

Werk

Label: Article

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311028X_0065|log39

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

Poznámka k článku „O rozkladu rovinných kolineací“.

Jan Srb, Nový Bohumín.

(Došlo dne 21. května 1935.)

V článku „O rozkladu rovinných kolineací v produkt harmonických homologií*“) jsem ukázal, že každou (nesingulární) rovinnou kolineaci je možno rozložit v produkt nejvýše tří harmonických homologií. Ptejme se, není-li možno rovinnou kolineaci rozložit v produkt dvou harmonických homologií.

Je-li K kolineace dvou soumístných polí ϱ a ϱ' a má-li pole ϱ' přejít homologií H v soumístné pole ϱ_1 takové, aby kolineace polí ϱ a ϱ_1 byla homologií H_1 , musí střed homologie H padnout do středu perspektivnosti dvou lineárních bodových řad korespondujících v K a osa procházet samodružným bodem společným oběma řadám. Protože v rovinné kolineaci je vždy alespoň jeden bod samodružný, existují v ní vždy perspektivní sdružené řady a pak všechny tyto řady mají: 1. jediný, 2. více středů perspektivnosti. V případě 1. je střed vrcholem svazku samodružných paprsků. Existuje tedy řada samodružných bodů a leží-li střed na této řadě je kolineace typu $[(10)]$, neleží-li na ní je kolineace typu $[10]$. V případě 2. středy vyplňují přímku samodružnou, příslušnou k samodružnému průsečíku perspektivních řad. Padne-li tento průsečík vždy na přidruženou samodružnou přímku je kolineace typu $[(000)]$, nepadne-li na ní nikdy je kolineace typu $[000]$, nastanou-li oba případy zároveň je kolineace typu $[0(00)]$.

Uvažujme nejprve nejobecnější případ, kolineaci typu $[000]$. Jsou-li X, Y, Z samodružné reálné body neležící v přímce, je kolineace K určena dvěma korespondujícími body A, A' neležícími na žádné straně invariantního trojúhelníku. Nazveme-li průměty bodů A, A' z vrcholů X, Y, Z na strany tohoto $A_x, A'_x; A_y, A'_y; A_z, A'_z$ a průsečíky spojnice AA' se stranami S_x, S_y, S_z jest

*) Časopis 65 (1936), str. 77—83.

$$S_x S_y S_z A A' \stackrel{X}{\wedge} S_x Z Y A_x A'_x \stackrel{Y}{\wedge} Z S_y X A_y A'_y \stackrel{Z}{\wedge} Y X S_z A_z A'_z. \text{ Body } S_x,$$

S_y, S_z jsou středy perspektivnosti řad $XA_x, XA'_x; YA_y, YA'_y; ZA_z, ZA'_z$ a $A_x, A'_x; A_y, A'_y; A_z, A'_z$ body sdružené na stranách invariantního trojúhelníku. Zaujme-li přímka $S_x S_y S_z$ všechny možné polohy v rovině trojúhelníku XYZ , proběhnou body A, A' všechny dvojiny korespondujících bodů a jest vždy $S_x Z Y A_x A'_x \wedge \wedge Z S_y X A_y A'_y \wedge \wedge Y X S_z A_z A'_z$. Je tedy kolineace K určena mimo vrcholy X, Y, Z invariantního trojúhelníku třemi body na jedné jeho straně z nichž dva jsou sdružené v K a jeden je středem perspektivnosti řad určených těmi body a protějším vrcholem. Tyto tři body je možno volit libovolně, ale tak, aby nesplývaly žádné dva a žádný s bodem samodružným. Protože dále součin charakteristických dvojpoměrů kolineace K je $+1$, jsou možné dva případy: buď každé dva sdružené body na každé straně invariantního trojúhelníku neoddělují, nebo na jedné straně neoddělují a na dvou oddělují body samodružné. Buď strana YZ ta, na které se A_x, A'_x a Y, Z neoddělují. Zvolíme-li nyní homologii H harmonickou se středem S_x a osou jdoucí bodem X a oddělující harmonicky s bodem S_x body A_x, A'_x , bude přímka XA_x osou homologie H_1 a přímka YZ samodružnou. Aby také H_1 byla involuce, t. j. aby na YZ vznikla h. h. H involuce, je nutno, aby se touto vyměnily samodružné body Y, Z , tedy S_x musí být dvojným bodem involuce určené dvojicemi Y, Z a A_x, A'_x . Zvolme bod S_x tak, aby s X (tedy i s Y) odděloval body A_x, A'_x , tedy také s $S_y(S_z)$ body A, A' , ale aby nebyl dvojným bodem involuce Y, Z, A_x, A'_x . Z projektivnosti skupin 5 bodů $YZS_xA_xA'_x$ na YZ plyne, že není dvojným bodem žádné skupině na této přímce a z perspektivnosti skupin na ostatních dvou stranách s $S_x S_y S_z A A'$, že při této volbě S_x body A_y, A'_y a A_z, A'_z oddělují samodružné body XY, ZX . Není tedy možno tuto kolineaci rozložit v produkt dvou harmonických homologií. Při jiné volbě S_x je z této perspektivnosti patrné: je-li S_x, S_y nebo S_z dvojným bodem involuce $YZ, A_x A'_x; XY, A_z A'_z$ nebo $XZ, A_y A'_y$ v jedné skupině, pak je jím také ve všech skupinách na téže přímce, ale v žádné na zbývajících dvou přímkách. Jsou-li oba body Y, Z imaginární sdružené na reálné samodružné přímce x , promítneme z bodu X dvě lineární, neperspektivní, korespondující řady $(A), (A')$ na přímku x do řad $(A_x), (A'_x)$. Spojnice korespondujících bodů A, A' řad $(A), (A')$ protínají x v řadě (S) . Pak je $(A) \wedge (A'), (A_x) \stackrel{X}{\wedge} (A), (A'_x) \stackrel{X}{\wedge} (A')$ a protože x je jednou ze spojníc AA' je $(S) \wedge (A) \wedge (A')$ tedy $(S) \wedge (A_x) \wedge (A'_x)$. $AA'S$ je tečnou pravé kuželosečky obalené spojnici AA' . Splynou-li A_x a A'_x , prochází tečna bodem X a S splýne s oběma body. Mají

tedy po dvou projektivní řady (S) , (A_x) , (A'_x) tytéž samodružné body Y, Z a skupiny $SA_xA'_xYZ$ jsou opět projektivní. Protože reálná hyperbolická involuce může být určena dvojinou bodů reálných A_x, A'_x a dvojinou imaginárních sdružených Y, Z , platí pro tento typ totéž co bylo řečeno o typu s reálnými body samodružnými.

Jsou-li v kolineaci typu $[0(00)]$ X, Y reálné samodružné body na invariantní přímce x s indukovanou projektivností typu $[00]$ a y invariantní přímka s projektivností typu $[(00)]$, nelze volit střed $h. h. H$ na přímce x , protože perspektivní řady, mající na této přímce středy, procházejí samodružným bodem X , kterým by také musela procházet osa $h. h. H$. Pak ale projektivnost $[00]$ na přímce x při H invariantní, nemůže touto přejít nikdy v involuci. Zvolíme-li střed $h. h. H$ na přímce y , je tato při ní invariantní a aby projektivnost typu $[(00)]$ na y přešla v involuci, musí osa $h. h. H$ procházet bodem X . Tato osa musí však také procházet bodem Y jako průsečíkem řad se středem perspektivností na y . Je tedy nutno zvolit samodružnou přímku x za osu $h. h. H$. Aby také H_1 mohla být involuční, je nutno, aby souměrné projektivní řady indukované kolineací K na x byly involuční. O této a o kolineacích typu $[(10)]$ a $[(000)]$ je v zmíněném článku dokázáno, že je vždy možno rozložit je v produkt dvou harmonických homologií a zároveň je uvedena volba středů a os.

Neinvoluční kolineaci typu $[10]$ nelze nikdy rozložit v produkt dvou harmonických homologií. Střed $h. h. H$ by bylo nutno zvolit ve středu jejím, který je samodružným bodem řad indukovaných kolineací K na samodružných paprscích jím jdoucích. Tyto paprsky jsou tedy i při H invariantní a projektivnosti typu $[00]$, na nich kolineací K indukované, nemohou $h. h. H$ přejít v perspektivnosti involuční. Jinak by musela být osa dané homologie zvolena za osu $h. h. H$. V tomto případě opět nemůže přejít v involuci hyperbolická projektivnost indukovaná danou homologií na přímce spojující její střed se středem homologie H , která je také invariantní při H_1 . Tím je dokázáno: *Rovinnou kolineaci (nesingulární a neinvoluční) není obecně možno rozložit v produkt dvou harmonických homologií. V případech kdy rozklad možný je, je vždy možný systémem nekonečně mnoha dvojic a to buď jednomocným s invariantní přímkou a invariantním bodem (který může na této přímce ležet), nebo s dvěma přímkami a dvěma body invariantními nebo dvěma systémy dvojmocnými: prvním se svazkem invariantních paprsků, druhým s řadou invariantních bodů.* V případě prvním všechny středy dvojic $h. h.$ jsou dvojiny bodů invariantní přímky a osy dvojiny přímek svazku se středem v invariantním bodě. V případě druhém středy prvních (druhých) $h. h.$ z každé dvojiny jsou body invariantní přímky jedné a společná osa je druhá invariantní přímka. Společný