Werk

Label: Article

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311028X_0065|log33

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Sur une propriété des fonctions continues.

Vojtěch Jarník, Praha.

(Recu le 5 novembre 1935.)

§ 1. Introduction.

Soit C l'ensemble de toutes les fonctions réelles d'une variable réelle qui sont définies et continues dans l'intervalle $\langle 0, 1 \rangle$.[1]) En définissant, pour $f \epsilon C$, $g \epsilon C$, la distance $\varrho(f, g)$ par la formule

$$\varrho(f, g) = \operatorname*{Max}_{0 \leqq x \leqq 1} | f(x) - g(x) |,$$

C devient un espace métrique complet.

Alors, on a le théorème suivant[2]):

Théorème I. *Soit $\varphi(h)$ une fonction définie pour* $-\infty < h < \infty$ *et telle que*

$$h\,\varphi(h) > 0 \text{ pour } h \neq 0, \ \lim_{h=0} \varphi(h) = 0.$$

Alors il existe un résiduel $A_1 \subset C$ tel que chaque fonction $f \epsilon A_1$ jouisse des propriétés suivantes:

1. $$x \epsilon (0, 1) \Longrightarrow \limsup_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(h)} = \infty,$$

$$\liminf_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(h)} = -\infty.$$

2. *Pour presque toutes les valeurs $x \epsilon (0, 1)$, on a*

$$\limsup_{h=0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(h)} = \limsup_{h=0-} \frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(h)} = \infty,$$

---

1) Tous les nombres de cette note sont réels; (a, b) signifie toujours un intervalle ouvert, $\langle a, b \rangle$ un intervalle fermé. $a \epsilon A$ signifie: a est un élément de l'ensemble A; la formule $\mathfrak{A} \Longrightarrow \mathfrak{B}$ signifie „$\mathfrak{A}$ implique $\mathfrak{B}$".

2) Pour la démonstration, voir ma note „Über die Differenzierbarkeit stetiger Funktionen", Fundam. Math. **21** (1933) pp. 48—58, Satz II. Toutes les notions relatives, concernant les sousensembles de C, doivent être interprétées relativement à l'espace C. Un ensemble $C_1 \subset C$ est appelé un résiduel, si l'ensemble $C - C_1$ est de première catégorie. La notation $\limsup\limits_{h=0+}$ resp. $\limsup\limits_{h=0-}$ signifie la limite supérieure du côté droit resp. du côté gauche au point $h = 0$ etc.

$$\liminf_{h=0+} \frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(h)} = \liminf_{h=0-} \frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(h)} = -\infty.$$

3. $$0 \leqq x < 1 \Longrightarrow \limsup_{h=0+} \left| \frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(h)} \right| = \infty,$$

$$0 < x \leqq 1 \Longrightarrow \limsup_{h=0-} \left| \frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(h)} \right| = \infty.$$

Dans le cas particulier $\varphi(h) = h$, j'ai démontré[3]) le théorème suivant qui donne un résultat beaucoup plus précis que le résultat 1 du théorème I:

Théorème II. *Il existe un résiduel $A \subset C$ tel que chaque fonction $f \in A$ jouisse de la propriété suivante: étant donnés deux nombres x, a tels que $0 < x < 1$, $-\infty \leqq a \leqq \infty$, il existe une suite $h_1, h_2, \ldots$ telle que*

$$h_n \neq 0, \; h_n \to 0, \; \frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n} \to a.$$

En d'autres mots, le quotient

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

présente, dans chaque point $x \in (0, 1)$, une indétermination complète.[4])

Dans la note présente, nous allons démontrer que le théorème II reste vrai si l'on y remplace le dénominateur h par $\varphi(h)$, $\varphi(h)$ étant une fonction quelconque continue et impaire qui est positive pour $h > 0$; en d'autres mots, nous allons démontrer le théorème suivant:

Théorème III. *Soit $\varphi(h)$ une fonction impaire et continue pour $-\infty < h < \infty$ (donc $\varphi(0) = 0$); soit $\varphi(h) > 0$ pour $h > 0$. Soit A l'ensemble de toutes les fonctions $f \in C$ qui jouissent de la propriété suivante: étant donnés deux nombres x, a tels que $0 < x < 1$, $-\infty \leqq$ $\leqq a \leqq \infty$, il existe une suite $h_1, h_2, \ldots$ telle que*

---

[3]) L. c.[2], Satz I, 1.

[4]) Remarquons que le théorème II cesse d'être vrai si l'on exige p. ex. $h_n > 0$. En effet, soit $f \in C$; si f est non décroissante dans $\langle 0, 1 \rangle$, on a

$$\liminf_{h=0+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geqq 0,$$

pour chaque $x \in (0, 1)$; dans le cas contraire, il existe trois nombres $0 <$ $< c \leqq \zeta < d < 1$ tels que $f(\zeta) = \operatorname{Max}_{c \leqq x \leqq d} f(x)$, d'où

$$\limsup_{h=0+} \frac{f(\zeta+h)-f(\zeta)}{h} \leqq 0.$$

$$h_n \neq 0, \ h_n \to 0, \ \frac{f(x+h_n)-f(x)}{\varphi(h_n)} \to a. \tag{1}$$

Alors A est un résiduel.

§ 2. Démonstration du théorème III.

Remarquons, tout d'abord, que le théorème III est une conséquence immédiate des résultats connus, si

$$\limsup_{h=0} \frac{\varphi(h)}{h} = \infty.$$

En effet, j'ai démontré qu'il existe, dans ce cas, un résiduel $A_2 \subset C$ tel que les relations $f \in C$, $x \in (0, 1)$ entraînent

$$\limsup_{h=0+} \frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(h)} \geqq 0, \ \liminf_{h=0+} \frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(h)} \leqq 0,$$

$$\limsup_{h=0-} \frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(h)} \geqq 0, \ \liminf_{h=0-} \frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(h)} \leqq 0.[5]$$

En posant $A = A_1 A_2$ (A est un résiduel), on voit d'après ce résultat et d'après le théorème I 1 que, pour $f \in A$ et pour $0 < x < 1$, il n'y a que quatre cas possibles:

α) $$\limsup_{h=0+} \frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(h)} = \infty, \ \liminf_{h=0+} \frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(h)} = -\infty.$$

β) $$\limsup_{h=0-} \frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(h)} = \infty, \ \liminf_{h=0-} \frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(h)} = -\infty.$$

γ) $$\limsup_{h=0+} \frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(h)} = \infty, \ \liminf_{h=0-} \frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(h)} = -\infty,$$

$$\liminf_{h=0+} \frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(h)} \leqq 0, \ \limsup_{h=0-} \frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(h)} \geqq 0.$$

δ) $$\limsup_{h=0-} \frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(h)} = \infty, \ \liminf_{h=0+} \frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(h)} = -\infty,$$

$$\liminf_{h=0-} \frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(h)} \leqq 0, \ \limsup_{h=0+} \frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(h)} \geqq 0.$$

Dans chacun de ces quatre cas, il est évident que l'on peut faire correspondre, à chaque nombre a ($-\infty \leqq a \leqq \infty$), une suite $h_1, h_2, \ldots$ telle que l'on ait (1).

Donc, dans tout ce qui suit, nous allons supposer que

$$\limsup_{h=0} \frac{\varphi(h)}{h} < \infty.$$

[5]) L. c.[2]) Satz III; le théorème y est formulé seulement pour $h = 0+$, mais le cas $h = 0-$ est évidemment symétrique.

Soient donnés trois nombres n, α, β, où $n > 2$ est un nombre entier, $\alpha < \beta$, $\alpha\beta > 0$ et soit $A(n, \alpha, \beta)$ l'ensemble de toutes les fonctions $f \in C$ qui jouissent de la propriété suivante: à chaque nombre $x \in \left\langle \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right\rangle$, il correspond un nombre h tel que

$$0 < |h| < \frac{1}{n}, \quad \alpha < \frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(h)} < \beta.$$

Chaque ensemble $A(n, \alpha, \beta)$ est un ensemble *ouvert*. En effet, soit $f_k \in C - A(n, \alpha, \beta)$ pour $k = 1, 2, \ldots$ et soit $f \in C$, $\varrho(f_k, f) \to 0$ pour $k \to \infty$. Alors il existe une suite $x_1, x_2, \ldots$ telle que $x_k \in \left\langle \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right\rangle$ et telle que

$$0 < |h| < \frac{1}{n} \Rightarrow \left| \frac{f_k(x_k + h) - f_k(x_k)}{\varphi(h)} - \frac{\alpha + \beta}{2} \right| \geqq \frac{\beta - \alpha}{2}.$$

Sans restreindre la généralité, on peut supposer que $\lim x_k = \xi$ existe (autrement, il suffit de considérer une suite partielle de la suite $f_1, f_2, \ldots$); alors on a $\xi \in \left\langle \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right\rangle$ et

$$0 < |h| < \frac{1}{n} \Rightarrow \left| \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{\varphi(h)} - \frac{\alpha + \beta}{2} \right| \geqq \frac{\beta - \alpha}{2},$$

c'est-à-dire $f \in C - A(n, \alpha, \beta)$. Donc $C - A(n, \alpha, \beta)$ est fermé, $A(n, \alpha, \beta)$ est un ensemble ouvert.

Ensuite, on a

$$\prod_{n,\alpha,\beta} A(n, \alpha, \beta) \subset A,$$

où n doit parcourir tous les nombres entiers > 2 et où α, β doit parcourir tous les couples de nombres rationnels tels que $\alpha < \beta$, $\alpha\beta > 0$. En effet, soit

$$0 < x < 1, \quad -\infty \leqq a \leqq \infty, \quad f \in \prod_{n,\alpha,\beta} A(n, \alpha, \beta);$$

choisissons une suite des couples de nombres rationnels α_n, β_n telle que

$$\alpha_n < \beta_n, \quad \alpha_n\beta_n > 0, \quad \alpha_n \to a, \quad \beta_n \to a.$$

Si n est asset grand, on a

$$x \in \langle 1/n, 1 - 1/n \rangle, \quad f \in A(n, \alpha_n, \beta_n),$$

donc il existe un h_n tel que

$$0 < |h_n| < \frac{1}{n}, \quad \alpha_n < \frac{f(x + h_n) - f(x)}{\varphi(h_n)} < \beta_n,$$

d'où

$$h_n \neq 0, \ h_n \to 0, \ \frac{f(x+h_n)-f(x)}{\varphi(h_n)} \to a,$$

donc $f \in A$. Pour démontrer notre théorème III, il suffit de démontrer que les ensembles $A\ (n, \alpha, \beta)$ sont denses; car le produit d'un système dénombrable d'ensembles denses et ouverts est un résiduel. Il suffit donc de démontrer le lemme suivant:

Lemme. *Soit n un nombre entier, $n > 2$, $0 < \alpha < \beta$*[6]*; soit $\varphi(h)$ une fonction impaire et continue pour $-\infty < h < \infty$, $\varphi(h) > 0$ pour $h > 0$,*

$$\limsup_{h=0} \frac{\varphi(h)}{h} < \infty.$$

Alors l'ensemble $A\ (n, \alpha, \beta)$, défini comme plus haut, est dense dans l'espace C.

Dans la démonstration, nous allons distinguer deux cas:

Premier cas: $$\liminf_{h=0} \frac{\varphi(h)}{h} = 0.$$

Deuxième cas: $$0 < \liminf_{h=0} \frac{\varphi(h)}{h} \leqq \limsup_{h=0} \frac{\varphi(h)}{h} < \infty.$$

Démonstration du lemme dans le premier cas. Soit $g \in C$, $\varepsilon > 0$. Il faut démontrer qu'il existe une fonction F telle que

$$\varrho(F, g) < \varepsilon, \ F \in A(n, \alpha, \beta).$$

Il existe évidemment une fonction $k \in C$ jouissante des propriétés suivantes:

1. $$\varrho(k, g) < \tfrac{1}{4}\varepsilon.$$

2. Il existe un nombre entier s et $6s + 1$ nombres x_i $(i = 0, 1, \ldots, 2s)$, c_i, d_i $(i = 0, 1, \ldots, 2s - 1)$ tels que

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{2s-1} < x_{2s} = 1,$$
$$k(x) = c_i x + d_i \text{ pour } x_i \leqq x \leqq x_{i+1} \ (i = 0, 1, \ldots, 2s-1),$$
$$c_{2i} > 0, \ c_{2i+1} < 0 \text{ pour } i = 0, 1, \ldots, s-1. \tag{2}$$

Posons $\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ et choisissons un nombre λ tel que

$$0 < \lambda < \tfrac{1}{4} \min_{0 \leqq i \leqq 2s-1} (x_{i+1} - x_i), \tag{3}$$

$$x \in \langle 0, 1 \rangle, \ x' \in \langle 0, 1 \rangle, \ | x - x' | \leqq \lambda \Rightarrow | k(x) - k(x') | < \tfrac{1}{4}\varepsilon. \tag{4}$$

---

[6]) Le cas $\alpha < \beta < 0$ peut être ramené au cas considéré dans le lemme, en remplacant chaque fonction $f \in C$ par $-f$.

Choisissons ensuite un nombre h_0 tel que

$$\left.\begin{array}{l} 0 < h_0 < \dfrac{1}{2n},\ h_0 < \frac{1}{8}\lambda,\ \gamma \dfrac{\varphi(h_0)}{h_0} < \min\limits_{0 \leqq i \leqq 2s-1} |c_i|, \\ 2h_0 \max\limits_{0 \leqq i \leqq 2s-1} |c_i| < \frac{1}{8}\varepsilon,\ \gamma\, \varphi(h_0) < \frac{1}{16}\varepsilon. \end{array}\right\} \tag{5}$$

Alors, pour chaque i $(0 \leqq i \leqq 2s-2)$, l'équation

$$c_i \tau_i + c_{i+1}(1 - \tau_i) = \gamma \frac{\varphi(h_0)}{h_0}$$

possède une solution

$$\tau_i = \frac{c_{i+1} - \gamma\, \varphi(h_0)\, h_0^{-1}}{c_{i+1} - c_i},$$

telle que $0 < \tau_i < 1$. En définissant les nombres y_i, z_i $(0 \leqq i \leqq 2s-1)$ par les équations

$$y_0 = 0,\ z_{2s-1} = 1,\ x_{i+1} - z_i = \lambda \tau_i,$$
$$y_{i+1} - x_{i+1} = \lambda(1 - \tau_i)\ (0 \leqq i \leqq 2s-2),$$

on voit que

$$y_{i+1} - z_i = \lambda,\ (0 \leqq i \leqq 2s-2), \tag{6}$$

$$c_i(x_{i+1} - z_i) + c_{i+1}(y_{i+1} - x_{i+1}) = \lambda\gamma \frac{\varphi(h_0)}{h_0}\ (0 \leqq i \leqq 2s-2),$$

donc d'après (3)

$$\begin{array}{l} 0 = x_0 = y_0 < z_0 < x_1 < y_1 < z_1 < x_2 < y_2 < \dots \\ \dots < z_{2s-2} < x_{2s-1} < y_{2s-1} < z_{2s-1} = x_{2s} = 1, \end{array} \tag{7}$$

$$k(y_{i+1}) - k(z_i) = \gamma \frac{\varphi(h_0)}{h_0}(y_{i+1} - z_i)\ (0 \leqq i \leqq 2s-2). \tag{8}$$

On peut alors définir (voir (7), (8)) une fonction $f \in C$ par les équations suivantes:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = k(x) = c_i x + d_i \text{ pour } y_i \leqq x \leqq z_i\ (0 \leqq i \leqq 2s-1), \\ f(x) = \gamma \dfrac{\varphi(h_0)}{h_0} x + e_i \text{ pour } z_i \leqq x \leqq y_{i+1}\ (0 \leqq i \leqq 2s-2). \end{array}\right\} \tag{9}$$

D'après (6), (4) on a $\varrho(f, k) < \frac{1}{4}\varepsilon$, donc $\varrho(f, g) < \frac{1}{2}\varepsilon$.

Choisissons un nombre entier $q > 0$ tel que $h_0 > 2/q$ et tel que

$$|h - h_0| \leqq \frac{1}{q} \Rightarrow \alpha < \gamma \frac{\varphi(h_0)}{h_0} \cdot \frac{h}{\varphi(h)} < \beta.\text{[7]} \tag{10}$$

---

[7]) La fonction $\varphi(h)\, h^{-1}$ étant paire, on aura aussi

$$||h| - h_0| \leqq \frac{1}{q} \Rightarrow \alpha < \gamma \frac{\varphi(h_0)}{h_0} \cdot \frac{h}{\varphi(h)} < \beta;$$

nous allons souvent employer tacitement des remarques de ce genre.

Définissons ensuite r par les conditions

$$r \text{ entier}, \quad \frac{r-1}{q} \leqq h_0 < \frac{r}{q}, \tag{11}$$

d'où (voir (5))

$$r > 2, \quad \frac{r-1}{q} > \frac{h_0}{2}, \quad \frac{r}{q} < 2h_0 < \frac{1}{n}, \tag{12}$$

et définissons la fonction $w \in C$ comme il suit:

$$w\left(\frac{2k}{2q}\right) = 0 \; (k = 0, 1, \ldots, q),$$

$$w\left(\frac{2k+1}{2q}\right) = \frac{\varepsilon}{2} \; (k = 0, 1, \ldots, q-1),$$

$w(x)$ est une fonction linéaire dans chaque intervalle $\left\langle \frac{k}{2q}, \frac{k+1}{2q} \right\rangle$ $(k = 0, 1, \ldots, 2q-1)$. On a donc $f + w \in C$, $\varrho(g, f + w) < \varepsilon$ et il nous suffit de démontrer l'énoncé suivant:

Enoncé E: A chaque $x \in \left\langle \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right\rangle$, *on peut faire correspondre un nombre* h *tel que*

$$\frac{r-1}{q} \leqq |h| \leqq \frac{r}{q}, \; f(x+h)+w(x+h) - f(x) - w(x) = \gamma h \frac{\varphi(h_0)}{h_0}. \tag{13}$$

En effet, on aura ensuite

$$\frac{f(x+h) + w(x+h) - f(x) - w(x)}{\varphi(h)} = \gamma \frac{\varphi(h_0)}{h_0} \cdot \frac{h}{\varphi(h)},$$

donc, d'après (10), (11), (12), (13)

$$0 < |h| < \frac{1}{n}, \; \alpha < \frac{f(x+h) + w(x+h) - f(x) - w(x)}{\varphi(h)} < \beta,$$

donc $f + w \in A(n, \alpha, \beta)$.

Pour démontrer l'énoncé E, soit

$$x \in \left\langle \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right\rangle, \text{ d'où } x - \frac{r}{q} > 0, \; x + \frac{r}{q} < 1$$

(voir (12)). Ajoutons la remarque suivante:

Remarque R. Si x parcourt un intervalle de longueur $1/q$, situé dans l'intervalle $<0, 1>$, alors la fonction $w(x)$ parcourt précisément toutes les valeurs de l'intervalle $<0, \frac{1}{2}\varepsilon>$.

Distinguons maintenant trois cas.

I. $x \in (z_i, y_{i+1})$ $(0 \leqq i \leqq 2s - 2)$; on a $y_{i+1} - z_i = \lambda$, $\frac{r}{q} <$

$< 2h_0 < \frac{1}{4}\lambda$ (voir (6), (12), (5)); en posant $\delta = \pm 1$ et en choisissant le signe de δ d'une manière convenable, on aura $x + \delta \frac{r}{q} \epsilon$ $\epsilon <z_i, y_{i+1}>$, donc, d'après (9),

$$\left(f\ x + \delta \frac{r}{q}\right) - f(x) + w\left(x + \delta \frac{r}{q}\right) - w(x) = f\left(x + \delta \frac{r}{q}\right) - f(x) =$$
$$= \delta \frac{r}{q} \cdot \gamma \frac{\varphi(h_0)}{h_0};$$

donc, en posant $h = \delta \frac{r}{q}$, on a les relations (13).

II. $x \epsilon <y_i, z_i>$ $(0 \leqq i \leqq 2s - 1)$, i pair. D'après (2), on a $c_i > 0$; donc, d'après (12), (6), (9), (5) on a

$$0 < |h| \leqq \frac{r}{q} \Longrightarrow \gamma \frac{\varphi(h_0)}{h_0} \leqq \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leqq c_i. \qquad (14)$$

Si $w(x) \geqq \frac{1}{4}\varepsilon$, il existe [d'après la remarque R et d'après (14), (12), (5)] deux nombres h', h'' de l'intervalle $\left\langle \frac{r-1}{q}, \frac{r}{q} \right\rangle$ tels que

$$f(x + h') + w(x + h') - f(x) - w(x) \geqq h'\gamma \frac{\varphi(h_0)}{h_0},$$
$$f(x + h'') + w(x + h'') - f(x) - w(x) \leqq -\tfrac{1}{4}\varepsilon + c_i h'' < -\tfrac{1}{8}\varepsilon <$$
$$< h''\gamma \frac{\varphi(h_0)}{h_0};$$

il existe donc un h tel que l'on ait (13).

Si, au contraire, $w(x) < \frac{1}{4}\varepsilon$, il existe [d'après la remarque R et d'après (14), (12), (5)] deux nombres h', h'' de l'intervalle $\left\langle -\frac{r}{q}, -\frac{r-1}{q} \right\rangle$ tels que

$$f(x + h') + w(x + h') - f(x) - w(x) \geqq \tfrac{1}{4}\varepsilon + c_i h' >$$
$$> \tfrac{1}{8}\varepsilon > 0 > h'\gamma \frac{\varphi(h_0)}{h_0},$$
$$f(x + h'') + w(x + h'') - f(x) - w(x) \leqq h''\gamma \frac{\varphi(h_0)}{h_0};$$

il existe donc un h tel que l'on ait (13).

III. $x \epsilon <y_i, z_i>$ $(0 \leqq i \leqq 2s - 1)$, i impair. D'après (2), on a $c_i < 0$; donc, d'après (12), (6), (9), (5)

$$0 < |h| \leqq \frac{r}{q} \Longrightarrow c_i \leqq \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leqq \gamma \frac{\varphi(h_0)}{h_0}. \qquad (15)$$

Si $w(x) < \frac{1}{4}\varepsilon$, il existe [d'après la remarque R et d'après (15), (12), (5)] deux nombres h', h'' de l'intervalle $\left\langle \frac{r-1}{q}, \frac{r}{q} \right\rangle$ tels que

$$f(x+h') + w(x+h') - f(x) - w(x) \geqq c_i h' + \tfrac{1}{4}\varepsilon > \tfrac{1}{8}\varepsilon >$$
$$> 2\gamma\varphi(h_0) > h'\gamma \frac{\varphi(h_0)}{h_0},$$
$$f(x+h'') + w(x+h'') - f(x) - w(x) \leqq h''\gamma \frac{\varphi(h_0)}{h_0};$$

il existe donc un h tel que l'on ait (13).

Si, au contraire, $w(x) \geqq \frac{1}{4}\varepsilon$, il existe [d'après la remarque R et d'après (15), (12), (5)] deux nombres h', h'' de l'intervalle $\left\langle -\frac{r}{q}, -\frac{r-1}{q} \right\rangle$ tels que

$$f(x+h') + w(x+h') - f(x) - w(x) \geqq h'\gamma \frac{\varphi(h_0)}{h_0},$$
$$f(x+h'') + w(x+h'') - f(x) - w(x) \leqq c_i h'' - \tfrac{1}{4}\varepsilon <$$
$$< -\tfrac{1}{8}\varepsilon < -2\gamma\,\varphi(h_0) < h''\gamma \frac{\varphi(h_0)}{h_0};$$

il existe donc un h tel que l'on ait (13). Donc, l'énoncé E se trouve démontré dans tous les cas possibles.

Démonstration du lemme dans le deuxième cas. Il existe un nombre c et une suite $h_1, h_2, \ldots$ de sorte que

$$0 < c < \infty,\ h_n > 0,\ h_n \to 0,\ \frac{\varphi(h_n)}{h_n} \to c.$$

Soit $g \in C$, $\varepsilon > 0$. Il faut démontrer qu'il existe une fonction F telle que

$$\varrho(F, g) < \varepsilon,\ F \in A(n, \alpha, \beta).$$

D'après le théorème de Weierstraß, il existe un polynome f tel que $\varrho(f, g) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Posons

$$\gamma = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta),\ \mu = \gamma - \alpha = \beta - \gamma \tag{16}$$

et choisissons un nombre rationnel h_0 tel que l'on ait

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\varepsilon}{4h_0} > \operatorname*{Max}_{0 \leqq x \leqq 1} |f'(x)| + |\gamma c|,\ 0 < h_0 < \frac{1}{n}, \\ &\left| \frac{h_0 c}{\varphi(h_0)}\gamma - \gamma \right| < \frac{\mu}{2},\ \frac{\varphi(h_0)}{h_0} > \frac{c}{2}, \end{aligned}\right| \tag{17}$$

$$\begin{aligned} 0 < |h| \leqq h_0,\ 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq x + h \leqq 1 \Rightarrow |f(x+h) - {}& \\ - f(x) - hf'(x)| < |h|\, \tfrac{1}{4}c\mu.& \end{aligned} \tag{18}$$

Choisissons ensuite un nombre entier $q > 0$ tel que l'on ait $h_0 = r/q$ (r entier, $r > 2$) et tel que

$$|h - h_0| \leqq \frac{1}{q} \Rightarrow \left|\frac{hc}{\varphi(h)}\gamma - \gamma\right| < \frac{\mu}{2}, \ \frac{\varphi(h)}{h} > \frac{c}{2}. \tag{19}$$

Définissons la fonction $w(x)$ comme il suit:

$$w\left(\frac{2k}{2q}\right) = 0, \ (k = 0, 1, \ldots, q),$$

$$w\left(\frac{2k+1}{2q}\right) = \frac{\varepsilon}{2}, \ (k = 0, 1, \ldots, q-1),$$

$w(x)$ est une fonction linéaire dans chaque intervalle $\left\langle \frac{k}{2q}, \frac{k+1}{2q} \right\rangle$ $(k = 0, 1, \ldots, 2q-1)$. On a donc $f + w \in C$, $\varrho(f + w, g) < \varepsilon$ et il reste à démontrer que $f + w \in A(n, \alpha, \beta)$. Soit donc $x \in \left\langle \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right\rangle$; remarquons que $h_0 = r/q < 1/n$. Si h parcourt l'un quelconque de deux intervalles

$$I_1 = \left\langle -\frac{r}{q}, -\frac{r-1}{q} \right\rangle, \ I_2 = \left\langle \frac{r-1}{q}, \frac{r}{q} \right\rangle,$$

l'expression $w(x+h) - w(x)$ parcourt précisément toutes les valeurs de l'intervalle $\langle -w(x), \frac{1}{2}\varepsilon - w(x) \rangle$. En observant que

$$-w(x) \leqq 0 \leqq \tfrac{1}{2}\varepsilon - w(x), \tag{20}$$

on conclut:

Si h parcourt l'intervalle I_2, alors l'expression

$$\frac{w(x+h) - w(x)}{h} \tag{21}$$

parcourt au moins toutes les valeurs de l'intervalle

$$\left\langle -w(x)\frac{q}{r}, \left(\frac{\varepsilon}{2} - w(x)\right)\frac{q}{r} \right\rangle;$$

si h parcourt l'intervalle I_1, alors l'expression (21) parcourt au moins toutes les valeurs de l'intervalle

$$\left\langle \left(w(x) - \frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{q}{r}, \ w(x)\frac{q}{r} \right\rangle.$$

En tenant compte de (20) et de l'inégalité Max $[w(x), \frac{1}{2}\varepsilon - w(x)] \geqq \frac{1}{4}\varepsilon$, on voit: si h parcourt l'ensemble $I_1 + I_2$, alors l'expression (21) parcourt au moins toutes les valeurs de l'intervalle