O rozkladu rovinných kolineací v produkt harmonických homologií.

Jan Srb, Nový Bohumín.

(Došlo dne 23. listopadu 1934.)

Podle poznámky v „Geometrii projektivní" str. 276, pana prof. J. Vojtěcha dokázal *M. W. Haskell* v Transactions Amer. math. soc. 7 (1906) analyticky, že každou rovinou kolineaci typu [000] je možno vytvořit jako produkt (obecně) tří involučních homologií. V následujícím dokazuji synthèticky: Každou kolineaci dvou soumístných polí lze rozložiti v produkt nejvýše tří harmonických homologií a uvádím konstrukce těchto homologií.

A. Kolineace nehomologické.

1. *Rovinnou kolineaci typu* [(000)] *lze vždy rozložit v produkt dvou harmonických homologií.* V kolineaci dvou soumístných polí ϱ a ϱ' typu [(000)], t. j. s jednou samodružnou přímkou a jedním samodružným bodem na ní, buď X bodem samodružným a jím jdoucí x samodružnou přímkou s indukovanou parabolickou projektivností korespondujících bodů. Dvě libovolné nesamodružné řady bodové na korespondujících přímkách a, a' polí ϱ, ϱ' jdoucích bodem samodružným X mají střed perspektivnosti S (jiný než X) na x. Zvolme tento bod středem a přímku o jdoucí bodem X tak, aby $Dp\,(aa'xo) = -1$, osou harmonické homologie. Touto přejde pole ϱ' v soumístné pole ϱ_1, kolineárné se soumístným polem ϱ. Řada bodová na a' přejde v korespondující řadu na a. Kolineace polí ϱ, ϱ_1 má na přímce a řadu samodružných bodů, jest tedy homologií. Jsou-li $S \equiv O'$ body polí ϱ, ϱ' a S', O korespondující body polí ϱ', ϱ na přímce x, jest podle známé vlastnosti parabolicky projektivních soumístných řad bodových $Dp\,(XSS'O) = -1$. Harmonickou homologií přejde proto bod S' v bod $S_1 \equiv O$. Má tedy homologie polí ϱ, ϱ_1 na samodružné přímce x dvojici bodů $S \equiv O_1$ a $S_1 \equiv O$ obapolně i odpovídajících a jest proto homologií harmonickou.

2. *Rovinnou kolineaci typu* [000] *lze vždy jedinou harmonickou homologií převést v kolineaci typu* [(000)]. V rovinné kolineaci polí

ϱ, ϱ' typu [000] druhu prvého, t. j. s reálným invariantním trojúhelníkem, buďte X, Y, Z reálné samodružné body a A, A' dvojina korespondujících bodů neležících na žádné samodružné přímce. Průsečíky sdružených paprsků svazků indukovaných kolineací v bodech A, A' vytvoří pravou kuželosečku k procházející body A, A', X, Y, Z. Bod P buď pólem přímky AA' ke k. Je-li bod L průsečík této přímky s jednou stranou, ku př. XY, invariantního trojúhelníka a prochází-li spojnice bodu L a protějšího vrcholu Z invariantního trojúhelníka pólem P, zvolme na LP libovolný bod S (jiný než L a Z) středem a tečnu o v bodě Z ke k osou harmonické homologie. Touto přejde pole ϱ' v soumístné pole ϱ_1 kolineárné se soumístným ϱ. Přímka ZA' přejde v přímku ZA. Protože střed S harmonické homologie leží na přímce LZ ne však v bodě L, který je středem perspektivnosti řad bodových indukovaných na přímkách ZA, ZA' kolineací polí ϱ a ϱ', neprochází jím mimo ZS žádná přímka spojující korespondující body obou řad. Má tedy kolineace polí ϱ, ϱ_1 na samodružné přímce ZA jediný samodružný bod Z. Kdyby v této kolineaci existovala ještě jedna přímka samodružná, musela by procházet bodem Z. V obou soumístných svazcích paprskových indukovaných kolineací polí ϱ, ϱ' v samodružném bodě Z není však mimo ZA a ZA' žádných dvou korespondujících paprsků, které by harmonicky oddělovaly střed S a osu o harmonické homologie. Kdyby existovaly takové přímky b, b', protínaly by kuželosečku k v bodech B, C'. Přímka BC' protla by přímku AA' v pólu P' poláry ZP a přímky AC' a BA' by se protínaly v bodě ležícím na této poláře. Tento bod by musel zároveň ležet na přímce XY, která je osou obou soumístných projektivních kvadratických řad na k, perspektivních s oběma soumístnými svazky se středem Z. Tedy obě přímky AC' a BA' by se protínaly v bodě L na AA'. Nemohou proto harmonickou homologií (S, o), mimo přímky AZ a $A'Z$, splynout žádné dvě korespondující přímky kolineárných polí ϱ, ϱ' a kolineace soumístných polí ϱ, ϱ_1 je typu [(000)]. Nechť nyní neprochází žádná přímka, spojující průsečík přímky AA' a strany s protějším vrcholem invariantního trojúhelníku, pólem P. Přímky spojující sdružené body na korespondujících paprscích svazků indukovaných kolineací polí ϱ, ϱ' v bodech A, A' obalí řadu kuželoseček se společnými tečnami AA', XY, YZ, ZX a řadou $[S]$ dotyčných bodů na AA', projektivnou s oběma svazky $A[a]$, $A'[a']$. Probíhá-li totiž bod M kvadratickou řadu na k, je každý trojúhelník MAA' opsán jedné kuželosečce řady a podle limitního případu věty Desargovy promítá se vrchol M a dotyčný bod S příslušné kuželosečky na AA' z bodu Z dvojinou paprskové involuce určené pevnými dvojinami XZ, YZ a AZ, $A'Z$. Jest tedy $[M] \barwedge [S]$, $[M] \overline{\barwedge} [a']$ proto $[S] \barwedge [a']$. Promítněme řadu $[S]$ z bodu P paprskovým svazkem $[a''] \barwedge [a']$. Společnému paprsku

$A'P$ obou svazků koresponduje ve svazku $[a'']$ paprsek PA, ve svazku $[a']$ paprsek AA'. Oba svazky jsou tedy prostě projektivní a vytvoří jednoduchou kuželosečku h procházející bodem A' na k. PA' je tečnou kuželosečky k v A' a AA' tečnou kuželosečky h v tomtéž bodě. Mají tedy h a k ve společném bodě A' různé tečny a protínají se proto ještě alespoň v jednom reálném bodě M, ne však v některém z bodů A, X, Y, Z, protože paprskům svazku $[a']$, procházejícím bodem samodružným korespondují ve svazku $[a'']$ přímky spojující bod P s průsečíkem AA' a protější strany invariantního trojúhelníka, které podle předpokladu neprochází tímto samodružným bodem a tečna kuželosečky h v bodě P prochází bodem A. Zvolme harmonickou homologii středem $S = (PM, AA_1)$ a osou o tečnou kuželosečky k v bodě M. Touto přejde pole ϱ' v soumístné pole ϱ_1 kolineárné se soumístným polem ϱ. Přímka $a' = A'M$ přejde v $a = AM$ a bod A' v bod A. V rovinné kolineaci polí ϱ, ϱ_1 jsou tedy přímka a a bod A prvky samodružné. Na přímce a však není, mimo bod A, jiného samodružného bodu protože střed harmonické homologie S je dotyčným bodem pravé kuželosečky obalené spojnicemi korespondujících bodů polí ϱ, ϱ' na přímkách a, a', tedy mimo tečnu AA' jím neprochází žádná přímka spojující sdružené body přímek a, a'. Kdyby v kolineaci polí ϱ, ϱ_1 existovala ještě jedna samodružná přímka, procházela by bodem A. Osa o harmonické homologie je tečnou kuželosečky k v bodě M nemá s ní tedy jiného společného bodu, t. j. pouze přímky a, a' odpovídající si ve svazcích $[a]$, $[a']$ se na ní protnou a splynou touto transformací. Jsou tedy bod A a jím jdoucí přímka a jedinými samodružnými prvky kolineace polí ϱ a ϱ_1. Důkaz i konstrukce jsou platné i pro kolineaci typu [000] druhého druhu, t. j. s třemi různými body samodružnými, jedním reálným a dvěma imaginárními sdruženými. V tomto případě jen nikdy neprochází přímka spojující bod P s průsečíkem přímky AA' a přímky samodružné XY, samodružným bodem Z. Je-li Z reálným samodružným bodem na k není tato protata přímkou XY reálně. Padne proto vždycky přímka spojující pól reálné sečny AA' a průsečík této s přímkou XY do té části roviny, rozdělené tečnami z bodu P ke k vedenými, ve které neleží k. Paprsková involuce pak, kterou se z bodu Z promítají řady $[M]$ a $[S]$ je určena jen jednou družinou reálných paprsků ZA, ZA'. Kvadratická však, kterou vytíná na k je určena středem $L = (XY, AA')$.

3. *Rovinnou kolineaci typu* [(00)0] *je vždy možno buď jedinou harmonickou homologií převést v kolineaci typu* [(000)], *nebo rozložit v produkt dvou harmonických homologií.* V kolineaci dvou soumístných polí ϱ, ϱ' typu [(00)0], t. j. se dvěma různými reálnými přímkami a dvěma různými reálnými body samodružnými, buďte X, Y body, přímka x, procházející bodem X (ne však Y) a $y = XY$

přímkami samodružnými s indukovanými projektivnostmi typu [(00)] a [00]. A, A' buďte dva korespondující body, které neleží na žádné přímce samodružné. Sestrojme opět jednoduchou kuželosečku k vytvořenou průsečíky korespondujících paprsků svazků indukovaných touto kolineací v bodech A a A', která prochází body A, A', Y a v bodě X se dotýká přímky x. Padne-li pól P poláry AA' ke k na samodružnou přímku y (na x padnout nemůže), jest $Dp\,(XA, XA', x, y) = -1$, tedy soumístné svazky paprskové, indukované kolineací v samodružném bodě X, jsou involuční. Zvolme harmonickou homologii osou $o \equiv y$ a libovolným bodem S na x (mimo X) jako středem. Touto přejde pole ϱ' v soumístné pole ϱ_1 kolineárné s ϱ. Kolineace polí ϱ, ϱ_1 je homologie protože všechny sdružené paprsky svazků se společným středem X splynou a tato má svazek samodružných paprsků. Podle odst. 1 přejde projektivnost typu [(00)] na samodružném paprsku x v projektivnost involuční. Homologie polí ϱ, ϱ_1 je tedy harmonická.

Nepadne-li bod P na přímku y provede se konstrukce i důkaz jako u druhé části odstavce 2 (typ [000] prvého druhu), kde je jen třeba psáti místo samodružného bodu Z samodružný bod X, místo samodružných přímek ZX, ZY přímky x, y a upraviti důkaz, že druhým průsečíkem křivek h a k není bod samodružný, následujícím způsobem. Paprsku $A'Y$ svazku $[a']$ koresponduje ve svazku $[a'']$ paprsek PK, kde $K = (AA', x)$. Pak je XP polárou bodu K, AA' polárou bodu P, tedy PK polárou bodu $R = (XP, AA')$. V polárném trojúhelníku PKR protínají strany PR (prochází X) a AA' kuželosečku k reálně, tedy PK ji nikdy reálně neprotíná. Paprsku pak XA' svazku $[a']$ odpovídá ve svazku $[a'']$ paprsek spojující bod P s průsečíkem přímek AA' a y, který nemůže procházet bodem X ležícím také na y, protože podle předpokladu bod P nepadne na y.

B. Homologie.

1. Dokažme nejprve pomocnou větu: *Transformujeme-li jednu ze dvou hyperbolicky projektivních bodových řad na přímce všemi hyperbolickými involučními projektivnostmi s jedním samodružným bodem společným, který není zároveň samodružným bodem obou řad, jsou samodružné body projektivností tvořených řadou stálou a řadami transformovanými, dvojinami téže involuce.* Jednou družinou této involuce je společný bod samodružný všech involucí jako bod řady transformované a v původní projektivnosti korespondující bod řady pevné. Buďte S, O samodružné a A, A' korespondující body soumístných projektivních řad na přímce r. Z bodu na kuželosečce k promítněme tyto řady do kvadratických projektivních řad na k se samodružnými body S_1, O_1 a dvojicí bodů korespondujících A_1, A'_1. Řadu bodovou $[M]$ na tečně t kuželosečky k v bodě A_1, promítněme z bodů S_1 a O_1 do perspektivních řad kvadratických

$[S_2]$ a $[O_2]$ na k a konečně tyto řady z bodu A_1 do řad $[P]$, $[Q]$ na přímky $p = (A'_1S_1)$, $q = (A'_1O_1)$. V projektivních řadách $[P]$, $[Q]$ je společný bod A'_1 obou přímek p, q sám sobě přidružen. Jsou tedy obě řady perspektivní podle středu K. Vedeme-li z bodů řady $[M]$ na t ještě druhé tečny ke k, tvoří jejich dotyčné body kvadratickou řadu $[M_1]$. Jsou-li M, M_1, S_2, O_2, P, Q korespondující body uvedených řad, jest patrně $Dp\,(A'_1M_1O_1O_2) = -1$, $Dp\,(A'_1M_1S_1S_2) = -1$, tedy body S_1 a O_1 přejdou v body S_2 a O_2 involucí se samodružnými body A'_1 a M_1. Bodům S_1, O_1, A_1 v původní projektivnosti korespondující body S_1, O_1, A'_1 přejdou involucemi s jedním samodružným bodem společným A'_1 a druhým M_1 řady $[M_1]$ v body S_2, O_2 řad $[S_2]$, $[O_2]$ a A'_1. Korespondující body $P = (A_1S_2, A'_1S_1)$ a $Q = (A_1O_2, A'_1O_1)$ určují osu PQ projektivních kvadratických řad S_1, O_1, A_1 a S_2, O_2, A'_1 na k. Protože řady $[P]$, $[Q]$ jsou perspektivní, procházejí všechny osy PQ jejich středem perspektivnosti K a průsečíky těchto os s k, t. j. samodružné body řady pevné S_1, O_1, A_1 a projektivních s ní řad transformovaných S_2, O_2, A'_1, tvoří družiny téže involuce na k. Oba soumístné projektivní paprskové svazky jimiž se promítají řady $[S_2]$, $[O_2]$, tedy také $[P]$, $[Q]$, z bodu A_1, mají jediný samodružný paprsek $A_1A'_1$ (paprsku A_1O_1 odpovídá A_1S_1). Leží tedy na něm střed perspektivnosti řad $[P]$, $[Q]$, který je zároveň středem kvadratické involuce dvojic samodružných bodů.

Rovinná homologie (neharmonická) polí ϱ a ϱ' buď dána středem S, osou o a dvěma korespondujícími body A, A'. Přímku o_1 jdoucí bodem A', neprocházející bodem S jinak libovolnou, zvolme společnou osou všech harmonických homologií jichž středy vyplňují přímku $r = AA'$. Přímka r zůstane při všech harmonických homologiích invariantní a podle pomocné věty jsou na ní samodružné body všech rovinných kolineací tvořených polem ϱ a těmi, která vzniknou transformací pole ϱ' těmito harmonickými homologiemi, dvojinami involuce z nichž jednou je A, A'. Bodem S veďme přímku s (jinou než r) a promítněme na ni z bodu $X = (o, o_1)$ body A, A' do bodů B, B' a involuci samodružných bodů do involučních řad $[R]$, $[T]$. Není-li bod S samodružným bodem involuce na r, je vždy možno nalézti alespoň jednu dvojici R, T korespondujících bodů řad $[R]$, $[T]$ takovou, že bod R je samodružným bodem involuce bodové na přímce s určené dvojinami bodů S, T a B, B'. Abychom to dokázali, promítněme z bodu kuželosečky h na tuto body B, B' do B_1, B'_1, bod S do bodu S_3 a řady $[R]$, $[T]$ do kvadratických řad $[R']$, $[T']$. Dále buď bod E pólem přímky $B'B'_1$ k h a bod L na $B_1B'_1$ středem kvadratické involuce na h. Z bodu S_3 na h se obě řady $[R']$ a $[T']$ promítají projektivními soumístnými svazky paprskovými $[r']$ a $[t']$. Protíná-li svazek paprskový $[t']$ přímku $B_1B'_1$ v řadě bodové $[T_1]$, vytvoří poláry bodů této řady svazek

$E[t'']$ s ní a tedy i se svazkem $[r']$ projektivní. Společnému paprsku S_3E obou svazků $[r']$ a $[t'']$ odpovídá ve svazku $[r']$ paprsek S_3L. Protože podle předpokladu S není samodružným bodem involuce na r, nemůže bod L být průsečíkem tečny v bodě S_3 k h s přímkou $B_1B'_1$, ani jeho harmonickým pólem $L' = (S_3E, B_1B'_1)$ na této přímce. Jsou tedy svazky $[r']$ a $[t'']$ prostě projektivní a vytvoří průsečíky korespondujících paprsků pravou kuželosečku l jejíž tečna, v jejím průsečíku S_3 s kuželosečkou h, není tečnou této. Protnou se proto kuželosečky h a l, mimo bod S_3, ještě alespoň v jednom reálném bodě R'. Protože paprskům S_3B_1 a $S_3B'_1$ svazku $[r']$ odpovídají paprsky EB'_1 a EB_1 svazku $[t'']$, není tento průsečík žádným z bodů B_1, B'_1. Koresponduje-li bodu R' v kvadratické involuci na h bod T', protíná se tečna v bodě R' kuželosečky h s přímkou S_3T' na přímce $B_1B'_1$ a tedy průměty bodů T' a R' na přímku s jsou hledanou dvojinou T, R. Promítněme body T, R z bodu X na přímku r do bodů Y, Z a zvolme harmonickou homologii osou o_1 a středem O_1 na r takovým, aby body Y a Z byly samodružnými body řad indukovaných na invariantní přímce r kolineace polí ϱ, ϱ_1 (ϱ_1 je pole, které vzniklo transformací soumístného pole ϱ' touto harmonickou homologií). V kolineaci polí ϱ, ϱ_1 jsou body X, Y, Z, samodružné a body B, B' korespondující, které neleží na žádné samodružné přímce. Zvolme nyní druhou harmonickou homologii středem $O_2 \equiv R$ a osou $o_2 = (YR')$, kde bod R' je druhým samodružným bodem involuce (BB', TS) na s. Touto přejde pole ϱ_1 v soumístné pole ϱ_2 kolineárné se soumístným ϱ. Bod $O_2 = (BB', XZ)$ je středem perspektivnosti řad korespondujících bodů polí ϱ, ϱ_1 na přímkách $b = (YB)$, $b' = (YB')$ a s přímkou o_2 odděluje přímky b, b' harmonicky. Bod O_2 a průsečík osy o_2 se samodružnou přímkou XZ oddělují také harmonicky oba samodružné body X, Z. Přejde tedy druhou harmonickou homologií řada bodová na b' v řadu korespondujících bodů na b, bod X v bod $X_2 \equiv Z$ a bod Z v $Z_2 \equiv X$. Kolineace polí ϱ a ϱ_2 je tedy harmonickou homologií, protože má řadu samodružných bodů na přímce b a na samodružné přímce XZ dva body $X \equiv Z_2$, $Z \equiv X_2$ obapolně si odpovídající. Je-li bod S samodružným bodem involuce na s, zvolíme O_1 v kterémkoliv bodě, mimo S, A, A', přímky r a při konstrukci druhé harmonické homologie zaměníme v konstrukci právě uvedené bod R za S, Y za X, přímku XZ za XY a involuci na s za involuci na r.

2. V kolineaci soumístných polí ϱ, ϱ' typu $[(1, 0)]$, t. j. v homologii s osou o procházející středem S, stačí zvolit střed $S_1 \equiv S$ a libovolnou nesamodružnou přímku o_1 osou harmonické homologie. Svazek samodružných paprsků se středem S je při této harmonické homologii invariantní a na jeho paprsku o vznikne involuční řada korespondujících bodů polí ϱ, ϱ_1 (přešlo-li pole ϱ' harmonickou