Rovinná kvintika rodu dvě.

† **Aug. Vondráček,** Bratislava.

(Došlo 10. ledna 1935.)

1. Křivka 5. stupně má obecně rovnici o 21 členech: 3 tvaru x_1^5, 6 tvaru $x_1^4 x_2$, 6 tvaru $x_1^3 x_2^2$, 3 členy $x_1^3 x_2 x_3$, 3 členy $x_1^2 x_2^2 x_3$; je určena 20ti svými body. K stanovení uvažované kvintiky rodu dvě (označme ji k_2^5) je třeba vedle čtyř jejích bodů dvojných D_1, D_2, D_3, D_4 osmi bodů jednoduchých. Podle Plückerových vzorců má k_2^5 třídu 12, dvojných tečen 32, tečen inflexních 21.

Vložíme-li tři dvojné body do vrcholů O_1 (1, 0, 0), O_2 (0, 1, 0), O_3 (0, 0, 1) souřadného trojúhelníka, odpadnou členy se souřadnicemi v stupni pátém a čtvrtém v jednotlivých souřadnicích (celkem 9 členů), takže rovnice kvintiky rodu tři je

$$F \equiv x_1^3 \varphi_{23} + x_2^3 \varphi_{31} + x_3^3 \varphi_{12} + d x_1 x_2^2 x_3^2 + e x_1^2 x_2 x_3^2 + f x_1^2 x_2^2 x_3 = 0, \tag{1}$$

kde

$$\varphi_{ij} = \overset{k}{a}_{ii} x_i^2 + 2 \overset{k}{a}_{ij} x_i x_j + \overset{k}{a}_{jj} x_j^2 \quad (i, j, k = 1, 2, 3, \; i, j \neq k)$$

jsou kvadratické formy proměnných s indexy i, j, $\varphi_{ij} = 0$ pak rovnice tečen v bodě O_k.

Čtvrtým dvojným bodem kvintiky k_2^5 buď bod jednotkový J (1, 1, 1), což dá pro koeficienty další tři podmínky

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1 = x_2 = x_3 = 1) = \\
&= 3\varphi_{23} + 2(\overset{2}{a}_{31} + \overset{2}{a}_{11}) + 2(\overset{3}{a}_{11} + \overset{2}{a}_{12}) + d + 2e + 2f = 0 \\
&\frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1 = x_2 = x_3 = 1) = \\
&= 3\varphi_{31} + 2(\overset{3}{a}_{12} + \overset{3}{a}_{22}) + 2(\overset{1}{a}_{22} + \overset{1}{a}_{23}) + 2d + e + 2f = 0 \\
&\frac{\partial F}{\partial x_3}(x_1 = x_2 = x_3 = 1) = \\
&= 3\varphi_{12} + 2(\overset{1}{a}_{23} + \overset{1}{a}_{33}) + 2(\overset{2}{a}_{33} + \overset{2}{a}_{31}) + 2d + 2e + f = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

vázané relací

$$F\,(x_1 = x_2 = x_3 = 1) = \varphi_{23} + \varphi_{31} + \varphi_{12} + d + e + f = 0,$$

kde ovšem

$$\varphi_{ij} = \overset{k}{a}_{ii} + 2\overset{k}{a}_{ij} + \overset{k}{a}_{jj}.$$

Je tedy (1) s podmínkami (2) rovnicí kvintiky $k_2{}^5$ s dvojnými body O_1, O_2, O_3, J.

2. Uvažovanou kvintiku $k_2{}^5$ lze, jak známo, synteticky vytvořiti průsečíky jednojednoznačně přiřazených kuželoseček svazku Σk^2 a křivek 3. stupně svazku Σk^3, jestliže čtyři ze základních bodů svazku Σk^3 splývají se základními body Σk^2, tvoříce dvojné body D_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ křivky $k_2{}^5$.

Kuželosečky $k_1{}^2, k_2{}^2, \ldots$ svazku Σk^2 protnou korespondující kubiky $k_1{}^3, k_2{}^3, \ldots$ z Σk^3 (mimo D_i) ještě v bodových párech A, A'; B, B'; ... Podle věty *Bertiniho* pro křivky hypereliptické[1]) *obalují spojnice* $a \equiv \overline{AA'}$, $b \equiv \overline{BB'}, \ldots$ *kuželosečku* l^2,[2]) jež znamená pochopitelně výhodné zjednodušení konstruktivní, jehož v dalším bude užito.

3. Na kuželosečce l^2 lze sestrojiti následující příbuznost. Tečna a (obr.) v jejím bodě A protne $k_2{}^5$ v pěti bodech dvou různých skupin: jednak v průsečících *1*, *2* s korespondující kuželosečkou $k_a{}^2$ svazku Σk^2, jednak v bodech I, II, III, patřících jiným kuželosečkám $k^2{}_{a_I}, k^2{}_{a_{II}}, k^2{}_{a_{III}}$ svazku, k nimž jsou projektivně přiřazeny tečny a_I, a_{II}, a_{III} k l^2 s dotyčnými body A_I, A_{II}, A_{III}, jež přiřaďme bodu A. Hledejme obráceně k bodu (třeba A_I) bod A. Tečna a_I protne odpovídající kuželosečku $k_{a_I}{}^2$ mimo I ještě v I^*,

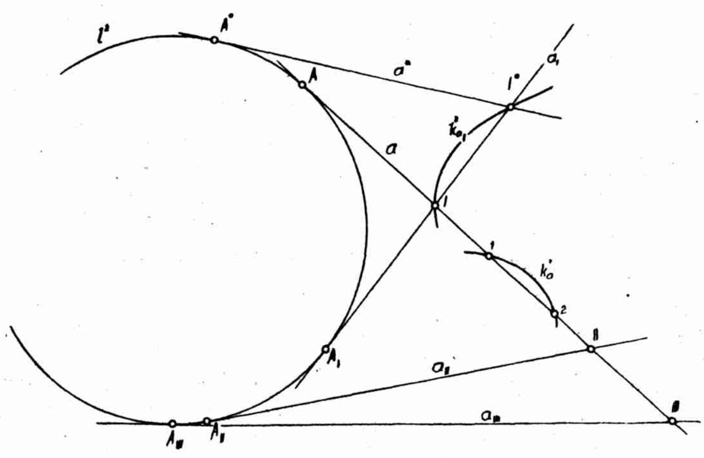
---

[1]) Uveř. v Ann. di mat. (2) **22** a zní: „Spojnice bodových dvojic jednomocného systému takových dvojic na hyperbolické křivce obalují racionální křivku třídy $n - p - 1$“ (n stupeň, p rod křivky). Na tuto větu byl jsem dodatečně laskavě upozorněn p. prof. Dr. *B. Bydžovským*, a proto vynechávám analytický výpočet, jímž jsem rovněž dospěl ke kuželosečce l^2.

[2]) Je to ostatně speciální případ tohoto vytvoření křivky: buď dána racionální křivka n-ho stupně l^n: $x_1 = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0 = f_1(t)$, $x_2 = b_n t^n + \ldots + b_0 = f_2(t)$, $x_3 = c_n t^n + \ldots + c_0 = f_3(t)$ a svazek kuželoseček Σk^2 o rovnici $k_1{}^2 + \varkappa k_2{}^2 = 0$. Tečně $y_1\,(f_2 f'_3 - f_3 f'_2) + y_2\,(f_3 f'_1 - f_1 f'_3) + y_3\,(f_1 f'_2 - f_2 f'_1) = 0$ přikažme relací $a\varkappa t + b\varkappa + ct + d = 0$ kuželosečku z Σk^2 (koeficienty $f_i f'_k - f_k f'_i$ jsou stupně $2\,(n - 1)$ v t). Po dosazení do rovnice tečny za $t = -\dfrac{b\varkappa + d}{a\varkappa + c} = \dfrac{bk_1{}^2 - dk_2{}^2}{-ak_1{}^2 + ck_2{}^2}$ dostaneme křivku $\Phi\,(y_1, y_2, y_3) = 0$ stupně $4\,(n - 1) + 1 = 4n - 3$ jako místo průsečíků korespondujících prvků. Křivka $\Phi = 0$ má v základních bodech svazku Σk^2 body $2\,(n - 1)$ násobné, představující $4\,(n - 1)\,(2n - 3)$ bodů dvojných. Její rod je tedy $\dfrac{(4n - 3 - 1)\,(4n - 3 - 2)}{2} - 4\,(n - 1)\,(2n - 3) = 2\,(n - 1)$. Pro $n = 2$ máme právě $k_2{}^5$.

načež tečny z I, I^* (a, a^*) dají dotyčné body A, A^*. Tak zřízena na l^2 bodová (a tečnová) příbuznost (3, 2) s pěti koincidencemi.

Stane-li se bod A prvkem koincidenčním (na př. $A_I \equiv A$), přejde bod I v soumezný k A; poněvadž však bodem křivky k_2^5 prochází jediná příslušná kuželosečka svazku Σk^2, splynou současně jeden z bodů *1, 2* kuželosečky $k_a{}^2$ s bodem A. V koincidenčním bodě příbuznosti (3, 2) *splývají tudíž dva body různých skupin*, křivka k_2^5 se v něm l^2 *dotýká*. Tedy: *Kuželosečka l^2 dotýká se křivky k_2^5 v pěti bodech*, v nichž se však — jak patrno — nedotýkají (obecně) korespondující kuželosečky svazku Σk^2. Existuje



sice 6 kuželoseček ze Σk^2, dotýkajících se l^2 v dvojných bodech bikvadratické involuce, vytknuté svazkem na l^2, ale ty (obecně) s koincidenčními prvky z (3, 2) nesplývají. Dotyčných oněch pět bodů l^2 s k_2^5 jsou ovšem též koincidenčními body příbuznosti (1, 4) na l^2, utvořené bodovou řadou $A, B, \ldots$ a čtveřicemi zmíněné bikvadratické involuce průsečíků l^2 s korespondujícími kuželosečkami $k_a{}^2$, $k_b{}^2, \ldots$ svazku Σk^2.

4. Předchozí věty užijeme *k syntetickému určení křivky k_2^5 rodu dvě, dané čtyřmi dvojnými D_i ($i = 1, 2, 3, 4$) a osmi jednoduchými body A_i ($i = 1, 2, \ldots, 8$) v obecné poloze.*

Při tom obecně položenými jsou body A_i tehdy, když příslušná kvintika je *vlastní*. Vylučujeme tedy hlavně případy: a) šest bodů A_i ($i = 1, 2, \ldots, 6$) patří přímce p; nastal by rozklad v p a kuželosečky k_1^2, k_2^2 svazku Σk^2 body A_7, A_8; b) tři z bodů A_i (A_1, A_2, A_3) patří kuželosečce k^2 svazku Σk^2 — kvintika je složená z k^2 a kubiky určené Di, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8; c) čtyři z bodů A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) patří přímce p incidentní s jedním z dvojných bodů (třeba D_1) — rozklad v p a racionálnou bikvadratiku určenou D_i, A_5, A_6, A_7, A_8

s dvojnými body v D_2, D_3, D_4; d) dva body (A_1, A_2) jsou incidentní se spojnicí p dvou dvojných bodů (třeba D_1, D_2) — křivka bude složená z p a bikvadratiky rodu jedna s D_2, D_3 jako dvojnými a D_1, D_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8 jako body jednoduchými; e) body A_1, A_2 na $p = \overline{D_1D_2}$, A_3, A_4 na $q = \overline{D_1D_3}$; kvintika bude složená z p, q a racionální kubiky s dvojným bodem D_4 a D_2, D_3, A_5, A_6, A_7, A_8 body jednoduchými.

Snadno se synteticky určí kvintika, daná svými body dvojnými D_i ($i = 1, \ldots, 4$) a sedmi body A_i ($i = 1, 2, \ldots, 7$), v náhradu pak za bod osmý podmínkou, že (třeba) body A_1, A_2, A_3, A_4 jsou s Di základními body svazku kubik Σk^3; kuželosečkám svazku Σk^2 body A_5, A_6, A_7 jsou přiřazeny kubiky z Σk^3 týmiž body. Kvintika prochází ovšem též devátým bodem, asociovaným k A_1, A_2, A_3, A_4, D_i.

Při *obecné poloze* daných osmi bodů A_i je nyní postup patrný: sedm z bodů A_i ($i = 1, 2, \ldots, 7$) určí s D_i svazek kvintik, z nichž určíme dvě ${}^1k_2{}^5$, ${}^2k_2{}^5$. Křivka ${}^1k_2{}^5$ buď vytvořena svazkem kubik Σk^3 o základních bodech (třeba) A_1, A_2, A_3, A_4, D_i a svazkem kuželoseček Σk^2, v kterýchžto svazcích přiřadíme křivky body A_5, A_6, A_7. Stanovme průsečíky kuželosečky $k_8{}^2$ svazku Σk^2, jdoucí bodem A_8 s korespondující kubikou svazku Σk^3 (úloha kvadratická); jich spojnicí je přímka a. Křivka ${}^2k_2{}^5$, podobným způsobem z bodů $A_1, \ldots, A_7$ určená, dá spojnici b svých průsečíků s $k_8{}^2$. Průsečík $(a, b) \equiv L$*) spojen s A_8 dá na $k_8{}^2$ druhý průsečík A'_8 žádané křivky s $k_8{}^2$, $\overline{LA_8}$ je ovšem zároveň jednou tečnou a_8 obálky l^2. Stanovením pěti takových tečen je l^2 jakož i křivka 5. stupně určena.

Konstruktivní zjednodušení nastane v případech zvláštní polohy daných osmi bodů A_i (při čemž kvintika zůstane vlastní), kdy totiž *jeden, dva, tři, resp. čtyři páry z A_i jsou incidentní s kuželosečkami svazku Σk^2* (pro různé páry ovšem různými).

a) Nechť dva z bodů A_i (označme je A_1, A'_1, ostatní A_k ($k = 2, 3, \ldots, 6, 7$), $\overline{A_1A'_1} \equiv a_1$) patří kuželosečce $k_1{}^2$ z Σk^2. Sedmi body A_1, A'_1 a (třeba) A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 proložme opět dvě kvintiky ${}^1k_2{}^5$, ${}^2k_2{}^5$, při čemž ${}^1k_2{}^5$ je složená z kuželosečky $k_1{}^2$ a kubiky $k_1{}^3$ určené D_i, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, pro ${}^2k_2{}^5$ vezměme za základní body svazku kubik D_i a (třeba) A_1, A_2, A_3, A_4, z něhož třem křivkám body A_5, A_6, A'_1 přiřadíme tři kuželosečky z Σk^2 týmiž body. Kvintika ${}^1k_2{}^5$ (její část $k_1{}^3$) protne kuželosečku $k_7{}^2$ bodem A_7 v bodovém páru o spojnici a, ${}^2k_2{}^5$ v páru o spojnici b, $(a, b) \equiv L$, načež $\overline{A_7L} \equiv a_7$ protne $k_7{}^2$ v bodě A'_7 kvintiky; a_1, a_7 jsou již tečnami kuželosečky l^2, plně určené ještě dvěma tečnami (třeba)

*) L je střed involuce, kterou onen svazek kvintik vytíná na kuželosečce $k_8{}^2$.

a_5, a_6 body A_5, A_6. Neboť označíme-li t_i $(i = 1, 2, \ldots, 7)$ tečny v dvojném bodě (třeba) D_1 ke kuželosečkám k_i^2 $(i = 1, 2, \ldots, 7)$ z Σk^2 body A_1 $(A'_1), A_2, \ldots, A_7$, platí mezi a_i, t_i jednojednoznačná korespondence, takže označíme-li $k \equiv (a_k, a_1)$, $(k = 1, 2, \ldots, 7)$ průsečíky a_k s a_1, určíme z *5, 6, 7* další vztahem

$$a_1\,(1, 2, 3, 4, \ldots, 7)\ \pi D_1\ (t_1 t_2 t_3 t_4 \ldots t_7), \tag{23}$$

kde *1* je bodem dotyčným kuželosečky l^2 tečny a_1; tím kvintika synteticky plně určena.

Leč kuželosečku l^2 možno určiti *přímo, bez dvojných bodů* D_i a svazku kuželoseček Σk^2, jen je-li dán svazek přímek t_i $(i = 1, 2, \ldots, 7)$ (o středu Q libovolném, nebo řada bodů, nebo vůbec útvar z prvků, schopných příbuznosti (1, 1) s prvky jiného útvaru) užitím projektivního vztahu (23) čili $a_i \pi t_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 7)$.

Zvolme na a_1 bod $1'$, jímž a body A_2, A_3, A_4 sestrojme kuželosečku m_1^2, aby $1'\,(t'A_2A_3A_4)\ \pi Q\ (t_1t_2t_3t_4)$ (t' tečna v $1'$). Pro jiný bod $1'_0$ na a_1 dostaneme podobně kuželosečku m'_2, pro niž $1'_0\,(t'_0A_2A_3A_4)\ \pi Q\ (t_1t_2t_3t_4)$. Obě kuželosečky se protnou v čtvrtém bodě X, jenž musí zřejmě býti incidentní s a_1. Všechny kuželosečky m^2 žádané vlastnosti tvoří tudíž svazek o základních bodech A_2, A_3, A_4, X.

Podobně postupujeme pro druhou skupinu bodů A_5, A_6, A_7: zvolme na a_1 bod $1''$, jímž a body A_5, A_6, A_7 sestrojme kuželosečku n_1^2, aby $1''\,(t''A_5A_6A_7)\ \pi Q\ (t_1t_5t_6t_7)$; druhý průsečík Y kuželosečky n_1^2 s a_1 tvoří s A_5, A_6, A_7 základní body svazku kuželoseček n^2.

Z prvého svazku vezměme kuželosečku m^2, pro niž $1' \equiv Y$, z druhého kuželosečku n^2, pro kterou $1'' \equiv X$. Sestrojme ve svazku Y paprsky a'_5, a'_6, a'_7, protínající m^2 v bodech A'_5, A'_6, A'_7 tak, aby

$$Y\,(t'A_2A_3A_4A'_5A'_6A'_7)\ \pi X\ (YA_2A_3A_4A'_5A'_6A'_7)\ \pi Q\ (t_1t_2t_3t_4t_5t_6t_7)$$

(t' tečna m^2 v Y) a podobně ve svazku X paprsky a''_2, a''_3, a''_4, protínající n^2 v A''_2, A''_3, A''_4, aby

$$X\,(t''A''_2A''_3A''_4A_5A_6A_7)\ \pi Y\ (XA''_2A''_3A''_4A_5A_6A_7)\ \pi Q\ (t_1t_2t_3 \ldots t_7)$$

(t'' tečna n^2 p X).

Perspektivní svazky

$$X\,(YA_2A_3A_4A'_5A'_6A'_7)\ \pi Y\ (XA''_2A''_3A''_4A_5A_6A_7)$$

mají osu perspektivity Δ, jejíž průsečíky s m^2 patří zřejmě i kuželosečce n^2. Spojnice korespondujících bodů kvadratických řad $(YA_2A_3A_4A'_5A'_6A'_7)$, $(XA''_2A''_3A''_4A_5A_6A_7)$ kuželoseček m^2, n^2, t. j. $\overline{XY} \equiv a_1$, $\overline{A_2A'_2} \equiv a_2$, $\overline{A_3A'_3} \equiv a_3$, atd. jsou již hledanými tečnami kuželosečky l^2.

Správnost konstrukce vysvítá též z prostorové úvahy: l^2 je obrysovou kuželosečkou průmětu sborcené plochy 2-ho stupně, jejíž površky spojují odpovídající body projektivních řad kvadratických na dvou kuželosečkách o průmětech m^2, n^2, při čemž obě řady mají samodružné body na přímce Δ (průsečnici rovin obou kuželoseček).

Tím zároveň rozřešena zajímavá úloha z projektivní geometrie: *Dána přímka* a_1, *šest bodů* $A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$ *a svazek přímek* t_i $(i = 1, 2, 3, \ldots 7,)$; *sestrojiti kuželosečku* l^2, *dotýkající se přímky* a_1 *a přímek* a_k *body* A_k $(k = 2, 3, \ldots, 7)$ *tak, že* $a_i \pi t_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 7)$.

b) Z bodů A_i nechť dva páry (A_1, A'_1; A_2, A'_2; ostatní A_3, A_4, A_5, A_6, $\overline{A_1A'_1} \equiv a_1$, $\overline{A_2A'_2} \equiv a_2$) patří kuželosečkám k_1^2, k_2^2 z Σk^2.

Užijme svazku kvintik body $D_i, A_1, A'_1, A_2, A'_2, A_3, A_4, A_5$, v němž lze sestrojiti dvě kvintiky složené z kuželosečky k_1^2 a křivky 3. st. k_1^3 body $D_i, A_2, A'_2, A_3, A_4, A_5$, pak z k_2^2 a kubiky k_2^3 body $D_i, A_1, A'_1, A_3, A_4, A_5$.

Pro k_1^3 snadno stanovíme bod P_1 na a_2, protilehlý k bodům D_i jakožto bod, z něhož se $A_2(A'_2)$, A_3, A_4, A_5 promítají paprskovou čtveřicí téhož dvojpoměru jako tečny k příslušným kuželosečkám k_i^2 z Σk^2: $P_1\,(A_2A_3A_4A_5)\,\pi D_i\,(t_2t_3t_4t_5)$. Zvolne na a_2 bod $2'$, z něhož se bod na a_2 k $2'$ soumezný a body A_3, A_4 promítají paprskovou trojicí a_2, a'_3, a'_4, v níž stanovme paprsek a'_5 tak, aby $2'\,(a_2a'_3a'_4a'_5)\,\pi D_i\,(t_2t_3t_4t_5)$. Paprsek a'_5 nebude obecně incidentní s A_5. Zvolme proto jiný bod $2''$ na a_2 a sestrojme a''_5, aby $2''\,(a_2a''_3a''_4a''_5)\,\pi D_i\,(t_2t_3t_4t_5)$, kde $a''_3 \equiv \overline{2''A_3}$, $a''_4 \equiv \overline{2''A_4}$. Perspektivní svazky $2'\,(a_2a'_3a'_4a'_5)$, $2''(a_2a''_3a''_4a''_5)$ mají osu perspektivity v přímce A_3A_4, na níž se protínají i přímky a'_5, a''_5 v bodě, jenž spojen s A_5 dá na a_2 žádaný bod P_1.

Právě tak stanovíme na a_1 bod P_2, protilehlý k bodům D_i pro křivku k_2^3. Obě kubiky protnou kuželosečku k_6^2 bodem A_6 v bodových párech (jichž netřeba rýsovati), jichž spojnice a, b procházejí P_1, P_2 a jež projektivním přiřazením k tečně t_6 kuželosečky k_6^2 v D_i snadno sestrojíme. Průsečík $(a, b) \equiv L$ spojen s A_6 dá další tečnu $A_6L \equiv a_6$ kuželosečky l^2; další postup patrný.

Z celého postupu zřejmo, že bod L a tedy i a_6 a tudíž i kuželosečku l^2 lze stanoviti bez dvojných bodů D_i, stačí, dán-li svazek $Q\,(t_1t_2 \ldots t_6)$.

Tím řešena úloha:

Dány přímky a_1, a_2, *body* A_3, A_4, A_5, A_6 *a svazek přímek* t_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$; *sestrojiti kuželosečku* l^2, *dotýkající se* a_1, a_2 *a přímek* a_k *incidentních s danými body* A_k $(k = 3, 4, 5, 6)$, *aby* $a_i\,\pi\,t_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 6)$.

c) Z bodů A_i buďte tři páry (A_1, A'_1; A_2, A'_2; A_3, A'_3, spojnice a_1, a_2, a_3) na kuželosečkách k_1^2, k_2^2, k_3^2 svazku Σk^2; ostatní označme A_4, A_5.

Ve svazku kvintik o základních bodech $D_i, A_1, A'_1, A_2, A'_2, A_3, A'_3, A_4$ užijeme s výhodou dvou křivek složených: z kuželosečky k_1^2 a kubiky k_1^3 body $D_i, A_2, A'_2, A_3, A'_3, A_4$, jejím bodem k D_i protilehlým je $P_1 \equiv (a_2, a_3)$, z kuželosečky k_2^2 a kubiky k_2^3 body $D_i, A_3, A'_3, A_1, A'_1, A_4$ s $P_2 \equiv (a_3, a_1)$ jako protilehlým k D_i. Ve svazku o středu P_1 sestrojme paprsek a'_5, aby $P_1(a_2, a_3, A_4, a'_5)$ πD_1 $(t_2 t_3 t_4 t_5)$, podobně ve svazku P_2 paprsek a''_5, aby P_2 $(a_1 a_3 A_4 a''_5)$ πD_1 $(t_1 t_3 t_4 t_5)$. Průsečík $L \equiv (a'_5, a''_5)$ spojen s A_5 dá tečnu a_5 kuželosečky l^2, načež tečna a_4 bodem A_4 určena podle $(a_1 a_2 a_3 a_4 a_5)$ πD_1 $(t_1 t_2 t_3 t_4 t_5)$. Opět patrno, že konstrukci kuželosečky l^2 možno provésti bez dvojných bodů D_i, je-li dán příslušný svazek $Q(t_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, 5)$.

Řešena tedy i úloha:

Dány přímky a_1, a_2, a_3, *body* A_4, A_5 *a svazek přímek* t_i $(i = 1, 2, \ldots, 5)$; *sestrojiti kuželosečku* l^2, *dotýkající se přímek daných a přímek* a_4, a_5 *body* A_4, A_5 *tak, aby* $a_i \pi t_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 5)$.

d) Čtyři páry z bodů A_i (A_1, A'_1; A_2, A'_2; A_3, A'_3; A_4, A'_4, spojnice a_1, a_2, a_3, a_4) patří kuželosečkám k_i^2 $(i = 1, 2, 3, 4)$ z Σk^2.

Řešení patrno: označíme-li *2, 3, 4* průsečíky a_1 s a_2, a_3, a_4, je pro dotyčný bod *1* tečny a_1: a_1 $(1, 2, 3, 4)$ πD_1 $(t_1 t_2 t_3 t_4)$, čímž kuželosečka l^2 plně určena.

Znění příslušné úlohy proj. geometrické je zřejmé.

5. V odst. 2 uvedené vytvoření kvintiky k_2^5 průsečíky kuželoseček svazku Σk^2 a jim korespondujících tečen kuželosečky l^2 umožňuje *i konstrukci tečny* této křivky, k níž dospějeme touto prostorovou úvahou:

Buď dán čtyřhran o vrcholu O, hranách d_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ a přímka m. Třem bodům A^1, B^1, C^1 na m přiřaďme tři roviny α, β, γ touto přímkou. Každá z těchto rovin protne hrany d_i v čtyřech bodech, jimiž a body A^1, B^1, C^1 jsou v rovinách α, β, γ stanoveny kuželosečky k_1^2, k_2^2, k_3^2, protínající m ještě v bodech A^2, B^2, C^2, tvořících s A^1, B^1, C^1 páry kvadratické involuce. Kuželosečky v rovinách svazku m, protínající hrany d_i a vytínající na m páry involuce, při čemž $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ π $(A^1A^2, B^1B^2, C^1C^2, \ldots)$, vyplní plochu 3. stupně K^3 s O jako bodem dvojným. Rovina (mO) obsahuje kuželosečku, složenou z přímek $\overline{OU^1} \equiv u^1$, $\overline{OU^2} \equiv u^2$, při čemž U^1, U^2 patří rovněž kvadratické involuci na m. Šest přímek d_i, u^1, u^2 tvoří skupinu dvojšestice (po dvou splývajících) přímek plochy, mimo ně má K^3 ještě 15 přímek (jedna z nich je m).[3])

[3]) Srov.: Dr. *Jan Vojtěch*, Projektivní geometrie, Praha 1932, str. 491.

Z bodu O promítají se uvedené kuželosečky plochy K^3 do roviny π, jež není s O incidentní, právě *ve svazek kuželoseček* Σk^2 *o základních bodech* D_i (průmětech d_i); kuželosečka složená z přímek u^1, u^2 se promítá ovšem do bodů U^1, U^2 na m,[4]) jimi však též prochází jedna z kuželoseček Σk^2.

Přímka m plochy K^3 buď zároveň povrchovou přímkou zborcené plochy 2. stupně K^2, neincidentní s O. Výše užité roviny $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ svazku m protnou K^2 ještě v površkách řady prvé $a, b, c, \ldots$, jež protnou kuželosečky $k_1^2, k_2^2, k_3^2, \ldots$ plochy K^3 v týchž rovinách v bodových párech $A A'; B, B'; C, C'; \ldots$

Obě plochy K^3, K^2 se pronikají (mimo m) v prostorové křivce stupně pátého c^5, mající površky prvé řady $a, b, c, \ldots$ za bisekanty, tudíž površky řady druhé $m, n, p, q, \ldots$ za trisekanty. Mimo to přímky d_i ($i = 1, 2, 3, 4$) plochy K^3 jsou též bisekantami křivky c^5, protínajíce ji v průsečících K^2 s d_i; u^1, u^2 jsou ovšem unisekantami c^5.[5])

Průmětem plochy K^2 z O do π je *právě kuželosečka* l^2, průmět to dotyčné kuželosečky l^2 dotyčného kužele (OK^2), jejíž každá tečna je průmětem vždy dvou površek různých řad.

Proniková křivka c^5 se promítá z O do π v *obecnou kvintiku rodu dvě* k_2^5 s dvojnými body D_i ($i = 1, 2, 3, 4$), průměty to bisekant d_i křivky c^5. Kuželosečky plochy K^3 a površky prvé řady plochy K^2 v rovinách $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ svazku m dají v průmětně π kuželosečky svazku Σk^2 a projektivní k nim řadu tečen kuželosečky l^2 $[(k_1^2, k_2^2, k_3^2, \ldots) \,\pi\, (a, b, c, \ldots)]$, jež podle odst. 2 vytvořují právě křivku k_2^5. Tečnami dvojných bodů D_i křivky k_2^5 jsou stopy tečných rovin (incidentních s O) v průsečících K^2 s d_i.

Tím je (po promítnutí z O) blíže osvětlena různost bodových pětiskupin po třech a po dvou na tečnách kuželosečky l^2, o nichž byla zmínka v odst. 3. Označme jednomocnou soustavu dvojbodovou průsečíků $A, A' \equiv (a, k_1^2)$, $B, B' \equiv (b, k_2^2), \ldots$ krátce g_2^1, soustavu trojbodovou g_3 (ta ovšem není na k_2^5 jediná: paprsky svazků D_i vytínají na k_2^5 soustavy rovněž trojbodové). Pět koincidenčních prvků příbuznosti (3, 2) na l^2 z téhož odst. pochází od pěti (vedle šestého na m) průsečíků kuželosečky dotyčné l^2 s plochou K^3: tečny pronikové křivky c^5 v nich se promítají do tečen průmětu kuželosečky l^2.

Předchozí úvaha umožňuje nyní *konstrukci tečny kvintiky* k_2^5 v jejím bodě A. Poněvadž tečná rovina τ plochy K^2 je jednoduše určena povrchovými přímkami a, q řady prvé a druhé bodem A procházejícími (jichž stejnojmenné průměty jsou tečnami a, q

[4]) Průměty označeny pro jednoduchost stejně jako útvary v prostoru.

[5]) Srov. též Dr. J. Vojtěch, Projektivní geometrie, str. 677 a násl. o *monoidním vyjádření* prostorové křivky.

z A k l^2), stačí sestrojiti tečnu t průsečné křivky roviny $\tau \equiv (a, q)$ s plochou K^3. Rovina τ protne K^3 v křivce 3. st. c^3, protínající přímky d_i $(i = 1, 2, 3, 4)$, u^1, u^2, procházející body A, A', ${}^1A$, ${}^2A$, kde A' patří s A na a soustavě g_2^1, ${}^1A$, ${}^2A$ na q s A soustavě g_3. Průmět křivky c^3 z O do π prochází tudíž body dvojnými D_i, U^1, U^2, A, A', ${}^1A$, ${}^2A$; tečna t tohoto průmětu v A je *už hledanou tečnou kvintiky* k_2^5 *v* A.

Pár U^1, U^2 je na přímce $m \equiv e$ [e průmět površky prvé řady plochy K^2 v rovině (mO)] bodovým párem soustavy g_2^1. Poněvadž za společnou přímku m ploch K^3, K^2 lze (v průmětě) zvoliti libovolnou jinou tečnu kuželosečky l^2 a tím bodový pár U^1, U^2 kubiky c^3 zaměniti jiným párem z g_2^1, jsme vedeni k jednoduše nekonečnému množství těchto kubik, v bodě A se kvintiky dotýkajících a tvořících *svazek* o základních bodech D_i, A, A', ${}^1A$, ${}^2A$ a k A soumezném, k nim *asociovaném bodě* jako devátém.

Dospějeme tudíž k tečně kvintiky k_2^5 v jejím bodě A takto: *Sestrojíme k bodu A body* A'; ${}^1A$, ${}^2A$, *tvořící s ním soustavu* g_2^1 *resp.* g_3; *tečna t v bodě A kterékoli kubiky body* D_i, A, A', ${}^1A$, ${}^2A$ *je už tečnou kvintiky* k_2^5 *v* A.

Patrně: *Všecky kubiky svazku o základních bodech* D_i, A, A', ${}^1A$, ${}^2A$ (v A se kvintiky k_2^5 dotýkající) *protínají kvintiku ještě v bodových párech soustavy* g_2^1.

6. Uveďme ještě jedno možné vytvoření kvintiky k_2^5, jež je v souvislosti s předchozím jejím určením svazkem kuželoseček a projektivní s ním řadou tečen kuželosečky l^2.

Tečna m_0 kuželosečky l^2 nechť protne korespondující kuželosečku $k^2_{m_0}$ z Σk^2 v bodech M_0, M'_0 z g_2^1, spojnici dvojných bodů $\overline{D_3D_4} \equiv d_{34}$ v bodě M^*, z něhož druhá tečna m k l^2 nechť protne příslušnou k_m^2 z Σk^2 v páru M, M' z g_2^1. Potom podle věty Desarguesovy jsou body D_1, D_2, M_0, M'_0, M, M' incidentní s kuželosečkou $k^2_{M^*}$, protínající k_2^5 ještě v bodech X, Y. Jednotlivé kuželosečky svazku (D_1, D_2, X, Y) vytnou z kuželoseček Σk^2 páry involuce o středech M^*, N^*, ... na d_{34}; v každé z těchto involucí existují (na tečnách l^2 z M^*, N^*, ...) dva páry, patřící g_2^1 křivky k_2^5.

Tím se sobě přiřazují páry tečen m_0, m; n_0, n; ... kuželosečky l^2, tvořící involuční řadu tečen o ose d_{34} a kuželosečky svazku (D_1, D_2, X, Y), *jež vytvořují průsečíky korespondujících prvků rovněž křivku* k_2^5.

Samodružnými body této příbuznosti na d_{34} jsou jednak body dvojné D_3, D_4, v nichž se d_{34} dotýkají dvě kuželosečky svazku (D_1, D_2, X, Y), jednak bod D_{34}, pátý to průsečík k_2^5 s d_{34}.

Jde ještě o určení bodů X, Y. Kuželosečka z Σk^2, složená z přímek $\overline{D_1D_2}$, $\overline{D_3D_4} \equiv d_{34}$ protne k_2^5 v bodech D_{12}, D_{34} z g_2^1;

$\overline{XY}$ prochází tudíž bodem D_{34} a poněvadž kuželosečka z (D_1, D_2, X, Y), složená z $\overline{D_1D_2}$, $\overline{XYD_{34}}$ musí (mimo D_{12}, D_{34}) míti ještě jeden pár z $g_2{}^1$, musí $\overline{XY}$ býti druhou tečnou (vedle $\overline{D_{12}D_{34}}$) kuželosečky l^2 z D_{34}. X, Y nemohou ovšem splynouti s tímto párem z $g_2{}^1$, poněvadž by kuželosečky z (D_1, D_2, X, Y) obsahovaly tři takové páry z $g_2{}^1$, což nemožno. *I musí býti body* X, Y *totožny s body* ${}^1D_{34}$, ${}^2D_{34}$, *patřícími s* D_{34} *skupině trojbodové* g_3. Tedy:

Kvintika $k_2{}^5$ *je též vytvořena průsečíky párů kvadratické involuce tečen kuželosečky* l^2 *a s ní projektivních kuželoseček svazku, při čemž spojnice dvou základních bodů tohoto svazku* (netvořících dvojné body křivky) *je prvkem oné kvadratické involuce* (tečnou l^2).

Dvojná tečna involuce (tečna l^2 v průsečíku d_{34} s l^2) protne příslušnou kuželosečku svazku $(D_1, D_2, {}^1D_{34}, {}^2D_{34})$ v dvou párech bodů soumezných, t. j. kuželosečka ta se $k_2{}^5$ ve dvou bodech *dotýká*; takové kuželosečky jsou ovšem dvě.

Patrně též platí:

Kvintika $k_2{}^5$ *je místem průsečíků jedno-dvojznačně přiřazených kuželoseček dvou svazků o dvou společných základních bodech; zázákladní body svazku dvojznačného jsou dvojnými body křivky* [jsou to ve výše uvedeném označení svazky $(D_1, D_2, {}^1D_{34}, {}^1D_{34})$ a Σk^2].

7. Všimněme si nyní některých *složitějších singularit* kvintiky $k_2{}^5$, vzniklých jednak ze splynutí dvojných jejích bodů, jednak ze splynutí tečen jednotlivých dvojných bodů v hroty.

a) Jestliže kuželosečky svazku Σk^2 se v bodě $D_1 \equiv D_2 \equiv D$ dotýkají tečny t, je D *dvojným dotykovým* (taknodálním) bodem křivky.

Pro tři soumezné body dvojné v D oskulují se kuželosečky svazku Σk^2 v D, jenž je *dvojným bodem oskulačním* (osknodálním) kvintiky.

Jsou-li všechny čtyři základní body Σk^2 soumezné v D, stává se D *dvojným bodem hyperoskulačním* (hyperosknodálním) pro $k_2{}^5$.

b) Splynou-li tečny dvojného bodu (třeba) D_1 v tečnu jedinou (přímka d_1 plochy K^3 z odst. 5 se v $A_1 \equiv B_1$ plochy K^2 dotýká), je D_1 *hrotem* kvintiky, jež je třídy 11té, s 24 tečnami dvojnými a 19 tečnami inflexními. Tu stanou se soumeznými i tečny z D_1 ku l^2, t. j. *kuželosečka* l^2 *prochází hrotem* D_1.

Tak je tomu postupně pro jeden, dva, tři, čtyři hroty; křivka $k_2{}^5$ má třídu 11, 10, 9, 8 s 24, 17, 11, 6ti tečnami dvojnými a 19, 17, 15, 13ti tečnami inflexními.

V posledním případě, kdy všechny čtyři body D_i jsou hroty, *stává se kuželosečka* l^2 *prvkem svazku* Σk^2, *dotýkajíc se kvintiky*