7. krokvice;
8. měřítko k měření délek ● měřická lať ● měřické pásmo ● m. příčné;
9. nivelace ● nivelační přístroj;
10. olovnice;
11. pantograf;
12. protínání vpřed ● protínání zpětné n. Snellova (ne Pothe-netova) úloha;
13. sextant;
14. souřadnice nebeské: obzorníkové: azimut a , výška v ● rovníkové: rektascenze α , deklinace δ ● ekliptikální: astronomická délka λ , astronomická šířka β ● zenit (nadhlavník) a nadir N, N' ● severní a jižní pól P, P' ● póly ekliptiky P_e, P'_e ● trojúhelník nautický (charakteristický);
15. souřadnice zemské: délka λ , šířka φ ● póly zemské severní P , jižní P' ● sever S , jih J , východ V , západ Z (také mezinárodní označení N, S, E, W);
16. theodolit;
17. triangulace;
18. úhel a jeho části podle vzorů: $23^\circ 26' 59'' = 23$ stupně 26 minut 59 sekund (vteřin) při dělení šedesátinném ● $26^\circ 75' 52'' = 26$ centigradů 75 setinných minut 52 setinné sekundy při dělení setinném ● ú. výškový (elevační) ● ú. hloubkový (depresní) ● ú. hodinový, značí se t ● ú. zorný;
19. úhloměr;
20. vodováha (libela);
21. výtyčka (trasírka);
22. zeměměřičství (geodesie).

Analytická geometrie a grafické znázornění.

1. Asymptota hyperboly ● asymptotický směr přímky;
2. cykloida: obyčejná ● c. prodloužená ● c. zkrácená;
3. čára (křivka) algebraická n -tého stupně ● č. transcendentní ● č. empirická ● č. spojitá ● č. nespojitá (přetržitá);
4. křivka exponenciální ● k. logaritmická ● křivky Cassiniovy;
5. kuželosečka (čára druhého stupně, čára kvadratická) ● k. pravá (jednoduchá) středová: kružnice, elipsa, hyperbola, nestředová: parabola ● k. zvrhlá (složená): dvojice přímek různoběžných, rovnoběžných, splývajících ● kuželosečky souosé, konfokální;
6. lemniskata Bernoulliho;
7. normála křivky;
8. ohnisko (fokus) kuželosečky, značí se F ;
9. osa číselná ● obraz čísla;
10. osa (souměrnosti) kuželosečky ● délka hlavní osy $2a$ ● délka vedlejší osy $2b$ u elipsy a hyperboly;
11. osy souřadnic: osa x (osa úseček), osa y (osa pořadnic);
12. otočení (rotace) soustavy souřadnic;
13. parametr bodu na čáře, značí se obvykle t ● parametrické rovnice čáry;
14. parametr kuželosečky, zejména paraboly $2p$ (t. j. délka tětiny, jdoucí ohniskem kolmo k ose);
15. počátek souřadnic;
16. pól přímky ● polára bodu vzhledem ke kuželosečce;
17. posunutí (translace) soustavy souřadnic;
18. průměr kuželosečky sdružený ke směru ● dva sdružené průměry;
19. průvodič bodu na kuželosečce ohniskový ● p. středový ● p. vrcholový;
20. rovnice čáry;
21. rovnice přímky: normální $x \cos \alpha + y \sin \alpha - d = 0$ ● obecná $Ax + By + C = 0$ ● směrnice $y = kx + q$ ● úseková $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$;
22. rovnice kružnice: normální $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$ ● obecná $x^2 + y^2 + Mx + Ny + L = 0$ ● středová $x^2 + y^2 = r^2$;
23. rovnice elipsy a hyperboly osová $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ ● rov.

nice kuželosečky vrcholová $y^2 = 2px + qx^2$ ● středová $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + F = 0$ ● obecná $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$;

24. rovnice svazku přímek ● r. svazku kružnic podle způsobu Laméova;

25. rovnoosá (ne rovnostranná) hyperbola;

26. řídicí přímka kuželosečky, značí se f ;

27. sinusoida (t. j. graf funkce $y = \sin x$) n. křivka sinová;

28. směrnice přímky, značí se $k = \operatorname{tg} \varphi$;

29. smysl přímky ● smysl rovinného útvaru (kladný, záporný);

30. souřadnice (koordináta) bodu na přímce $x_1, x_2, \dots$ ● s. pravouhlé bodu v rovině: úsečka (abscissa) x , pořadnice (ordináta) y ● bod $P_1(x_1; y_1), P_2(x_2; y_2), \dots$; obecný $P(x; y), Q(\xi; \eta)$; mimo čáru $P_0(x_0; y_0)$ ● s. polární bodu v rovině: odchylka (amplituda) φ , průvodič (radius) r nebo ρ ;

31. soustava souřadnic (ne souřadná) rovnoběžková (ne rovnoběžná) obecná, kosoúhlá, pravouhlá ● polární soustava souřadnic;

32. subtangenta ● subnormála ● délka tečny ● délka normály u křivky v pravouhlých souřadnicích ● značí se s_t, s_n, t, n ;

33. tangentoida (t. j. graf funkce $y = \operatorname{tg} x$) n. křivka tangentová;

34. tečna křivky s rovnicí $y = f(x)$ v bodě $P(x; y)$ má rovnici $\eta - y = f'(x)(\xi - x)$;

35. transformace (proměna) soustavy souřadnic;

36. úseč paraboly, elipsy;

37. větve hyperboly;

38. vrchol křivky vzhledem k základní přímce (hlavně k vodorovné ose x) ● vrcholy kuželosečky;

39. výstřednost u elipsy a hyperboly: délková e , číselná ε .

Deskriptivní geometrie a průmětnictví.

1. Afinita osová v rovině n. rovinná, v prostoru n. prostorová ● afinita kosoúhlá, pravouhlá ● dvojice odpovídajících si n. sdružených bodů (přímek) v afinitě ● osa afinity ● samodružné body v afinitě ● směr afinity;

2. anaglyf;

3. anuloid n. kruhový prstenec (torus) ● trochylos (t. j. vnitřní část anuloidu);

4. bod se značí velkým písmenem: na př. A ● dvojný bod křivky: bod uzlový, bod vratu, izolovaný dvojný bod ● bod úběžný na přímce,

jeho středový průmět a obraz se jmenuje úběžník ● krycí bod k danému bodu;

5. hrana římsová (okapová);

6. hřeben střešní;

7. kolineace středová (homologie) v rovině n. rovinná, v prostoru n. prostorová ● dvojice odpovídajících si n. sdružených bodů v kolineaci ● osa kolineace ● samodružné body v kolineaci ● střed kolineace;

8. křivka řídící na př. plochy válcové, kuželové, rotační a jiné;

9. kota;

10. nároží střechy;

11. normála plochy ● normální rovina;

12. nositelka bodu;

13. obrys skutečný prostorového útvaru, plochy a j. ● obrys zdánlivý n. obrys obrazu (t. j. půdorysu, nárysu, stranorysu);

14. ordinála;

15. osa souměrnosti ● osy mimoběžek, t. j. přímky, podle nichž dvojice mimoběžných přímek je souměrná ● osy souřadnic ne (souřadné);

16. osvětlení geometrálné: a) středové, b) rovnoběžné ● osvětlení technické ● světelný paprsek ● světelná rovina ● světelná plocha hranolová, jehlanová ● světelný poledník ● stín vlastní ● stín vržený na rovinu, na těleso ● mez vlastního a vrženého stínu ● zpětný paprsek světelný ● vržené stíny na tutéž plochu se kryjí ● krytí vržených stínů;

17. otáčení ● osa otáčení ● rovina otáčení ● poloměr otáčení ● úhel otáčení;

18. perspektiva (zvláštní případ promítání středového) ● distance ● distanční kružnice ● distančník pravý, levý, horní, dolní ● redukční distančník ● hlavní bod průmětny ● hlavní paprsek ● horizont ● rovina základní ● osa základní (n. základnice) ● perspektiva vojenská (zvláštní případ promítání kosoúhlého);

19. plocha rotační ● křivka tvořící ● hrdlo ● osa ● poledník n. meridián ● hlavní poledník ● rovník ● rovnoběžky rotační plochy ● zvláštní případy rotačních ploch: a) plocha kulová; hlavní kružnice plochy kulové; b) rotační elipsoid protáhlý, zploštělý; c) rotační hyperboloid dvojdílný (ne dvojplochy), jednodílný (ne jedno plochy); asymptotická plocha kuželová hyperboloidu; d) rotační plocha kuželová; e) rotační paraboloid; f) rotační plocha válcová;

20. promítání (projekce) středové n. centrální ● střed promítání ● středová rovina ● promítání rovnoběžné (paralelní) ● směr promítání ● promítání kosoúhlé (ne šikmé) n. klinogonální ● promítání pravo-

úhlé (orthogonální) ● promítání kotované ● projekce gnomonická ● projekce rovinná kartografická ● kartografická projekce kuželová, válcová ● kartografická síť ● promítání orthografické, rovníkové, polární, horizontální ● projekce stereografická ● promítací paprsek, rovina, lichoběžník, první a druhý trojúhelník ● průmět první, druhý, třetí ● průmět kosoúhlý (ne šikmý) n. klinogonální ● průmět pravoúhlý n. orthogonální (ne kolmý) ● obraz průmětu prvního nebo půdorys, druhého průmětu nebo nárys, třetího průmětu nebo stranorys (bokorys); značí se pro bod A : A_1 , resp. A_2, A_3 ● obraz kosoúhlého průmětu bodu A se značí A^k , obraz středového průmětu bodu A se značí A^s ● průměty sdružené, obrazy sdružené ● průmětna ● hlavní průmětny: první, značí se π , druhá, značí se ν , třetí, značí se σ ● průmětny sdružené ● průmětnictví ● podhled a nadhled zprava, zleva ● bokorys zprava, zleva; nárys zepředu, zezadu; půdorys, shora, zdola;

21. pronik dvou těles ● proniková křivka, čára dvou ploch ● pronikový mnohoúhelník ● pronik částečný, úplný ● lichá část při proniku ● styčná plocha, rovina ● styčná vrcholová rovina ● styčné paprsky ● stykové hrany ● stykový mnohoúhelník;

22. průsečík přímky s rovinou, s plochou ● průsečnice dvou rovin;

23. příčka (transversála) mimoběžek ● nejkratší příčka dvou mimoběžek;

24. přímka se značí malým písmenem: na př. a ● přímka úběžná v rovině, její obraz: úběžnice roviny ● přímka hlavní první, druhé, třetí osnovy v rovině ● přímka krycí k dané přímce a rovině ● přímka spádová (po příp. první, druhé a třetí osnovy) ● tvořící přímka přímkové plochy ● ekvidistance přímky (značí se e) ● interval dvou bodů na přímce ● jednotkový interval přímky a se značí i_a ;

25. rovina ● rovina souměrnosti ● rovina totožnosti ● rovina normální ● rovina tečná plochy ● rovina vrcholová ● interval roviny;

26. řez plochy, tělesa (rovinný průsek) ● eliptický, hyperbolický, kruhový, parabolický řez plochy kuželové druhého stupně ● kruhový (cyklický) řez plochy druhého stupně ● normální řez hranolu, válce ● řez protiběžný (antiparalelní);

27. síť tělesa;

28. sklápění roviny do průmětny;

29. skutečná (ne pravá) velikost rovinného útvaru, úsečky a j.;

30. spád přímky ● spádové měřítko;

31. souřadnice pravoúhlé bodu v prostoru se značí x, y, z ● pro bod M se píše $M(x_1; y_1; z_1)$ ● osy souřadnicové (ne souřadné) ● souřadnicové roviny ● počátek souřadnic;

32. stopa roviny: první, druhá, třetí stopa roviny ● stopník přímky: první, druhý, třetí;

- 33. stupňování přímky;
 - 34. transformace průměten ● vícenásobné transformace průměten;
 - 35. úběžník přímky ● hlavní úběžník roviny (t. j. úběžník spádových přímek roviny) ● úběžnice roviny ● protiúběžnice roviny;
 - 36. úhel dvou rovin n. odchylka dvou rovin ● odchylka roviny od průmětny ● odchylka přímky od roviny, od průmětny;
 - 37. úžlabí střešní;
 - 38. věta Quetelet-Dandelinova;
 - 39. válec kruhový: kosý, rotační ● strana válce;
 - 40. vrstevnice ● vrstevná rovina;
 - 41. vzdálenost dvou mimoběžek;
 - 42. základnice;
 - 43. zobrazení stereoskopické ● z. ekvidistantní válcové;
 - 44. zorný kužel ● zorné pole; zorný úhel.
-

Jak učit analytické geometrii na reálných gymnasiích

Napsal

RNDr. JAROSLAV SIMERSKÝ,

profesor stát. reál. gymnasia v Třeboni

1936, 8° 40 stran, 7 obr.

Brož. výt. Kč 7,60

Tento spisek, odměněný Mrňávkovou cenou z Fondu pro podporu vědeckého badání, vyšel jako další svazek Sbírký metodik pro střední školy. Jest založen na principu pracovní výuky v analytické geometrii a ukazuje konkrétně, jak je třeba princip činné školy v praksi uplatňovati.

Zajímavou tuto práci vřele doporučujeme.

Sborník Jednoty čsl. matematiků a fysiků, sv. 19.

GEOMETRIE PROJEKTIVNÍ

**Synthetické i analytické vyšetřování
projektivních příbuzností a útvarů.**

Napsal

JAN VOJTĚCH,

profesor vysokého učení technického v Praze.

1932. 8° XII, 880 str. 80 obr.

Cena v pl. váz. výt. 260 Kč.

Lze obdržeti u každého knihkupece i přímo u nakladatele.

UČEBNÍ POMŮCKY

FYSIKÁLNÍ MATEMATICKÉ CHEMICKÉ

**přesně vyrobené
spolehlivě fungující
odborně vyzkoušené**

**v y r á b í a d o d á v á,
všechny přístroje a pomůcky kterékoliv výroby
pečlivě a odborně opravuje**

FYSMA,

společnost s ručením omezeným,

založená Jednotou československých matematiků a fysiků

Praha XIX-Bubeneč,

Piettova 180.

Telefon 72526.

Telefon 72526.

Vydává a nakládá Jednota československých matematiků a fysiků v Praze.
Redakce a administrace v Praze II, Žitná 25. Telefon 29308. Denně od 8^{1/2}—12^{1/2}, a od 14—18 hod. kromě soboty odpoč., neděle a svátku. —
Účet poštovní spořitelny v Praze 13103. — Knihtiskárna Prometheus v Praze VIII, Na Rokosce 94. Telefon RR 8139, RR 8107. — Novinová sazba povolena řed. pošt a telegrafů 18. listopadu 1933, čís. 288250/VII.
Podací úřad Praha 25.