Alle grossen ganzen Zahlen lassen sich als Summe von höchstens 71 Primzahlen darstellen.

H. Heilbronn in Cambridge (England), **E. Landau** in Berlin und **P. Scherk** in Prag.

(Eingegangen am 14. Januar 1936.)

Einleitung.

Kleine lateinische Buchstaben außer e bezeichnen ganze Zahlen, die p Primzahlen, die c positive Weltkonstanten.

Man verdankt Herrn Schnirelmann[1]) den Satz:

Jedes $x > 1$ *ist als Summe von höchstens* c_1 *Primzahlen darstellbar.*

Oder, was dasselbe besagt:

Jedes $x > c_2$ ist als Summe von höchstens c_3 Primzahlen darstellbar.

Wir nennen Schnirelmannsche Konstante S das kleinste c_3, zu dem es ein passendes c_2 gibt.

Also: Alle grossen x sind in höchstens S Primzahlen zerlegbar; unendlich viele $x > 1$ sind nicht in $S - 1$ Primzahlen zerlegbar.

Sicher ist
$$S \geqq 3;$$
denn für
$$x \equiv 5 \pmod{30},\ x > 5$$
ist x durch 5 teilbar, also nicht Primzahl, und x ist nicht $p + p'$; denn x ist ungerade, so daß p oder $p' = 2$ sein müßte, und wegen

---

[1]) *Ob additiwnich swoistwach tschisel* [Iswestija Donskowo Polytechnitscheskowo Instituta (Nowotscherkask), Bd. **14** (1930), S. 3—28]; russisch mit französischem Auszug. Vgl. Landaus Darstellung des Schnirelmannschen Beweises: *Die Goldbachsche Vermutung und der Schnirelmannsche Satz* [Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, Jahrgang 1930, S. 255—276]. Im Folgenden wird unter Satz $L\,x$ stets Satz x dieser Landauschen Arbeit verstanden.

$$x - 2 \equiv 3 \pmod{30}$$

ist $x - 2$ durch 3 teilbar.

Wie gut läßt sich S nach oben abschätzen?

Dieser Frage ist eine kürzlich erschienene Arbeit von Herrn Romanoff[2]) gewidmet. Dieser gibt an, Herr Schnirelmann habe $S \leqq 100\,000$ bewiesen, was sich zu $S \leqq 1104$ verschärfen lasse. Herr Lubelski korrigiert dies in

$$S \leqq 800000 \text{ (Schnirelmann)},$$
$$S \leqq 2208 \text{ (Romanoff)}.$$

Er übersieht jedoch, daß gegen Herrn Romanoffs Arbeit (in der er nur eine Reihe störender Druckfehler moniert) Wesentliches einzuwenden ist. Von dem unzureichenden Lemma II ganz abgesehen, ist Herrn Romanoffs Grundlage[3]) eine angeblich durch leichte Veränderung von Betrachtungen Landaus (*Vorlesungen über Zahlentheorie*, Bd. 2) zu folgernde, in ξ und j gleichmäßig gültige asymptotische Formel für

$$\pi(\xi, j, l) = \sum_{\substack{p \leqq \xi \\ p \equiv l \,(\mathrm{mod}\, j)}} 1,$$

wo $j > 0$, $(j, l) = 1$. Bei deren Herleitung muß Verf. falsch geschlossen haben. Wir können auch heute nicht entscheiden, ob jene Formel richtig oder falsch ist; selbst wenn wir die neueren Untersuchungen der Herren Page und Siegel heranziehen.

Zum Glück ist jene Frage unerheblich. Wir werden sehen, daß statt der Romanoffschen Aussage genügt: der klassische Satz

$$\pi(\xi, j, l) \sim \frac{1}{\varphi(j)} \frac{\xi}{\log \xi}$$

bei festem j, verbunden etwa mit der aus der Brunschen oder der klassischen funktionentheoretischen Methode längst bekannten Formel

$$\pi(\xi, j, l) < \frac{c_4}{j^{0,1}} \cdot \frac{\xi}{\log \xi} \quad \text{für } \xi \geqq 2,\ \xi \geqq j.$$

Wir erwähnen noch die bei Herrn Romanoff[4]) vorkommende Relation

---

[2]) *K probleme Goldbacha* [Iswestija Nautschno-issledowatelskogo Instituta matematiki i mechaniki pri Tomskom Gosudarstwennom Universitete im. Kujbyschewa W. W., Bd. 1 (1935), S. 34—38]; russisch mit deutschem Auszug. Vgl. Herrn Lubelskis Rezension im Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete [Bd. 11 (1935), S. 390].

[3]) S. 36, Z. 4 v. u.

[4]) S. 37, Z. 6—5 v. u.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^2(k)}{k\,\varphi(k)} = \frac{\zeta(2)}{\zeta(3)} < 1{,}38,$$

da Herr Lubelski an ihr nicht Anstoß nahm; sie ist schon darum falsch, weil

$$\frac{\mu^2(1)}{1\,.\,\varphi(1)} + \frac{\mu^2(2)}{2\,.\,\varphi(2)} = 1{,}5 \geqq 1{,}38$$

ist. Tatsächlich ist trivialerweise

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^2(k)}{k\,\varphi(k)} = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p(p-1)}\right) = \prod_p \frac{1 - \frac{1}{p^6}}{\left(1 - \frac{1}{p^2}\right)\left(1 - \frac{1}{p^3}\right)}$$

$$= \frac{\zeta(2)\,\zeta(3)}{\zeta(6)}.$$

Die Romanoffsche obere Abschätzung von S würde schon hierdurch zweifelhaft werden; aber es wird uns möglich sein, aus der klassischen Brun-Schnirelmannschen Methode sogar

$$S \leqq 71$$

zu beweisen, d. h. den Titel unserer vorliegenden Arbeit zu rechtfertigen.

Wir stellen das Ganze dar, ohne aus der Goldbachliteratur mehr als die Landausche Arbeit vorauszusetzen.

Wir betonen ausdrücklich, daß wir der Romanoffschen Arbeit den Haupthebel zu starker Verkleinerung der alten Abschätzung von S verdanken. Aus

$$0 \leqq \mathfrak{A}(y) \leqq \mathfrak{B}(y)$$

schliessen wir[5]) nämlich nicht mehr nach dem Schnirelmannschen Paradigma (y läuft über einen endlichen Wertevorrat)

$$\sum_y \mathfrak{A}^2(y) \leqq \sum_y \mathfrak{B}^2(y)$$

usf., sondern nach Herrn Romanoff

$$\sum_y \mathfrak{A}^2(y) \leqq \sum_y \mathfrak{A}(y)\,\mathfrak{B}(y)$$

usf.

Den Hauptwitz unserer Arbeit verdanken wir also Herrn Romanoff. Alles andere ist mühevolle Vertiefung in jeden einzelnen Kunstgriff der alten Methode. Herr Romanoff mußte dies unterlassen, weil er weder die Landausche Arbeit noch

[5]) Im Beweis unseres Satzes 5.

eine spätere allgemeine Untersuchung von Herrn Khintchine[6]) über Zahlenmengen kannte.

Fortan gelten folgende Bezeichnungen.

Eine leere Summe bedeutet stets 0, ein leeres Produkt 1.

C ist die Eulersche Konstante.

q ist > 0, quadratfrei und zu 30 teilerfremd,

$$\psi(q) = \prod_{p/q} (p-2),$$

$$\alpha = \sum_q \frac{1}{\varphi(q)\,\psi(q)} = \prod_{p \geqq 7} \left(1 + \frac{1}{(p-1)(p-2)}\right),$$

$$\beta = \prod_{p \geqq 7} \frac{1 - \frac{2}{p}}{\left(1 - \frac{1}{p}\right)^2},$$

$$\varrho = \alpha\beta,$$

also

$$\varrho = \prod_{p \geqq 7} \frac{p^2 - 3p + 3}{(p-1)(p-2)} \frac{(p-2)\,p}{(p-1)^2}$$

$$= \prod_{p \geqq 7} \frac{p^3 - 3p^2 + 3p}{(p-1)^3} = \prod_{p \geqq 7} \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right).$$

Erster Teil.

Der Hauptsatz mit einem Parameter.

Ziel dieses ersten Teiles ist der

Satz 13: *Es sei*

$$\Theta > \log \tfrac{7}{5} \tag{1}$$

und

---

[6]) *Zur additiven Zahlentheorie* [Matematitscheskij Sbornik, Bd. 39 (1932), S. 27—34], deutsch mit russischem Auszug. Unser Leser braucht aber diese Arbeit nicht zu kennen; denn wir brauchen aus ihr nur den nicht sehr tiefliegenden Satz:

$\mathfrak{N}$ sei eine Menge natürlicher Zahlen, $N(z)$ die Anzahl der n aus $\mathfrak{N}$ mit $n \leqq z$. Es sei $h > 0$ und

$$N(z) > \frac{z}{h} \quad \textit{für alle } z > 0.$$

Dann ist jede natürliche Zahl als Summe von höchstens h Summanden aus $\mathfrak{N}$ darstellbar.

Und für diese Tatsache läßt sich ein Beweis ohne weiteres aus der kürzlich erschienenen Arbeit von Herrn Besicovitch entnehmen: *On the density of the sum of two sequences of integers* [The Journal of the London Mathematical Society, Bd. 10 (1935), S. 246—248].

$$\Theta^2 e^\Theta \leqq \frac{4}{e^2} \tag{2}$$

(*also*

$$\Theta < 1$$

und

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\Theta^2 e^\Theta)^m m^{2m}}{(2m+1)!}$$

konvergent, wegen

$$\frac{(\Theta^2 e^\Theta)^m m^{2m}}{(2m+1)!} < \frac{\left(\frac{4}{e^2}\right)^m m^{2m}}{2m\,(2m)!} < \frac{\left(\frac{4}{e^2}\right)^m m^{2m}}{2m} \frac{e^{2m}}{(2m)^{2m}\sqrt{2\pi}\sqrt{2m}}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{\pi}\, m^{\frac{3}{2}}}\Big).$$

Es werde

$$\sigma = \sigma(\Theta) = 1 + \Theta \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\Theta^2 e^\Theta)^m m^{2m}}{(2m+1)!}$$

gesetzt, ferner

$$h = h(\Theta) = \left[\frac{16}{3} \varrho\sigma e^{-2C} \frac{1}{(1 - e^{-\frac{1}{2}\Theta})^2}\right] + 1.$$

Es sei die Goldbachsche Vermutung bis $30h + 1$ wahr, d. h. jedes gerade x mit $4 \leqq x \leqq 30h + 1$ Summe von 2 Primzahlen, also jedes y mit $2 \leqq y \leqq 30h + 1$ Summe von höchstens 3 Primzahlen.

Dann ist die Schnirelmannsche Konstante

$$S \leqq 2h + 3.$$

Im zweiten Teil, der nur numerische Rechnungen enthält, wird ein Θ mit (1) und (2) angegeben, für das

$$\frac{16}{3} \varrho\sigma e^{-2C} \frac{1}{(1 - e^{-\frac{1}{2}\Theta})^2} < 34$$

ist. Alsdann ist

$$h \leqq 34,$$

also, da die Goldbachsche Vermutung bekanntlich bis 1021 wahr ist,

$$S \leqq 71.$$

Definitionen: *Für $x > 0$ sei*

$$A(x) = \sum_{p+p'=x} 1;$$

für $\xi \geqq 0$, $j > 0$ sei

$$B(\xi, j) = \sum_{\substack{1 \leqq y \leqq \xi \\ y \equiv 0 \pmod{j}}} A(y) \left(= \sum_{\substack{p + p' \leqq \xi \\ p+p' \equiv 0 \pmod{j}}} 1 \right),$$

$$C(\xi, j) = \sum_{\substack{1 \leqq y \leqq \xi \\ y \equiv 0 \pmod{j}}} A(y)\, y$$

und für jedes l

$$\pi(\xi, j, l) = \sum_{\substack{p \leqq \xi \\ p \equiv l \pmod{j}}} 1.$$

Satz 1: 1. *Bei festen* j, l *mit* $(j, l) = 1$ *ist*

$$\pi(\xi, j, l) \sim \frac{1}{\varphi(j)} \frac{\xi}{\log \xi}.$$

2. *Für* $\xi \geqq 2$, $\xi \geqq j$ *ist*

$$\pi(\xi, j, l) < \frac{c_5}{j^{0,1}} \frac{\xi}{\log \xi}.$$

Beweis: Beide Behauptungen sind bekanntlich wahr.

1. Die erste ist klassisch.

2. Die zweite ergibt sich z. B. nach Herrn Romanoff[7]) aus der Brun-Schnirelmannschen Methode folgendermassen. Für $u > 0$ sei

$$f(u) = \prod_{p/u} \left(1 + \frac{1}{p}\right) = \sum_{r/u} \frac{1}{r},$$

wo r die positiven quadratfreien Zahlen durchläuft. Es sei $g(u, \xi)$ die Lösungszahl von

$$u = p - p', \; p \leqq \xi.$$

Nach Satz L 23 ist für $x \geqq 2$, $1 \leqq u \leqq x$

$$g(u, x) < c_6 \frac{x}{\log^2 x} f(u).$$

Für $\xi \geqq 2$, $1 \leqq u \leqq \xi$ ist also

$$g(u, \xi) = g(u, [\xi]) < c_7 \frac{\xi}{\log^2 \xi} f(u).$$

Nun ist für $\eta > 0$

$$\sum_{1 \leqq v \leqq \eta} f(v) = \sum_{1 \leqq v \leqq \eta} \sum_{r/v} \frac{1}{r} = \sum_{r \leqq \eta} \frac{1}{r} \left[\frac{\eta}{r}\right] < \eta \sum_{r} \frac{1}{r^2} < c_8 \eta \tag{3}$$

und für $v > 0$, $w > 0$ offenbar

---

[7]) *Über einige Sätze der additiven Zahlentheorie* [Mathematische Annalen, Bd. **109** (1934), S. 668—678], S. 675—676.

$$f(vw) = \prod_{p/vw}\left(1+\frac{1}{p}\right) \leqq \prod_{p/v}\left(1+\frac{1}{p}\right)\prod_{p/w}\left(1+\frac{1}{p}\right) = f(v)\,f(w); \qquad (4)$$

ferner ist bekanntlich

$$f(j) \leqq \prod_{p/j} \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \frac{j}{\varphi(j)} < c_9\, j^{0,8}. \qquad (5)$$

21. Im Falle

$$\pi(\xi, j, l) \leqq 1$$

ist trivialerweise

$$\pi(\xi, j, l) < c_{10}\frac{\xi^{0,9}}{\log \xi} \leqq \frac{c_{10}}{j^{0,1}}\frac{\xi}{\log \xi}.$$

22. Im Falle

$$\pi(\xi, j, l) \geqq 2$$

ist

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{4}\pi^2(\xi, j, l) &\leqq \tfrac{1}{2}(\pi^2(\xi, j, l) - \pi(\xi, j, l))\\ &= \text{Lösungszahl von } p \equiv p' \equiv l \pmod{j},\ p' < p \leqq \xi\\ &\leqq \text{Lösungszahl von } p - p' \equiv 0 \pmod{j},\ p' < p \leqq \xi\\ &= \sum_{\substack{1 \leqq u \leqq \xi\\ u \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ j)}} g(u, \xi) < c_7 \frac{\xi}{\log^2 \xi} \sum_{\substack{1 \leqq u \leqq \xi\\ u \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ j)}} f(u). \qquad (6)\end{aligned}$$

Hierin ist nach (4), (3) und (5)

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{1 \leqq u \leqq \xi\\ u \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ j)}} f(u) &= \sum_{1 \leqq v \leqq \frac{\xi}{j}} f(vj) \leqq f(j) \sum_{1 \leqq v \leqq \frac{\xi}{j}} f(v)\\ &< c_9 j^{0,8}\, c_8 \frac{\xi}{j} = c_{11}\frac{\xi}{j^{0,2}}. \qquad (7)\end{aligned}$$

Aus (6) und (7) folgt

$$\pi^2(\xi, j, l) < 4c_7 \frac{\xi}{\log^2 \xi}\, c_{11}\frac{\xi}{j^{0,2}} = \frac{c_{12}}{j^{0,2}}\frac{\xi^2}{\log^2 \xi},$$

$$\pi(\xi, j, l) < \frac{c_{12}}{j^{0,1}}\frac{\xi}{\log \xi}.$$

Satz 2: 1. *Bei festem j ist*

$$B(\xi, j) \sim \frac{1}{2\varphi(j)}\frac{\xi^2}{\log^2 \xi}.$$

2. *Für $\xi \geqq 2$ ist*

$$B(\xi, j) < \frac{c_{13}}{j^{0,1}}\frac{\xi^2}{\log^2 \xi}.$$

Beweis: Alle Kongruenzen sind mod j gemeint.

1. Für $(a, j) > 1$ ist

$$\sum_{\substack{p+p' \leqq \xi \\ p \equiv -p' \equiv a}} 1 \leqq 1.$$

Daher ist

$$B(\xi, j) = \sum_{a=1}^{j} \sum_{\substack{p+p' \leqq \xi \\ p \equiv -p' \equiv a}} 1$$

$$= \sum_{\substack{a=1 \\ (a,j)=1}}^{j} \sum_{\substack{p+p' \leqq \xi \\ p \equiv -p' \equiv a}} 1 + O(1). \tag{8}$$

Nun ist für $(a, j) = 1$

$$\left.\begin{aligned} \sum_{\substack{p+p' \leqq \xi \\ p \equiv -p' \equiv a}} 1 &= \sum_{\substack{p \leqq \frac{1}{2}\xi \\ p \equiv a}} \pi(\xi - p, j, -a) \\ &+ \sum_{\substack{p' \leqq \frac{1}{2}\xi \\ p' \equiv -a}} \pi(\xi - p', j, a) - \pi(\tfrac{1}{2}\xi, j, -a)\, \pi(\tfrac{1}{2}\xi, j, a). \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

In der ersten Summe rechts ist gleichmäßig

$$\log(\xi - p) \sim \log \xi;$$

nach Satz 1, 1. ist also

$$\sum_{\substack{p \leqq \frac{1}{2}\xi \\ p \equiv a}} \pi(\xi - p, j, -a) \sim \frac{1}{\varphi(j)} \frac{1}{\log \xi} \sum_{\substack{p \leqq \frac{1}{2}\xi \\ p \equiv a}} (\xi - p)$$

$$\sim \frac{1}{\varphi(j)} \frac{1}{\log \xi} \frac{1}{\varphi(j)} \int_{2}^{\frac{1}{2}\xi} \frac{\xi - \eta}{\log \eta}\, d\eta$$

$$= \frac{1}{\varphi^2(j)} \frac{1}{\log \xi} \left(\xi \int_{2}^{\frac{1}{2}\xi} \frac{d\eta}{\log \eta} - \int_{2}^{\frac{1}{2}\xi} \frac{\eta}{\log \eta}\, d\eta \right)$$

$$\sim \frac{1}{\varphi^2(j)} \frac{1}{\log \xi} \left(\xi \frac{\frac{1}{2}\xi}{\log \xi} - \frac{(\frac{1}{2}\xi)^2}{2 \log \xi} \right) = \frac{3}{8\, \varphi^2(j)} \frac{\xi^2}{\log^2 \xi}.$$

Aus Symmetriegründen ist also

$$\sum_{\substack{p' \leqq \frac{1}{2}\xi \\ p' \equiv -a}} \pi(\xi - p', j, a) \sim \frac{3}{8\, \varphi^2(j)} \frac{\xi^2}{\log^2 \xi}.$$

Ferner ist

$$\pi(\tfrac{1}{2}\xi, j, -a)\, \pi(\tfrac{1}{2}\xi, j, a) \sim \left(\frac{1}{\varphi(j)} \frac{\frac{1}{2}\xi}{\log \xi}\right)^2 = \frac{1}{4\varphi^2(j)} \frac{\xi^2}{\log^2 \xi}.$$

Wegen

$$\tfrac{3}{8} + \tfrac{3}{8} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2}$$

ist also nach (9)

$$\sum_{\substack{p+p' \leqq \xi \\ p \equiv -p' \equiv a}} 1 \sim \frac{1}{2\varphi^2(j)} \frac{\xi^2}{\log^2 \xi},$$

und (8) gibt die Behauptung.

2. Falls $\xi < j$, ist

$$B(\xi, j) = 0.$$

Falls $\xi \geqq j$, ist nach Satz 1, 2.

$$B(\xi, j) \leqq \sum_{p \leqq \xi} \pi(\xi, j, -p) \leqq \sum_{p \leqq \xi} \frac{c_5}{j^{0,1}} \frac{\xi}{\log \xi}$$

$$< \frac{c_{13}}{j^{0,1}} \frac{\xi^2}{\log^2 \xi}.$$

Satz 3: 1. *Bei festem* j *ist*

$$C(\xi, j) \sim \frac{1}{3\varphi(j)} \frac{\xi^3}{\log^2 \xi}.$$

2. *Für* $\xi \geqq 2$ *ist*

$$C(\xi, j) < \frac{c_{13}}{j^{0,1}} \frac{\xi^3}{\log^2 \xi}.$$

Beweis: 1. O. B. d. A. sei ξ ganz. Aus Satz 2, 1. folgt

$$C(\xi, j) = \sum_{y=1}^{\xi} (B(y, j) - B(y-1, j))\, y$$

$$= -\sum_{y=1}^{\xi-1} B(y, j) + \xi\, B(\xi, j)$$

$$\sim -\frac{1}{2\varphi(j)} \int_2^{\xi} \frac{\eta^2\, d\eta}{\log^2 \eta} + \frac{1}{2\varphi(j)} \frac{\xi^3}{\log^2 \xi}$$

$$\sim (-\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2}) \frac{1}{\varphi(j)} \frac{\xi^3}{\log^2 \xi} = \frac{1}{3\varphi(j)} \frac{\xi^3}{\log^2 \xi}.$$

2. Aus Satz 2, 2. folgt

$$C(\xi, j) \leqq \xi\, B(\xi, j) < \frac{c_{13}}{j^{0,1}} \frac{\xi^3}{\log^2 \xi}.$$

Satz 4:

$$\sum_{\substack{\frac{\xi}{\log \xi} < y \leqq \xi \\ y \equiv 0 \pmod{30}}} A(y) \frac{y}{\log^2 y} \sum_{q/y} \frac{1}{\psi(q)} \sim \tfrac{1}{24}\alpha \frac{\xi^3}{\log^4 \xi}.$$

Beweis: Da gleichmäßig

$$\log y \sim \log \xi,$$

genügt es,

$$\frac{\log^2 \xi}{\xi^3} \sum_{\substack{\frac{\xi}{\log \xi} < y \leqq \xi \\ y \equiv 0 \pmod{30}}} A(y)\, y \sum_{q/y} \frac{1}{\psi(q)} \to \tfrac{1}{24}\alpha \tag{10}$$

zu zeigen.

Für $\xi \geqq e$ werde

$$\Delta(\xi, q) = \frac{\log^2 \xi}{\xi^3} \frac{1}{\psi(q)} \left(C(\xi, 30q) - C\left(\frac{\xi}{\log \xi}, 30q\right)\right)$$

gesetzt. Dann hat die linke Seite von (10) den Wert

$$\frac{\log^2 \xi}{\xi^3} \sum_q \frac{1}{\psi(q)} \sum_{\substack{\frac{\xi}{\log \xi} < y \leqq \xi \\ y \equiv 0 \pmod{30q}}} A(y)\, y = \sum_q \Delta(\xi, q). \tag{11}$$

Nach Satz 3, 2. ist

$$0 \leqq \Delta(\xi, q) \leqq \frac{\log^2 \xi}{\xi^3} \frac{1}{\psi(q)} C(\xi, 30q) < \frac{\log^2 \xi}{\xi^3} \frac{1}{\psi(q)} \frac{c_{13}}{q^{0,1}} \frac{\xi^3}{\log^2 \xi} = \frac{c_{13}}{q^{0,1} \psi(q)}. \tag{12}$$

Die Reihe

$$\sum_q \frac{1}{q^{0,1}\, \psi(q)} = \prod_{p \geqq 7} \left(1 + \frac{1}{p^{0,1}\,(p-2)}\right)$$

konvergiert; wegen (12) konvergiert also die Reihe auf der rechten Seite von (11) gleichmäßig.

Nach Satz 3, 1. ist bei festem q

$$\lim_{\xi = \infty} \Delta(\xi, q) = \frac{1}{\psi(q) \,.\, 3\varphi(30q)} = \frac{1}{24\varphi(q)\, \psi(q)}.$$

Die linke Seite von (11) strebt also bei $\xi \to \infty$ gegen

$$\tfrac{1}{24} \sum_q \frac{1}{\varphi(q)\, \psi(q)} = \tfrac{1}{24}\alpha.$$

Satz 5: *Falls*

$$\varlimsup_{\substack{x=\infty \\ x\equiv 0 \pmod{30}}} \frac{A(x)}{\dfrac{x}{\log^2 x}\sum\limits_{q/x}\dfrac{1}{\psi(q)}} \leqq A \tag{13}$$

gilt, so ist

$$\varlimsup_{\xi=\infty} \frac{\log^4 \xi}{\xi^3} \sum_{\substack{1\leqq y\leqq \xi \\ y\equiv 0 \pmod{30}}} A^2(y) \leqq \tfrac{1}{24}\alpha\, A. \tag{14}$$

Beweis: B sei irgend eine Zahl $> A$. Dann ist zuletzt

$$A(y) < B \frac{y}{\log^2 y} \sum_{q/y} \frac{1}{\psi(q)} \quad \text{für } 30/y.$$

Wegen

$$A(y) \leqq \pi(y) = O\left(\frac{y}{\log y}\right)$$

ist daher

$$\sum_{\substack{1\leqq y\leqq \xi \\ y\equiv 0 \pmod{30}}} A^2(y) \leqq O \sum_{2\leqq y\leqq \frac{\xi}{\log \xi}} \frac{y^2}{\log^2 y} + B \sum_{\substack{\frac{\xi}{\log \xi}<y\leqq \xi \\ y\equiv 0 \pmod{30}}} A(y) \frac{y}{\log^2 y} \sum_{q/y} \frac{1}{\psi(q)}.$$

Das erste Glied rechts ist

$$O\left(\frac{\left(\dfrac{\xi}{\log \xi}\right)^3}{\log^2 \xi}\right) = O\left(\frac{\xi^3}{\log^5 \xi}\right).$$

Nach Satz 4 ist also die linke Seite von (14) höchstens gleich $B\frac{1}{24}\alpha$, und $B \to A$ gibt die Behauptung.

Satz 6: *Es sei $\mathfrak{M}$ eine Menge natürlicher Zahlen m und $M(x)$ die Anzahl der $m \leqq x$. Es sei*

$$h > 0,$$

$$\varliminf_{x=\infty} \frac{M(x)}{x} > \frac{1}{h}. \tag{15}$$

Dann sind alle grossen u als Summe von h Zahlen m und höchstens $h-1$ Einsen darstellbar.

Vorbemerkung: Wenn $\mathfrak{M}$ die Menge der m mit

$$30m = p + p'$$

ist und (15) gilt, so ist also jedes grosse

$$u = \sum_{i=1}^{h} m_i + v, \quad 0 \leqq v \leqq h-1,$$

also für jedes j mit $0 \leqq j \leqq 29$ jedes grosse

$$30u + j = \sum_{i=1}^{h} (p_i + p'_i) + 30v + j,$$

also jedes grosse

$$w - 2 = \sum_{i=1}^{h} (p_i + p'_i) + z, \quad 0 \leqq z \leqq 30h - 1,$$

also jedes grosse

$$w = \sum_{i=1}^{h} (p_i + p'_i) + t, \ 2 \leqq t \leqq 30h + 1.$$

Falls also (15) gilt und die Goldbachsche Vermutung bis $30h + 1$ wahr ist, so ist

$$S \leqq 2h + 3.$$

Beweis: Es gibt ein $y \geqq 0$ mit

$$\begin{cases} M(y) \leqq \dfrac{y}{h}, \\ M(x) > \dfrac{x}{h} \text{ für } x > y. \end{cases}$$

$y + 1$ ist also ein m, und es ist

$$M(x) - M(y) > \frac{x - y}{h} \text{ für } x > y.$$

Der Khintchinesche, in Fußnote[6]) zitierte Satz, auf die Menge der $m - y$ mit $m > y$ angewendet, ergibt:

Jedes $t > 0$ ist von der Form

$$t = \sum_{i=1}^{s} (m_i - y), \quad 1 \leqq s \leqq h;$$

jedes $u > hy + h - 1$ ist also von der Form

$$u = (u - hy - h + 1) + hy + h - 1 = \sum_{i=1}^{s} (m_i - y) + hy + h - 1$$

$$= \sum_{i=1}^{s} m_i + \sum_{i=s+1}^{h} (y + 1) + s - 1 = \sum_{i=1}^{h} m_i + v, \ 0 \leqq v \leqq h - 1.$$

Satz 7: *Es sei* $\mathfrak{M}$ *die Menge der* m *mit*

$$30m = p + p'.$$

A erfülle (13). *Dann gilt* (15) *mit*

$$h = [\tfrac{16}{45} A\alpha] + 1.$$

Vorbemerkung: Wenn A (13) erfüllt und die Goldbachsche Vermutung bis $30\ [\frac{16}{45} A\alpha] + 31$ wahr ist, so ist also nach der Vorbemerkung zu Satz 6

$$S \leqq 2\,[\tfrac{16}{45} A\alpha] + 5.$$

Beweis: Es sei $\mathfrak{M}'$ die Menge der durch 30 teilbaren $p + p'$, $M'(x)$ die Anzahl dieser Zahlen $\leqq x$. Dann ist

$$M'(30x) = M(x).$$

Es ist

$$\left(\sum_{\substack{y=1 \\ y \equiv 0 \pmod{30}}}^{30x} A(y)\right)^2 \leqq M'(30x) \sum_{\substack{y=1 \\ y \equiv 0 \pmod{30}}}^{30x} A^2(y). \tag{16}$$

Nach Satz 2, 1. mit $j = 30$ ist

$$\sum_{\substack{y=1 \\ y \equiv 0 \pmod{30}}}^{30x} A(y) = B(30x, 30) \sim \frac{1}{2\varphi(30)} \frac{(30x)^2}{\log^2 x} = \frac{225}{4} \frac{x^2}{\log^2 x}.$$

Nach (16) und Satz 5 ist daher

$$\varliminf_{x=\infty} \frac{M(x)}{x} = \varliminf_{x=\infty} \frac{M'(30x)}{x}$$

$$\geqq \frac{\varliminf_{x=\infty} \frac{\log^4 x}{x^4} \left(\sum_{\substack{y=1 \\ y \equiv 0 \pmod{30}}}^{30x} A(y)\right)^2}{\varlimsup_{x=\infty} \frac{\log^4 x}{x^3} \sum_{\substack{y=1 \\ y \equiv 0 \pmod{30}}}^{30x} A^2(y)}$$

$$\geqq \frac{\frac{225^2}{4^2}}{\frac{1}{24}\alpha A \,.\, 30^3} = \frac{1}{\frac{16}{45} A\alpha} > \frac{1}{[\frac{16}{45} A\alpha] + 1}.$$

*

Wir werden nun für jedes Θ mit (1), (2) die Relation (13) mit

$$A = 15\sigma e^{-2C} \frac{1}{(1 - e^{-\frac{1}{2}\Theta})^2}\,\beta$$

beweisen. Dies liefert nach Satz 7 unmittelbar den zu Beginn dieses ersten Teils ausgesprochenen Satz 13.

Satz 8: ***Es sei*** $m > 0$, ***alle Summationsbuchstaben*** $j_l \geqq 0$,

$$T = \sum_{\substack{\sum_1^m j_l = 2m+1 \\ \sum_1^r j_l \leqq 2r \text{ für } 1 \leqq r < m}} \frac{(2m+1)!}{j_1!\, j_2! \ldots j_m!}.$$

Dann ist

$$T \leqq m^{2m}.$$

Beweis: Man definiere j_l für alle l mit der Periode m.

Für $1 \leqq k \leqq m$ entstehe T_k aus T, indem jedes j_l durch j_{l+k-1} ersetzt wird. T_1 ist also T; T_k unterscheidet sich von T nur in der Bezeichnung der Summationsbuchstaben (da der alte Summand in $j_1, \ldots, j_m$ symmetrisch war und $j_k, \ldots, j_{m+k-1}$ eine zyklische Permutation dieser Zahlen ist); T_k hat also denselben Wert wie T.

Es genügt zu zeigen

$$\sum_{k=1}^{m} T_k \leqq \sum_{\sum_1^m j_l = 2m+1} \frac{(2m+1)!}{j_1!\, j_2! \ldots j_m!}; \tag{17}$$

denn die linke Seite ist $= mT$, die rechte

$$= \left(\sum_{l=1}^{m} 1\right)^{2m+1} = m^{2m+1}.$$

(17) wird nun folgendermassen bewiesen. Jedes System $j_1, \ldots, j_m$, das in einem T_k vorkommt, kommt auch rechts vor. Es langt also zu zeigen, daß jedes System $j_1, \ldots, j_m$, das in einem T_{k_0} vorkommt, in keinem T_k mit $k \neq k_0$ vorkommt. Aus Symmetriegründen darf man annehmen, daß $j_1, \ldots, j_m$ in T_1 vorkommt, und hat zu zeigen, daß $j_1, \ldots, j_m$ für jedes k mit $2 \leqq k \leqq m$ nicht in T_k vorkommt. In der Tat ist

$$\sum_1^{k-1} j_l \leqq 2\,(k-1),$$

wegen

$$\sum_1^m j_l = 2m + 1 > 2m$$

also

$$\sum_k^m j_l > 2\,(m - k + 1).$$

Käme das System $j_1, \ldots, j_m$ in T_k vor, so wäre jedoch

$$\sum_k^m j_l \leqq 2\,(m - k + 1).$$

Satz 9: *In den Bezeichnungen von Satz L2 ist für* $0 \leqq m \leqq t$, $0 \leqq i \leqq 2m$

$$\varrho_i^{(m)} = \sum_{\substack{\sum_1^m j_l = i \\ \sum_1^r j_l \leqq 2r \text{ für } 1 \leqq r < m}} \sigma_{j_1}^{(1)} \sigma_{j_2}^{(2)} \ldots \sigma_{j_m}^{(m)}, \tag{18}$$

wo die $j_l \geqq 0$ *sind und die rechte Seite* 1 *im Falle* $m = 0$ *bedeutet.*

Beweis: 1. Für $m = 0$ ist

$$i = 0,$$

$$\varrho_i^{(m)} = \varrho_0^{(0)} = 1.$$

2. Für $m = 1$ ist

$$0 \leqq i \leqq 2;$$

21. für $i = 0$ ist die linke Seite der Behauptung 1, die rechte

$$\sigma_0^{(1)} = 1;$$

22. für $i = 1$ ist die linke Seite

$$\varrho_1^{(1)} = \sum_{k_0 \geqq s > k_1} \gamma_s = \sigma_1^{(1)} = \text{rechte Seite};$$

23. für $i = 2$ ist die linke Seite

$$\varrho_2^{(1)} = \sum_{k_0 \geqq s_1 > s_2 > k_1} \gamma_{s_1} \gamma_{s_2} = \sigma_2^{(1)} = \text{rechte Seite}.$$

3. Der Schluß von $m - 1$ auf m für $m \geqq 2$ verläuft folgendermassen.

Nach Formel (9) des Satzes $L2$ ist

$$\varrho_i^{(m)} = \sum_{n=0}^{i} \varrho_n^{(m-1)} \sigma_{i-n}^{(m)} = \sum_{n=0}^{\mathrm{Min}\,(i,\, 2(m-1))} \varrho_n^{(m-1)} \sigma_{i-n}^{(m)};$$

denn für $i \geqq n > 2\,(m - 1)$ ist wegen $n \leqq i \leqq 2m \leqq 2t$ nach einer im Wortlaut des Satzes $L2$ gemachten Bemerkung

$$\varrho_n^{(m-1)} = 0.$$

Nach der mit n statt i, $m - 1$ statt m anzuwendenden Formel (18) (beachte $n \leqq 2\,(m - 1)$) ist also

$$\varrho_i^{(m)} = \sum_{n=0}^{\mathrm{Min}\,(i,\,2(m-1))} \sigma_{i-n}^{(m)} \sum_{\substack{\sum_1^{m-1} j_l = n \\ \sum_1^{r} j_l \leqq 2r \text{ für } 1 \leqq r < m-1}} \sigma_{j_1}^{(1)} \ldots \sigma_{j_{m-1}}^{(m-1)},$$

folglich, wenn

$$i - n = j_m$$

gesetzt wird (es ist $j_m \geqq 0$),

$$\varrho_i^{(m)} = \sum_{j_1,\ldots,j_m} \sigma_{j_1}^{(1)} \ldots \sigma_{j_m}^{(m)},$$

über die Wertsysteme $j_l \geqq 0$ erstreckt, für die

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_1^m j_l = i, &(19)\\ &\sum_1^r j_l \leqq 2r \text{ für } 1 \leqq r < m-1, &(20)\\ &i - 2\,(m-1) \leqq j_m. &(21)\end{aligned}\right.$$

Und dies bedeutet genau

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_1^m j_l = i,\\ &\sum_1^r j_l \leqq 2r \text{ für } 1 \leqq r < m;\end{aligned}\right.$$

denn aus (19), (20), (21) folgt

$$\sum_1^{m-1} j_l = i - j_m \leqq 2\,(m-1),$$

und aus (19), (20) nebst

$$\sum_1^{m-1} j_l \leqq 2\,(m-1)$$

folgt

$$j_m = i - \sum_1^{m-1} j_l \geqq i - 2\,(m-1).$$

Satz 10: *Es mögen t, $k_0, \ldots, k_t$, $\varrho^{(t)}$ die Bedeutung aus Satz L2 haben; Θ erfülle* (1) *und* (2); *$\sigma = \sigma(\Theta)$ sei wie in Satz 13 erklärt. Es sei*

$$0 < \gamma_s < 1 \textit{ für } 1 \leqq s \leqq k_0$$

und

$$L_m = \prod_{k_m < s \leqq k_{m-1}} (1 - \gamma_s) \geqq e^{-\Theta} \textit{ für } 1 \leqq m \leqq t. \tag{22}$$

Dann ist

$$| \varrho^{(t)} | < \sigma \prod_{i=1}^{t} L_i.$$

Beweis: Für $1 \leqq m \leqq t$ ist nach (22)

$$\sigma_1^{(m)} = \sum_{k_m < s \leqq k_{m-1}} \gamma_s < -\log L_m \leqq \Theta < 1;$$

nach Formel (5) des Satzes $L1$ ist also für $u \geqq 1$

$$\sigma_u^{(m)} \leqq \frac{\sigma_1^{(m)}}{u} \sigma_{u-1}^{(m)} \leqq \sigma_{u-1}^{(m)},$$

$$\Theta > \sigma_1^{(m)} \geqq \sigma_2^{(m)} \geqq \ldots \text{ ad inf.}; \tag{23}$$

nach Formel (6) des Satzes $L1$ ist für $k \geqq 1$, $j \geqq 0$

$$\sigma_j^{(k)} \leqq \frac{(\sigma_1^{(k)})^j}{j!} \leqq \frac{\Theta^j}{j!}. \tag{24}$$

Aus Formel (10) des Satzes $L2$ und (23) folgt

$$| \varrho^{(m)} - \varrho^{(m-1)} L_m | = \left| \sum_{n=0}^{2m-2} (-1)^n \varrho_n^{(m-1)} \sum_{u=2m-n+1}^{\infty} (-1)^u \sigma_u^{(m)} \right|$$

$$\leqq \sum_{n=0}^{2m-2} \varrho_n^{(m-1)} \sigma_{2m-n+1}^{(m)}.$$

Nach Satz 9 (mit n statt i, $m - 1$ statt m) ist also

$$| \varrho^{(m)} - \varrho^{(m-1)} L_m | \leqq \sum_{n=0}^{2m-2} \sigma_{2m-n+1}^{(m)} \sum_{\substack{\sum_1^{m-1} j_l = n \\ \sum_1^{r} j_l \leqq 2r \text{ für } 1 \leqq r < m-1}} \sigma_{j_1}^{(1)} \ldots \sigma_{j_{m-1}}^{(m-1)}.$$

Wird

$$2m - n + 1 = j_m$$

eingeführt, so ist daher

$$| \varrho^{(m)} - \varrho^{(m-1)} L_m | \leqq \sum_{\substack{\sum_1^m j_l = 2m+1 \\ \sum_1^r j_l \leqq 2r \text{ für } 1 \leqq r < m-1 \\ j_m \geqq 3}} \sigma_{j_1}{}^{(1)} \ldots \sigma_{j_m}{}^{(m)}$$

$$\leqq \sum_{\substack{\sum_1^m j_l = 2m+1 \\ \sum_1^r j_l \leqq 2r \text{ für } 1 \leqq r < m}} \sigma_{j_1}{}^{(1)} \ldots \sigma_{j_m}{}^{(m)};$$

denn

$$\sum_1^{m-1} j_l = 2m + 1 - j_m \leqq 2\,(m-1).$$

Nach Satz 8 und (24) ist also

$$| \varrho^{(m)} - \varrho^{(m-1)} L_m | \leqq \sum_{\substack{\sum_1^m j_l = 2m+1 \\ \sum_1^r j_l \leqq 2r \text{ für } 1 \leqq r < m}} \frac{\Theta^{j_1} \ldots \Theta^{j_m}}{j_1! \ldots j_m!}$$

$$= \frac{\Theta^{2m+1}}{(2m+1)!}\, T \leqq \frac{\Theta^{2m+1}}{(2m+1)!}\, m^{2m},$$

also nach (22)

$$\left| \frac{\varrho^{(m)}}{\prod_1^m L_i} - \frac{\varrho^{(m-1)}}{\prod_1^{m-1} L_i} \right| \leqq e^{m\Theta} \frac{\Theta^{2m+1}}{(2m+1)!}\, m^{2m}.$$

Daher ist

$$\left| \frac{\varrho^{(t)}}{\prod_1^t L_i} - 1 \right| = \left| \sum_{m=1}^t \left(\frac{\varrho^{(m)}}{\prod_1^m L_i} - \frac{\varrho^{(m-1)}}{\prod_1^{m-1} L_i} \right) \right|$$

$$< \sum_{m=1}^\infty e^{m\Theta} \frac{\Theta^{2m+1}}{(2m+1)!}\, m^{2m} = \sigma - 1,$$

$$\frac{| \varrho^{(t)} |}{\prod_1^t L_i} < \sigma,$$

$$| \varrho^{(t)} | < \sigma \prod_{i=1}^t L_i.$$

Bitte nunmehr den § 2 der Landauschen Arbeit bis einschl. Satz $L7$ zu lesen. Man beachte jetzt, daß die Beweismethode des Satzes $L8$ den entsprechenden Wortlaut auch liefert, wenn alle ersten Argumente von F (d. h. alle Argumente, die nicht hinter einem Semikolon stehen) durch ihr 30 faches ersetzt werden.

A fortiori ist also, wenn alle $p_s \geqq 7$ sind,

$$F(30; p_1, \ldots, p_k) \leqq F(30) + \sum_{i=1}^{2t} (-1)^i \sum_{r_1, \ldots, r_i} v_{r_1} \ldots v_{r_i} F(30 p_{r_1} \ldots p_{r_i}),$$

wo die r_i den Bedingungen (15) aus Satz $L8$ unterworfen sind.

Die Beweismethode von Satz $L9$ liefert daher

$$F(30; p_1, \ldots, p_k) < \frac{y\tau}{30} + 2 \prod_{m=0}^{t-1} (2k_m)^2, \tag{25}$$

wo τ wie in Satz $L9$ erklärt ist.

Satz 11: *Wenn*

$$p_1 < \ldots < p_k$$

die p mit

$$7 \leqq p \leqq \sqrt{y}$$

sind, so ist (bei jedem a)

$$\overline{\lim_{\substack{y=\infty \\ y \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 30)}}} \frac{F(30; p_1, \ldots, p_k)}{\dfrac{y}{\log^2 y} \sum\limits_{q|y} \dfrac{1}{\psi(q)}} \leqq \tfrac{15}{8} \sigma e^{-2C} \frac{1}{(1 - e^{-\frac{1}{2}\Theta})^2} \beta.$$

Beweis: Bekanntlich ist

$$\prod_{p \leqq \xi} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sim \frac{e^{-C}}{\log \xi},$$

also

$$\prod_{7 \leqq p \leqq \xi} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sim \frac{30}{\varphi(30)} \frac{e^{-C}}{\log \xi} = \tfrac{15}{4} \frac{e^{-C}}{\log \xi}. \tag{26}$$

Offenbar genügt es, zu jedem

$$\delta > \tfrac{15}{8} \sigma e^{-2C} \frac{1}{(1 - e^{-\frac{1}{2}\Theta})^2}$$

eine nur von Θ und δ abhängige positive Zahl $\gamma \leqq \frac{1}{2}$ so anzugeben, dass, wenn

$$p_1 < \ldots < p_k$$

die p mit

$$7 \leqq p \leqq y^\gamma$$

sind,

$$\varlimsup_{\substack{y=\infty \\ y\equiv 0 \pmod{30}}} \frac{F(30;\, p_1, \ldots, p_k)}{\dfrac{y}{\log^2 y}\sum\limits_{q/y}\dfrac{1}{\varphi(q)}} \leqq \delta\beta$$

ist. (Denn bei steigendem γ steigt $F(30;\, p_1, \ldots, p_k)$ nicht, und die linke Seite der Behauptung des Satzes ergibt sich $\leqq \delta\beta$, also $\leqq$ rechte Seite der Behauptung.)

Man wähle γ mit

$$0 < \gamma < \tfrac{1}{2}(1 - e^{-\frac{1}{2}\Theta}),$$

$$\tfrac{15}{32}\,\sigma e^{-2C}\frac{1}{\gamma^2} < \delta$$

und alsdann eine von Θ, δ und γ abhängige Zahl ε mit

$$\varepsilon > 1,$$

$$\varepsilon e^{-\frac{1}{2}\Theta} < 1, \tag{27}$$

$$\varepsilon\,\tfrac{15}{32}\,\sigma e^{-2C}\frac{1}{\gamma^2} < \delta, \tag{28}$$

$$\zeta = \frac{\varepsilon^2\gamma}{1 - \varepsilon e^{-\frac{1}{2}\Theta}} + \varepsilon - 1 < \tfrac{1}{2}. \tag{29}$$

Es sei

$$y \equiv 0 \pmod{30}$$

und alsbald

$$y \geqq 7^{\frac{1}{\gamma}},$$

also

$$k > 0.$$

Wir setzen für $1 \leqq i \leqq k$

$$\gamma_i = \frac{v_i}{p_i}.$$

Dann ist nach (1)

$$1 - \gamma_i \geqq 1 - \frac{2}{p_i} \geqq \tfrac{5}{7} > e^{-\Theta}.$$

Nun kommt das Analogon zur alten, aus dem Beweis von Satz L 10 geläufigen Konstruktion der (jetzt von y und Θ abhängigen) Zahlen

$$t > 0,\ k_0, \ldots, k_t$$

mit

$$\begin{cases} k = k_0 > k_1 > \ldots > k_{t-1} > k_t = 0, \\ L_i = \prod\limits_{k_i < s \leqq k_{i-1}} (1 - \gamma_s) \text{ gerade noch } \geqq e^{-\Theta}, \end{cases}$$

wo $k_1, k_2, \ldots$ sukzessiv je minimal gewählt sind. Wegen

$$\lim_{p=\infty} \frac{2}{p} = 0$$

ist hierbei

$$L_i < \varepsilon e^{-\Theta} \text{ für } 1 \leqq i \leqq t - w_1,$$

wo w_1 (desgl. nachher w_2 und w_3) positiv ist und nur von Θ, δ, γ und ε abhängt.

Offenbar ist

$$\tau = \varrho^{(t)},$$

also nach Satz 10

$$|\tau| < \sigma \prod_{i=1}^{t} L_i,$$

folglich nach (25)

$$F(30; p_1, \ldots, p_k) < y^{\frac{1}{30}\sigma} \prod_{i=1}^{t} L_i + 2 \prod_{m=0}^{t-1} (2k_m)^2. \tag{30}$$

Wird

$$\lambda = \lambda(y) = \prod_{s=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_s}\right)$$

gesetzt, so ist nach (26)

$$\lambda \sim \tfrac{15}{4} \frac{e^{-C}}{\log (y^{\gamma})} = \tfrac{15}{4} \frac{e^{-C}}{\gamma \log y}. \tag{31}$$

Daher ist

$$\prod_{i=1}^{t} L_i = \prod_{s=1}^{k} \left(1 - \frac{v_s}{p_s}\right)$$

$$= \prod_{s=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_s}\right)^2 \prod_{s=1}^{k} \frac{1 - \frac{2}{p_s}}{\left(1 - \frac{1}{p_s}\right)^2} \prod_{\substack{s=1 \\ p_s / y}}^{k} \frac{1 - \frac{1}{p_s}}{1 - \frac{2}{p_s}}$$

$$\leqq \lambda^2 \prod_{s=1}^{k} \frac{1 - \frac{2}{p_s}}{\left(1 - \frac{1}{p_s}\right)^2} \prod_{\substack{p/y \\ p>5}} \left(1 + \frac{1}{p-2}\right)$$

$$\sim \tfrac{225}{16} \frac{e^{-2C}}{\gamma^2 \log^2 y} \beta \sum_{q/y} \frac{1}{\psi(q)}.$$

Zuletzt (d. h. für alle grossen y) ist also nach (28)

$$y^{\frac{1}{30}\sigma} \prod_{i=1}^{t} L_i < \varepsilon y^{\frac{1}{30}\sigma} \tfrac{225}{16} \frac{e^{-2C}}{\gamma^2 \log^2 y} \beta \sum_{q/y} \frac{1}{\psi(q)}$$

$$= \varepsilon\,\tfrac{15}{8}\tfrac{1}{2}\sigma \frac{e^{-2C}}{\gamma^2}\,\beta\,\frac{y}{\log^2 y} \sum_{q/y} \frac{1}{\psi(q)}$$

$$< \delta\beta\,\frac{y}{\log^2 y} \sum_{q/y} \frac{1}{\psi(q)}.$$

Da $\zeta < \frac{1}{2}$ ist, langt es also nach (30), noch

$$\prod_{m=0}^{t-1} 2k_m = O(y^{\zeta})$$

zu beweisen.

Nach (31) ist zuletzt

$$\frac{\frac{15}{4}\,e^{-C}}{\lambda} < \varepsilon\gamma \log y. \tag{32}$$

Nun ist

$$\left(1 - \frac{1}{p_s}\right)^2 \leqq 1 - \frac{v_s}{p_s} + \frac{1}{p_s^{\,2}} < \left(1 - \frac{v_s}{p_s}\right)\left(1 + \frac{2}{p_s^{\,2}}\right).$$

$$\prod_p \left(1 + \frac{2}{p^2}\right)$$

konvergiert; wird also für $1 \leqq i \leqq t$

$$M_i = \prod_{k_i < s \leqq k_{i-1}} \left(1 - \frac{1}{p_s}\right)$$

gesetzt, so ist für $1 \leqq i \leqq t - w_2$ zuletzt

$$M_i \leqq \sqrt{\varepsilon \prod_{k_i < s \leqq k_{i-1}} \left(1 - \frac{v_s}{p_s}\right)} = \sqrt{\varepsilon L_i} < \sqrt{\varepsilon\,.\,\varepsilon e^{-\Theta}} = \varepsilon e^{-\frac{1}{2}\Theta}.$$

Wegen $p_{k_m} \geqq 2k_m$ ist nach (26) und (32) für $0 \leqq m \leqq t - w_3$ zuletzt

$$\log (2k_m) < \varepsilon\,\tfrac{15}{4}\,e^{-C} \prod_{7 \leqq p \leqq 2k_m} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1}$$

$$\leqq \varepsilon\,\tfrac{15}{4}\,e^{-C} \prod_{7 \leqq p \leqq p_{k_m}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = \varepsilon\,\tfrac{15}{4}\,e^{-C}\,\frac{1}{\lambda} \prod_{i=1}^{m} M_i$$

$$< \varepsilon^2 \gamma \log y\,(\varepsilon e^{-\frac{1}{2}\Theta})^m. \tag{33}$$

y sei alsbald so groß, daß $t \geqq w_3$.

Für $t - w_3 < m \leqq t$ ist nach (33) zuletzt

$$\log (2k_m) < \log (2k_{t-w_3}) < \varepsilon^2\gamma \log y\,(\varepsilon e^{-\frac{1}{2}\Theta})^{t-w_3};$$

zuletzt ist also

$$\sum_{m=t-w_s+1}^{t-1} \log (2k_m) < w_3 \varepsilon^2 \gamma \log y \, (\varepsilon e^{-\frac{1}{2}\Theta})^{t-w_s};$$

wegen (27) ist also zuletzt

$$\sum_{m=t-w_s+1}^{t-1} \log (2k_m) < (\varepsilon - 1) \log y. \tag{34}$$

Aus (29), (33) und (34) folgt zuletzt

$$\sum_{m=0}^{t-1} \log (2k_m) < \left(\varepsilon^2 \gamma \sum_{m=0}^{\infty} (\varepsilon e^{-\frac{1}{2}\Theta})^m + \varepsilon - 1\right) \log y = \zeta \log y,$$

$$\prod_{m=0}^{t-1} 2k_m < y^{\zeta}.$$

Satz 12: $$\overline{\lim_{\substack{y=\infty \\ y \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ 30)}}} \frac{A(y)}{\dfrac{y}{\log^2 y} \displaystyle\sum_{q/y} \frac{1}{\psi(q)}} \leqq 15 \sigma e^{-2C} \frac{1}{(1 - e^{-\frac{1}{2}\Theta})^2} \beta.$$

Beweis: Es sei

$$y > 0, \quad y \equiv 0 \pmod{30}.$$

Die Lösungszahl von

$$y = p + p', \quad p \leqq \sqrt{y} \text{ oder } p' \leqq \sqrt{y}$$

ist

$$\leqq 2\sqrt{y}.$$

Die Lösungszahl von

$$y = p + p', \quad p > \sqrt{y}, \quad p' > \sqrt{y}$$

ist, da jedes p_s mit $7 \leqq p_s \leqq \sqrt{y}$ weder in p noch in $p - y = - p'$ aufgeht, und da in $p \equiv a \pmod{30}$ wegen $p > \sqrt{30} > 5$ sicher $(a, 30) = 1$ ist,

$$\leqq \sum_{\substack{a=1 \\ (a,30)=1}}^{30} F(30; p_1, \ldots, p_k),$$

wo die $\varphi(30) = 8$ Glieder F sich auf das betreffende a beziehen.

Aus Satz 11 folgt also die Behauptung.

Zweiter Teil.

Numerische Rechnungen.

Hauptsatz: $S \leqq 71.$

Beweis: Wir setzen

$$\Theta = 0{,}54.$$

Da die Goldbachsche Vermutung bis 1021 wahr ist, genügt es nach Satz 13, (1), (2) und

$$\frac{16}{3}\,\varrho\sigma(\Theta)\,e^{-2C}\,\frac{1}{(1-e^{-\frac{1}{2}\Theta})^2} < 34$$

zu beweisen.

Wir führten die folgenden Rechnungen ohne Benutzung logarithmischer oder anderer Tafeln aus.

Für unser Θ ist

$$\Theta^2 e^{\Theta} < 0{,}5004;$$

also gilt (2); (1) ist klar.

Demnach ist

$$\sigma(\Theta) < 1 + \Theta\sum_{m=1}^{\infty}\frac{0{,}5004^m\, m^{2m}}{(2m+1)!}.$$

Indem wir für $m \geqq 3$ die Abschätzung

$$\frac{m^{2m}}{(2m+1)!} < \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\,(\tfrac{1}{4}e^2)^m\,\frac{1}{m^{\frac{3}{2}}} \leqq \frac{1}{4\sqrt{3\pi}}\,\frac{(\frac{1}{4}e^2)^m}{m}$$

benutzen, finden wir

$$\sigma(\Theta) < 1{,}1174.$$

Andererseits ist

$$e^{\sum\limits_{p\geqq 13}\frac{1}{(p-1)^3}} < e^{\sum\limits_{m=6}^{\infty}\frac{1}{(2m)^3}} < e^{\frac{1}{8}\,\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5^2}} = e^{\frac{1}{400}},$$

also

$$\varrho < \left(1+\frac{1}{6^3}\right)\left(1+\frac{1}{10^3}\right)e^{\sum\limits_{p\geqq 13}\frac{1}{(p-1)^3}} < \frac{123}{122},$$

ferner

$$C > 0{,}577,$$
$$e^{2C} > 3{,}17,$$
$$(1-e^{-\frac{1}{2}\Theta})^2 > 0{,}0559,$$

also

$$34e^{2C}\,(1-e^{-\frac{1}{2}\Theta})^2 > 6{,}009.$$

Hieraus folgt

$$\frac{\frac{16}{3}\,\varrho\sigma(\Theta)}{34e^{2C}\,(1-e^{-\frac{1}{2}\Theta})^2} < \frac{\frac{16}{3}\cdot\frac{123}{122}\cdot 1{,}1174}{6{,}009} < 1.$$

Cambridge, Berlin und Prag, den 14. Januar 1936.

*