

Werk

Label: Periodical issue

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311028X_0065|log28

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

ROČNÍK 65.

SEŠIT 2.

ČASOPIS

PRO PĚSTOVÁNÍ

MATEMATIKY A FYSIKY

Redigují

VOJTĚCH JARNÍK a FRANTIŠEK ZÁVIŠKA

za součinnosti

B. BYDŽOVSKÉHO, E. ČECHA, V. DOLEJŠKA,
J. FRIEDRICH, V. HLAVATÉHO, B. HOSTINSKÉHO,
M. KÖSSLERA, K. RYCHLÍKA, M. A. VALOUCHA, F. VYČICHLA,
A. WANGLERA, A. ŽÁČKA.

VYDÁVÁ VLASTNÍM NÁKLADEM

JEDNOTA ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

ZA PODPORY MINISTERSTVA ŠKOLSTVÍ A NÁRODNÍ OSVĚTY.



V PRAZE 1936.

Ročně 4 sešity.

Předplatné (pro nečleny) 120 Kč.

Journal Tchecoslovaque de Mathématiques et de Physique.

Éditeur: Jednota čsl. matematiků a fysiků, Praha II-609, Tchecoslovaquie.

Abonnement pour un an 120 Kč.

Chèques postaux: Praha 13103.

Obsah seš. 2. — Sommaire du fasc. 2.

ČÁST VĚDECKÁ.

Část matematická. — Travaux mathématiques.

- Leo Zippin, Princeton, Fine Hall: On a problem of Čech 49
Vojtěch Jarník, Praha II, U Karlova 3: Sur une propriété des
fonctions continues 53
Bedřich Pospíšil, Brno, Pražská 20: Sur un problème de MM.
S. Bernstein et A. Kolmogoroff 64
Jan Srb, Nový Bohumín, ref. reál. gymnasium: O rozkladu rovinných
kolineací v produkt harmonických homologií. (Sur la décomposi-
tion des homographies planes en produit des homologies harmo-
niques.) 77
Jan Srb, Nový Bohumín, ref. reál. gymnasium: Poznámka k článku
„O rozkladu rovinných kolineací“. (Remarque à l'article „Sur la
décomposition des homographies planes.“) 84

Část fyzikální. — Travaux de physique.

- Miroslav Jahoda, Praha XI, Husinecká 33: Les oscillations du mag-
nétron avec la triode 88
Václav Dolejšek and Swami Jnanananda, Praha II, Presslova 1:
A precise method of determining the constant of crystal grating
by the combination of φ - and κ -methods 97
Václav Petržílka, Praha II, U Karlova 5: Über Torsionsschwingun-
gen von kreisförmigen Platten 110
Résumés de quelques articles tchèques publiés dans la partie Enseigne-
ment-Communications-Analyses 116

VYUČOVÁNÍ, ZPRÁVY, LITERATURA.

Články a referáty. — Articles et rapports.

- Václav Votruba, Praha: Tři fáze ve vývoji teorie fyzikálního mikro-
světa. (Trois phases de la théorie microphysique.) D 49

Vyučování. — Questions didactiques.

- Vratislav Charfreitag, Hradec Králové: Poznámky k pokusům
v učebnici Petírové-Šmokové. Část pátá D 65
František Boček, Praha: Dynamika letu v pokusech D 68

Zprávy a drobnosti. — Communications.

- Osobní. — Poznámka o soustavách číselných. — Nobelovy ceny za
fysiku a chemii v r. 1935. — Lawrencovo umělé radium D 75

Literatura. — Analyses.

- Recenze vědeckých publikací D 81
Recenze didaktických publikací D 85
Původní publikace československých matematiků a fysiků D 88

SPOLKOVÝ VĚSTNÍK.

- Zápis o valné schůzi V 41
Výbor JČMF V 41
Zprávy z členských schůzí V 42
Slovenské učebnice podle osnov z r. 1933 V 44

Tento sešit vyšel dne 25. ledna 1936.

ČÁST MATEMATICKÁ

On a Problem of Čech.

Leo Zippin, Princeton.

(Received Novembre 4, 1935.)

Prof. Čech has introduced the following definition of local connectedness:

Def. A topologic space is said to be locally connected provided every finite covering by open sets contains a finite covering by connected sets.

He has proposed to us the question whether such a space is necessarily bicomact. We shall show, ultimately by a counter-example, that the answer to the question is in the negative. We shall also give a slight discussion of this quite interesting idea. We begin with the following simple

Theorem: For a regular topologic space S (in the sense of Hausdorff), local connectedness in the sense of Čech (above) implies local connectedness in the usual sense. That is, given any point x of our space and any neighborhood $U_x \supset x$, there exists an open connected set V_x , $x \in V_x \subset U_x$.

Proof. Let U_x be any neighborhood of the point x and W any open set containing x such that $\overline{W} \subset U_x$, where $\overline{W}$ denotes the closure of W . Such a set exists, by the *regularity* of space. Now the two sets, $O_1 = U_x$ and $O_2 = S - \overline{W}$ form a finite covering by open sets of the space S . That is trivial. But, by our hypothesis, there must exist a finite set $M_1, M_2, \dots, M_n$ of *connected* sets such that each of them belongs to O_1 or to O_2 and such that every point of space belongs to at least one of them.

Let j be any integer, $1 \leq j \leq n$, such that $\overline{M_j} \supset x$. Since W is open and contains x , it is clear that $W \cap M_j$ is not vacuous. Therefore M_j cannot belong to $O_2 = S - \overline{W}$, and we have the inclusion $M_j \subset O_1 = U_x$. Let $M = \sum_j M_j$ for all values of j such that $\overline{M_j} \supset x$. It is clear that M is connected, that it contains x (since at

least one M_j must contain x), and is contained in U_x . Further, if $N = \sum_k \overline{M}_k$ for all values k such that $M_k \ni x$, then $S - N$ is open, contains x , and belongs to M . This means that x is an inner point of M . But now if we denote by M^* the component (i. e. the maximal connected subset) of U_x which contains x , the considerations above show that every point of this set is an inner point. Then we may take $V_x = M^*$ and our theorem is established.

*Theorem: If a regular topologic space S is locally connected in the sense of Čech, then it is compact. *)*

Proof: Suppose there exists, in the space S , an infinite sequence $x_1, x_2, \dots$, of points such that the set $X = \sum_1^\infty x_n$ has no limit point. Then X is closed, and $S - X$ is open. Since, in particular, no point x_n is a limit point of X it follows that $X - x_n$ is closed, and therefore by the regularity of space there exists, for every n , a neighborhood $U_n \supset x_n$ such that $\overline{U}_n \cdot (X - x_n) = \emptyset$. Let us write $V_1 = U_1$. There exists in U_2 a neighborhood V_2 of x_2 such that $V_1 \cdot V_2 = \emptyset$, otherwise x_2 would be a limit point of U_1 which it is not, by construction. Similarly, if $V_1, V_2, \dots, V_{n-1}$ have been defined, let V_n be a neighborhood of x_n , $x_n \in V_n \subset U_n$, such that the intersection of V_n with $\sum_1^{n-1} \overline{U}_i$ is vacuous. It is clear that such a V_n exists because x_n is not a point of $\overline{U}_i$, for any $i \neq n$, and therefore not a point of any finite sum (necessarily closed) of these sets. At last, we take $O_1 = \sum_1^\infty V_n$, and take $O_2 = S - X$. This is a finite covering by open sets. Since $V_i \cdot V_n = \emptyset$, if i is fixed and $n \neq i$, it follows that a connected subset of O_1 containing x_i cannot contain any other point x_n . But this is true for every i , so that no connected subset of O_1 can contain as many as two points of X . No subset of O_2 contains any point of X . It is now trivial that O_1 and O_2 contain no finite covering by connected sets. This contradiction establishes the compactness.

We come now to the most interesting, perhaps, of these observations.

Theorem: If a compact topologic space S^ (not necessarily regular) is locally connected in the usual sense then it is locally connected in the Čech sense.*

Proof. Let $U_1, U_2, \dots, U_n$ be any finite covering of S^* by

*) This result was known to Prof. Čech.

open sets. For each point x and each U_i , let $C^i(x)$ denote the component of U_i containing x . Of the components $C^1(x)$, $x \in S^*$, let us retain those only which are not covered by $\sum_{i=2}^n U_i$. Suppose that there are infinitely many distinct components of this sort and let $C^1_1, C^1_2, \dots, C^1_n, \dots$, denote some such infinite sequence. Then each C^1_n contains at least one point x_n such that x_n belongs to no U_i , $i \neq 1$. The set $X = \sum_{i=1}^{\infty} x_n$ has at least one limit point x , by the compactness of space. Now $x \in U_i$, $i \neq 1$, for otherwise at least one $x_n \in U_i$ because these sets are open. Therefore $x \in U_1$. But $C^1(x)$ is open, from the local connectedness of space. Therefore at least two distinct points x_i and x_j belong to $C^1(x)$. Then $C^1(x_i)$ and $C^1(x_j)$ cannot be distinct. The contradiction shows that there exists a finite set of components of U_1 , call them $K_1, K_2, \dots, K_m$, such that together with $U_2, U_3, \dots, U_n$ they form a finite covering by open sets of the space S^* . But now if we consider the components of U_2 we see, by the very argument above, that there must exist a finite set of these, call them $K_{m+1}, \dots, K_{m'}$, such that:

$$K_1, K_2, \dots, K_m, K_{m+1}, \dots, K_{m'}, U_3, \dots, U_n$$

is a finite covering of the space. It is clear that we can now replace U_3 by a finite set of components, enlarging the number of connected open sets, perhaps, but *certainly* diminishing the number that are not connected. In a finite number of steps we obtain a finite covering, $K_1, \dots, K_{m'}, \dots, K_N$, by open *connected* sets such that each K_i by its construction belongs to some U_j . This completes the proof.

We see now that any topologic space which is compact and locally connected, in the usual sense, but *not bicomact* furnishes a negative solution to the question proposed by Čech. As the simplest of such spaces, in a sense, we may recall the space S which consists of a set of points in $(1 - 1)$ correspondance with all ordinal numbers of the first and second class such that between any two consecutive members of this class there is interpolated a „linear“ segment. That is, each point of S corresponds uniquely to a coordinate (τ, t) where τ is a number of the first or second ordinal class and $0 \leq t < 1$. The points are *linearly* ordered by the convention that (τ, t) *precedes* (τ', t') if $\tau < \tau'$ or if $\tau = \tau'$ and $t < t'$. A generic open set is the set of points *between* two distinct points, not including these.

The Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey.

*

O jednom Čechově problému.

(Obsah předešlého článku.)

Čech zavedl tuto definici lokální souvislosti: Topologický prostor je lokálně souvislý, když každé pokrytí prostoru konečným počtem otevřených množin obsahuje pokrytí prostoru konečným počtem souvislých množin.

V tomto článku zodpovím otázku, vyslovenou Čechem, zda každý takový prostor je bikompaktní; odpověď je negativní. Při tom dokáži též tyto věty:

I. Pro regulární topologický prostor Čechova lokální souvislost implikuje lokální souvislost v obvyklém smyslu. II. Je-li regulární topologický prostor lokálně souvislý v Čechově smyslu, je kompaktní. III. Je-li kompaktní topologický prostor lokálně souvislý v obvyklém smyslu, je také lokálně souvislý v Čechově smyslu.

Sur une propriété des fonctions continues.

Vojtěch Jarník, Praha.

(Recu le 5 novembre 1935.)

§ 1. Introduction.

Soit C l'ensemble de toutes les fonctions réelles d'une variable réelle qui sont définies et continues dans l'intervalle $\langle 0, 1 \rangle$.¹⁾ En définissant, pour $f \in C$, $g \in C$, la distance $\varrho(f, g)$ par la formule

$$\varrho(f, g) = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - g(x)|,$$

C devient un espace métrique complet.

Alors, on a le théorème suivant²⁾:

Théorème I. Soit $\varphi(h)$ une fonction définie pour $-\infty < h < \infty$ et telle que

$$h \varphi(h) > 0 \text{ pour } h \neq 0, \lim_{h=0} \varphi(h) = 0.$$

Alors il existe un résiduel $A_1 \subset C$ tel que chaque fonction $f \in A_1$ jouisse des propriétés suivantes:

$$1. \quad x \in (0, 1) \Rightarrow \limsup_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(h)} = \infty, \\ \liminf_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(h)} = -\infty.$$

2. Pour presque toutes les valeurs $x \in (0, 1)$, on a

$$\limsup_{h=0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(h)} = \limsup_{h=0-} \frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(h)} = \infty,$$

¹⁾ Tous les nombres de cette note sont réels; (a, b) signifie toujours un intervalle ouvert, $\langle a, b \rangle$ un intervalle fermé. $a \in A$ signifie: a est un élément de l'ensemble A ; la formule $\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B}$ signifie „ $\mathfrak{A}$ implique $\mathfrak{B}$ “.

²⁾ Pour la démonstration, voir ma note „Über die Differenzierbarkeit stetiger Funktionen“, Fundam. Math. **21** (1933) pp. 48—58, Satz II. Toutes les notions relatives, concernant les sousensembles de C , doivent être interprétées relativement à l'espace C . Un ensemble $C_1 \subset C$ est appelé un résiduel, si l'ensemble $C - C_1$ est de première catégorie. La notation $\limsup_{h=0+}$

resp. $\limsup_{h=0-}$ signifie la limite supérieure du côté droit resp. du côté gauche au point $h = 0$ etc.

$$\liminf_{h=0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(h)} = \liminf_{h=0-} \frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(h)} = -\infty.$$

$$3. \quad 0 \leq x < 1 \Rightarrow \limsup_{h=0+} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(h)} \right| = \infty,$$

$$0 < x \leq 1 \Rightarrow \limsup_{h=0-} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(h)} \right| = \infty.$$

Dans le cas particulier $\varphi(h) = h$, j'ai démontré³⁾ le théorème suivant qui donne un résultat beaucoup plus précis que le résultat 1 du théorème I:

Théorème II. *Il existe un résiduel $A \subset C$ tel que chaque fonction $f \in A$ jouisse de la propriété suivante: étant donnés deux nombres x, a tels que $0 < x < 1$, $-\infty \leq a \leq \infty$, il existe une suite $h_1, h_2, \dots$ telle que*

$$h_n \neq 0, \quad h_n \rightarrow 0, \quad \frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n} \rightarrow a.$$

En d'autres mots, le quotient

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

présente, dans chaque point $x \in (0, 1)$, une indétermination complète.⁴⁾

Dans la note présente, nous allons démontrer que le théorème II reste vrai si l'on y remplace le dénominateur h par $\varphi(h)$, $\varphi(h)$ étant une fonction quelconque continue et impaire qui est positive pour $h > 0$; en d'autres mots, nous allons démontrer le théorème suivant:

Théorème III. *Soit $\varphi(h)$ une fonction impaire et continue pour $-\infty < h < \infty$ (donc $\varphi(0) = 0$); soit $\varphi(h) > 0$ pour $h > 0$. Soit A l'ensemble de toutes les fonctions $f \in C$ qui jouissent de la propriété suivante: étant donnés deux nombres x, a tels que $0 < x < 1$, $-\infty \leq a \leq \infty$, il existe une suite $h_1, h_2, \dots$ telle que*

³⁾ L. c.², Satz I, 1.

⁴⁾ Remarquons que le théorème II cesse d'être vrai si l'on exige p. ex. $h_n > 0$. En effet, soit $f \in C$; si f est non décroissante dans $<0, 1>$, on a

$$\liminf_{h=0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0,$$

pour chaque $x \in (0, 1)$; dans le cas contraire, il existe trois nombres $0 < c \leq \zeta < d < 1$ tels que $f(\zeta) = \max_{c \leq x \leq d} f(x)$, d'où

$$\limsup_{h=0+} \frac{f(\zeta+h) - f(\zeta)}{h} \leq 0.$$

$$h_n \neq 0, h_n \rightarrow 0, \frac{f(x + h_n) - f(x)}{\varphi(h_n)} \rightarrow a. \quad (1)$$

Alors A est un résiduel.

§ 2. Démonstration du théorème III.

Remarquons, tout d'abord, que le théorème III est une conséquence immédiate des résultats connus, si

$$\limsup_{h=0} \frac{\varphi(h)}{h} = \infty.$$

En effet, j'ai démontré qu'il existe, dans ce cas, un résiduel $A_2 \subset C$ tel que les relations $f \in C$, $x \in (0, 1)$ entraînent

$$\begin{aligned} \limsup_{h=0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(h)} &\geq 0, \quad \liminf_{h=0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(h)} \leq 0, \\ \limsup_{h=0-} \frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(h)} &\geq 0, \quad \liminf_{h=0-} \frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(h)} \leq 0.5) \end{aligned}$$

En posant $A = A_1 A_2$ (A est un résiduel), on voit d'après ce résultat et d'après le théorème I 1 que, pour $f \in A$ et pour $0 < x < 1$, il n'y a que quatre cas possibles:

$$\begin{aligned} \alpha) \quad \limsup_{h=0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(h)} &= \infty, \quad \liminf_{h=0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(h)} = -\infty. \\ \beta) \quad \limsup_{h=0-} \frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(h)} &= \infty, \quad \liminf_{h=0-} \frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(h)} = -\infty. \\ \gamma) \quad \limsup_{h=0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(h)} &= \infty, \quad \liminf_{h=0-} \frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(h)} = -\infty, \\ \quad \liminf_{h=0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(h)} &\leq 0, \quad \limsup_{h=0-} \frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(h)} \geq 0. \\ \delta) \quad \limsup_{h=0-} \frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(h)} &= \infty, \quad \liminf_{h=0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(h)} = -\infty, \\ \quad \liminf_{h=0-} \frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(h)} &\leq 0, \quad \limsup_{h=0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(h)} \geq 0. \end{aligned}$$

Dans chacun de ces quatre cas, il est évident que l'on peut faire correspondre, à chaque nombre a ($-\infty \leq a \leq \infty$), une suite $h_1, h_2, \dots$ telle que l'on ait (1).

Donc, dans tout ce qui suit, nous allons supposer que

$$\limsup_{h=0} \frac{\varphi(h)}{h} < \infty.$$

⁵⁾ L. c.²⁾ Satz III; le théorème γ est formulé seulement pour $h = 0+$, mais le cas $h = 0-$ est évidemment symétrique.

Soient donnés trois nombres n, α, β , où $n > 2$ est un nombre entier, $\alpha < \beta$, $\alpha\beta > 0$ et soit $A(n, \alpha, \beta)$ l'ensemble de toutes les fonctions $f \in C$ qui jouissent de la propriété suivante: à chaque nombre $x \in \left\langle \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right\rangle$, il correspond un nombre h tel que

$$0 < |h| < \frac{1}{n}, \quad \alpha < \frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(h)} < \beta.$$

Chaque ensemble $A(n, \alpha, \beta)$ est un ensemble ouvert. En effet, soit $f_k \in C - A(n, \alpha, \beta)$ pour $k = 1, 2, \dots$ et soit $f \in C$, $\varrho(f_k, f) \rightarrow 0$ pour $k \rightarrow \infty$. Alors il existe une suite $x_1, x_2, \dots$ telle que

$x_k \in \left\langle \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right\rangle$ et telle que

$$0 < |h| < \frac{1}{n} \Rightarrow \left| \frac{f_k(x_k + h) - f_k(x_k)}{\varphi(h)} - \frac{\alpha + \beta}{2} \right| \geq \frac{\beta - \alpha}{2}.$$

Sans restreindre la généralité, on peut supposer que $\lim x_k = \xi$ existe (autrement, il suffit de considérer une suite partielle de la suite $f_1, f_2, \dots$); alors on a $\xi \in \left\langle \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right\rangle$ et

$$0 < |h| < \frac{1}{n} \Rightarrow \left| \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{\varphi(h)} - \frac{\alpha + \beta}{2} \right| \geq \frac{\beta - \alpha}{2},$$

c'est-à-dire $f \in C - A(n, \alpha, \beta)$. Donc $C - A(n, \alpha, \beta)$ est fermé, $A(n, \alpha, \beta)$ est un ensemble ouvert.

Ensuite, on a

$$\prod_{n, \alpha, \beta} A(n, \alpha, \beta) \subset A,$$

où n doit parcourir tous les nombres entiers > 2 et où α, β doit parcourir tous les couples de nombres rationnels tels que $\alpha < \beta$, $\alpha\beta > 0$. En effet, soit

$$0 < x < 1, \quad -\infty \leq a \leq \infty, \quad f \in \prod_{n, \alpha, \beta} A(n, \alpha, \beta);$$

choisissons une suite des couples de nombres rationnels α_n, β_n telle que

$$\alpha_n < \beta_n, \quad \alpha_n \beta_n > 0, \quad \alpha_n \rightarrow a, \quad \beta_n \rightarrow a.$$

Si n est assez grand, on a

$$x \in \langle 1/n, 1 - 1/n \rangle, \quad f \in A(n, \alpha_n, \beta_n),$$

donc il existe un h_n tel que

$$0 < |h_n| < \frac{1}{n}, \quad \alpha_n < \frac{f(x + h_n) - f(x)}{\varphi(h_n)} < \beta_n,$$

d'où

$$h_n \neq 0, h_n \rightarrow 0, \frac{f(x + h_n) - f(x)}{\varphi(h_n)} \rightarrow a,$$

donc $f \in A$. Pour démontrer notre théorème III, il suffit de démontrer que les ensembles $A(n, \alpha, \beta)$ sont denses; car le produit d'un système dénombrable d'ensembles denses et ouverts est un résiduel. Il suffit donc de démontrer le lemme suivant:

Lemme. Soit n un nombre entier, $n > 2$, $0 < \alpha < \beta^*$; soit $\varphi(h)$ une fonction impaire et continue pour $-\infty < h < \infty$, $\varphi(h) > 0$ pour $h > 0$,

$$\limsup_{h=0} \frac{\varphi(h)}{h} < \infty.$$

Alors l'ensemble $A(n, \alpha, \beta)$, défini comme plus haut, est dense dans l'espace C .

Dans la démonstration, nous allons distinguer deux cas:

Premier cas: $\liminf_{h=0} \frac{\varphi(h)}{h} = 0.$

Deuxième cas: $0 < \liminf_{h=0} \frac{\varphi(h)}{h} \leq \limsup_{h=0} \frac{\varphi(h)}{h} < \infty.$

Démonstration du lemme dans le premier cas. Soit $g \in C$, $\varepsilon > 0$. Il faut démontrer qu'il existe une fonction F telle que

$$\varrho(F, g) < \varepsilon, F \in A(n, \alpha, \beta).$$

Il existe évidemment une fonction $k \in C$ jouissant des propriétés suivantes:

1. $\varrho(k, g) < \frac{1}{4}\varepsilon.$

2. Il existe un nombre entier s et $6s + 1$ nombres x_i ($i = 0, 1, \dots, 2s$), c_i, d_i ($i = 0, 1, \dots, 2s - 1$) tels que

$$\begin{aligned} 0 &= x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{2s-1} < x_{2s} = 1, \\ k(x) &= c_i x + d_i \text{ pour } x_i \leq x \leq x_{i+1} \text{ (} i = 0, 1, \dots, 2s - 1 \text{),} \\ c_{2i} &> 0, c_{2i+1} < 0 \text{ pour } i = 0, 1, \dots, s - 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Posons $\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ et choisissons un nombre λ tel que

$$0 < \lambda < \frac{1}{4} \min_{0 \leq i \leq 2s-1} (x_{i+1} - x_i). \quad (3)$$

$$x \in \langle 0, 1 \rangle, x' \in \langle 0, 1 \rangle, |x - x'| \leq \lambda \Rightarrow |k(x) - k(x')| < \frac{1}{4}\varepsilon. \quad (4)$$

* Le cas $\alpha < \beta < 0$ peut être ramené au cas considéré dans le lemme, en remplaçant chaque fonction $f \in C$ par $-f$.

Choisissons ensuite un nombre h_0 tel que

$$\left. \begin{aligned} 0 < h_0 < \frac{1}{2n}, \quad h_0 < \frac{1}{8}\lambda, \quad \gamma \frac{\varphi(h_0)}{h_0} < \min_{0 \leq i \leq 2s-1} |c_i|, \\ 2h_0 \max_{0 \leq i \leq 2s-1} |c_i| < \frac{1}{8}\varepsilon, \quad \gamma \varphi(h_0) < \frac{1}{16}\varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Alors, pour chaque i ($0 \leq i \leq 2s-2$), l'équation

$$c_i \tau_i + c_{i+1}(1 - \tau_i) = \gamma \frac{\varphi(h_0)}{h_0}$$

possède une solution

$$\tau_i = \frac{c_{i+1} - \gamma \varphi(h_0) h_0^{-1}}{c_{i+1} - c_i},$$

telle que $0 < \tau_i < 1$. En définissant les nombres y_i, z_i ($0 \leq i \leq 2s-1$) par les équations

$$\begin{aligned} y_0 &= 0, \quad z_{2s-1} = 1, \quad x_{i+1} - z_i = \lambda \tau_i, \\ y_{i+1} - x_{i+1} &= \lambda(1 - \tau_i) \quad (0 \leq i \leq 2s-2), \end{aligned}$$

on voit que

$$y_{i+1} - z_i = \lambda, \quad (0 \leq i \leq 2s-2), \quad (6)$$

$$c_i(x_{i+1} - z_i) + c_{i+1}(y_{i+1} - x_{i+1}) = \lambda \gamma \frac{\varphi(h_0)}{h_0} \quad (0 \leq i \leq 2s-2),$$

donc d'après (3)

$$\begin{aligned} 0 &= x_0 = y_0 < z_0 < x_1 < y_1 < z_1 < x_2 < y_2 < \dots \\ \dots &< z_{2s-2} < x_{2s-1} < y_{2s-1} < z_{2s-1} = x_{2s} = 1, \end{aligned} \quad (7)$$

$$k(y_{i+1}) - k(z_i) = \gamma \frac{\varphi(h_0)}{h_0} (y_{i+1} - z_i) \quad (0 \leq i \leq 2s-2). \quad (8)$$

On peut alors définir (voir (7), (8)) une fonction $f \in C$ par les équations suivantes:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= k(x) = c_i x + d_i \quad \text{pour } y_i \leq x \leq z_i \quad (0 \leq i \leq 2s-1), \\ f(x) &= \gamma \frac{\varphi(h_0)}{h_0} x + e_i \quad \text{pour } z_i \leq x \leq y_{i+1} \quad (0 \leq i \leq 2s-2). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

D'après (6), (4) on a $\varrho(f, k) < \frac{1}{4}\varepsilon$, donc $\varrho(f, g) < \frac{1}{2}\varepsilon$.

Choisissons un nombre entier $q > 0$ tel que $h_0 > 2/q$ et tel que

$$|h - h_0| \leq \frac{1}{q} \Rightarrow \alpha < \gamma \frac{\varphi(h_0)}{h_0} \cdot \frac{h}{\varphi(h)} < \beta. \quad (10)$$

⁷⁾ La fonction $\varphi(h) h^{-1}$ étant paire, on aura aussi

$$||h| - h_0| \leq \frac{1}{q} \Rightarrow \alpha < \gamma \frac{\varphi(h_0)}{h_0} \cdot \frac{h}{\varphi(h)} < \beta;$$

nous allons souvent employer tacitement des remarques de ce genre.

Définissons ensuite r par les conditions

$$r \text{ entier, } \frac{r-1}{q} \leq h_0 < \frac{r}{q}, \quad (11)$$

d'où (voir (5))

$$r > 2, \frac{r-1}{q} > \frac{h_0}{2}, \frac{r}{q} < 2h_0 < \frac{1}{n}, \quad (12)$$

et définissons la fonction $w \in C$ comme il suit:

$$\begin{aligned} w\left(\frac{2k}{2q}\right) &= 0 \quad (k = 0, 1, \dots, q), \\ w\left(\frac{2k+1}{2q}\right) &= \frac{\varepsilon}{2} \quad (k = 0, 1, \dots, q-1), \end{aligned}$$

$w(x)$ est une fonction linéaire dans chaque intervalle $\left\langle \frac{k}{2q}, \frac{k+1}{2q} \right\rangle$ ($k = 0, 1, \dots, 2q-1$). On a donc $f+w \in C$, $\varrho(g, f+w) < \varepsilon$ et il nous suffit de démontrer l'énoncé suivant:

Enoncé E: A chaque $x \in \left\langle \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right\rangle$, on peut faire correspondre un nombre h tel que

$$\frac{r-1}{q} \leq |h| \leq \frac{r}{q}, \quad f(x+h) + w(x+h) - f(x) - w(x) = \gamma h \frac{\varphi(h_0)}{h_0}. \quad (13)$$

En effet, on aura ensuite

$$\frac{f(x+h) + w(x+h) - f(x) - w(x)}{\varphi(h)} = \gamma \frac{\varphi(h_0)}{h_0} \cdot \frac{h}{\varphi(h)},$$

donc, d'après (10), (11), (12), (13)

$$0 < |h| < \frac{1}{n}, \quad \alpha < \frac{f(x+h) + w(x+h) - f(x) - w(x)}{\varphi(h)} < \beta,$$

donc $f+w \in A(n, \alpha, \beta)$.

Pour démontrer l'énoncé E, soit

$$x \in \left\langle \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right\rangle, \text{ d'où } x - \frac{r}{q} > 0, \quad x + \frac{r}{q} < 1$$

(voir (12)). Ajoutons la remarque suivante:

Remarque R. Si x parcourt un intervalle de longueur $1/q$, situé dans l'intervalle $<0, 1>$, alors la fonction $w(x)$ parcourt précisément toutes les valeurs de l'intervalle $<0, \frac{1}{q}>$.

Distinguons maintenant trois cas.

$$\text{I. } x \in (z_i, y_{i+1}) \quad (0 \leq i \leq 2s-2); \text{ on a } y_{i+1} - z_i = \lambda, \quad \frac{r}{q} <$$

$< 2h_0 < \frac{1}{4}\lambda$ (voir (6), (12), (5)); en posant $\delta = \pm 1$ et en choisissant le signe de δ d'une manière convenable, on aura $x + \delta \frac{r}{q} \in \epsilon < z_i, y_{i+1} >$, donc, d'après (9),

$$\begin{aligned} \left(f\left(x + \delta \frac{r}{q}\right) - f(x) + w\left(x + \delta \frac{r}{q}\right) - w(x) \right) &= f\left(x + \delta \frac{r}{q}\right) - f(x) = \\ &= \delta \frac{r}{q} \cdot \gamma \frac{\varphi(h_0)}{h_0}; \end{aligned}$$

donc, en posant $h = \delta \frac{r}{q}$, on a les relations (13).

II. $x \in < y_i, z_i >$ ($0 \leq i \leq 2s-1$), i pair. D'après (2), on a $c_i > 0$; donc, d'après (12), (6), (9), (5) on a

$$0 < |h| \leq \frac{r}{q} \Rightarrow \gamma \frac{\varphi(h_0)}{h_0} \leq \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq c_i. \quad (14)$$

Si $w(x) \geq \frac{1}{4}\epsilon$, il existe [d'après la remarque R et d'après (14), (12), (5)] deux nombres h', h'' de l'intervalle $\left\langle \frac{r-1}{q}, \frac{r}{q} \right\rangle$ tels que

$$\begin{aligned} f(x+h') + w(x+h') - f(x) - w(x) &\geq h' \gamma \frac{\varphi(h_0)}{h_0}, \\ f(x+h'') + w(x+h'') - f(x) - w(x) &\leq -\frac{1}{4}\epsilon + c_i h'' < -\frac{1}{8}\epsilon < \\ &< h'' \gamma \frac{\varphi(h_0)}{h_0}; \end{aligned}$$

il existe donc un h tel que l'on ait (13).

Si, au contraire, $w(x) < \frac{1}{4}\epsilon$, il existe [d'après la remarque R et d'après (14), (12), (5)] deux nombres h', h'' de l'intervalle

$$\begin{aligned} \left\langle -\frac{r}{q}, -\frac{r-1}{q} \right\rangle \text{ tels que} \\ f(x+h') + w(x+h') - f(x) - w(x) &\geq \frac{1}{4}\epsilon + c_i h' > \\ &> \frac{1}{8}\epsilon > 0 > h' \gamma \frac{\varphi(h_0)}{h_0}, \end{aligned}$$

$$f(x+h'') + w(x+h'') - f(x) - w(x) \leq h'' \gamma \frac{\varphi(h_0)}{h_0};$$

il existe donc un h tel que l'on ait (13).

III. $x \in < y_i, z_i >$ ($0 \leq i \leq 2s-1$), i impair. D'après (2), on a $c_i < 0$; donc, d'après (12), (6), (9), (5)

$$0 < |h| \leq \frac{r}{q} \Rightarrow c_i \leq \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq \gamma \frac{\varphi(h_0)}{h_0}. \quad (15)$$

Si $w(x) < \frac{1}{4}\epsilon$, il existe [d'après la remarque R et d'après (15),

(12), (5)] deux nombres h', h'' de l'intervalle $\left\langle \frac{r-1}{q}, \frac{r}{q} \right\rangle$

tels que

$$f(x+h') + w(x+h') - f(x) - w(x) \geq c_1 h' + \frac{1}{4}\varepsilon > \frac{1}{8}\varepsilon > \\ > 2\gamma\varphi(h_0) > h'\gamma \frac{\varphi(h_0)}{h_0},$$

$$f(x+h'') + w(x+h'') - f(x) - w(x) \leq h''\gamma \frac{\varphi(h_0)}{h_0};$$

il existe donc un h tel que l'on ait (13).

Si, au contraire, $w(x) \geq \frac{1}{4}\varepsilon$, il existe [d'après la remarque R et d'après (15), (12), (5)] deux nombres h', h'' de l'intervalle

$\left\langle -\frac{r}{q}, -\frac{r-1}{q} \right\rangle$ tels que

$$f(x+h') + w(x+h') - f(x) - w(x) \geq h'\gamma \frac{\varphi(h_0)}{h_0},$$

$$f(x+h'') + w(x+h'') - f(x) - w(x) \leq c_1 h'' - \frac{1}{4}\varepsilon < \\ < -\frac{1}{8}\varepsilon < -2\gamma\varphi(h_0) < h''\gamma \frac{\varphi(h_0)}{h_0};$$

il existe donc un h tel que l'on ait (13). Donc, l'énoncé E se trouve démontré dans tous les cas possibles.

Démonstration du lemme dans le deuxième cas. Il existe un nombre c et une suite $h_1, h_2, \dots$ de sorte que

$$0 < c < \infty, h_n > 0, h_n \rightarrow 0, \frac{\varphi(h_n)}{h_n} \rightarrow c.$$

Soit $g \in C$, $\varepsilon > 0$. Il faut démontrer qu'il existe une fonction F telle que

$$\varrho(F, g) < \varepsilon, F \in A(n, \alpha, \beta).$$

D'après le théorème de Weierstraß, il existe un polynôme f tel que $\varrho(f, g) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Posons

$$\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta), \mu = \gamma - \alpha = \beta - \gamma \quad (16)$$

et choisissons un nombre rationnel h_0 tel que l'on ait

$$\frac{\varepsilon}{4h_0} > \max_{0 \leq x \leq 1} |f'(x)| + |\gamma c|, 0 < h_0 < \frac{1}{n}, \quad \left| \frac{h_0 c}{\varphi(h_0)} \gamma - \gamma \right| < \frac{\mu}{2}, \frac{\varphi(h_0)}{h_0} > \frac{c}{2}, \quad (17)$$

$$0 < |h| \leq h_0, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq x+h \leq 1 \Rightarrow |f(x+h) - f(x) - hf'(x)| < |h| \frac{1}{4}c\mu. \quad (18)$$

Choisissons ensuite un nombre entier $q > 0$ tel que l'on ait $h_0 = r/q$ (r entier, $r > 2$) et tel que

$$|h - h_0| \leq \frac{1}{q} \Rightarrow \left| \frac{hc}{\varphi(h)} \gamma - \gamma \right| < \frac{\mu}{2}, \quad \frac{\varphi(h)}{h} > \frac{c}{2}. \quad (19)$$

Définissons la fonction $w(x)$ comme il suit:

$$w\left(\frac{2k}{2q}\right) = 0, \quad (k = 0, 1, \dots, q),$$

$$w\left(\frac{2k+1}{2q}\right) = \frac{\varepsilon}{2}, \quad (k = 0, 1, \dots, q-1),$$

$w(x)$ est une fonction linéaire dans chaque intervalle $\left\langle \frac{k}{2q}, \frac{k+1}{2q} \right\rangle$ ($k = 0, 1, \dots, 2q-1$). On a donc $f + w \in C$, $\varrho(f + w, g) < \varepsilon$ et il reste à démontrer que $f + w \in A(n, \alpha, \beta)$. Soit donc $x \in \left\langle \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right\rangle$; remarquons que $h_0 = r/q < 1/n$. Si h parcourt l'un quelconque de deux intervalles

$$I_1 = \left\langle -\frac{r}{q}, -\frac{r-1}{q} \right\rangle, \quad I_2 = \left\langle \frac{r-1}{q}, \frac{r}{q} \right\rangle,$$

l'expression $w(x+h) - w(x)$ parcourt précisément toutes les valeurs de l'intervalle $\left\langle -w(x), \frac{1}{2}\varepsilon - w(x) \right\rangle$. En observant que

$$-w(x) \leq 0 \leq \frac{1}{2}\varepsilon - w(x), \quad (20)$$

on conclut:

Si h parcourt l'intervalle I_2 , alors l'expression

$$\frac{w(x+h) - w(x)}{h} \quad (21)$$

parcourt au moins toutes les valeurs de l'intervalle

$$\left\langle -w(x) \frac{q}{r}, \left(\frac{\varepsilon}{2} - w(x) \right) \frac{q}{r} \right\rangle;$$

si h parcourt l'intervalle I_1 , alors l'expression (21) parcourt au moins toutes les valeurs de l'intervalle

$$\left\langle \left(w(x) - \frac{\varepsilon}{2} \right) \frac{q}{r}, w(x) \frac{q}{r} \right\rangle.$$

En tenant compte de (20) et de l'inégalité $\text{Max}[w(x), \frac{1}{2}\varepsilon - w(x)] \geq \frac{1}{4}\varepsilon$, on voit: si h parcourt l'ensemble $I_1 + I_2$, alors l'expression (21) parcourt au moins toutes les valeurs de l'intervalle

$$\left\langle -\frac{\varepsilon q}{4r}, \frac{\varepsilon q}{4r} \right\rangle = \left\langle -\frac{\varepsilon}{4h_0}, \frac{\varepsilon}{4h_0} \right\rangle.$$

Il existe donc — d'après (17) — une valeur h telle que

$$0 < \frac{r-1}{q} \leq |h| \leq \frac{r}{q} = h_0 < \frac{1}{n}, \quad \frac{w(x+h) - w(x)}{h} = -f'(x) + \gamma c.$$

Pour cette valeur de h , on a

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) + w(x+h) - f(x) - w(x)}{\varphi(h)} &= \\ &= \frac{f(x+h) - f(x) - h f'(x)}{\varphi(h)} + \frac{\gamma c h}{\varphi(h)}; \end{aligned}$$

d'après (16), (19), (18) on aura donc

$$\begin{aligned} \alpha = \gamma - \mu &< \frac{hc\gamma}{\varphi(h)} - \frac{\mu}{2} < \frac{f(x+h) + w(x+h) - f(x) - w(x)}{\varphi(h)} < \\ &< \frac{hc\gamma}{\varphi(h)} + \frac{\mu}{2} < \gamma + \mu = \beta; \end{aligned}$$

on a donc $f + w \in A(n, \alpha, \beta)$.

*

0 jedné vlastnosti spojitých funkcí.

(Obsah předešlého článku.)

Budiž $\varphi(h)$ lichá spojitá funkce v intervalu $(-\infty, \infty)$, $\varphi(h) > 0$ pro $h > 0$. Budiž C množina všech reálných spojitých funkcí v intervalu $[0, 1]$; prostor C nechť je opatřen obvyklou metrikou

$$\rho(f, g) = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - g(x)|.$$

Budiž A množina oněch funkcí $f \in C$, jež mají tuto vlastnost: je-li $0 < x < 1$, $-\infty \leq a \leq \infty$, existuje posloupnost $h_1, h_2, \dots$ tak, že

$$h_n \neq 0, \quad h_n \rightarrow 0, \quad \frac{f(x+h_n) - f(x)}{\varphi(h_n)} \rightarrow a.$$

Předmětem tohoto článku je důkaz věty: *Množina $C - A$ je první kategorie v C .*

Článek je doplňkem mé práce „Über die Differenzierbarkeit stetiger Funktionen¹⁾“; tehdy se mně podařilo dokázat uvedenou větu jen ve speciálním případě $\varphi(h) = h$.

¹⁾ Fundamenta Math. 21 (1933), 48—58.

Sur un problème de M. M. S. Bernstein et A. Kolmogoroff.

R. N. C. Bedřich Pospíšil, Brno.

(Reçu le 8 Octobre 1935.)

Introduction.

Ce problème¹⁾ consiste à trouver une solution Φ de l'équation (Ch) telle que

$$\Phi \geq 0, \quad \Phi(<s, t> | x, R) = 1. \quad (0)$$

Je montre l'existence d'une et d'une seule solution de l'équation (Ch) qui satisfasse aux conditions (c) et (d) et je déduis les conditions nécessaires et suffisantes (pour A) pour que les relations (0) soient vérifiées.

Note: La solution d'un problème voisin est le but d'un travail de M. Hostinský.²⁾ R étant un intervalle, cet auteur cherche à trouver une solution Φ' de l'équation (s, t réels; $x, y \in R$)

$$\Phi'(<s, t> | x, y) = \int_R \Phi'(<s, u> | x, z) dz \Phi'(<u, t> | z, y) \quad (\text{Ch}')$$

sous la condition

$$\lim_{t \rightarrow s} \frac{d}{dt} \Phi'(<s, t> | x, y) = A'(s | x, y) \text{ pour } x \neq y. \quad (\text{c}')$$

Le point $x = y$ jouit toujours d'un rôle exceptionnel (par exemple, la dernière condition ne dit rien sur la dérivée de $\Phi'(<s, t> | x, x)$ par rapport à t). Par conséquent, on ne peut plus démontrer l'existence d'une seule solution Φ' . Au contraire, M. Hostinský trouve une solution Φ' qui dépend d'une fonction auxiliaire j qui peut être choisie de plusieurs manières différentes. Si $A' \geq 0$, un choix plus spécial de j permet de satisfaire aux conditions

$$\Phi' \geq 0, \quad \int_R \Phi'(<s, t> | x, y) dy = 1. \quad (0')$$

¹⁾ A. Kolmogoroff: Math. Annalen, 1931, Bd. 104, p. 415—458. — S. Bernstein: Zentralblatt für Mathematik, 1931, Bd. I, p. 149.

²⁾ B. Hostinský: Sur une équation fonctionnelle (Publications de la Faculté des Sciences de l'université Masaryk, 1932, 156).

Néanmoins, on peut toujours trouver plusieurs fonctions j — alors de même *plusieurs fonctions Φ'* — telles que toutes les conditions données plus haut (les conditions (0') inclusivement) restent valables.

Les résultats de la théorie de la mesure que je suppose connus peuvent être appris dans la „Théorie de l'intégrale“ de M. Saks (Monografie matematyczne II, Warszawa 1933) dont les passages seront cités entre parenthèses.

* * *

Soit R un espace donné quelconque.

Définition: 1. Les éléments d'une famille additive (p. 247, §2) fixe dans l'espace R seront dites mesurables.

2. Une fonction $f(x)$ ($x \in R$) réelle (c. à d. à valeurs réelles) sera dite mesurable (en x) lorsque pour tout c réel l'ensemble des x pour lesquels $f(x) > c$ est mesurable.

3. La fonction $F(X)$ ($X \subset R$ mesurable) étant complètement additive, $F(X)^+$ ($F(X)^-$) est par définition la valeur absolue de sa variation supérieure (inférieure) (p. 248).

Toutes les intégrales seront prises au sens de Lebesgue (p. 247 et les suivantes).³⁾

Lemme 1: Les fonctions $F_\nu(X)$ ($X \subset R$ mesurable) étant complètement additives, la fonction $F(X) = \sum_\nu F_\nu(X)$ l'est également, supposé que les deux séries $\sum_\nu F_\nu(X)^+$ et $\sum_\nu F_\nu(X)^-$ soient convergentes pour tout X mesurable.

Démonstration:

$$\begin{aligned} F(\sum_\mu X_\mu) &= \sum_\nu F_\nu(\sum_\mu X_\mu) = \sum_\nu \sum_\mu F_\nu(X_\mu) = \\ &= \sum_\nu \sum_\mu F_\nu(X_\mu)^+ - \sum_\nu \sum_\mu F_\nu(X_\mu)^- = \\ &= \sum_\nu \sum_\mu F_\nu(X_\mu)^+ - \sum_\nu \sum_\mu F_\nu(X_\mu)^- = \\ &= \sum_\nu \sum_\mu F_\nu(X_\mu) = \sum_\mu F(X_\mu), \text{ c. q. f. d.} \end{aligned}$$

Lemme 2: Les fonctions $F_\nu(X)$ (X mesurable) soient complètement additives; si $\sum_\nu F_\nu(X)$ converge uniformément vers $F(X)$, on a

³⁾ Soit $\mu(X)$ une fonction complètement additive de $X \subset R$ mesurable, je pose

$$\int_X f(x) \mu(dX) = (\mu) \int_X f(x) dx,$$

si $\mu(X)$ ne prend que les valeurs non négatives; plus généralement, si $\mu(X)$ n'est soumise qu'à la condition d'être réelle, je définis

$$\int_X f(x) \mu(dX) = \int_X f(x) \mu(dX)^+ - \int_X f(x) \mu(dX)^-.$$

$$\int_X F(dX) f(x) = \sum_{\nu} \int_X F_{\nu}(dX) f(x)$$

pour toute fonction mesurable bornée $f(x)$.

Démonstration: Si la série considérée n'a qu'un nombre fini de termes, la formule à démontrer est évidente. Dans le cas général, on a

$$\int_X F(dX) f(x) - \sum_{\nu=1}^n \int_X F_{\nu}(dX) f(x) = \int_X \sum_{\nu=n+1}^{\infty} F_{\nu}(dX) f(x).$$

La fonction $f(x)$ peut être écrite sous la forme de différence de deux fonctions mesurables bornées ≥ 0 ; on en tire que la dernière expression peut être majorisée par la suivante arbitrairement petite (si $n \rightarrow \infty$):

$$\int_A \left| \sum_{\nu=n+1}^{\infty} F_{\nu}(dX) \right| |f(x)| + \int_{X-A} \left| \sum_{\nu=n+1}^{\infty} F_{\nu}(dX) \right| |f(x)|,$$

A étant un ensemble mesurable tel que

$$\left\{ \sum_{\nu=n+1}^{\infty} F_{\nu}(A) \right\}^+ = 0 = \left\{ \sum_{\nu=n+1}^{\infty} F_{\nu}(R - A) \right\}^- \quad (\text{p. 249, th. 1}).$$

Lemme 3: Les fonctions $F(X)$, $G(z, X)$ ($z \in R$, X mesurable) soient complètement additives; les fonctions $G(z, X)$, $H(z)$ soient bornées et mesurables; pour tout couple d'ensembles mesurables X et Y , on a

$$\int_X \left[\int_Y F(dY) G(y, dX) \right] H(x) = \int_Y F(dY) \int_X G(y, dX) H(x).$$

Démonstration: La fonction $F(X)$ peut être supposée ≥ 0 [p. 249, (3. 2)]. Soit $\{H_{\nu}(x)\}$ une suite de fonctions élémentaires uniformément convergente vers $H(x)$ (p. 251, §4). L'intégrale à gauche est égale à

$$\lim \int_X \left[\int_Y F(dY) G(y, dX) \right] H_{\nu}(x) = \lim \int_Y F(dY) G_{\nu}(y)$$

avec

$$G_{\nu}(y) = \int_X G(y, dX) H_{\nu}(x);$$

Pour $f(x)$ mesurable posons

$$f(x)_+ = f(x) \text{ pour } f(x) \geq 0, \quad f(x)_+ = 0 \text{ pour } f(x) < 0, \\ f(x)_- = f(x)_+ - f(x).$$

Pour chaque $\varepsilon > 0$, on a

$$\left| \int_{\mathfrak{R}} G(y, dX) H(x) - G_\nu(y) \right| \leq \sum_{\alpha, \lambda = +, -} \int_{\mathfrak{R}} G(y, dX)^\alpha [H(x) - H_\nu(x)]_\lambda < \varepsilon,$$

ν étant si grand que

$$|H(x) - H_\nu(x)| < \frac{\varepsilon}{4\gamma} [\gamma = \text{borne sup. } G(y, X)].$$

La suite $\{G_\nu(y)\}$ étant alors uniformément convergente, on en tire la thèse du lemme [p. 254, (7. 1)].

Définitions: 4. $\mathfrak{R}$ sera l'ensemble des nombres réels.

5. Une fonction réelle $f(t | x)$ ($t \in \mathfrak{R}$, $x \in R$) est dite *mesurable en* ($t | x$), lorsque pour tout c réel l'ensemble des ($t | x$), pour lesquels $f(t | x) > c$, appartient à la plus petite famille borélienne⁴) qui contient tous les ensembles du type $L \times M$, L étant un sous-ensemble de $\mathfrak{R}$ mesurable au sens de Lebesgue, M étant un sous-ensemble mesurable de R .

6. Nous désignons par (N) l'ensemble de tous les points de l'espace $\mathfrak{R}^N$ aux coordonnées $t_1, t_2, \dots, t_N$ tels que $t_1 < t_2 < \dots < t_N$.

7. Pour une fonction $A(t | x, Y)$ ($t \in \mathfrak{R}$, $x \in R$, $Y \subset R$ mesurable) réelle, bornée et mesurable en ($t | x$) posons

$$A(U | x, Y)_1 = \int_U A(u | x, Y)$$

du (U mesurable au sens de Lebesgue, $U \subset \mathfrak{R}$). Cette fonction est mesurable en x (p. 262, th. 6).

8. Nous posons

$$\begin{aligned} A(U_1 \times U_2 \times U_3 \times \dots \times U_N | x, Y)_N = \\ = \int_R A(U_1 | x, dZ)_1 A(U_2 \times U_3 \times \dots \times U_N | z, Y)_{N-1} \end{aligned}$$

Cette fonction est mesurable en x (on le voit par induction en se servant du lemme 3) et complètement additive en Y (car A est borné, alors $\lim \int A = \int \lim A$), supposé que $A(t | x, Y)$ le soit.

9. La condition ($UV = 0$, $U \subset \mathfrak{R}^N \supset V$)

$$A(U + V | x, Y)_N = A(U | x, Y)_N + A(V | x, Y)_N$$

permet d'étendre la définition de $A(W | x, Y)_N$ sur les ensembles W étant somme d'un nombre fini d'ensembles disjoints du type $U_1 \times \dots \times U_N$ ($U_k \subset \mathfrak{R}$ mesurable); cette extension est univoque.

10. Pour tout $U \subset \mathfrak{R}^N$ mesurable, nous désignons par $|U|$ la mesure lebesguienne de U .

Supposons que l'on ait

$$|A(U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n | x, Y)_n| \leq \frac{1}{4} (4\alpha)^n |U_1 \times \dots \times U_n| \quad (f)$$

pour $n = 1, 2, \dots, N$; on en tire

⁴) c. à d. additive (p. 247, § 2).

$$\begin{aligned}
& |A(U_0 \times U_1 \times \dots \times U_n | x, Y)_{n+1}| = \\
& = \left| \int_R A(U_0 | x, dZ)_1 A(U_1 \times \dots \times U_n | z, Y)_n \right| \\
& \leq \sum_{\kappa, \lambda = +, -} \int_R A(U_0 | x, dZ)_1^{\kappa} A(U_1 \times \dots \times U_n | z, Y)_{n\lambda} \\
& \leq 4 \cdot \frac{1}{4} (4\alpha) |U_0| \cdot \frac{1}{4} (4\alpha)^n |U_1 \times \dots \times U_n| = \\
& = \frac{1}{4} (4\alpha)^{n+1} |U_0 \times U_1 \times \dots \times U_n|
\end{aligned}$$

[p. 261, (11, 3)]. Alors, si $|A(t | x, Y)| \leq \alpha$, on a démontré la formule (f) pour $n = 1, 2, \dots$

Plus généralement, on peut écrire

$$|A(W | x, Y)_N| \leq \frac{1}{4} (4\alpha)^N |W|.$$

Soit $\{W_\mu\}$ une suite d'ensembles $W_\mu \subset \mathfrak{R}^N$ tels que $A(W_\mu)_N$ est déjà défini (j'ometts x et Y); soit $U \subset \mathfrak{R}^N$ tel que

$$|U + W_\mu - UW_\mu| \rightarrow 0 \quad (\mu \rightarrow \infty);$$

on en tire que $|W_\mu + W_\nu - W_\mu W_\nu|$ est aussi petit que l'on veut pour μ et ν assez grands, car

$$W_\mu + W_\nu - W_\mu W_\nu \subset (U + W_\mu - UW_\mu) + (U + W_\nu - UW_\nu).$$

On a de plus

$$\begin{aligned}
|A(W_\mu)_N - A(W_\nu)_N| &= |A(W_\mu - W_\mu W_\nu)_N - A(W_\nu - W_\mu W_\nu)_N| \\
&\leq \frac{1}{4} (4\alpha)^N |W_\mu + W_\nu - W_\mu W_\nu|;
\end{aligned}$$

la suite $\{A(W_\mu | x, Y)_N\}$ est alors convergente. $\{W'_\mu\}$ étant une autre suite d'ensembles $W'_\mu \subset \mathfrak{R}^N$ tels que $A(W'_\mu)_N$ est déjà défini et

$$|U + W'_\mu - UW'_\mu| \rightarrow 0 \quad (\mu \rightarrow \infty);$$

les deux suites $\{W_\mu\}$ et $\{W'_\mu\}$ peuvent être réunies en une autre - désignons - la par $\{V_\mu\}$ - telle que

$$|U + V_\mu - UV_\mu| \rightarrow 0 \quad (\mu \rightarrow \infty);$$

il suit de là l'existence de la limite de $A(V_\mu | x, Y)_N$; on en tire que la limite de $A(W_\mu | x, Y)_N$ ne dépend pas du choix spécial de la suite $\{W_\mu\}$.

Définitions: 11. Soit $\{W_\mu\}$ une suite d'ensembles $W_\mu \subset \mathfrak{R}^N$ tels que $A(W_\mu | x, Y)_N$ est déjà défini; soit $U \subset \mathfrak{R}^N$ tel que

$$|U + W_\mu - UW_\mu| \rightarrow 0 \quad (\mu \rightarrow \infty);$$

alors, on pose

$$A(U | x, Y)_N = \lim_{\mu \rightarrow \infty} A(W_\mu | x, Y)_N.$$

12. Soit $(x \in R, Y \subset R \text{ mesurable})$

$$E(x, Y) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \in Y. \\ 0 & \text{pour } x \in R - Y. \end{cases}$$

13. Posons ($U \subset \mathfrak{R}$ mesurable)

$$K_U A(u | x, Y) du = E(x, Y) + \sum_{N=1}^{\infty} A(U^N \cdot (N) | x, Y)_N.$$

Les ensembles du type $U^N \cdot (N)$ appartiennent à la famille de tels ensembles W pour lesquels $A(W | x, Y)_N$ a été défini. La série qui définit K_U est convergente étant majorisée par la suivante:

$$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{(4\alpha | U \cdot |)^N}{4N!},$$

car on a

$$|A(W | x, Y)_N| \leq \frac{1}{4} (4\alpha)^N |W|$$

pour tout W , pour lequel $A(W | x, Y)_N$ est défini, et $|U^N \cdot (N)| = |U|^N : N!$

14. Deux ensembles U et $V \subset \mathfrak{R}$ mesurables sont dits *presque égaux*, si $|U + V - UV| = 0$; on l'écrit $U \doteq V$.

15. Deux ensembles U et $V \subset \mathfrak{R}$ mesurables sont dits *presque disjoints*, si $|UV| = 0$.

16. Dans ce qui suit, les ensembles sur la droite $\mathfrak{R}$ seront pris positivement orientés; les sommes $\Sigma^* V_\nu$ resp. $U * V$ ne seront que les sommes $\Sigma V_\nu(\subset \mathfrak{R})$ resp. $U + V(\subset \mathfrak{R})$, mais, elles ne seront définies que si tous les points de $V_\mu - V_\nu$ suivent ceux de $V_\nu - V_\mu$ pour $\mu > \nu$, resp. si tous les points de $V - U$ suivent ceux de $U - V$.

Lemme 4: L'expression $K_U A(u | x, Y) du$ est mesurable en x , complètement additive en Y et l'on a

$$K_{U \cdot V} A(u | x, Y) du = \int_{\mathfrak{R}} \{K_U A(u | x, dZ) du\} \cdot \{K_V A(v | z, Y) dv\}$$

pour tout couple d'ensembles U et $V \subset \mathfrak{R}$ mesurables presque disjoints.

Démonstration: Quant à la mesurabilité et l'additivité complète, voir (p. 39, th. 19) et le lemme 1. Dans la relation à démontrer, écrivons-y $K_U A(u | x, dZ)$ sous la forme de la série infinie; suivant le lemme 2, on peut intégrer terme à terme. Dans chaque membre de la série ainsi obtenue, substituons l'expression $K_V A(v | z, Y) dv$ par la série qui la définit. On peut de même l'intégrer terme à terme à cause de sa convergence uniforme par rapport à z [p. 254, (7, 1)]; la série double ainsi acquise est majorisée par une série double étant produit de deux séries exponentielles à termes positifs. Elle est alors absolument convergente. En appliquant le lemme 3, on obtient

$$\int_{\mathfrak{R}} A(S | x, dZ)_m A(T | z, Y)_n = A(S \times T | x, Y)_{m+n}$$

pour $S = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_m (U_k \subset \mathfrak{R})$; la dernière formule s'étend immédiatement au cas général. En vertu de la convergence absolue de notre série double, on peut réunir les termes avec $S = U^m \cdot (m)$, $T = V^n \cdot (n)$, pour $m + n$ fixe ce qui donne — à l'aide de la dernière formule — le résultat désiré, car

$$\sum_{m+n=N} U^m \cdot (m) \times V^n \cdot (n) \doteq (U * V)^N \cdot (N), \quad UV \doteq 0$$

(voir Hostinský, l. c. p. 9).

Définition: 16. Pour une suite $\{V_n\}$ croissante (décroissante) d'ensembles posons $\lim V_n = \sum_n V_n$ ($\cap_n V_n$).

Lemme 5: Pour toute suite monotone d'ensembles mesurables $\subset \mathfrak{R}$, on a

$$K_{\lim V_n} = \lim_n K_{V_n}.$$

Démonstration: Posons $V = \lim V_n$; on a $|V_n| \rightarrow |V|$, d'où il suit l'existence d'un indice m (pour chaque $\varepsilon > 0$) tel que

$$|e^{4\alpha}|V| - e^{4\alpha}|V_n|| < 4\varepsilon \quad (n > m);$$

soit

$$(n, N) = \begin{cases} (V^N - V_n^N) \cdot (N), & \text{si } \{V_n\} \text{ croît} \\ (V_n^N - V^N) \cdot (N), & \text{si } \{V_n\} \text{ décroît.} \end{cases}$$

On a (je supprime x et Y)

$$\begin{aligned} |K_V A - K_{V_n} A| &= \left| \sum_{N=1}^{\infty} A[(n, N)]_N \right| \leq \\ \sum_{N=1}^{\infty} |(n, N)| \cdot \frac{1}{4} (4\alpha)^N &= \left| \frac{1}{4} \sum_{N=1}^{\infty} (4\alpha)^N \left\{ \frac{|V|^N}{N!} - \frac{|V_n|^N}{N!} \right\} \right| \\ &= \frac{1}{4} |e^{4\alpha}|V| - e^{4\alpha}|V_n|| < \varepsilon, \quad \text{c. q. f. d.} \end{aligned}$$

Définition: 17. Posons encore

$$\begin{aligned} &A(t_0 + 0, t_1 + 0, \dots, t_N + 0 | x, Y) \\ &= \int_{\mathfrak{R}} A(t_0 + 0 | x, dZ) A(t_1 + 0, \dots, t_N + 0 | z, Y); \end{aligned}$$

les fonctions $A(t + h_v | x, Y)$ ($0 < h_v \rightarrow 0$) étant mesurables en $(t | x)$, leur limite $A(t + 0 | x, Y)$ l'est de même; il en est de même de la fonction $A(t + 0, t_1 + 0, \dots, t_N + 0 | x, Y)$ (lemme 3). On a de plus

$$|A(t_1 + 0, t_2 + 0, \dots, t_N + 0 | x, Y)| \leq \frac{1}{4} (4\alpha)^N$$

ce qui se voit sans peine par induction.

Désignons par $\frac{d^+}{dt} f(t)$ (t réel) la dérivée droite de la fonction $f(t)$.

Théorème: La fonction $A(t | x, Y)$ ($t \in \mathfrak{R}$, $x \in R$, $Y \subset R$ mesurable) réelle et bornée soit mesurable en $(t | x)$, complètement additive en Y et telle que $A(t + 0 | x, Y)$ existe.

Il existe une et une seule fonction $\Phi(U | x, Y)$ ($U \subset \mathfrak{R}$ mesurable, $x \in R$, $Y \subset R$ mesurable), bornée si $|U| \leq H$ (H arbitraire), mesurable en x , complètement additive en Y et telle que $\Phi(<s, t> | x, Y)$ est absolument continu en t , ayant partout la dérivée $\frac{d^+}{dt} \Phi(<s, t> | x, Y)$ bornée si $t - s < H(t > s)$ et de plus

$$\Phi(U * V | x, Y) = \int_R \Phi(U | x, dZ) \Phi(V | z, Y) \text{ pour } UV = 0, \quad (a)$$

$$\Phi(U_\nu | x, Y) \rightarrow \Phi(U | x, Y) \text{ pour } \{U_\nu\} \text{ monotone, } U \doteq \lim U_\nu, \quad (b)$$

$$\left\{ \frac{d^+}{dt} \Phi(<s, t> | x, Y) \right\}_{t=s} = A(s + 0 | x, Y), \quad (c)$$

$$\Phi(0 | x, Y) = E(x, Y). \quad (d)$$

Corollaire:

$$\Phi(U | x, Y) = \int_U A(u | x, Y) du;$$

$\{V_n\}$ étant alors une suite monotone d'ensembles mesurables $\subset \mathfrak{R}$, on a

$$\Phi(\lim V_n | x, Y) = \lim \Phi(V_n | x, Y).$$

Spécialement, $\{U_\nu\}$ étant une suite d'ensemble mesurables presque

disjoints, on a $\Phi\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} U_\nu | x, Y\right) =$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_R \dots \int_R \Phi(U_1 | x, dZ_1) \Phi(U_2 | z_1, dZ_2) \dots \Phi(U_N | z_{N-1}, Y).$$

Démonstration: I. Supposons qu'une fonction $\Phi(U | x, Y)$ satisfasse à nos conditions; il est à démontrer qu'elle est ainsi parfaitement déterminée.

En effet, on a

$$(Ch) \Phi(<s, t> | x, Y) = \int_R \Phi(<s, u> | x, dZ) \Phi(<u, t> | z, Y).$$

La dérivée $\frac{d^+}{dt} \Phi(<u, t> | x, Y)$ étant bornée, il en est de même de

$$h^{-1} \{ \Phi(<u, t+h> | x, Y) - \Phi(<u, t> | x, Y) \} \left(= \int_t^{t+h} \frac{d^+}{dt} \Phi(<u, t> | x, Y) h^{-1} dt \right),$$

pour $0 < h < 1$ en vertu du I^{er} théorème de la moyenne (p. 86).

On en tire que l'on peut — pour évaluer $\frac{d^+}{dt} \Phi(<s, t> | x, Y)$ — dériver sous le signe d'intégration dans l'équation (Ch) de Chapman, l'intégrale de la limite d'une suite uniformément bornée de fonctions mesurables étant égale à la limite de l'intégrale du terme de notre suite [p. 39, th. 16; p. 43, th. 24; p. 254, (7. 1)]. Dans l'équation ainsi obtenue, mettons-y $u = t$; on obtient ainsi

$$\frac{d^+}{dt} \Phi(<s, t> | x, Y) = \int_R \Phi(<s, t> | x, dZ) A(t + 0 | z, Y).$$

Supposons qu'il y ait deux fonctions telles que notre $\Phi(<s, t> | x, Y)$; pour leur différence $\Delta(<s, t> | x, Y)$, on a $\Delta(<s, s> | x, Y) = 0$ [voir (b) et (d)]. La dernière relation pour Φ reste valable si l'on y met Δ au lieu de Φ . On obtient par intégration

$$\Delta(<s, t> | x, Y) = \int_s^t du \int_R \Delta(<s, u> | x, dZ) A(u + 0 | z, Y).$$

Supposons alors pour procéder par induction que

$$\Delta(<s, t> | x, Y) =$$

$$= \int_s^t dt_1 \int_s^{t_1} dt_2 \int_s^{t_2} \dots \int_s^{t_{N-1}} \Delta(<s, t_N> | x, dZ) A(\tau_N + 0 | z, Y)$$

avec $\tau_N = (t_N, t_{N-1}, \dots, t_1)$; on en tire que (j'omets Y)

$$\Delta(<s, t> | x, Y) =$$

$$= \int_s^t dt_1 \int_s^{t_1} dt_2 \int_s^{t_2} \dots \int_s^{t_{N-1}} \int_R \{ \int_s^{t_N} \Delta(<s, t_{N+1}> | x, dW) \cdot A(t_{N+1} + 0 | w, dZ) \} A(\tau_N + 0 | z, Y) =$$

$$= \int_s^t dt_1 \int_s^{t_1} dt_2 \int_s^{t_2} \dots \int_s^{t_{N-1}} \int_R \Delta(<s, t_{N+1}> | x, dZ) A(\tau_{N+1} + 0 | z, Y),$$

d'après le lemme 3. M étant la borne supérieure de $|\Delta(<s, u> | x, Z)|$ pour $s \leq u \leq t$, la dernière expression (où l'on écrit N au lieu de $N + 1$) est au plus égale en valeur absolue à

$$\frac{M \cdot (4\alpha)^N (t - s)^N}{N!}$$

ce qui tend vers zéro, si $N \rightarrow \infty$; alors, la fonction $\Phi(<s, t> | x, Y)$ est identiquement nulle; il n'en existe alors qu'un seul $\Phi(<s, t> | x, Y)$; d'autre part, on verra (II) que c'est $K_{<s, t>} A(u | x, Y) du$ qui satisfait à nos conditions pour Φ , ce qui implique que

$$\Phi(<s, t> | x, Y) = K_{<s, t>} A(u | x, Y) du.$$

Tout U ouvert (borné) est une somme d'un nombre dénombrable d'intervalles ouverts; on peut alors écrire

$$U = \lim U_\nu, \quad U_\nu \subset U_{\nu+1},$$

tout U_ν étant une somme d'un nombre fini d'intervalles disjoints; d'après (a) et la dernière formule, on a alors

$$\Phi(U_\nu | x, Y) = K_{U_\nu} A(u | x, Y) du.$$

Pour $\nu \rightarrow \infty$, on en obtient — en se servant du lemme 5 et de la condition (b) — la relation

$$\Phi(U | x, Y) = K_U A(u | x, Y) du$$

pour tout U ouvert.

D'après (b), la dernière formule est valable pour tout U étant un G_δ et de même (p. 31, th. 11c) pour tout U mesurable (lemme 5).

II. Cela étant posons alors

$$\Phi(U | x, Y) = K_U A(u | x, Y) du.$$

Pour $h > 0$, on a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \{ \Phi(< s, s+h > | x, Y) - \Phi(< s, s > | x, Y) \} \\ &= \frac{1}{h} \int_s^{s+h} A(s | x, Y) ds + \frac{1}{h} \sum_{N=2}^{\infty} A(< s, s+h >^N \cdot (N) | x, Y)_N. \end{aligned}$$

Pour $h \rightarrow 0$, le premier terme converge vers $A(s+0 | x, Y)$, tandis que le second devient nul étant au plus égal en valeur absolue à $(4h)^{-1} (\exp 4\alpha h - 1 - 4\alpha h)$, d'où l'on tire (c).

Soit

$$h > 0, \exp 4\alpha h - 1 < 8\alpha h, \quad h_k > 0, \quad h_1 + h_2 + \dots + h_n < h.$$

La borne supérieure de $|\Phi(< s, t > | x, Y)|$ pour s et t dans un intervalle J assez long étant désignée par $\varphi(< \infty)$, les relations ($t_k \in J$)

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n |\Phi(< s, t_k + h_k > | x, Y) - \Phi(< s, t_k > | x, Y)| \\ &= \sum_{k=1}^n \left| \int_R \Phi(< s, t_k > | x, dZ) \{ \Phi(< t_k, t_k + h_k > | z, Y) - \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. - \Phi(< t_k, t_k > | z, Y) \} \right| \\ & \leq 4\varphi \cdot 4^{-1} \sum_{k=1}^n (\exp 4\alpha h_k - 1) < 8\varphi\alpha h \end{aligned}$$

démontrent la continuité absolue de $\Phi(< s, t > | x, Y)$ en fonction de t .

Pour $h > 0$, on a de même

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \{ \Phi(< s, t + h > | x, Y) - \Phi(< s, t > | x, Y) \} \\ = & \int_R \Phi(< s, t > | x, dZ) \cdot \frac{1}{h} \{ \Phi(< t, t + h > | z, Y) - \\ & \quad - \Phi(< t, t > | z, Y) \}. \end{aligned}$$

L'expression à intégrer étant bornée pour $0 < h < 1$, les opérateurs $\lim_{h \rightarrow 0}$ et $\int_R$ sont commutables, d'où l'on a

$$\frac{d^+}{dt} \Phi(< s, t > | x, Y) = \int_R \Phi(< s, t > | x, dZ) A(t + 0 | z, Y);$$

cette expression est au plus égale en valeur absolue à

$$4\alpha \exp 4\alpha | J | \quad (< s, t > \subset J),$$

donc elle est bornée.

En tenant compte des lemmes précédents, on voit alors que la fonction Φ possède les propriétés énoncées au théorème.

Supposons que tout sous-ensemble de R ne contenant qu'un seul point soit mesurable.

Théorème:

Prémisse: La fonction $A(t | x, Y)$ ($t \in \mathbb{R}$, $x \in R$, $Y \subset R$ mesurable) est bornée, mesurable en $(t | x)$, complètement additive en Y et l'on a

$$\begin{aligned} A(t | x, R) &= 0, \\ A(t | x, Y) &\geq 0 \text{ pour } x \in R - Y. \end{aligned}$$

Thèse: On a

$$\begin{aligned} K_U A(u | x, R) du &= 1, \\ K_U A(u | x, Y) du &\geq 0. \end{aligned}$$

Démonstration: La première relation de la thèse est évidente; d'après la démonstration du théorème précédent, la seconde n'est à démontrer que si $U = < s, t >$.

Pour $x \in Y$ (et $t > s$) on a

$$E(x, Y) - \int_s^t A(t | x, Y) dt > 1 - \alpha(t - s)$$

ce qui est positif pour $t - s < \alpha^{-1}$.

Pour $x \in R - Y$, on a ($t > s$)

$$E(x, Y) = 0, \int_s^t A(t | x, Y) dt \geq 0.$$

Pour $t - s < \alpha^{-1}$, l'expression

$$h(s, t | x, Y) = E(x, Y) + \int_s^t A(t | x, Y) dt$$

n'est pas négative.

D'autre part, on verra que

$$\begin{aligned} & K_{<s, t>} A(u | x, Y) du \\ &= \lim_{N \rightarrow 0} \int_R h(s, t_1 | x, dZ_1) \int_R h(t_1, t_2 | z_1, dZ_2) \dots h(t_N, t | z_N, Y) \end{aligned}$$

avec

$$t_v = s + \frac{t-s}{N+1} v, \quad N = 2^n - 1 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

D'après ce qui précède, l'expression sous le signe $\lim$ n'est pas négative lorsque

$$N > \alpha(t-s),$$

d'où l'inégalité désirée pour U étant un intervalle, alors pour tout $U \subset \mathfrak{R}$ mesurable c. q. f. d.

Reste à vérifier la dernière formule pour K . Pour cela, posons

$$\Theta_N = \sum_{k=1}^N T_N^{(k)},$$

$T_N^{(k)}$ étant défini comme il suit:

Pour N fixe, l'ensemble $<s, t>$ est divisé en $N+1$ intervalles qui n'empiètent pas l'un sur l'autre et sont de la même longueur. Ceci donne la division de $<s, t>^k$ en $(N+1)^k$ cubes à k dimensions du même volume n'empiétant pas l'un sur l'autre; ceux d'eux qui appartiennent presque entiers à (k) forment l'ensemble $T_N^{(k)}$.

La fonction $A(F | x, Y)_N$ de figure $F \subset \mathfrak{R}^N$ (p. 5, §5) est additive et absolument continue (p. 11); on a alors (p. 61)

$$A(F | x, Y)_N = \int_F a(t | x, Y) dt$$

et de plus

$$A[U^N \cdot (N) | x, Y]_N = \int_{U^N \cdot (N)} a(t | x, Y) dt$$

pour $U = <s, t>$.

Soit $\mathbf{P} = \Sigma \mathfrak{R}^N$ ($N = 1, 2, \dots$) les termes de la série étant pris disjoints; pour $T \subset \mathfrak{R}^N$, la mesure de T dans $\mathbf{P}$ soit égale

à celle dans $\mathfrak{R}^N$ (prise au sens de Lebesgue); soit $a(t | x, Y)$ défini pour $t \in \mathbf{P}$ comme auparavant (on a $t \in \mathfrak{R}^N$ pour un N).

La suite $\{\Theta_N\}$ est croissante et sa limite est presque égale à $\Theta = \Sigma U^N \cdot (N) (N = 1, 2, \dots)$. Pour chaque N fixe, l'expression sous le signe $\lim$ dans la relation à démontrer est égale à

$$E(x, Y) + \int_{\Theta_N} a(t | x, Y) dt,$$

ce qui tend (pour $N \rightarrow \infty$) vers

$$E(x, Y) + \int_{\Theta} a(t | x, Y) dt,$$

ce qui n'est que $K_U A(u | x, Y) dt$, c. q. f. d.

Si l'on reprend la démonstration du premier théorème, on voit que

$$K_U A(u + 0 | x, Y) du = K_U A(u | x, Y) du$$

ce qui donne le

Corollaire: La fonction $A(t | x, Y)$ ($t \in \mathfrak{R}$, $x \in R$, $Y \subset R$ mesurable), réelle et bornée étant mesurable en $(t | x)$, complètement additive en Y et telle que $A(t + 0 | x, Y)$ existe, les conditions

$$A(t + 0 | x, R) = 0,$$

$$A(t + 0 | x, Y) \geq 0 \text{ pour } x \in R - Y$$

sont nécessaires et suffisantes pour que

$$K_U A(u | x, R) du = 1,$$

$$K_U A(u | x, Y) du \geq 0.$$

*

O jistém problému S. Bernsteina a A. Kolmogorova.

(Obsah předchozího článku.)

Jest řešit rovnici (Ch) tak, aby platily vztahy (O).¹⁾ Ukazují, že existuje právě jedno řešení rovnice (Ch) s podmínkami (c) a (d), a nalézám nutné a dostatečné podmínky (pro A), aby platilo (O) (viz poslední korolár).

O rozkladu rovinných kolineací v produkt harmonických homologií.

Jan Srb, Nový Bohumín.

(Došlo dne 23. listopadu 1934.)

Podle poznámky v „Geometrii projektivní“ str. 276, pana prof. J. Vojtěcha dokázal *M. W. Haskell* v Transactions Amer. math. soc. 7 (1906) analyticky, že každou rovinou kolineaci typu [000] je možno vytvořit jako produkt (obecně) tří involučních homologií. V následujícím dokazuji syntheticky: Každou kolineaci dvou soumístných polí lze rozložit v produkt nejvýše tří harmonických homologií a uvádím konstrukce těchto homologií.

A. Kolineace nehomologické.

1. *Rovinnou kolineaci typu [(000)] lze vždy rozložit v produkt dvou harmonických homologií.* V kolineaci dvou soumístných polí ϱ a ϱ' typu [(000)], t. j. s jednou samodružnou přímkou a jedním samodružným bodem na ní, buď X bodem samodružným a jím jdoucí x samodružnou přímkou s indukovanou parabolickou projektivností korespondujících bodů. Dvě libovolné nesamodružné řady bodové na korespondujících přímkách a, a' polí ϱ, ϱ' jdoucích bodem samodružným X mají střed perspektivnosti S (jiný než X) na x . Zvolme tento bod středem a přímkou o jdoucí bodem X tak, aby $Dp(aa'xo) = -1$, osou harmonické homologie. Touto přejde pole ϱ' v soumístné pole ϱ_1 , kolineární se soumístným polem ϱ . Řada bodová na a' přejde v korespondující řadu na a . Kolineace polí ϱ, ϱ_1 má na přímce a řadu samodružných bodů, jest tedy homologií. Jsou-li $S \equiv O'$ body polí ϱ, ϱ' a S', O korespondující body polí ϱ', ϱ na přímce x , jest podle známé vlastnosti parabolicky projektivních soumístných řad bodových $Dp(XSS'O) = -1$. Harmonickou homologií přejde proto bod S' v bod $S_1 \equiv O$. Má tedy homologie polí ϱ, ϱ_1 na samodružné přímce x dvojici bodů $S \equiv O_1$ a $S_1 \equiv O$ obapolně i odpovídajících a jest proto homologií harmonickou.

2. *Rovinnou kolineaci typu [000] lze vždy jedinou harmonickou homologií převést v kolineaci typu [(000)].* V rovinné kolineaci polí

ϱ, ϱ' typu [000] druhu prvního, t. j. s reálným invariantním trojúhelníkem, buďte X, Y, Z reálné samodružné body a A, A' dvojina korespondujících bodů neležících na žádné samodružné přímce. Průsečíky sdružených paprsků svazků indukovaných kolineací v bodech A, A' vytvoří pravou kuželosečku k procházející body A, A', X, Y, Z . Bod P buď pólem přímky AA' ke k . Je-li bod L průsečík této přímky s jednou stranou, ku př. XY , invariantního trojúhelníka a prochází-li spojnice bodu L a protějšího vrcholu Z invariantního trojúhelníka pólem P , zvolme na LP libovolný bod S (jiný než L a Z) středem a tečnu o v bodě Z ke k osou harmonické homologie. Touto přejde pole ϱ' v souměstné pole ϱ_1 kolineárně se souměstným ϱ . Přímka ZA' přejde v přímku ZA . Protože střed S harmonické homologie leží na přímce LZ ne však v bodě L , který je středem perspektivnosti řad bodových indukovaných na přímkách ZA, ZA' kolineací polí ϱ a ϱ' , neprochází jím mimo ZS žádná přímka spojující korespondující body obou řad. Má tedy kolineace polí ϱ, ϱ_1 na samodružné přímce ZA jediný samodružný bod Z . Kdyby v této kolineaci existovala ještě jedna přímka samodružná, musela by procházet bodem Z . V obou souměstných svazcích paprskových indukovaných kolineací polí ϱ, ϱ' v samodružném bodě Z není však mimo ZA a ZA' žádných dvou korespondujících paprsků, které by harmonicky oddělovaly střed S a osu o harmonické homologie. Kdyby existovaly takové přímky b, b' , protínaly by kuželosečku k v bodech B, C' . Přímka BC' protla by přímku AA' v pólu P' poláry XP a přímky AC' a BA' by se protínaly v bodě ležícím na této poláře. Tento bod by musel zároveň ležet na přímce XY , která je osou obou souměstných projektivních kvadratických řad na k , perspektivních s oběma souměstnými svazky se středem Z . Tedy obě přímky AC' a BA' by se protínaly v bodě L na AA' . Nemohou proto harmonickou homologií (S, o) , mimo přímky AZ a $A'Z$, splýnout žádné dvě korespondující přímky kolineárních polí ϱ, ϱ' a kolineace souměstných polí ϱ, ϱ_1 je typu [(000)]. Necht' nyní neprochází žádná přímka, spojující průsečík přímky AA' a strany s protějším vrcholem invariantního trojúhelníku, pólem P . Přímky spojující sdružené body na korespondujících paprscích svazků indukovaných kolineací polí ϱ, ϱ' v bodech A, A' obalí řadu kuželoseček se společnými tečnami AA', XY, YZ, ZX a řadou $[S]$ dotýčných bodů na AA' , projektivnou s oběma svazky $A[a], A'[a']$. Probíhá-li totiž bod M kvadratickou řadu na k , je každý trojúhelník MAA' opsán jedné kuželosečce řady a podle limitního případu věty Desargovy promítá se vrchol M a dotýčný bod S příslušné kuželosečky na AA' z bodu Z dvojinou paprskové involuce určené pevnými dvojinami XZ, YZ a $AZ, A'Z$. Jest tedy $[M] \wedge [S], [M] \wedge [a']$ proto $[S] \wedge [a']$. Promítneme řadu $[S]$ z bodu P paprskovým svazkem $[a''] \wedge [a']$. Společnému paprsku

$A'P$ obou svazků koresponduje ve svazku $[a'']$ paprsek PA , ve svazku $[a']$ paprsek AA' . Oba svazky jsou tedy prostě projektivní a vytvoří jednoduchou kuželosečku h procházející bodem A' na k . PA' je tečnou kuželosečky k v A' a AA' tečnou kuželosečky h v tomtéž bodě. Mají tedy h a k ve společném bodě A' různé tečny a protínají se proto ještě alespoň v jednom reálném bodě M , ne však v některém z bodů A, X, Y, Z , protože paprskům svazku $[a']$, procházejícím bodem samodružným korespondují ve svazku $[a'']$ přímky spojující bod P s průsečíkem AA' a protější strany invariantního trojúhelníka, které podle předpokladu neprocházejí tímto samodružným bodem a tečna kuželosečky h v bodě P prochází bodem A . Zvolme harmonickou homologii středem $S = (PM, AA_1)$ a osou o tečnou kuželosečky k v bodě M . Touto přejde pole ϱ' v soumísné pole ϱ_1 kolineárně se soumísným polem ϱ . Přímka $a' = A'M$ přejde v $a = AM$ a bod A' v bod A . V rovinné kolineaci polí ϱ, ϱ_1 jsou tedy přímka a a bod A prvky samodružné. Na přímce a však není, mimo bod A , jiného samodružného bodu protože střed harmonické homologie S je dotýčným bodem pravé kuželosečky obalené spojnicemi korespondujících bodů polí ϱ, ϱ' na přímkách a, a' , tedy mimo tečnu AA' jím neprochází žádná přímka spojující sdružené body přímek a, a' . Kdyby v kolineaci polí ϱ, ϱ_1 existovala ještě jedna samodružná přímka, procházela by bodem A . Osa o harmonické homologie je tečnou kuželosečky k v bodě M nemá s ní tedy jiného společného bodu, t. j. pouze přímky a, a' odpovídající si ve svazcích $[a], [a']$ se na ní protínou a splynou touto transformací. Jsou tedy bod A a jím jdoucí přímka a jedinými samodružnými prvky kolineace polí ϱ a ϱ_1 . Důkaz i konstrukce jsou platné i pro kolineaci typu $[000]$ druhého druhu, t. j. s třemi různými body samodružnými, jedním reálným a dvěma imaginárními sdruženými. V tomto případě jen nikdy neprochází přímka spojující bod P s průsečíkem přímky AA' a přímky samodružné XY , samodružným bodem Z . Je-li Z reálným samodružným bodem na k není tato protáta přímkou XY reálně. Padne proto vždycky přímka spojující pól reálné sečny AA' a průsečík této s přímkou XY do té části roviny, rozdělené tečnami z bodu P ke k vedenými, ve které neleží k . Paprsková involuce pak, kterou se z bodu Z promítají řady $[M]$ a $[S]$ je určena jen jednou družinou reálných paprsků ZA, ZA' . Kvadratická však, kterou vytíná na k je určena středem $L = (XY, AA')$.

3. *Rovinnou kolineaci typu $[(00)0]$ je vždy možno buď jedinou harmonickou homologii převést v kolineaci typu $[(000)]$, nebo rozložit v produkt dvou harmonických homologii.* V kolineaci dvou soumísných polí ϱ, ϱ' typu $[(00)0]$, t. j. se dvěma různými reálnými přímkami a dvěma různými reálnými body samodružnými, buďte X, Y body, přímka x , procházející bodem X (ne však Y) a $y = XY$

přímkami samodružnými s indukovanými projektivnostmi typu $[(00)]$ a $[00]$. A, A' buďte dva korespondující body, které neleží na žádné přímce samodružné. Sestrojíme opět jednoduchou kuželosečku k vytvořenou průsečíky korespondujících paprsků svazků indukovaných touto kolineací v bodech A a A' , která prochází body A, A', Y a v bodě X se dotýká přímky x . Padne-li pól P poláry AA' ke k na samodružnou přímku y (na x padnout nemůže), jest $Dp(XA, XA', x, y) = -1$, tedy soumísné svazky paprskové, indukované kolineací v samodružném bodě X , jsou involuční. Zvolme harmonickou homologii osou $o \equiv y$ a libovolným bodem S na x (mimo X) jako středem. Touto přejde pole ϱ' v soumísné pole ϱ_1 kolineární s ϱ . Kolineace polí ϱ, ϱ_1 je homologie protože všechny sdružené paprsky svazků se společným středem X splynou a tato má svazek samodružných paprsků. Podle odst. 1 přejde projektivnost typu $[(00)]$ na samodružném paprsku x v projektivnost involuční. Homologie polí ϱ, ϱ_1 je tedy harmonická.

Nepadne-li bod P na přímku y provede se konstrukce i důkaz jako u druhé části odstavce 2 (typ $[000]$ prvního druhu), kde je jen třeba psátí místo samodružného bodu Z samodružný bod X , místo samodružných přímek ZX, ZY přímky x, y a upravit důkaz, že druhým průsečíkem křivek h a k není bod samodružný, následujícím způsobem. Paprsku $A'Y$ svazku $[a']$ koresponduje ve svazku $[a'']$ paprsek PK , kde $K = (AA', x)$. Pak je XP polárou bodu K , AA' polárou bodu P , tedy PK polárou bodu $R = (XP, AA')$. V polárním trojúhelníku PKR protínají strany PR (prochází X) a AA' kuželosečku k reálně, tedy PK ji nikdy reálně neprotíná. Paprsku pak XA' svazku $[a']$ odpovídá ve svazku $[a'']$ paprsek spojující bod P s průsečíkem přímek AA' a y , který nemůže procházet bodem X ležícím také na y , protože podle předpokladu bod P nepadne na y .

B. Homologie.

1. Dokažme nejprve pomocnou větu: *Transformujeme-li jednu ze dvou hyperbolicky projektivních bodových řad na přímce všemi hyperbolickými involučními projektivnostmi s jedním samodružným bodem společným, který není zároveň samodružným bodem obou řad, jsou samodružné body projektivností tvořených řadou stálou a řadami transformovanými, dvojicemi téže involuce.* Jednou družinou této involuce je společný bod samodružný všech involucí jako bod řady transformované a v původní projektivnosti korespondující bod řady pevné. Buďte S, O samodružné a A, A' korespondující body soumísných projektivních řad na přímce r . Z bodu na kuželosečce k promítneme tyto řady do kvadratických projektivních řad na k se samodružnými body S_1, O_1 a dvojicí bodů korespondujících A_1, A'_1 . Řadu bodovou $[M]$ na tečně t kuželosečky k v bodě A_1 , promítneme z bodů S_1 a O_1 do perspektivních řad kvadratických

$[S_2]$ a $[O_2]$ na k a konečně tyto řady z bodu A_1 do řad $[P]$, $[Q]$ na přímky $p = (A'_1S_1)$, $q = (A'_1O_1)$. V projektivních řadách $[P]$, $[Q]$ je společný bod A'_1 obou přímek p , q sám sobě přidružen. Jsou tedy obě řady perspektivní podle středu K . Vedeme-li z bodů řady $[M]$ na t ještě druhé tečny ke k , tvoří jejich dotyčné body kvadratickou řadu $[M_1]$. Jsou-li M , M_1 , S_2 , O_2 , P , Q korespondující body uvedených řad, jest patrně $Dp(A'_1M_1O_1O_2) = -1$, $Dp(A'_1M_1S_1S_2) = -1$, tedy body S_1 a O_1 přejdou v body S_2 a O_2 involucí se samodružnými body A'_1 a M_1 . Bodům S_1 , O_1 , A_1 v původní projektivnosti korespondující body S_1 , O_1 , A'_1 přejdou involucemi s jedním samodružným bodem společným A'_1 a druhým M_1 řady $[M_1]$ v body S_2 , O_2 řad $[S_2]$, $[O_2]$ a A'_1 . Korespondující body $P = (A_1S_2, A'_1S_1)$ a $Q = (A_1O_2, A'_1O_1)$ určují osu PQ projektivních kvadratických řad S_1 , O_1 , A_1 a S_2 , O_2 , A'_1 na k . Protože řady $[P]$, $[Q]$ jsou perspektivní, procházejí všechny osy PQ jejich středem perspektivnosti K a průsečíky těchto os s k , t. j. samodružné body řady pevné S_1 , O_1 , A_1 a projektivních s ní řad transformovaných S_2 , O_2 , A'_1 , tvoří družiny téže involuce na k . Oba soumístné projektivní paprskové svazky jimiž se promítají řady $[S_2]$, $[O_2]$, tedy také $[P]$, $[Q]$, z bodu A_1 , mají jediný samodružný paprsek $A_1A'_1$ (paprsku A_1O_1 odpovídá A_1S_1). Leží tedy na něm střed perspektivnosti řad $[P]$, $[Q]$, který je zároveň středem kvadratické involuce dvojice samodružných bodů.

Rovinná homologie (neharmonická) polí ϱ a ϱ' buď dána středem S , osou o a dvěma korespondujícími body A , A' . Přímku o_1 jdoucí bodem A' , neprocházející bodem S jinak libovolnou, zvolme společnou osou všech harmonických homologií jichž středy vyplňují přímku $r = AA'$. Přímka r zůstane při všech harmonických homologiích invariantní a podle pomocné věty jsou na ní samodružné body všech rovinných kolineací tvořených polem ϱ a těmi, která vzniknou transformací pole ϱ' těmito harmonickými homologiemi, dvojicemi involuce z nichž jednou je A , A' . Bodem S vedme přímku s (jinou než r) a promítneme na ni z bodu $X = (o, o_1)$ body A , A' do bodů B , B' a involuci samodružných bodů do involučních řad $[R]$, $[T]$. Není-li bod S samodružným bodem involuce na r , je vždy možno nalézt alespoň jednu dvojici R , T korespondujících bodů řad $[R]$, $[T]$ takovou, že bod R je samodružným bodem involuce bodové na přímce s určené dvojicemi bodů S , T a B , B' . Abychom to dokázali, promítneme z bodu kuželosečky h na tuto body B , B' do B_1 , B'_1 , bod S do bodu S_3 a řady $[R]$, $[T]$ do kvadratických řad $[R']$, $[T']$. Dále buď bod E pólem přímky $B'B'_1$ k h a bod L na $B_1B'_1$ středem kvadratické involuce na h . Z bodu S_3 na h se obě řady $[R']$ a $[T']$ promítají projektivními soumístnými svazky paprskovými $[r']$ a $[t']$. Protíná-li svazek paprskový $[t']$ přímku $B_1B'_1$ v řadě bodové $[T_1]$, vytvoří poláry bodů této řady svazek

$E[t'']$ s ní a tedy i se svazkem $[r']$ projektivní. Společnému paprsku S_3E obou svazků $[r']$ a $[t'']$ odpovídá ve svazku $[r']$ paprsek S_3L . Protože podle předpokladu S není samodružným bodem involuce na r , nemůže bod L být průsečíkem tečny v bodě S_3 k h s přímkou $B_1B'_1$, ani jeho harmonickým pólem $L' = (S_3E, B_1B'_1)$ na této přímce. Jsou tedy svazky $[r']$ a $[t'']$ prostě projektivní a vytvoří průsečíky korespondujících paprsků pravou kuželosečku l jejíž tečna, v jejím průsečíku S_3 s kuželosečkou h , není tečnou této. Protnou se proto kuželosečky h a l , mimo bod S_3 , ještě alespoň v jednom reálném bodě R' . Protože paprskům S_3B_1 a $S_3B'_1$ svazku $[r']$ odpovídají paprsky EB'_1 a EB_1 svazku $[t'']$, není tento průsečík žádným z bodů B_1, B'_1 . Koresponduje-li bodu R' v kvadratické involuci na h bod T' , protíná se tečna v bodě R' kuželosečky h s přímkou S_3T' na přímce $B_1B'_1$ a tedy průměty bodů T' a R' na přímku s jsou hledanou dvojinou T, R . Promítněme body T, R z bodu X na přímku r do bodů Y, Z a zvolme harmonickou homologii osou o_1 a středem O_1 na r takovým, aby body Y a Z byly samodružnými body řady indukovaných na invariantní přímce r kolineace polí ϱ, ϱ_1 (ϱ_1 je pole, které vzniklo transformací soumístného pole ϱ' touto harmonickou homologií). V kolineaci polí ϱ, ϱ_1 jsou body X, Y, Z , samodružné a body B, B' korespondující, které neleží na žádné samodružné přímce. Zvolme nyní druhou harmonickou homologii středem $O_2 \equiv R$ a osou $o_2 = (YR')$, kde bod R' je druhým samodružným bodem involuce (BB', TS) na s . Touto přejde pole ϱ_1 v soumístné pole ϱ_2 kolineární se soumístným ϱ . Bod $O_2 = (BB', XZ)$ je středem perspektivnosti řady korespondujících bodů polí ϱ, ϱ_1 na přímkách $b = (YB)$, $b' = (YB')$ a s přímkou o_2 odděluje přímky b, b' harmonicky. Bod O_2 a průsečík osy o_2 se samodružnou přímkou XZ oddělují také harmonicky oba samodružné body X, Z . Přejde tedy druhou harmonickou homologií řada bodová na b' v řadu korespondujících bodů na b , bod X v bod $X_2 \equiv Z$ a bod Z v $Z_2 \equiv X$. Kolineace polí ϱ a ϱ_2 je tedy harmonickou homologií, protože má řadu samodružných bodů na přímce b a na samodružné přímce XZ dva body $X \equiv Z_2$, $Z \equiv X_2$ obapolně si odpovídající. Je-li bod S samodružným bodem involuce na s , zvolíme O_1 v kterémkoliv bodě, mimo S, A, A' , přímky r a při konstrukci druhé harmonické homologie zaměníme v konstrukci právě uvedené bod R za S , Y za X , přímku XZ za XY a involuci na s za involuci na r .

2. V kolineaci soumístných polí ϱ, ϱ' typu $[(1, 0)]$, t. j. v homologii s osou o procházející středem S , stačí zvolit střed $S_1 \equiv S$ a libovolnou nesamodružnou přímku o_1 osou harmonické homologie. Svazek samodružných paprsků se středem S je při této harmonické homologii invariantní a na jeho paprsku o vznikne involuční řada korespondujících bodů polí ϱ, ϱ_1 (přešlo-li pole ϱ' harmonickou

homologií v pole ϱ_1). Je tedy kolineace souměrných polí ϱ, ϱ_1 také harmonickou homologií.

*

**Sur la décomposition des homographies planes en produit des
homologies harmoniques.**

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur démontre que chaque homographie de deux champs superposés peut être décomposée en produit de trois homologies harmoniques au plus. Il en donne même la construction.

Poznámka k článku „O rozkladu rovinných kolineací“.

Jan Srb, Nový Bohumín.

(Došlo dne 21. května 1935.)

V článku „O rozkladu rovinných kolineací v produkt harmonických homologií*“) jsem ukázal, že každou (nesingulární) rovinnou kolineaci je možno rozložit v produkt nejvýše tří harmonických homologií. Ptejme se, není-li možno rovinnou kolineaci rozložit v produkt dvou harmonických homologií.

Je-li K kolineace dvou soumístných polí ϱ a ϱ' a má-li pole ϱ' přejít homologií H v soumístné pole ϱ_1 takové, aby kolineace polí ϱ a ϱ_1 byla homologií H_1 , musí střed homologie H padnout do středu perspektivnosti dvou lineárních bodových řad korespondujících v K a osa procházet samodružným bodem společným oběma řadám. Protože v rovinné kolineaci je vždy alespoň jeden bod samodružný, existují v ní vždy perspektivní sdružené řady a pak všechny tyto řady mají: 1. jediný, 2. více středů perspektivnosti. V případě 1. je střed vrcholem svazku samodružných paprsků. Existuje tedy řada samodružných bodů a leží-li střed na této řadě je kolineace typu $[(10)]$, neleží-li na ní je kolineace typu $[10]$. V případě 2. středy vyplňují přímku samodružnou, příslušnou k samodružnému průsečíku perspektivních řad. Padne-li tento průsečík vždy na přidruženou samodružnou přímku je kolineace typu $[(000)]$, nepadne-li na ní nikdy je kolineace typu $[000]$, nastanou-li oba případy zároveň je kolineace typu $[0(00)]$.

Uvažujme nejprve nejobecnější případ, kolineaci typu $[000]$. Jsou-li X, Y, Z samodružné reálné body neležící v přímce, je kolineace K určena dvěma korespondujícími body A, A' neležícími na žádné straně invariantního trojúhelníku. Nazveme-li průměty bodů A, A' z vrcholů X, Y, Z na strany tohoto $A_x, A'_x; A_y, A'_y; A_z, A'_z$ a průsečíky spojnice AA' se stranami S_x, S_y, S_z jest

*) Časopis 65 (1936), str. 77—83.

$$S_x S_y S_z A A' \stackrel{X}{\wedge} S_x Z Y A_x A'_x \stackrel{Y}{\wedge} Z S_y X A_y A'_y \stackrel{Z}{\wedge} Y X S_z A_z A'_z. \text{ Body } S_x,$$

S_y, S_z jsou středy perspektivnosti řad $XA_x, XA'_x; YA_y, YA'_y; ZA_z, ZA'_z$ a $A_x, A'_x; A_y, A'_y; A_z, A'_z$ body sdružené na stranách invariantního trojúhelníku. Zaujme-li přímka $S_x S_y S_z$ všechny možné polohy v rovině trojúhelníku XYZ , proběhnou body A, A' všechny dvojiny korespondujících bodů a jest vždy $S_x Z Y A_x A'_x \wedge \wedge Z S_y X A_y A'_y \wedge \wedge Y X S_z A_z A'_z$. Je tedy kolineace K určena mimo vrcholy X, Y, Z invariantního trojúhelníku třemi body na jedné jeho straně z nichž dva jsou sdružené v K a jeden je středem perspektivnosti řad určených těmi body a protějším vrcholem. Tyto tři body je možno volit libovolně, ale tak, aby nesplývaly žádné dva a žádný s bodem samodružným. Protože dále součin charakteristických dvojpoměrů kolineace K je $+1$, jsou možné dva případy: buď každé dva sdružené body na každé straně invariantního trojúhelníku neoddělují, nebo na jedné straně neoddělují a na dvou oddělují body samodružné. Buď strana YZ ta, na které se A_x, A'_x a Y, Z neoddělují. Zvolíme-li nyní homologii H harmonickou se středem S_x a osou jdoucí bodem X a oddělující harmonicky s bodem S_x body A_x, A'_x , bude přímka XA_x osou homologie H_1 a přímka YZ samodružnou. Aby také H_1 byla involuční, t. j. aby na YZ vznikla h. h. H involuce, je nutno, aby se touto vyměnily samodružné body Y, Z , tedy S_x musí být dvojným bodem involuce určené dvojicemi Y, Z a A_x, A'_x . Zvolme bod S_x tak, aby s X (tedy i s Y) odděloval body A_x, A'_x , tedy také s $S_y(S_z)$ body A, A' , ale aby nebyl dvojným bodem involuce Y, Z, A_x, A'_x . Z projektivnosti skupin 5 bodů $YZS_xA_xA'_x$ na YZ plyne, že není dvojným bodem žádné skupině na této přímce a z perspektivnosti skupin na ostatních dvou stranách s $S_x S_y S_z A A'$, že při této volbě S_x body A_y, A'_y a A_z, A'_z oddělují samodružné body XY, ZX . Není tedy možno tuto kolineaci rozložit v produkt dvou harmonických homologií. Při jiné volbě S_x je z této perspektivnosti patrné: je-li S_x, S_y nebo S_z dvojným bodem involuce $YZ, A_x A'_x; XY, A_z A'_z$ nebo $XZ, A_y A'_y$ v jedné skupině, pak je jím také ve všech skupinách na téže přímce, ale v žádné na zbývajících dvou přímkách. Jsou-li oba body Y, Z imaginární sdružené na reálné samodružné přímce x , promítneme z bodu X dvě lineární, neperspektivní, korespondující řady $(A), (A')$ na přímku x do řad $(A_x), (A'_x)$. Spojnice korespondujících bodů A, A' řad $(A), (A')$ protínají x v řadě (S) . Pak je $(A) \wedge (A'), (A_x) \stackrel{X}{\wedge} (A), (A'_x) \stackrel{X}{\wedge} (A')$ a protože x je jednou ze spojníc AA' je $(S) \wedge (A) \wedge (A')$ tedy $(S) \wedge (A_x) \wedge (A'_x)$. $AA'S$ je tečnou pravé kuželosečky obalené spojnici AA' . Splynou-li A_x a A'_x , prochází tečna bodem X a S splýne s oběma body. Mají

tedy po dvou projektivní řady (S) , (A_x) , (A'_x) tytéž samodružné body Y, Z a skupiny $SA_xA'_xYZ$ jsou opět projektivní. Protože reálná hyperbolická involuce může být určena dvojinou bodů reálných A_x, A'_x a dvojinou imaginárních sdružených Y, Z , platí pro tento typ totéž co bylo řečeno o typu s reálnými body samodružnými.

Jsou-li v kolineaci typu $[0(00)]$ X, Y reálné samodružné body na invariantní přímce x s indukovanou projektivností typu $[00]$ a y invariantní přímka s projektivností typu $[(00)]$, nelze volit střed $h. h. H$ na přímce x , protože perspektivní řady, mající na této přímce středy, procházejí samodružným bodem X , kterým by také musela procházet osa $h. h. H$. Pak ale projektivnost $[00]$ na přímce x při H invariantní, nemůže touto přejít nikdy v involuci. Zvolíme-li střed $h. h. H$ na přímce y , je tato při ní invariantní a aby projektivnost typu $[(00)]$ na y přešla v involuci, musí osa $h. h. H$ procházet bodem X . Tato osa musí však také procházet bodem Y jako průsečíkem řad se středem perspektivností na y . Je tedy nutno zvolit samodružnou přímku x za osu $h. h. H$. Aby také H_1 mohla být involuční, je nutno, aby souměrné projektivní řady indukované kolineací K na x byly involuční. O této a o kolineacích typu $[(10)]$ a $[(000)]$ je v zmíněném článku dokázáno, že je vždy možno rozložit je v produkt dvou harmonických homologií a zároveň je uvedena volba středů a os.

Neinvoluční kolineaci typu $[10]$ nelze nikdy rozložit v produkt dvou harmonických homologií. Střed $h. h. H$ by bylo nutno zvolit ve středu jejím, který je samodružným bodem řad indukovaných kolineací K na samodružných paprscích jím jdoucích. Tyto paprsky jsou tedy i při H invariantní a projektivnosti typu $[00]$, na nich kolineací K indukované, nemohou $h. h. H$ přejít v perspektivnosti involuční. Jinak by musela být osa dané homologie zvolena za osu $h. h. H$. V tomto případě opět nemůže přejít v involuci hyperbolická projektivnost indukovaná danou homologií na přímce spojující její střed se středem homologie H , která je také invariantní při H_1 . Tím je dokázáno: *Rovinnou kolineaci (nesingulární a neinvoluční) není obecně možno rozložit v produkt dvou harmonických homologií. V případech kdy rozklad možný je, je vždy možný systémem nekonečně mnoha dvojic a to buď jednomocným s invariantní přímkou a invariantním bodem (který může na této přímce ležet), nebo s dvěma přímkami a dvěma body invariantními nebo dvěma systémy dvojmocnými: prvním se svazkem invariantních paprsků, druhým s řadou invariantních bodů.* V případě prvním všechny středy dvojic $h. h.$ jsou dvojiny bodů invariantní přímky a osy dvojiny přímek svazku se středem v invariantním bodě. V případě druhém středy prvních (druhých) $h. h.$ z každé dvojiny jsou body invariantní přímky jedné a společná osa je druhá invariantní přímka. Společný

střed druhých (prvých) h. h. je průsečík obou invariantních přímek a osy jsou přímky svazku se středem v invariantním bodě na druhé přímce. V prvním systému dvojmočném je vrchol svazku invariantních paprsků společným středem všech h. h. a osy jsou dvojiny přímek protínajících se na jednom z těchto paprsků. V systému druhém je společnou osou h. h. přímka invariantních bodů a středy dvojice bodů na paprscích svazku s vrcholem na společné ose.

*

Remarque à l'article „Sur la décomposition des homographies planes“.*)

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur démontre qu'on ne peut pas en général décomposer une homographie en produit de deux homologies harmoniques. En cas exceptionnel où cette décomposition a lieu, on peut l'effectuer moyennant de paires des homologies harmoniques lesquelles constituent ou bien un système à un paramètre ou bien deux systèmes à deux paramètres.

*) L'article cité a été publié dans ce recueil, pp. 77—83.

ČASŤ FYZIKÁLNÍ.

Les oscillations du magnétron avec la triode.

M. Jahoda, Praha.

(Reçu le 30 septembre 1935.)

L'étude que nous allons faire concerne la production des ondes très courtes au moyen d'une triode possédant des électrodes cylindriques et circulaires dont l'axe est le filament et placé dans un champ magnétique dont les lignes de force sont parallèles au filament. Cet ensemble porte le nom de triode-magnétron.

La première partie traite des caractéristiques du triode-magnétron, la deuxième le triode-magnétron en tant que générateur des ondes très courtes et la troisième partie la dépendance de la longueur d'onde du système extérieur.

A. Žáček¹⁾ a déjà montré qu'on pouvait se servir d'une diode pour la production des ondes très courtes. La diode était constituée par une anode cylindrique et circulaire dans l'axe de laquelle se trouvait le filament et était placée dans un champ magnétique dont les lignes de force étaient parallèles au filament. Ce même auteur a fait breveter²⁾ non seulement le magnétron avec la diode, mais aussi le magnétron avec la triode.

Dans cette étude nous allons montrer en effet qu'on peut aussi se servir d'une triode en appliquant sur la plaque et sur la grille une tension positive.

Le magnétron utilisé est ainsi constitué: soit c'est une diode à anode cylindrique et circulaire dont l'axe est le filament et placée à l'intérieur d'une bobine magnétiseuse assez longue de façon que les lignes de force soient parallèles au filament. Soit c'est une triode à électrodes cylindriques placée au centre de la bobine magnétiseuse de la même façon que la diode car c'est la condition pour que la lampe soit dans un champ uniforme. La bobine magnétiseuse est constituée par un tube de cuivre jaune de 5,8 cm de diamètre et de 38 cm de longueur sur lequel on a enroulé 3688 spires de fil de cuivre de 1,5 mm d'épaisseur. Un courant de 1 Amp. produit au centre de la bobine une intensité de champ magnétique de 106 Oersted.

Si nous plaçons la diode au centre de la bobine parcourue par le courant, la trajectoire des électrons (émis par le filament et

¹⁾ A. Žáček, Časopis pro pěstování matem. a fysiky, 53 (1924), 378; Jahrb. f. drahtl. Telegr. 32 (1928), 172.

²⁾ Čs. pat. No. 20.293; All. pat No. 471.524.

attirés par l'anode positive) qui était primitivement rectiligne, se courbe. Plus le champ magnétique augmente, plus la courbe s'accroît. De plus, pour un champ magnétique de faible intensité, les électrons continuent à atteindre l'anode, mais pour une plus forte intensité il arrive que les trajectoires sont tellement déformées que les électrons ne peuvent plus atteindre l'anode. Le champ magnétique correspondant est appelé champ magnétique critique ou champ de blocage H_{kr} .

Si tous les électrons partaient du filament avec la vitesse zéro et si tous les points du filament étaient au même potentiel, au début, à mesure qu'on élèverait la valeur de champ magnétique, le courant d'anode serait constant. Puis le champ de blocage étant atteint, le courant anodique tout à coup tomberait à zéro. Si nous faisons croître encore cette intensité du champ magnétique, l'intensité du courant anodique serait encore zéro. A. W. Hull³⁾ a trouvé que l'intensité du champ de blocage était donnée par la formule

$$H_{kr} = \sqrt{8 \frac{m}{e}} \cdot \frac{\sqrt{E_a}}{r_a} = \text{konst} \frac{\sqrt{E_a}}{r_a}, \quad (1)$$

où m est la masse de l'électron et e sa charge. E_a est le potentiel de l'anode et r_a le rayon de l'anode.

Mais en réalité, les électrons partent du filament avec des vitesses différentes et tous les points du filament ne sont pas au même potentiel. L'anode a par conséquent un potentiel différent par rapport aux différents points du filament et c'est pourquoi, lorsque le champ de blocage est atteint, le courant de plaque ne descend pas brusquement à zéro, mais y parvient très vite d'une façon continue.

En ce qui concerne le triode-magnétron, il faut envisager non seulement le courant de plaque mais aussi celui de grille. Leur intensité est donnée en fonction du champ magnétique H par les formules

$$i_g = f_1(H)_{E_a, E_g = \text{konst.}}; \quad i_a = f_2(H)_{E_a, E_g = \text{konst.}}, \quad (2)$$

où i_g est le courant de grille, i_a le courant de plaque, E_g le potentiel de grille et E_a le potentiel de plaque.

Les potentiels de plaque et de grille étant positifs, une partie des électrons atteint la grille, une autre la plaque. Mais si l'on place la triode dans le champ magnétique précédent, à mesure que le champ croît, les trajectoires des électrons s'incurvent. Lorsque ce champ a atteint une certaine valeur H_{akr} , appelée champ de blocage anodique, les électrons ne peuvent plus parvenir à la plaque. Le courant anodique a alors atteint très vite la valeur zéro et s'y maintient pour des champs magnétiques plus grands que H_{akr} .

³⁾ A. W. Hull, Physical Review 18 (1921), 31.

Les électrons retournent en arrière vers la grille positive. Une partie d'entre eux tombe sur elle et le courant de grille augmente, une autre partie retourne au filament. Qu'arrive-t-il encore lorsque le champ magnétique a dépassé la valeur H_{akr} ? Les trajectoires des électrons s'incurvent de plus en plus à tel point que lorsque le champ a atteint la valeur H_{gkr} ($H_{gkr} > H_{akr}$) appelée champ de blocage de grille, les électrons ne peuvent plus parvenir à la grille, leurs trajectoires sont toutes entières situées entre le filament et la grille et le courant de grille atteint très vite la valeur zéro. On constate que la valeur de H_{akr} est à peu près indépendante du potentiel de grille, même la valeur H_{gkr} est à peu près indépendante du potentiel de plaque de sorte que les valeurs de H_{akr} et H_{gkr} sont données par:

$$H_{akr} = \text{konst} \frac{\sqrt{E_g}}{r_a}; \quad H_{gkr} = \text{konst} \frac{\sqrt{E_g}}{r_g}, \quad (3)$$

où r_a est le rayon d'anode et r_g le rayon de grille.

Sur la fig. 1 sont représentés les caractéristiques du triode magnétron avec une cathode wolfram du $r_a = 0,9$ cm, $r_g = 0,3$ cm, $E_g = E_a = 120$ Volt.

Le magnétron considéré comme générateur.

Supposons que nous plaçons la diode dans un champ magnétique supérieur ou égal au champ de blocage, les électrons décrivent alors des courbes fermées et leur mouvement périodique engendre entre les électrodes une différence de potentiel alternative, dont la période est fonction du temps mis par l'électron à décrire une de ces courbes. Pour étudier les ondes électromagnétiques correspondantes on a relié l'anode et le filament à deux fils métalliques parallèles éloignés de 15 mm et de longueur variable. On peut faire varier cette longueur soit en changeant purement et simplement les fils, soit, pour de petite variations, en faisant glisser deux petits tubes placés aux extrémités des fils. La longueur d'onde fut mesurée au moyen du système de Lecher: deux fils de cuivre éloignés l'un de l'autre de 20 mm et tendus sur un châssis de bois, furent reliés par un pont métallique rectangulaire de 100×95 mm que l'on pouvait déplacer au moyen d'un fil de soie. Les extrémités des fils métalliques d'un côté furent fixés à une plaque de cuivre jaune rectangulaire de 70×50 mm, fendue par le milieu et dont les deux parties avaient été légèrement écartées, une d'entre elles fut reliée à un détecteur à cristal par l'intermédiaire d'un condensateur et l'autre fut reliée directement au détecteur. En parallèle avec le détecteur on avait placé un galvanomètre à miroir.

Les oscillations du diode-magnétron prennent naissance au voisinage du champ de blocage et la longueur d'onde est donnée par la relation

$$\lambda = \frac{\text{konst}}{H_{kr}}. \quad (4)$$

A mesure que le champ magnétique croît (à condition que l'anode soit toujours au même potentiel) l'intensité des oscillations diminue très vite.

Si nous utilisons le triode-magnétron et si nous donnons au champ magnétique une valeur égale ou supérieure au champ de blocage de grille H_{gkr} , les trajectoires des électrons sont toutes

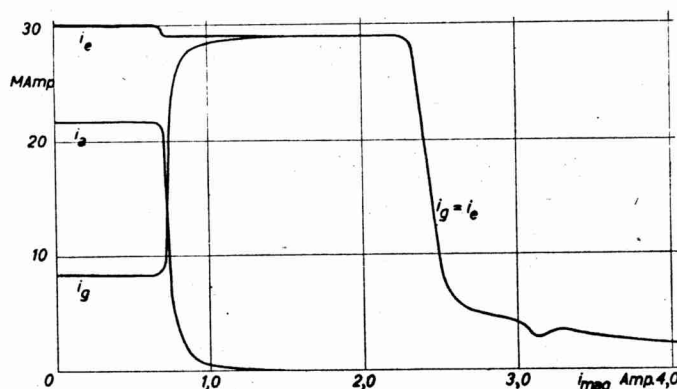


Fig. 1.

entières comprises dans l'espace grille-filament et ressemblent aux trajectoires des électrons dans le diode-magnétron. Les oscillations se produisent et leur longueur d'onde est donnée aussi par la formule (4).

Les oscillations du triode-magnétron correspondant aux trajectoires d'électron toutes entières dans l'espace grille-filament, nous les appellerons oscillations du genre I. Elles prennent naissance pour les champs magnétiques H donnés par la relation

$$H \geq H_{gkr}. \quad (5)$$

C'est pour $H = H_{gkr}$ que les oscillations ont la plus grande intensité.

Les oscillations du genre I sont identiques aux oscillations du diode-magnétron de Žáček.

Cependant quand les électrons peuvent pénétrer dans l'espace grille-anode, c'est à dire quand l'intensité du champ magnétique est telle que:

$$H_{akr} \leq H < H_{gkr}, \quad (6)$$

des oscillations se produisent et nous les appellerons oscillations du genre II. Les électrons qui partent du filament traversent la grille, pénètrent dans l'espace grille-anode et retournent vers la grille. Dans ce deuxième passage vers la grille une partie des électrons reste sur la grille et l'autre partie retourne au filament. On montre qu'au voisinage de H_{akr} non seulement le courant d'anode i_a diminue, mais aussi le courant total i_e donné par $i_e = i_a + i_g$ comme on peut le voir sur la caractéristique i_e du triode-magnétron (fig 1). Cet abaissement du courant total au voisinage

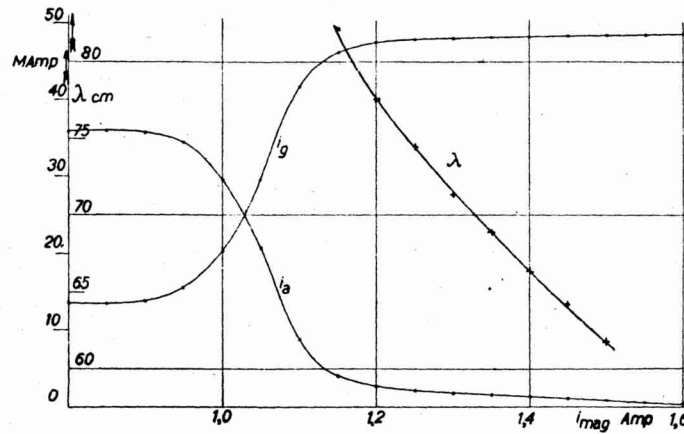


Fig. 2.

de H_{akr} est l'indice, que les oscillations se produisent. La longueur d'onde est donnée par la relation

$$\lambda_{II} = \frac{A}{H}, \quad (7)$$

où A est la constante et H l'intensité du champ magnétique donnée par la relation (6).

L'étude des oscillations du genre II du triode-magnétron furent faite principalement dans le cas, où $E_a = E_g$, car dans ce cas les oscillations sont les plus intenses et les plus stables. La figure 2 indique les variations de la longueur d'onde en fonction du champ magnétique et le tableau suivant indique les différentes mesures effectuées. On en a déduit dans chaque cas la valeur de la constante A .

λ_{II}	H	$A \cdot 10^{-3}$
82,2	121,8	10,0
77,5	127,2	9,86
74,5	132,4	9,87
71,4	137,8	9,84
69,0	143,3	9,88
66,3	148,4	9,85
61,8	159,0	9,83
60,0	164,3	9,86

$$E_a = E_g = 240 \text{ Volt.}$$

La valeur du champ de blocage anodique calculée d'après la relation (3) est de 115 Oersted.

Dépendance des oscillations du genre II du système extérieur.

Les oscillations du genre II du triode-magnétron sont par leur production la transition entre les oscillations de Barkhausen-Kurz et les oscillations du diode-magnétron du genre I. En ce qui concerne la triode aux électrodes cylindriques productrice des oscillations de Barkhausen-Kurz, la grille est à un potentiel positif élevé, tandis que la plaque est à un potentiel nul ou négatif. La vitesse des électrons émis par le filament est accrue par la grille positive. Une partie d'entre eux traverse la grille et, la plaque étant négative, ne peut pas parvenir à cette dernière et s'en retourne vers la grille; une partie la traverse et retourne au filament. Ce mouvement périodique des électrons autour de la grille produit entre les électrodes une différence de potentiel alternative de très haute fréquence. H. E. Hollmann⁴⁾ a étudié la dépendance de la longueur d'onde des oscillations de Barkhausen-Kurz du système extérieur. Il a trouvé des domaines où la longueur d'onde ne dépend pas du système extérieur (partie A) et d'autres où elle en dépend (partie B).

Examinons expérimentalement la dépendance de la longueur d'onde des oscillations de Barkhausen-Kurz du système extérieur dans le cas où la triode est placée dans un champ magnétique et où le potentiel des électrodes est constant. Le système extérieur se compose de deux fils parallèles respectivement liés à la plaque et à la grille de la triode et sur lesquels peut se déplacer un condensateur. En parallèle sur le filament est monté un potentiomètre dont le point milieu est relié à la plaque (On a ainsi $E_a = 0$) et on

⁴⁾ H. E. Hollmann, Ann. der Phys. 86 (129), 1928.

a appliqué sur la grille une tension de 200 Volt ($E_g = 200$ Volt). La figure 3 montre le résultat des mesures.

Quand le champ magnétique croît, l'intensité des oscillations décroît et quand l'intensité du champ magnétique est supérieure

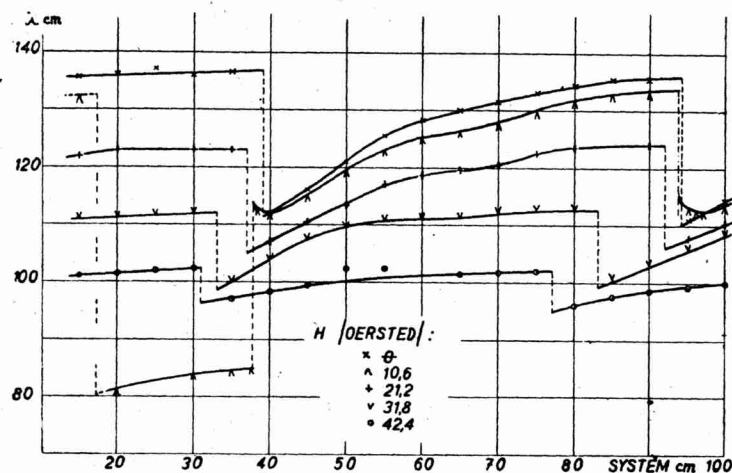


Fig. 3.

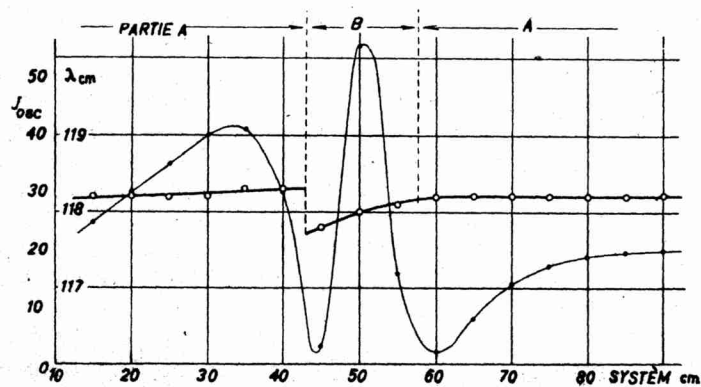


Fig. 4.

à 45 Oersted les oscillations sont tellement faibles, qu'on ne peut plus les mesurer. Dans la partie A comme dans la partie B la longueur d'onde diminue à mesure que H croît et les sauts de la fréquence entre la partie A et la partie B suivent la même variation. On le voit sur le tableau suivant établi d'après la formule

$$f_s = 100 \frac{\lambda_A - \lambda_B}{\lambda_A},$$

où λ_A est l'onde (la plus longue) de la partie A et λ_B l'onde la plus courte de la partie B :

H	λ_A	λ_B	f_s %
0	135,5	110,5	18,5
10,6 ⁵⁾	133,5	114,0	14,6
21,2	124,0	106,5	14,1
31,8	112,5	99,2	11,8
42,4	102,8	95,7	6,9

Quand on place, suivant le montage de Barkhausen et Kurz, la triode dans un champ magnétique croissant, les trajectoires des électrons qui étaient primitivement des droites deviennent des courbes fermées qui s'élargissent de plus en plus et cela permet d'expliquer la diminution des sauts de fréquence.

On peut alors s'attendre à ce que pour les oscillations du triode-magnétron du genre II où la trajectoire des électrons est „la plus large“ les sauts de fréquence f_s de la partie A à la partie B soient très petits. La figure 4 montre la variation de la longueur d'onde (ligne forte) et celles de l'intensité des oscillations de genre II du triode magnétron (ligne fine) en fonction de la longueur du système extérieur. Pour un champ magnétique $H = 84,8$ Oersted et la tension $E_a = E_g = 120$ Volt on a trouvé $\lambda_A = 118,3_2$ cm, $\lambda_B = 117,7_6$ cm d'où $f_s = 0,5\%$. On voit sur la fig. 4 que les oscillations qui ont la plus grande intensité sont celles, pour lesquelles la longueur d'onde dépend du système extérieur. Ce sont les oscillations de la partie B .

En résumé on peut dire que:

1. Si nous employons une triode comme magnétron, nous obtenons deux sortes d'oscillations qui nous avons appelées oscillations du genre I et oscillations du genre II.
2. Les oscillations du genre I sont identiques avec les oscillations du diode-magnétron.
3. La longueur d'onde des oscillations du genre II est inversement proportionnelle à l'intensité du champ magnétique.

⁵⁾ Pour cette valeur du champ magnétique la courbe présente une irrégularité que l'on peut voir sur la figure 3. Pour des longueurs du système extérieur comprises entre 20 cm et 37 cm on trouve que la longueur d'onde est comprise entre 81 cm et 85 cm au lieu de 132 et 134 cm comme on aurait pu le croire. Ce n'est pas une longueur d'onde harmonique.

4. La longueur d'onde des oscillations du genre II est presque indépendante des variations du système extérieur et les sauts de fréquences sont très faibles.

Institut de Physique de l'Université Charles, Praha.

*

Oscilace triodového magnetronu.

(Obsah předešlého článku.)

V této práci jest studován magnetronový generátor, tvořený triodou s kruhově válcovými elektrodami, která jest umístěna v dutině magnetisační cívky. Triodový magnetron byl vyšetřován pro případ, že na mřížce i na anodě jsou kladná napětí. Pak magnetronové charakteristiky jsou dvě: jednak závislost anodového proudu a za druhé závislost mřížkového proudu na intensitě magnetického pole. Zvyšuje-li se neustále magnetické pole počínajíc od nuly, dráha elektronu se zakřivuje, až při jistém poli, nazvaném kritické magnetické pole anodové H_{akr} , nedopadnou již elektrony na anodu. Při dalším zvyšování magnetického pole se zakřivuje dráha elektronů stále více, až při t. zv. kritickém magnetickém poli mřížkovém H_{gkr} nedopadnou již elektrony ani na mřížku.

Při užití triodového magnetronu vznikají dva druhy oscilací. První z nich, vznikající při magnetických polích $H \geq H_{gkr}$, jsou označeny jako oscilace I. druhu a jsou zcela identické s oscilacemi diodového magnetronu.

Kmity označené jako oscilace II. druhu vznikají při magnetických polích daných nerovinnou

$$H_{akr} \leq H < H_{gkr}. \quad (6)$$

Vyšetřování oscilací triodového magnetronu II. druhu se dalo hlavně pro případ, kdy napětí na anodě i mřížce byla stejná. Vlnová délka oscilací II. druhu jest dána vzorcem

$$\lambda_{II} = \frac{A}{H},$$

kde A je konstanta a H je intensita magnetického pole daná podmínkou (6).

Při zkoumání závislosti vlnové délky na délce vnějšího připojeného systému se ukázalo, že vlnová délka závisí na délce systému pouze ve velice úzkých oborech změn délky systému v okolí resonance (obor B), kdežto pro všechny ostatní délky systému jest vlnová délka stálá (obor A). Také frekvenční skoky z oborů A do oborů B jsou velmi malé.

Panu profesorovi Dru A. Žáčkovi, řediteli fyzikálního ústavu Karlovy university, děkuji za jeho laskavé rady a za poskytnutí prostředků k vykonání této práce.

Z fyzikálního ústavu Karlovy university v Praze.

A precise method of determining the constant of crystal grating by the combination of φ - and κ -methods.

V. Dolejšek and Swami Jnanananda, Praha.

(Received December 13, 1935.)

A new type of spectrograph has been constructed. Its principal parts are three coaxial cylinders of chrome-nickel-steel, which are made by Skoda-Works. The grating constant of a zinc sulphide crystal has been measured with this spectrograph using the method of Siegbahn to verify the advantages of the κ -methods against the φ -method as shown by the former authors. It has been shown that the defects of the crystal such as displacement can be determined and eliminated by the combination of the φ - and the κ -methods. The possibility of the said determination is given by the fact that the value of the constant of crystal grating derived through the κ -method can be, in the first approximation, taken to be the correct value. After determining the said error of displacement, even the minute error of the measured angle κ can be eliminated. The said method has been experimentally verified.

In this journal two precise methods of determining the grating constant of a crystal have been published. These methods do not require to measure the glancing angle φ , as demanded by the Bragg's law, but they need to measure and utilise the angle κ , the difference between two glancing angles. We should like to point out that the angle κ , in either one of these methods, is only measured with the Siegbahn's precise method for the measurement of the glancing angle φ .

Of these two κ -methods, one, evolved by Kunzl and Köppel,¹⁾ measures in the manner of Pavelka,²⁾ the difference between the glancing angles of the same radiation in two different orders m and n , i. e. $\kappa = \varphi_n - \varphi_m$, while the other, evolved by Bouchal and Dolejšek,³⁾ measures in a manner similar to Valouch,⁴⁾ the difference between the glancing angles of two different radiations λ_μ

¹⁾ V. Kunzl-J. Köppel, C. R. 196 (1933), 787; 196 (1933), 940; Časopis 63 (1934), 109; Journ. de Phys. 5 (1934), 145.

²⁾ A. Pavelka, Bull. de l'Acad. de Sc. de Bohême 28 (1927), 442.

³⁾ F. Bouchal-V. Dolejšek, C. R. 199 (1934), 1054; Časopis 65 (1935), 34.

⁴⁾ M. A. Valouch, Bull. de l'Acad. de Sc. de Bohême 28 (1927), 31.

and λ , in one and the same order, i. e., $\kappa = \varphi_{n,\nu} - \varphi_{n,\mu}$. Such is the difference between these methods so far as their fundamentals are concerned. Again if we look at the specific advantages, which have been shown in the cited papers, the difference between them is even greater. In the Kunzl-Köppel's method the fictive constants vary in accordance with the radiations used and they naturally differ from those of Bragg. In the series of the fictive constants derived by this method, which vary according to the radiations, a particular fictive constant, corresponding to a particular wavelength, can be found which agrees with the real grating constant. In the method of Bouchal-Dolejšek, the fictive constants do not vary with the wave-lengths used and they agree with the fictive constants derived from the φ -method of Bragg. In this method any two wave-lengths can be so chosen as to make the angle κ much smaller than in the Kunzl-Köppel's method, and through such a selection of the small angle κ , it is possible to enlarge the advantage of the other one where the value of the angle κ is nearly as great as that of the angle φ . We cannot however make a right use of this additional advantage for in the region of small angles the discrepancy of the scale has great influence on the results.

In this work, in verifying the mentioned advantages of the κ -methods of determining the grating constant of a crystal given by the former authors, we develop a new method by the combination of the φ - and κ -methods for entirely eliminating the discrepancy due to the defects of the grating crystal (such as displacement etc.), there by avoiding the necessity of selecting the angle κ which is small. Here, in applying this method, we measure and give out the precise value of the grating constant of a zinc sulphide (ZnS) crystal as its verification.

We have chosen zinc sulphide crystal as a diffraction grating, since it has, owing to small grating constant,⁵⁾ large dispersion, and at the same time has, as shown by Küpferle,⁶⁾ a good reflecting power. Therefore it is of great value as a diffraction grating for X-rays. From the other side, the natural surface of this crystal is very usually not quite regular and consequently it is not possible to adjust the forefront surface of the crystal exactly at the centre of the spectrograph with the usual optical methods. It can be noted that even with such an irregular surface of the crystal, we can with the κ -method derive precise value of the grating constant and thereby demonstrate the special merit and advantage of the κ -method.

For our proposed work we have used a new spectrograph (Fig. 1) which we have constructed. In its principle parts, this spectrograph consists of three coaxial cylinders. These cylinders

⁵⁾ A. Pavelka, l. c.

⁶⁾ G. Küpferle, ZS. f. Phys. 98 (1935), 237.

are made of chrome-nickel-steel by Skoda-Works in Plzeň (Czechoslovakia). They are cut and ground so as to fit in one another so precisely that they do not admit cavity or looseness amidst them more than 1 to 2μ . This is of course the highest precision that is possible to obtain. The precision of our measurements, is however

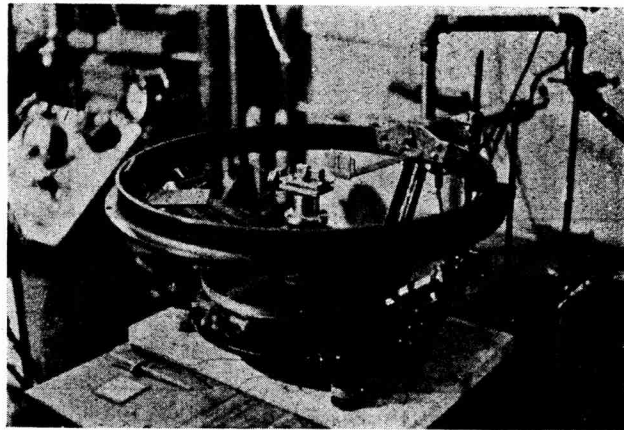


Fig. 1.

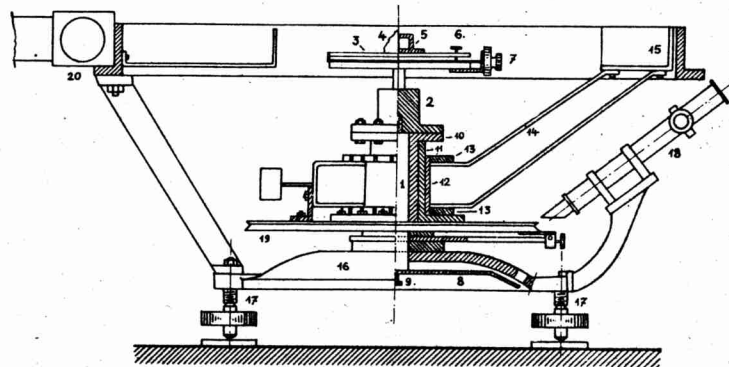


Fig. 2.

limited by conditions other than those of the cylinders as it can be noted from our readings and results. Through the choice of cylinders instead of conical axles the possibility of the eccentricity of the inner and outer cylinders is diminished. The material of the cylinders is such that it does not permit rubbing in due to friction so as to stop the motion of the cylinders. The middle cylinder is

Ist. Series with a displacement of 0,401 mm.

Table 1a.

Cu, φ_1

Plate No	Δ mm	Δ'	α	φ_t	$\Delta t^\circ \text{C}$	$\varphi 18^\circ \text{C}$	mean value of $\varphi 18^\circ \text{C}$
227	0,322	4' 24,3"	94° 44' 47,5"	23° 40' 5,8"	7,07"	23° 40' 12,87"	23° 40' 11,9"
228	0,757	10' 21,3"	94° 50' 47"	23° 40' 6,4"	6,78"	23° 40' 13,18"	
230	0,768	10' 30,4"	94° 50' 52"	23° 40' 5,4"	7,3"	23° 40' 12,7"	
231	0,329	4' 30,0"	94° 44' 48"	23° 40' 4,5"	7,07"	23° 40' 11,6"	
233	0,256	3' 30,1"	94° 36' 51,5"	23° 40' 5,4"	5,85"	23° 40' 11,25"	
234	0,260	3' 33,4"	94° 36' 53,5"	23° 40' 6,7"	6,31"	23° 40' 13,01"	
235	0,264	3' 36,7"	94° 36' 50"	23° 40' 6,6"	6,38"	23° 40' 12,98"	
236	0,266	3' 38,3"	94° 36' 47,75"	23° 40' 6,5"	6,61"	23° 40' 13,1"	
237	0,351	4' 48,1"	94° 44' 50"	23° 40' 0,5"	6,14"	23° 40' 6,6"	

Table 1b.

Mo, φ_1

Plate No	Δ mm	Δ'	α	φ_t	$\Delta t^\circ \text{C}$	$\varphi 18^\circ \text{C}$	mean value of $\varphi 18^\circ \text{C}$
207	0,2000	2' 44,2"	42° 27' 10,5"	10° 36' 6,6"	0,86"	10° 36' 7,46"	10° 36' 8,6"
208	0,1890	2' 35"	42° 27' 12,5"	10° 36' 9,5"	0,91"	10° 36' 10,41"	
210	0,3980	5' 26,9"	42° 29' 52"	10° 36' 6,25"	1,24"	10° 36' 7,49"	
211	0,4076	5' 34,5"	42° 29' 52"	10° 36' 4,25"	1,12"	10° 36' 5,37"	
212	0,4018	5' 29,8"	42° 29' 53,5"	10° 36' 6,0"	0,86"	10° 36' 6,86"	
213	0,1708	2' 20,2"	42° 22' 2,0"	10° 36' 5,5"	1,31"	10° 36' 6,81"	
214	0,1762	2' 24,6"	42° 22' 7"	10° 36' 7,9"	1,67"	10° 36' 9,57"	
238	0,197	2' 41,5"	42° 22' 8"	10° 36' 12,3"	1,11"	10° 36' 13,41"	
239	0,166	2' 16,3"	42° 22' 9"	10° 36' 6,3"	1,13"	10° 36' 7,43"	
240	0,187	2' 33,5"	42° 22' 7"	10° 36' 10,1"	1,24"	10° 36' 11,34"	

Table 1c.

Cu — Mo, κ

Plate No	Δ mm	Δ'	α	κ	$\Delta t^\circ \text{C}$	$\kappa 18^\circ \text{C}$	mean value of $\kappa 18^\circ \text{C}$
215	0,3450	4' 43,3"	26° 12' 43,5"	13° 4' 0,1"	1,66"	13° 4' 1,76"	13° 4' 2,37"
216	0,3381	4' 47,5"	26° 12' 47,4"	13° 3' 59,95"	1,37"	13° 4' 1,32"	
217	0,9536	13' 3,3"	25° 54' 53,0"	13° 3' 58,15"	1,79"	13° 3' 59,94"	
218	0,9690	13' 15,4"	25° 54' 53"	13° 4' 4,2"	1,78"	13° 4' 5,98"	
219	0,218	2' 58,9"	26° 5' 0,5"	13° 3' 59,7"	1,46"	13° 4' 1,16"	
220	0,2160	2' 57,3"	26° 5' 0,0"	13° 3' 58,65"	1,69"	13° 4' 0,34"	
221	0,2240	3' 3,9"	26° 11' 7,0"	13° 4' 1,55"	1,878"	13° 4' 3,43"	
223	0,2190	2' 59,8"	26° 11' 4,5"	13° 4' 2,35"	2,204"	13° 4' 4,55"	
224	0,2072	2' 49,1"	26° 5' 5"	13° 3' 57,05"	2,2"	13° 3' 59,25"	
225	0,216	2' 57,3"	26° 5' 8"	13° 4' 2,65"	2,088"	13° 4' 4,74"	
226	0,228	3' 7,1"	26° 11' 8,5"	13° 4' 0,7"	2,92"	13° 4' 3,62"	

Table 1d.

Displacement of the crystal.....	= 0,401 mm
$\varphi_1\text{Cu}$	= 23° 40' 11,9"
$\varphi_1\text{Mo}$	= 10° 36' 8,6"
$\varphi_1\text{Cu} - \varphi_1\text{Mo} = \kappa$	= 13° 4' 3,3"
Directly measured κ	= 13° 4' 2,37"
Mean κ	= 13° 4' 2,84"

fixed to the body of the spectrograph. The inner cylinder forms the axle of the crystal table and the outer cylinder that of the cassette holder. The construction of the spectrograph, which can be seen from the sketch (Fig. 2), is besides having the said cylinders instead of cones also different only in certain details from the usual spectrograph of the Siegbahn's type. This is of course due to the fact that the steel of the cylinders after hardening once, becomes so hard that it is no more possible to work on it. The cylinders have been ground at a temperature of 20° C. No influence of higher temperature on the precision of our readings has been found in the summer days. But if the temperature is less than 20° C, it is rather difficult to rotate either the crystal or the cassette. Before we discuss our readings with the mentioned spectrograph, we may say that the accuracy of the readings is limited by the scale.

It is with the above stated spectrograph that we have taken a set of three series of measurements, one of the glancing angle φ of Cu $K\alpha_1$, one of those of the glancing angle φ of Mo $K\alpha_1$ and another series of those of the angle κ (Cu $K\alpha_1 -$ Mo $K\alpha_1$), which can be seen from the Table 1 *a*, *b*, *c*, and *d*. First if we consider the series of measurements of the glancing angle φ of Cu $K\alpha_1$, excepting the last of the series, there is only a difference of 1, 5 or 2 seconds between the highest and the lowest value. In the case of the series of measurements of the φ of Mo $K\alpha_1$, there is slightly a greater difference between the maximum and the minimum. This precision is satisfactory for our work. In this connection, we wish to point out that the angle κ , derived from the mean value of the glancing angle φ of Cu $K\alpha_1$ and that of the glancing angle φ of Mo $K\alpha_1$, agrees with the mean value of the measured angle κ with only a difference of nearly 0,9". This agreement can be taken as a test of the accuracy of our measurements.

We have taken, as we have already mentioned, zinc sulphide crystal with a natural cut surface, which has given clear and well defined spectral lines. The crystal has however been slightly curved. We therefore could not fulfil the necessary conditions of adjustment of the crystal with the usual optical methods. Hence there has been actually a certain displacement which has introduced a discrepancy in the value of the glancing angle φ of Cu $K\alpha_1$ and that of the glancing angle φ of Mo $K\alpha_1$ and consequently in the value of the

grating constant of the crystal. How the displacement of the crystal affects the values of the glancing angles and consequently the value of the grating constant of the crystal derived from them, can be seen from our Table 2. When we see the first series of measurements which are taken with one and the same condition of the crystal-adjustment we find that the values of the constant of crystal grating derived from φ of Cu $K\alpha_1$ and φ of Mo $K\alpha_1$ are at

Table 2.

Grating constant of ZnS crystal at a temperature of 18° C.

I ... Ist series of measurements with a displacement $\Delta = 0,401$ mm
II ... II nd series of measurements with a displacement $\Delta = 0,025$ mm

d_1 XU	I	II	difference	mean corr. value
φ_1 CU.....	1914,77	1908,6		
mean κ	1908,166	1908,985		
corr. κ	1908,978	1908,935	0,043	1908,96
φ_1 Mo	1923,53	1908,0		

great variance with one another. Applying the value of the angle κ and the values of the wave lengths of Mo $K\alpha_1$ and Cu $K\alpha_1$ in the Bouchal-Dolejšek's equation,⁷⁾

$$d_n = \frac{1}{4}n \left[\left(\frac{\lambda_\nu - \lambda_\mu}{\sin \frac{1}{2}\kappa} \right)^2 + \left(\frac{\lambda_\nu + \lambda_\mu}{\cos \frac{1}{2}\kappa} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

(where d is the constant of crystal grating, n is the order at which the radiation is reflected, λ_ν is the wave length of the radiation ν , λ_μ is the wave length of the radiation μ which is smaller than λ_ν) we have derived 1908, 166 X. U. as the value of the grating constant of the crystal. This value thus derived from the angle κ though differs very much from both the values derived from the φ of Cu $K\alpha_1$ and the φ of Mo $K\alpha_1$ is, as we show at a latter stage, very near to the correct value. But in the second set of three series of measurements, shown in the Table 3, a , b , c and d , which are taken with the crystal-adjustment improved and made better than before by a process which we mention later on, the variance in the values of the constant of crystal grating derived from each one of the three said data (φ of Cu $K\alpha_1$, φ of Mo $K\alpha_1$ and κ of Cu — Mo) is greatly diminished. In the case of the first set of measurements with bad adjustment of the crystal the difference between the maximum and the minimum of the three said values of the constant of crystal grating is nearly 15,5 X. U., while in the case of the

⁷⁾ F. Bouchal and V. Dolejšek, C. R. 199 (1934), 1054.

II nd. Series with a displacement of 0,0245 mm.

Table 3a.

Cu, φ_1

Plate No	Δ mm	Δ'	α	φ_t	$\Delta t^\circ \text{C}$	$\varphi 18^\circ \text{C}$	mean value of $\varphi 18^\circ \text{C}$
256	0,338	4' 37,4"	94° 54' 56"	23° 44' 53,35"	4,31"	23° 44' 57,66"	23° 45' 4,346"
260	0,386	5' 16,8"	94° 54' 56"	23° 45' 3,2"	2,38"	23° 45' 5,58"	
261	0,182	2' 29,4"	95° 2' 17,5"	23° 44' 57,025"	2,27"	23° 44' 59,52"	
262	0,134	1' 50"	95° 2' 19"	23° 45' 7,125"	2,97"	23° 45' 10,095"	
265	0,423	5' 47,2"	94° 55' 1,5"	23° 45' 12,05"	1,28"	23° 45' 13,33"	
266	0,402	5' 30"	94° 54' 49"	23° 45' 4,75"	2,15"	23° 45' 6,9"	
267	0,203	2' 46,6"	95° 2' 50"	23° 45' 0,85"	1,92"	23° 45' 2,77"	
268	0,209	2' 51,5"	95° 2' 50"	23° 44' 57,025"	1,89"	23° 44' 58,91"	

Table 3b.

Mo, φ_1

Plate No	Δ mm	Δ'	α	φ_t	$\Delta t^\circ \text{C}$	$\varphi 18^\circ \text{C}$	mean value of $\varphi 18^\circ \text{C}$
258	0,247	3' 22,7"	42° 41' 51"	10° 41' 18,425"	0,999"	10° 41' 19,424"	10° 41' 22,94"
259	0,265	3' 37,5"	42° 41' 51"	10° 41' 22,125"	0,824"	10° 41' 22,949"	
263	0,192	2' 37,6"	42° 48' 6,5"	10° 41' 22,225"	1,399"	10° 41' 23,624"	
264	0,182	2' 29,4"	42° 48' 9,5"	10° 41' 25,25"	0,799"	10° 41' 26,049"	
269	0,263	3' 35,9"	42° 41' 52,5"	10° 41' 22,1"	0,949"	10° 41' 23,049"	
270	0,247	3' 22,7"	42° 41' 52,5"	10° 41' 18,8"	0,824"	10° 41' 19,624"	
271	0,255	3' 29,3"	42° 41' 55,5"	10° 41' 21,2"	0,999"	10° 41' 22,199"	
272	0,172	2' 21,2"	42° 47' 56"	10° 41' 23,7"	1,149"	10° 41' 24,849"	
273	0,175	2' 23,6"	42° 47' 57,0"	10° 41' 23,35"	1,249"	10° 41' 24,699"	

Table 3c.

Cu — Mo, α

Plate No	Δ mm	Δ'	α	α	$\Delta t^\circ \text{C}$	$\alpha 18^\circ \text{C}$	mean value of $\alpha 18^\circ \text{C}$
274	0,269	3' 40,8"	26° 10' 36,5"	13° 3' 27,85"	1,696"	13° 3' 29,546"	13° 3' 39,778"
275	0,247	3' 22,7"	26° 10' 31"	13° 3' 34,15"	1,862"	13° 3' 36,012"	
276	0,313	4' 16,9"	26° 3' 3,5"	13° 3' 40,2"	2,236"	13° 3' 42,436"	
277	0,306	4' 11,2"	26° 3' 6,5"	13° 3' 40,928"	2,078"	13° 3' 40,928"	
278	0,194	2' 39,2"	26° 9' 59,0"	13° 3' 39,9"	1,862"	13° 3' 41,762"	
279	0,182	2' 29,0"	26° 9' 54,5"	13° 3' 42,75"	1,330"	13° 3' 44,080"	
280	0,302	4' 7,9"	26° 3' 10,5"	13° 3' 39,2"	1,996"	13° 3' 41,196"	
281	0,307	4' 12,0"	26° 3' 11"	13° 3' 41,5"	0,768"	13° 3' 42,268"	

Table 3d. Displacement of the crystal..... = 0,0245 mm

$\varphi_1 \text{Cu}$	= 23° 45' 04,346"
$\varphi_1 \text{Mo}$	= 10° 41' 22,94"
$\varphi_1 \text{Cu} - \varphi_1 \text{Mo} = \alpha$	= 13° 03' 41,406"
Directly measured α	= 13° 03' 39,778"
Mean α	= 13° 03' 40,592"

measurements with better adjustment of the crystal the difference between the maximum and the minimum of the three values obtained from the second set of measured data, is only 0,9 X. U. As it can be noted from the Table 2, the values derived from the glancing angles in both cases with bad and good crystal-adjustments greatly differ from one another, while the values of the grating constant derived from the measured values of the angle κ with bad and good adjustments of the crystal, which are 1908, 17 X. U. and 1908, 99 X. U. respectively, are not only at very little variance but also very nearly agree with one another. A comparison of both these values, obtained from κ measured with bad and good adjustments of the crystal, with one another and a comparison of the values of the grating constant derived from the values of the glancing angles φ , measured in both cases, with one another and also of these values with the values derived from the values of the angle κ , reveal the special merit of the κ -method.

We have chosen Cu $K\alpha_1$ and Mo $K\alpha_1$ because these lines⁶⁾ are very precisely measured, and the angle κ (Cu $K\alpha_1$ — Mo $K\alpha_1$) may be taken to be nearly equal to the glancing angle φ of Mo $K\alpha_1$. It has been shown by the former authors that if the angle κ is smaller than the glancing angle φ , the defect of the crystal has a smaller influence on the value of the grating constant than if the angle κ is nearly equal to the glancing angle φ . But the errors of the scale in this case, as we have mentioned before, have again greater influence upon the results. To avoid this influence, we have taken a larger angle κ (even slightly larger than the glancing angle φ of Mo $K\alpha_1$).

So, from the above considerations, we see that through the κ -method, the discrepancy due to the defects of the grating crystal is diminished, but is not altogether eliminated. Now we show that by the combination of the φ - and the κ -methods, we can exactly determine the amount of possible displacement and its consequent error that enters in the value of the grating constant and thus practically eliminate all such errors due to the defects of the crystal even if they are great, the only condition naturally being that the said defects remain stationary during the course of observation. We mention this fact because the result calculated from the angle κ derived from the values of two different glancing angles measured with two different crystal-adjustments cannot be deemed to be more accurate than the results derived from the glancing angles.

Now to show the principle of the mentioned possibility of the combination of φ - and κ -methods for the elimination of the discre-

⁶⁾ A. Larson, Phil. Mag. (7) 3 (1927), 1136; Ina Wennerlöf, Ark. Mat., Astr. och Fysik. (A) 22 (1930), Nr. 8.

pancy due to the defects of the grating crystal, we discuss from our Table 4, the final readings compiled from our Tables 1 and 3 and their respective results. In the Table 4 we have two different values, firstly that of the φ of Cu $K\alpha_1$, namely $23^\circ 40' 11,9''$ which gives us a value of 1914, 77 X. U., and secondly that of the glancing angle φ of Mo $K\alpha_1$, which gives us a value of 1923, 5 X. U. as the

Table 4.

Representation of the Ist series of measurements and their results
($\Delta \sim 0,401$ mm).

$\frac{1}{2}\delta_1 = 0^\circ 05' 13,11''$			
$\varphi_1\text{Cu meas.}$ $23^\circ 40' 11,9''$	$d_1 =$ 1914,77 XU	$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1\text{Cu} \sim \text{to } 1908,166 \text{ XU} \\ 23^\circ 45' 25,01'' \\ \text{cor. } \kappa \\ 13^\circ 03' 40,77'' \\ \varphi_1\text{Mo} \sim \text{to } 1908,166 \text{ XU} \\ 10^\circ 41' 19,6'' \end{array} \right.$	cor. $d_1 =$ 1908,978 XU
mean κ $13^\circ 04' 02,84''$	$d_1 =$ 1908,166 XU		
$\varphi_1\text{Mo meas.}$ $10^\circ 36' 08,6''$	$d_1 =$ 1923,53 XU		
$\frac{1}{2}\delta_1 = 0^\circ 05' 11''$			
$\left[\begin{array}{c} \Delta \text{ mean } \Delta \\ \text{mm} \quad \text{mm} \end{array} \right]$		$\frac{1}{2}\delta \quad \varepsilon\delta\kappa =$	
$\left\{ \begin{array}{l} \text{Cu } 0,416 \\ \text{Mo } 0,385 \end{array} \right\}$		$\left\{ \begin{array}{l} 5' 01,45'' \\ 5' 23,52'' \end{array} \right\} \quad - (\frac{1}{2}\delta\text{Cu} - \frac{1}{2}\delta\text{Mo})$	
$0,401$		$- 22,07''$	

cor.mean value = 1908,956 XU

Representation of the IInd series of measurements and their results
($\Delta \sim 0,025$ mm).

$\frac{1}{2}\delta = 18,18''$			
$\varphi_1\text{Cu meas.}$ $23^\circ 45' 04,35''$	$d_1 =$ 1908,6 XU	$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1\text{Cu} \sim \text{to } 1908,985 \text{ XU} \\ 23^\circ 44' 46,18'' \\ \text{cor. } \kappa \\ 13^\circ 03' 41,947'' \\ \varphi_1\text{Mo} \sim \text{to } 1908,985 \text{ XU} \\ 10^\circ 41' 02,90'' \end{array} \right.$	cor. $d_1 =$ 1908,935 XU
mean κ $13^\circ 03' 40,59''$	$d_1 =$ 1908,985 XU		
$\varphi_1\text{Mo meas.}$ $10^\circ 41' 22,94''$	$d_1 =$ 1908,0 XU		
$\frac{1}{2}\delta = 20,04''$			
Δ mean Δ mm mm	$\frac{1}{2}\delta$	$\varepsilon\delta\kappa =$ $-(\frac{1}{2}\delta\text{Cu} - \frac{1}{2}\delta\text{Mo})$	
$\left\{ \begin{array}{l} \text{Cu } 0,0242 \\ \text{Mo } 0,0248 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,025 \\ 18,417'' \\ 19,772'' \end{array} \right\}$	$+ 1,36''$	

difference 0,043 XU

constant of crystal grating. We have already pointed out that, in this case, the difference between these two values of the constant of crystal grating is only due to the displacement of the crystal and that the value $d_1 = 1908, 166$ X. U. derived from the value of the angle $\kappa = 13^\circ 4' 2,84''$, is very near to the correct value, in as much as the displacement and similar errors are greatly diminished in the

values derived from it. Assuming this value of the grating constant to be the correct one, we have derived from it the corresponding values of the glancing angle φ of $\text{Cu K}\alpha_1$ and similarly that of $\text{Mo K}\alpha_1$. Thus we have the measured value of φ $\text{Cu K}\alpha_1$ and the calculated value of φ $\text{Cu K}\alpha_1$, corresponding to the value of $d_1 = 1908, 166 \text{ X. U.}$ and also similarly the measured and the calculated values of φ of $\text{Mo K}\alpha_1$. Since the calculated values of the glancing angles of $\text{Cu K}\alpha_1$ and $\text{Mo K}\alpha_1$ are derived from the approximately correct value of the grating constant, they can be taken to be approximately correct. The difference between the measured value and the calculated value which is assumed to be correct, gives half of the approximate displacement error that exists in the measured values of the glancing angles φ because $\varphi_{\text{cor}} = \varphi_{\text{mes}} \pm \frac{1}{2}\delta$, where φ_{cor} is the value of the correct glancing angle, φ_{mes} is the value of the measured glancing angle and δ is the value of the displacement. We have therefore $\frac{1}{2}\delta = 5' 13,11''$ in the case of φ of $\text{Cu K}\alpha_1$ and $\frac{1}{2}\delta = 5' 11''$ in the case of φ of $\text{Mo K}\alpha_1$ which can be seen from the Table 4. They are approximately equal. In fact these displacement errors should be dissimilar, because any particular amount of displacement of the crystal Δ with two glancing angles such as those of $\text{Cu K}\alpha_1$, and $\text{Mo K}\alpha_1$ makes the displacement errors in the glancing angles different. Our values of $\frac{1}{2}\delta$, as can be noted from the above mentioned Table, are approximately equal, because the corresponding calculated values of the glancing angles in either case are not derived from the correct value of the grating constant of the crystal but are only obtained from a value very near to the true value. Or in other words, they are derived from a value of the angle κ having a minute error $\varepsilon\delta\kappa$. From these values of these displacement errors of δ of $\text{Cu K}\alpha_1$ and δ of $\text{Mo K}\alpha_1$ we have calculated the value of the displacement of the crystal Δ by the above mentioned equation. We have thus obtained two values, the mean of which being $0,401 \text{ mm}$ and this value can be taken as the value of the displacement of the crystal. From this value of the displacement of the crystal we can derive the correct values of the δ of $\varphi_{\text{Cu K}\alpha_1}$ and δ of $\varphi_{\text{Mo K}\alpha_1}$. From these data we can also derive the displacement error $\varepsilon\delta\kappa$ of the measured angle κ , and thus correct it by elimination from the following considerations. We have pointed out that in our case $\kappa = \varphi_\nu - \varphi_\mu$ where φ_ν is the glancing angle of the wave-length λ_ν and φ_μ is the glancing angle of the wave-length λ_μ , when $\varphi_\nu > \varphi_\mu$. It has been already pointed out that $\varphi_{\text{cor}} = \varphi_{\text{mes}} \pm \frac{1}{2}\delta_\varphi$ where φ_{cor} is the correct value, φ_{mes} the measured value of the glancing angle and δ_φ is the value of the displacement of the particular measured glancing angle φ . The displacement error δ is added if the crystal is displaced away from the slit and subtracted if it is displaced towards the slit. So we

have

$$\begin{aligned} \text{from... } \varphi_{\nu \text{ cor}} &= \varphi_{\nu \text{ mes}} \pm \frac{1}{2} \delta_{\varphi \nu} \\ \text{and... } \varphi_{\mu \text{ cor}} &= \varphi_{\mu \text{ mes}} \pm \frac{1}{2} \delta_{\varphi \mu}, \\ \text{for angle } \kappa \dots \kappa_{\text{cor}} &= \varphi_{\nu \text{ cor}} - \varphi_{\mu \text{ cor}}, \\ \text{and... } \kappa_{\text{mes}} &= \varphi_{\nu \text{ mes}} - \varphi_{\mu \text{ mes}}. \end{aligned}$$

From these we can deduce an equation expressing the relation between the correct angle κ_{cor} , the measured angle κ_{mes} and half the displacement errors $\frac{1}{2} \delta_{\varphi \nu}$ of the glancing angle φ_{ν} and $\frac{1}{2} \delta_{\varphi \mu}$ of the glancing angle φ_{μ} in the following way:

$$\begin{aligned} \kappa_{\text{cor}} &= (\varphi_{\nu \text{ mes}} \pm \frac{1}{2} \delta_{\varphi \nu}) - (\varphi_{\mu \text{ mes}} \pm \delta_{\varphi \mu}) \\ \kappa_{\text{cor}} &= (\varphi_{\nu} \pm \frac{1}{2} \delta_{\varphi \nu}) - (\varphi_{\mu} \pm \frac{1}{2} \delta_{\varphi \mu}), \\ &= \kappa_{\text{mes}} \pm \frac{1}{2} (\delta_{\varphi \nu} - \delta_{\varphi \mu}) \text{ or } \kappa_{\text{mes}} \pm (\frac{1}{2} \delta_{\varphi \nu} - \frac{1}{2} \delta_{\varphi \mu}) \\ &= \kappa_{\text{mes}} \pm \varepsilon \delta \kappa, \end{aligned}$$

where

$$\varepsilon \delta \kappa = \frac{1}{2} (\delta_{\varphi \nu} - \delta_{\varphi \mu}).$$

In our case

$$\kappa_{\text{cor}} = \kappa_{\text{mes}} \pm \frac{1}{2} (\delta \varphi_{\text{Cu K}\alpha_1} - \delta \varphi_{\text{Mo K}\alpha_1}).$$

and in this special case,

$$\begin{aligned} \kappa_{\text{cor}} &= \kappa + (5' 1,45'' - 5' 23,52'') \\ &= 13^\circ 4' 2,84'' - 0^\circ 0' 22,07'' \\ &= 13^\circ 3' 40,77''. \end{aligned}$$

We have thus through the combination of the φ - and κ -methods obtained the corrected value of the angle κ which gives us the value of $d = 1908, 98 \text{ X. U.}$ This corrected value, as it can be seen from the Table 4, agrees very well with the value of $d_1 = 1908, 99 \text{ X. U.}$ obtained from κ measured in the second set of observations, with a better crystal-adjustment (Table 4). As it has been shown, there has been actually a displacement of 0,401 mm in the position of the crystal with which we have taken the first set of measurements shown already, and the great divergence in the values of the constant of crystal grating, derived from φ of $\text{Cu K}\alpha_1$ and that from φ of $\text{Mo K}\alpha_1$ has, been due to this displacement.

To verify all these results we have shifted away the crystal from the displaced position to 0,401 mm, there by improving the crystal-adjustment. Again we have taken a set of three series of measurements (one of the φ of $\text{Cu K}\alpha_1$, the second of the φ of $\text{Mo K}\alpha_1$ and the third of the angle $\kappa = \varphi_{\text{Cu K}\alpha_1} - \varphi_{\text{Mo K}\alpha_1}$, which we have called the measurements with better crystal-adjustment and which can be seen in the Table 3 *a, b, c* and *d*. It can be further seen in the Table 4, that the great divergence in the results of the grating constant obtained from φ of $\text{Mo K}\alpha_1$ and from φ of $\text{Cu K}\alpha_1$, that we note in the first set of measurements, is in the second set of measu-

rements very greatly diminished. Through the diminution of the said divergence in the value of the grating constant, the correctness of the calculated displacement of the crystal, with which the first set of measurements have been taken, is verified. As a survey of our direct experimental verification we wish to point out to the table No. 5 wherein only the measured values of the glancing angles of Cu $K\alpha$, and Mo $K\alpha_1$ of the Ist set (of measurements) and those of the IInd set of measurements are recorded. The difference between the values of the measured glancing angles of Cu $K\alpha_1$ and Mo $K\alpha_1$ of the Ist set of measurements and those of the IInd set of measurements gives the $\frac{1}{2}\delta\varphi_{Cu}$ and the $\frac{1}{2}\delta\varphi_{Mo}$. Thus $\frac{1}{2}\delta\varphi_{Cu} - \frac{1}{2}\delta\varphi_{Mo} = \varepsilon\delta\kappa = 21,9''$ and this agrees fairly well with the calculated error $\varepsilon\delta\kappa$ of the Ist set of measurements, which is about $22''$, thereby establishing the validity of our method of determining the displacement of the reflecting surface of the crystal and of eliminating the error that enters in the value of the angles κ and consequently in the value of the grating constant of the crystal.

Table 5.
Measurements of the Ist and the IInd series.

	φ_1 measured		$\frac{1}{2}\delta$	$\varepsilon\delta\kappa$
	I	II		
Cu	23° 40' 11,9"	23° 45' 04,35"	4'52,4"	} — 21,9"
Mo	10° 36' 08,6"	10° 41' 22,94"	5'14,3"	

If we note the second set of measurements and similarly apply again our method we see that there still remains a displacement of 0,025 mm in as much as we could not bring the crystal to the calculated position as the regulating screw of the crystal table is not sufficiently precise for this purpose. Following the same process mentioned before, we have determined the $\varepsilon\delta\kappa$ which is about $+ 1,3''$ and then eliminated this error from κ . Thus we have again the corrected κ which gives 1908,935 X. U. as the final corrected value of the constant of crystal grating. The value of d_1 , obtained merely from the measured κ without being corrected of the second set of readings, differs from the corrected value only by 0,05 X. U. The values of d_1 obtained from φ of Cu $K\alpha_1$ and φ of Mo $K\alpha_1$ measured with this crystal-adjustment differs from the correct value by 0,3 X. U. in the case of Cu and by 0,9 X. U. in the case of Mo. From this it is evident that if we calculate with this method, there is no need of further improvement of the crystal adjustment. Also if we compare the final corrected value of d_1 derived from the second set of readings with the corrected value of the constant

of crystal grating of the first set of measurements, we note that this value obtained from the measurements even with a displacement of 0,4 mm agrees quite well with the final value, only with a difference of 0,04 X. U. which is within the limits of the errors of observation. Such is the advantage of our method. In the case of perfect crystals and proper crystal adjustment the mentioned method testifies the correctness of the results.

Spectroscopical Institute of the Charles University, Praha.

*

Přesná metoda pro stanovení mřížkové konstanty krystalu spojením metody φ a metodami κ .

(Obsah předešlého článku.)

Autoři v úvodu podávají další propracování metod užívajících k určení mřížkových konstant rozdílů dvou úhlů sklonu místo přímého měření úhlu sklonu. Metody tyto byly na základě prací Pavelky a Valoucha vypracovány Kunzlem a Köppelem a analogicky Bouchalem a Dolejškem, při čemž byla Siegbahnova precizní metoda pro měření úhlu sklonu φ aplikována na měření úhlu κ . Autoři potvrzují výhody plynoucí z metod založených na úhlu κ proti metodám užívajícím úhlu φ měření vykonaným se spektrografem nového typu, v němž konusy sloužící k upevnění a regulaci kasety jsou nahrazeny precizně zabroušenými soustřednými válci, které byly zhotoveny Škodovými závody. Z výsledků tímto spektrografem získaných je zřejmé, že přesnost spektrografu plně dostačuje účelu práce, při čemž současně jsou potvrzeny výsledky prací předchozích autorů.

Měření byla provedena na krystalu sfaleritu (ZnS). Při diskusi získaných výsledků ukazují autoři na možnost, jak lze výhody plynoucí z κ -metod zvýšiti tím způsobem, že se tyto metody kombinují s měřením úhlu φ . Autoři postupují tím způsobem, že z hodnot získaných měřením úhlu κ odvozují hodnoty úhlu φ , které by odpovídaly mřížkové konstantě, určené z úhlu κ . Poněvadž tato hodnota mřížkové konstanty je velmi blízká správné hodnotě, je možno z rozdílů úhlů φ měřených a počítaných uvedeným způsobem, určit chybu justace krystalu a z této justační chyby pak určením korekce úhlu κ nalezenou hodnotu mřížkové konstanty — již velmi blízkou správné hodnotě — korigovati. Verifikace postupu uvedeného je zřejmá z výsledků.

Tak udávají metodu, při níž, jak z jejich výsledků je viděti, lze i při velmi značných chybách krystalu dostati správný výsledek, při čemž současně kombinací obou metod je dosaženo kontroly správnosti získaných výsledků.

Über Torsionsschwingungen von kreisförmigen Platten.

V. Petržílka, Praha.

(Eingegangen am 21. Dezember 1935.)

In der vorliegenden Arbeit sind die Torsionsschwingungen von kreisförmigen, isotropen Platten untersucht. Gleichzeitig wird gezeigt, daß die Torsionsschwingungen mit einer von drei möglichen Arten der Längsschwingungen einer kreisförmigen Platte identisch sind.

Es ist bekannt, daß die kreisförmigen Platten Querschwingungen, Längsschwingungen und Dickenschwingungen ausführen können, die in einer Anzahl von Arbeiten ausführlich untersucht worden sind. Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit Torsionsschwingungen von kreisförmigen Platten; auf Grund der abgeleiteten Beziehungen werde ich zeigen, daß diese Schwingungen mit einer Art von Längsschwingungen, die ich früher experimentell untersucht habe, identisch sind. Soweit ich feststellen konnte, wurden bisher in der Literatur nur Torsionsschwingungen von ringförmigen Scheiben in der Arbeit von Grammel¹⁾ behandelt und zwar mit Rücksicht auf die Verformungen und Beanspruchungen von Dampfturbinenwellen, die durch Schwingungen von Dampfturbinenscheiben verursacht werden können. Die Differentialgleichung der Torsionsschwingungen von ringförmigen Scheiben, die Grammel in seiner Arbeit abgeleitet hat, läßt sich auch für Schwingungen voller Platten, allerdings mit anderen Grenzbedingungen, anwenden. Wegen der besseren Verständlichkeit der einzelnen Ergebnisse, werde ich zuerst kurz die Aufstellung der Differentialgleichung wiedergeben.

In der Abb. 1 ist ein Teil einer kreisförmigen Platte (Radius a , Dicke h) dargestellt, die aus einem isotropen Material der Dichte ρ besteht. Durch zwei senkrecht zu der Plattenebene stehende und koaxiale Zylinder vom Halbmesser r bzw. $r + dr$ wird von der Platte ein ringförmiges Element mit den Ringfasern z_1 und z_2 herausgeschnitten. Unter dem Einfluß der Torsion d. h. der Torsionsspannungen τ , werden die äußeren Ringfasern gegen die

¹⁾ R. Grammel, Ztschr. f. angewandte Mathematik u. Mechanik 5 (1925), 193.

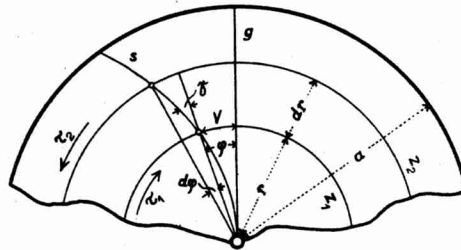
inneren so verdreht, daß die ursprüngliche radiale Gerade g in eine in derselben Ebene liegende spiralförmige Kurve s übergeht. Wie aus der Abb. 1 ersichtlich ist, gelten dann zwischen den einzelnen Größen folgende Beziehungen:

$$\gamma \, dr = (r + dr) \, d\varphi$$

oder in erster Annäherung

$$\gamma = \frac{(r + dr) \, d\varphi}{dr} \doteq r \frac{d\varphi}{dr}. \quad (1)$$

Weil γ nach der Definition des Torsionsmoduls G mit den Torsions-



spannungen τ durch die bekannte Beziehung

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \quad (2)$$

zusammenhängt, ergibt sich für den Torsionswinkel φ die Gleichung

$$d\varphi = \frac{\tau}{Gr} \, dr \quad (3)$$

oder

$$\varphi = \int_{r=0}^r \frac{\tau}{Gr} \, dr. \quad (4)$$

Wird um diesen Winkel φ ein Raumelement $r \, d\varphi \cdot dr \cdot h$ der Platte verdreht, so greift an seiner Innenbegrenzung (in der Zone z_1) eine Tangentialkraft $T_1 = \tau_1 h r \, d\varphi$ bzw. ein im Sinne abnehmender φ drehendes Moment

$$P_1 = r T_1 = \tau_1 h r^2 \, d\varphi \quad (5)$$

an, an seiner Außenbegrenzung (in der Zone z_2) eine Tangentialkraft T_2 und ein im Sinne zunehmender φ drehendes Moment $P_2 = (r + dr) T_2$. Im ganzen wirkt also an das betreffende Element

ein im Sinne zunehmender φ positives Moment

$$P = P_2 - P_1 = \frac{\partial P_1}{\partial r} dr, \quad (6)$$

wenn wir die Glieder höherer Ordnung vernachlässigen. Nach der Gl. (5) und (6) ist also

$$P = \frac{\partial(\tau_1 r^2 h)}{\partial r} dr d\varphi. \quad (7)$$

Das Trägheitsmoment K des betrachteten Elements in Bezug auf die Plattenachse ist gleich

$$K = r^2 dm = \rho r^3 h dr d\varphi. \quad (8)$$

Für die Rotationsbewegung eines starren Körpers um eine feste Achse gilt die bekannte Gleichung

$$K \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = P.$$

Werden in diese Gleichung die Werte von P und K aus Gl. (7) und (8) eingesetzt, so ergibt sich

$$\rho r^3 h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial(\tau_1 r^2 h)}{\partial r}.$$

Diese Gleichung, die man auf Grund der Gl. (3) und unter Voraussetzung der konstanten Plattendicke h in der endgültigen Form

$$\rho r^3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = G \frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \quad (9)$$

schreiben kann, ist die gesuchte Differentialgleichung der Torsionsschwingungen von kreisförmigen Platten.

Durch den Ansatz

$$\varphi(r, t) = R(r) T(t) \quad (10)$$

zerfällt diese Gleichung in zwei Gleichungen

$$\frac{1}{c^2 T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = -\kappa_n^2 \quad (11)$$

$$\frac{d}{dr} \left(r^3 \frac{dR(r)}{dr} \right) = -\kappa_n^2 r^3 R(r), \quad (12)$$

wo $c = \sqrt{G/\rho}$ ist und $-\kappa_n^2$ eine konstante Größe bedeutet. Für $T(t)$ ergibt sich der Ausdruck

$$T(t) = A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t, \quad (13)$$

wobei die Beziehung

$$\omega_n = 2\pi f_n = \kappa_n c \quad (14)$$

gilt, wo ω_n die cyklische, f_n die gewöhnliche Frequenz bedeutet. Für $R(r)$ erhält man aus (12) die Gleichung

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{dR(r)}{dr} + \kappa_n^2 R(r) = 0 \quad (15)$$

welche eine Gleichung des Typus²⁾

$$y'' + \frac{1-2q}{x} y' + \left(\kappa_n^2 + \frac{q^2-p^2}{x^2} \right) y = 0$$

ist. Das allgemeine Integral dieser Gleichung ist durch den Ausdruck

$$y = x^q Z_p(\kappa_n x) = x^q [C_1 J_p(\kappa_n x) + C_2 N_p(\kappa_n x)]$$

gegeben, wobei J_p die Besselsche, N_p die Neumannsche Funktion p -ter Ordnung, C_1 und C_2 Integrationskonstanten bedeuten. Für den gegebenen Fall ist $q = -1$, $p = \pm 1$, und die Lösung durch die Ausdrücke

$$R_1(r) = r^{-1} Z_1(\kappa_n r); R_2(r) = r^{-1} Z_{-1}(\kappa_n r) = -r^{-1} Z_1(\kappa_n r) \quad (16)$$

gegeben, die aber bis auf das Vorzeichen identisch sind. Nach den Gl. (10), (13), (14) und (16) ist also das allgemeine Integral der Gl. (9)

$$\varphi(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} r^{-1} Z_1(\kappa_n r) (A_n \sin \kappa_n c t + B_n \cos \kappa_n c t). \quad (17)$$

Für den Mittelpunkt der Platte ($r = 0$) muß der Winkel φ einen endlichen Wert aufnehmen, während die Funktion $r^{-1} Z_1(\kappa_n r)$ über alle Grenzen wächst:

$$\lim_{r=0} r^{-1} Z_1(\kappa_n r) = C_1 \lim_{r=0} r^{-1} J_1(\kappa_n r) + C_2 \lim_{r=0} r^{-1} N_1(\kappa_n r)$$

oder

$$\lim_{r=0} r^{-1} Z_1(\kappa_n r) = C_1 \lim_{r=0} \frac{1}{r} \cdot \frac{r}{2} - C_2 \lim_{r=0} \frac{2}{\pi r^2} \rightarrow \infty.$$

Daraus ergibt sich also, daß die Konstante $C_2 = 0$ sein muß. Dadurch erhält die Lösung seine endgültige Form und zwar für die n -te Oberschwingung ist der Winkel

$$\varphi_n(r, t) = C_1 r^{-1} J_1(\kappa_n r) (A_n \sin \kappa_n c t + B_n \cos \kappa_n c t), \quad (18)$$

die elastische Verschiebung V ist

$$V_n = r \varphi_n(r, t) = C_1 J_1(\kappa_n r) (A_n \sin \kappa_n c t + B_n \cos \kappa_n c t). \quad (19)$$

²⁾ Jahnke-Emde, Funktionentafeln, 2. Aufl. (1933), 214.

Nebendem muß man noch die Randbedingungen heranziehen: für eine vollkommen freie Platte ist an ihrem freien Rande, d. h. für $r = a$, die Torsionsspannung τ gleich Null. Nach Gl. (3) gilt also für beliebige Zeit

$$\tau_{r=a} = \left(Gr \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{r=a} = 0 \quad (20)$$

oder mit Hilfe der Gl. (17)

$$J_0(\kappa_n a) - 2 \frac{J_1(\kappa_n a)}{\kappa_n a} = 0 \quad (21)$$

mit den Wurzeln

$$\kappa_n = \kappa_n a = 5,136; 8,412; 11,620; 14,796; \dots$$

Die Frequenz der Torsionsschwingungen ist also nach Gl. (14) durch den Ausdruck

$$f_n = \frac{\kappa_n}{2\pi a} \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

gegeben; weil zwischen dem Torsionsmodul G , dem Elastizitätsmodul E und der Poissonschen Konstante σ , die bekannte Beziehung

$$G = \frac{E}{2(1 + \sigma)}$$

existiert, so ist

$$f_n = \frac{\kappa_n}{2\pi a} \sqrt{\frac{E}{2\rho(1 + \sigma)}}. \quad (22)$$

Die Knotenlinien entstehen bei Torsionsschwingungen dort, wo für beliebige Zeit

$$V_n = C_1 J_1(\kappa_n r) T(t) = 0 \quad (23)$$

ist. Die Knotenlinien sind also konzentrische Kreise, deren Radien r_m man aus den Wurzeln $y_m = \kappa_n r_m$ der Funktion $J_1(\kappa_n r) = 0$ für die betreffenden n berechnet.

Durch diese Gleichungen sind die Torsionsschwingungen vollkommen beschrieben. Weil zur Ableitung dieser Gleichung das allgemeine Integral (17) der Differentialgleichung (9) zu Grunde gelegt wurde, ist daraus ersichtlich, daß diese Schwingungen die einzige mögliche Art der Torsionsschwingungen einer vollen, kreisförmigen Platte sind.

Weiter werden wir noch beweisen, daß die Torsionsschwingungen von kreisförmigen Platten mit einer Art von Längsschwingungen identisch sind. Aus der Loveschen Theorie³⁾ von Längs-

³⁾ A. E. H. Love: A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Cambridge (1927), 497; Handb. d. Experimentalphysik 17/1 (1934), 368.

schwingungen ergibt sich nämlich, daß bei kreisförmigen Platten drei Arten von Längsschwingungen möglich sind: 1. Schwingungen, bei denen die elastischen Verschiebungen in Richtung des Radius erfolgen (Typus *A*, Radialschwingungen). 2. Schwingungen, bei denen die elastischen Verschiebungen senkrecht zum Radius erfolgen (Typus *B*). 3. Schwingungen, bei denen die elastischen Verschiebungen in den beiden genannten Richtungen gleichzeitig erfolgen (Typus *C*).

Die elastischen Verschiebungen und die Frequenzen von Schwingungen des Typus *B* sind aber durch dieselben Gleichungen (19), (22), (23) gegeben, durch welche die Torsionsschwingungen charakterisiert sind. Daraus ergibt sich also, daß bei kreisförmigen Platten die Längsschwingungen des Typus *B* reine Torsionsschwingungen sind.

Die Längsschwingungen des Typus *B* habe ich schon an senkrecht zur optischen Achse geschliffenen Turmalin- und Quarzplatten experimentell untersucht.⁴⁾ Dabei habe ich an allen Quarzplatten festgestellt, daß sich die Schwingungen des Typus *B* nur dann erregen ließen, wenn die Elektroden für Spannungszuführung an Enden der Symmetrale des Winkels zwischen zwei elektrischen Achsen angebracht wurden. Diese Beobachtung, die zuerst nicht gut begreiflich war, klärt sich jetzt leicht auf: denn es handelt sich dabei eigentlich um Torsionsschwingungen, deren Erregung Tangentialkräfte (Schubspannungen) erfordert.

II. Physikalisches Institut der Karls-Universität, Praha.

*

O torsních kmitech kruhových desek.

(Obsah předešlého článku.)

V práci jsou studovány torsní kmity kruhových desek z isotropního materiálu a stanoveny jejich vlastní frekvence a uzlové čáry. Současně je ukázáno, že tyto kmity jsou identické s jedním ze tří možných druhů podélných kmitů kruhových desek. Tyto kmity byly již autorem na turmalinových a křemenných destičkách experimentálně studovány a popsány ve dvou předcházejících pracech, uveřejněných v *Annalen der Physik*.

II. odd. fyzikálního ústavu Karlovy university v Praze.

⁴⁾ V. Petržílka, *Ann. d. Phys.* **15** (1932), 881; **23** (1935), 156.

Résumés

de quelques articles tchèques publiés dans la partie

Enseignement — Communications — Analyses.

Géométrie loxodromique.

Ludmila Illingerová, Praha.

(Résumé de l'article imprimé à la page D 6—8.)

L'article en question est consacré à l'étude de la géométrie et en particulier de la trigonométrie des loxodromes sur les surfaces de révolution. En tenant compte de la représentation conforme de la surface en jeu sur le plan on en peut déduire les formules pour un triangle aux lignes loxodromiques qui généralisent les formules bien connues de la trigonométrie plane. La même méthode peut être utile en même temps pour l'étude des propriétés „projectives“ des faisceaux des loxodromes.

*

Remarque concernant les plans dans l'espace à quatre dimensions, aux angles extrêmes égaux.

Libuše Kučerová, Nymburk.

(Résumé de l'article imprimé à la page D 9—13.)

L'espace fuyant à trois dimensions de l'espace euclidien S_4 à quatre dimensions est un espace elliptique E_3 . On considère (et dans la figure on a construit) dans cet espace E_3 les deux parallèles de Clifford par un point k parallèlement avec la droite Y .

Il est bien connu qu'il n'y a dans S_4 que deux plans possibles menés par une droite arbitraire dont les angles extrêmes, avec un plan arbitraire S_2 sont égaux. Or, les parallèles dessus-citées peuvent être envisagées comme droites fuyantes de deux plans dont nous venons de parler, menés par une droite au point fuyant k , la droite Y étant la droite fuyante du plan S_2 .

*

Remarque sur la théorie des caustiques.

Zdeněk Pírko, Praha.

(Résumé de l'article imprimé à la page D 14—15.)

L'article en question donne une généralisation d'un théorème connu d'Emile Weyr quant aux courbes caustiques par réflexion.

On démontre que toutes les deux catégories, à savoir les caustiques par réflexion et celles par réfraction par rapport à un point lumineux sont les développées d'une certaine poudaire oblique.

Tři fáze ve vývoji teorie fyzikálního mikrosvěta.

Václav Votruba, Praha.

Fyzikálním mikrosvět看 rozumíme svět zjevů subatomárních resp. submolekulárních. Obráceně pak užíváme slůvka „makro“ (na př. ve výrazech fyzikální makrosvět, makroskopická fyzikální teorie a pod.) vždy, když chceme naznačiti, že se nepřihlíží k atomické a tím méně k subatomární struktuře hmoty, ani k fyzikálním zjevům a faktům nějak s ní souvisejícím nebo příbuzným, jako jsou na př. kvanta.

V první kapitole jest pojednáno o základních pojmech a zákonech primitivní klasické teorie fyzikálního mikrosvěta. Tato teorie nedovede ještě vysvětliti kvantové zjevy. Je to tedy teorie velmi nedokonalá s hlediska prakticky-fyzikálního, je však důležitým stupněm ve vývoji teorie fyzikálního mikrosvěta s hlediska formálně-matematického. Proto je třeba se jí zabývati. V druhé kapitole jsou vyloženy principy dnešní kvantové elektrodynamiky; vlnová mechanika hmotného bodu a teorie kvantovaného elektromagnetického pole. V třetí kapitole jsou naznačeny vůdčí myšlenky dvou nejnovějších pokusů o další zdokonalení teorie fyzikálního mikrosvěta, totiž nové „Feldtheorie“ hmotných částic a korpuskulární teorie elektromagnetického pole.

I. Primitivní klasická teorie.

1. *První základní fikce: Klasický hmotný bod.* Každý hmotný bod v této teorii má určitou, konstantní vlastní hmotu m_0 (křidlová hmotu), dále určitý, konstantní elektrický náboj e , konečně má v každém okamžiku t určitou polohu, kterou můžeme stanoviti průvodičem q , určitou rychlost v , zrychlení a atd. Čísla m_0 a e jsou relativistické invarianty, t. j. jsou nezávislé na volbě sou-

řadného systému.¹⁾ Buď e samo, nebo veličiny e i m_0 zároveň, mohou být rovny nule; není však nikdy zároveň $m_0 = 0$ a $e \neq 0$. Veličina

$$m = m_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

se nazývá (setrvačnou) hmotou hmotného bodu; závisí tedy na absolutní hodnotě v jeho rychlosti v . Musí být vždy od nuly různá a pozitivní; hmotné body s nulovým m_0 se tedy musí vždy pohybovatí meznou rychlostí c . (c je rovno rychlosti světla ve vakuu.) Veličina

$$W' = mc^2$$

se nazývá energií hmotného bodu a konečně veličina

$$p' = mv$$

je jeho impuls. Udáním impulsu se obvykle nahrazuje udání rychlosti. Mezi W' a p' platí identický vztah, který lze snadno potvrdit,

$$W'^2 - c^2 p'^2 = m_0^2 c^4.$$

Obě strany poslední rovnice jsou relativistické invarianty. Čtveřina veličin p'_x, p'_y, p'_z, W' (p'_x, p'_y, p'_z jsou složky vektoru p') se totiž transformuje stejně, jako čtveřina prostorových souřadnic x, y, z, t .

2. *Druhá základní fikce: Klasické elektromagnetické pole.* Klasické elektromagnetické pole je nejjednodušeji popsáno vektorovým potenciálem $\mathfrak{A}$ a skalárním potenciálem Φ . Komponenty vektoru $\mathfrak{A}$ a veličina Φ jsou funkce prostorových souřadnic x, y, z a času t ; hovoříme diferenciálními rovnicemi (rovnici vlnovým)

$$\Delta \mathfrak{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

$$\Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0. \quad (1')$$

K popisu elektromagnetického pole se užívá též vektorů $\mathfrak{E}$ a $\mathfrak{H}$, které s $\mathfrak{A}$ a Φ souvisí rovnicemi

$$\mathfrak{E} = -\text{grad } \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\mathfrak{H} = \text{rot } \mathfrak{A}$$

¹⁾ Pro přechod od jednoho přípustného, inerciálního souřadného systému x, y, z, t k druhému takovému x', y', z', t' platí Lorentzova transformace. V dosavadní mikrofysice se užívá jen speciální teorie relativity (Einstein-Minkowskiho pseudo-euklidovského prostoročasu). Mikroskopická teorie gravitace jest problémem budoucnosti.

a nazývají se intenzita elektrického a magnetického pole. Eliminací $\mathfrak{A}$ a Φ z rovnic (2) plynou pro $\mathfrak{E}$ a $\mathfrak{H}$ identické rovnice

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathfrak{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} &= 0 \\ \operatorname{div} \mathfrak{E} &= 0, \end{aligned} \quad (2')$$

známé jako t. zv. druhá skupina Maxwellových rovnic elektromagnetického pole. Dále ještě plynou z (1), (1') a (2) rovnice

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathfrak{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} &= \operatorname{grad} \left(\operatorname{div} \mathfrak{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \\ \operatorname{div} \mathfrak{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\operatorname{div} \mathfrak{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

3. *Úplné obecné schema. Celkový obraz fyzikálního mikrosvěta podle primitivní klasické teorie.* V prostoru a čase existují dvě fyzikální entity, svojí povahou zcela různorodé; klasické hmotné body a klasické elektromagnetické pole. Teorie vzniklá kombinací obou těchto představ má být schopna vyložiti všechny fyzikální zjevy a všechna fyzikální fakta, gravitaci vyjímaje.

Hmotné body na jedné a elektromagnetické pole na druhé straně nejsou na sobě fyzikálně nezávislé. Hmotné body působí na elektromagnetické pole podle známých základních rovnic

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathfrak{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \mathfrak{i}, \\ \operatorname{div} \mathfrak{E} &= 4\pi \rho, \end{aligned} \quad (3')$$

tvořících t. zv. první skupinu Maxwellových rovnic elektromagnetického pole. ρ je hustota elektrického náboje, neseného hmotnými body, $\mathfrak{i}$ je hustota konvekčního proudu, vzbuzeného jejich pohybem. Obě veličiny jsou rozpojitě funkce prostorových souřadnic i času. Pro jediný hmotný bod s nábojem e je prostorová hustota v bodě x, y, z a v čase t dána rovnicí

$$\rho(x, y, z, t) = e \delta(x - q_x) \delta(y - q_y) \delta(z - q_z),$$

kdež q_x, q_y, q_z jsou složky průvodiče q hmotného bodu. Funkce ρ musí být rovna nule všude, s výjimkou bodu $x = q_x, y = q_y, z = q_z$, v němž je náboj e . V tomto bodě je ρ nekonečně veliké, a to tak, že integrál

$$\iiint \rho \, dx \, dy \, dz,$$

vztažený na celý prostor, dává e . Za tím účelem přisuzujeme funkci δ ex definitione tyto vlastnosti:

$$\delta(\varepsilon) = 0, \text{ pro } \varepsilon \neq 0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\varepsilon) \delta(\varepsilon) d\varepsilon = f(0), \text{ pro jakoukoli funkci } f(\varepsilon). \quad (4)$$

Je-li v poli n hmotných bodů nesoucích náboje $e_1, e_2, \dots, e_n$, je hustota ρ dána součtem

$$\rho(x, y, z, t) = \sum_k e_k \delta(x - q_{xk}) \delta(y - q_{yk}) \delta(z - q_{zk})$$

a hustota proudu i výrazem

$$i(x, y, z, t) = \sum_k e_k v_k \delta(x - q_{xk}) \delta(y - q_{yk}) \delta(z - q_{zk}).$$

Nebude jistě zbytečné zmíniti se několika slovy o významu a povaze rovnic (3'). Nejobecnější řešení rovnic (1), (1') lze sestrojiti takto: Φ je dáno jako libovolná superposice rovinných, harmonických vln, všech možných frekvencí ν , šířících se všemi možnými směry n . Vektor $\mathfrak{U}$ lze nejprve psáti jako součet $\mathfrak{U}^{tr} + \mathfrak{U}^l$. Část $\mathfrak{U}^l$ je dána libovolnou superposicí podélných, rovinných, harmonických vln, část $\mathfrak{U}^{tr}$ libovolnou superposicí transversálních, lineárně polarisovaných, harmonických, rovinných vln. (Ke každému směru n náleží dvě samostatné, lineárně a vzájemně kolmo polarisované, transversální vlny frekvence ν .) Rovnice (3') mají nyní zřejmý charakter omezující, vedlejší podmínky. Ze všech právě uvedených myslitelných řešení rovnic (1), (1') pro $\mathfrak{U}$ a Φ vybírají totiž rovnice (3') pouze některá, jako skutečně přípustná. Omezující rovnice (3') zůstávají ovšem v platnosti, i když v prostoru nejsou žádné hmotné body, resp. jsou-li jejich elektrické náboje vesměs rovny nule.

Obráceně působí i elektromagnetické pole na hmotné body. Pohyb k -tého hmotného bodu je dán pohybovou rovnicí Newtonovou

$$\frac{d}{dt} p'_k = \frac{d}{dt} (m_k v_k) = e_k \left\{ \mathfrak{E}(q_k, t) + \frac{1}{c} (v_k \times \mathfrak{H}(q_k, t)) \right\}. \quad (5)$$

První člen v závorce na pravé straně této rovnice vyjadřuje účinek pole elektrického, druhý člen — vektorový součin²⁾ vektorů v_k a $\mathfrak{H}(q_k, t)$ — účinek pole magnetického. Z rovnic (5) plyne rovnice energie pro k -tý hmotný bod

$$\frac{d}{dt} W'_k = \frac{d}{dt} (m_k c^2) = e_k \cdot (\mathfrak{H}(q_k, t) \cdot v_k). \quad (5')$$

Použitím rovnic (3') a (4) lze z (5) a (5') odvoditi další rovnice

$$\frac{d}{dt} \left\{ \sum_{k=1}^n p'_k + \frac{1}{4\pi c} \int (\mathfrak{E} \times \mathfrak{H}) d\tau \right\} = 0, \quad (5a)$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \sum_{k=1}^n W'_k + \frac{1}{8\pi} \int (\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2) d\tau \right\} = 0, \quad (5'a)$$

($d\tau = dx dy dz$)

²⁾ Vektorový součin (libovolných) vektorů $\mathfrak{U}$ a $\mathfrak{B}$ budeme označovati $(\mathfrak{U} \times \mathfrak{B})$.

vyjadřující zákony zachování souhrnného impulsu a souhrnné energie našeho fyzikálního světa, t. j. impulsu a energie hmotných bodů a pole. Integrály

$$\frac{1}{4\pi c} \int (\mathfrak{E} \times \mathfrak{H}) \, dr, \quad \frac{1}{8\pi} \int (\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2) \, dr$$

definují impuls a energii pole; výrazy

$$\frac{1}{4\pi c} (\mathfrak{E} \times \mathfrak{H}), \quad \frac{1}{8\pi} (\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2)$$

jsou příslušné hustoty.

Prakticky důležitý jest ještě tento způsob psaní pohybových rovnic (5) a (5'). Zavedeme si čistě formálně nové pomocné veličiny

$$W_k = W'_k - e_k \Phi(q_k, t), \quad (6)$$

$$p_k = p'_k - \frac{e_k}{c} \mathfrak{A}(q_k, t), \quad (6')$$

které budeme nazývat celkovou energií a celkovým impulsem k -tého hmotného bodu.³⁾ Mezi W a p platí vztah

$$(W + e\Phi)^2 - c^2 \left(p + \frac{e}{c} \mathfrak{A} \right)^2 = m_0^2 c^4. \quad (7)$$

(Viz identickou relaci mezi W' a p' v odst. 1.) Pohybové rovnice (5), (5') lze pak spolu s definičními rovnicemi (6') pro p_k psát ve tvaru Hamiltonově

$$\frac{\partial p_k}{\partial t} = - \frac{\partial W_k}{\partial q_k}, \quad (5b)$$

$$\frac{\partial q_k}{\partial t} = \frac{\partial W_k}{\partial p_k}, \quad (6'a)$$

$$\frac{dW_k}{dt} = \frac{\partial W_k}{\partial t}. \quad (5'b)$$

Také pohybové rovnice (5) mají charakter omezující vedlejší podmínky. Ze všech myslitelných pohybů hmotného bodu vybírají totiž pouze některé, jako skutečně možné. Také podmínka (5) zůstává v platnosti, i když není v okolí hmotného bodu žádného elektromagnetického pole, nebo když je náboj hmotného bodu roven nule. (T. zv. izolovaný hmotný bod se pohybuje rovnoměrně po přímce.)

4. *Diskuse obecné teorie.* Začneme s Maxwellovými rovnicemi

³⁾ Jaký je důvod pro toto pojmenování, o tom nelze se zde šířiti. W, p je nutno rozlišovati od veličin W', p' , které jsme nazvali prostě energií a impulsem hmotného bodu. Pro izolovaný hmotný bod jest, jak v dalším poznáme, $W = W', p = p'$.

(3'), (2') resp. rovnicemi (1) (1') a (3'). Řešení těchto rovnic, odpovídající t. zv. volným elektromagnetickým vlnám ($e_k = 0$; $k = 1, 2, \dots, n$), popisují světlo ve vakuu. Z optiky je dobře známo, že tento popis jest skutečně naprosto bezvadný, pokud se týče t. zv. klasických vlastností světla, na př. polarisace, interference atd. Nesouhlas však se jeví již při určení energie a impulsu záření. Podle této teorie může mít na př. stojatá monochromatická světelná vlna, uzavřená v nějakém omezeném prostoru, zcela libovolnou energii. Ale zkušenost nás učí, že ve skutečnosti je ta energie vždy celistvým násobkem kvanta $h\nu$, kdež h je universální konstanta a ν frekvence vlny.

Maxwellovy rovnice (3') popisují též emisi elmag. záření způsobenou pohybujícím se elektrickým hmotným bodem. Lze z nich odvoditi, že energie záření emitovaného v době dt při libovolném pohybu bodového náboje e jest dána výrazem

$$\frac{e^2}{6\pi c^3} \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 dt.$$

Také spektrální rozdělení energie emitovaného záření vychází spojitě. Zkušenost však zase učí, že záření emitované hmotnými částicemi, jako jsou elektrony, protony a podobné, se objevuje vždy v monochromatických kvantech o konečné velikosti energie. Tuto skutečnost tedy nedovede primitivní klasická teorie vysvětliti.

Nyní přistupme k pohybovým rovnicím (5) resp. (5b). Tyto rovnice mají především jednu vadu zcela zásadní povahy. Veličiny $\mathcal{E}$, $\mathcal{S}$ a Φ , $\mathcal{A}$ vystupující v těch rovnicích mají totiž obecně vesměs nekonečně velké hodnoty, neboť bod o souřadnicích q_x , q_y , q_z jest v čase t singulárním místem elektromagnetického pole. Podobně integrály v rovnicích (5a), (5'a) jsou obecně divergentní. Aby tedy výše vyložená teorie mohla mít vůbec smysl, je třeba nějakým vhodným způsobem definovati „správné“ hodnoty všech uvedených veličin. V rámci této primitivní teorie lze to učiniti v podstatě jedině tímto předpisem: Zvolíme si souřadný systém, v němž má uvažovaný hmotný bod v okamžiku t nulovou rychlost. Kolem onoho bodu jako středu si myslíme opsánu kouli malého poloměru R . Vypočteme střední hodnoty veličin $\mathcal{E}$, $\mathcal{S}$, ... na povrchu té koule a rozvedeme je v řady podle rostoucích mocnin poloměru R . Zmenšujeme-li nyní R do nekonečna, rostou členy se zápornými mocninami R do nekonečna. Tyto členy prostě vynecháme! Zbude tedy po té limitaci pouze člen s R^0 . Ten udává „správné“ hodnoty veličin $\mathcal{E}(q, t)$ a dalších. Zcela podobně nutno tu postupovati při výpočtu „správných“ hodnot integrálů v rovnicích (5a), (5'a). Jest jistě zbytečné podotýkati, že teorie, která

si musí takovýmto způsobem pomáhati z nesnází, nemůže býti pokládána za logicky naprosto bezvadnou a dokonalou.

Podrobným skutečným výpočtem lze nyní ukázati, že za veličiny $\mathcal{E}(q, t)$ atd. možno vzíti hodnoty příslušné vnějšímu poli, zůstává-li zrychlení hmotného bodu trvale malé, což zase nastává, je-li vnější pole slabé. V tomto případě lze zanedbati vyzařování. Při experimentálním zkoumání pohybu elektrických hmotných částic (elektronů, α -částic) v rozsáhlých (makroskopických) elektromagnetických polích byly tyto přibližné pohybové rovnice skvěle potvrzeny. Aby však bylo možno v rámci primitivní klasické teorie vyložiti empirická fakta, týkající se existence a nejdůležitějších vlastností molekul a atomů, bylo by třeba, aby teorie připouštěla možnost energeticky exaktně stabilních dynamických soustav elektrických hmotných bodů, jejichž souhrnná energie by byla schopna nabývati pouze diskretní řady hodnot, t. j. byla kvantována. Místo toho se ukazuje, že energeticky přesně stabilní soustavy hmotných bodů jsou v této klasické teorii nemožné, neboť podle přesných pohybových rovnic jest zrychleně se pohybující elektrický hmotný bod brzděn vlastním zářením, které podle Maxwellových rovnic (3') uvolňuje. Ale ani „stabilní“ soustavy, které dostaneme, když zanedbáme vyzařování a pohyb hmotných bodů počítáme podle přibližných pohybových rovnic, v nichž je hnací síla odvozena jen z vnějšího pole (tak se postupovalo ve známé Bohrově-Sommerfeldově atomové mechanice), nesplňují výše uvedené požadavky. Jejich souhrnná energie totiž může nabývati spojitě řady hodnot a není žádného teoretického důvodu pro nějaké kvantování. Proto bylo nutno zavésti v B.-S. atomové mechanice dodatečné kvantové podmínky.

Při popisu působení cizího záření na elektrický hmotný bod teorie také není v úplném souhlase se zkušeností, která učí, že se energie a impuls záření přenášejí na hmotné částice nespojitě, po konečných kvantech. (Absorpce, fotoefekt, Comptonův zjev.) Tuto skutečnost nedovede primitivní klasická teorie vyložiti.

Při t. zv. přímých srážkách mezi elektricky neutrálním a nějakým jiným hmotným bodem žádá teorie v souhlase se zkušeností, aby součet energií a impulsů obou hmotných bodů byl stejný po srážce jako před srážkou.

T. zv. materiální paprsky (na př. katodové paprsky, α -paprsky a podobné) jsou podle této teorie jen proudem uspořádaně se pohybujících, prakticky izolovaných hmotných bodů. Znamé mlžné stopy ve Wilsonově komoře souhlasí s touto představou. Ale na materiálních paprscích byla pozorována též skupina zjevů (na př. interference a ohyb), které jsou se stanoviska primitivní klasické teorie naprosto nesrozumitelné.

II. Kvantová elektrodynamika.

Trvalo skoro dvacet let, než se podařilo nahraditi primitivní klasickou mikrofysikální teorii teorií prakticky lépe vyhovující, t. j. lépe souhlasící se zkušeností, a po stránce matematicko-formální stejně uspokojivou, t. j. tvořící stejně logicky uzavřený systém pojmů a vět, jako teorie klasická. Tato nová teorie se nazývá kvantová elektrodynamika. Vlnová mechanika (mechanika „nového hmotného bodu“) je v ní obsažena tak, jako je klasická mechanika (mechanika „klasického hmotného bodu“) organicky obsažena v teorii vyložené v předcházející kapitole. Nejdokonalejší úplnou formulaci kvantové elektrodynamiky podali r. 1932 Dirac, Fock a Podolský. (Viz II 3.)

1. *První základní fikce: Hmotný bod Diracovy relativistické vlnové mechaniky.* Rozebíráme-li teoreticky možnosti libovolně přesných měření polohy, t. j. souřadnic q_x, q_y, q_z bodové hmotné částice — na př. elektronu, protonu a podobně — v určitém čase t , nenalezneme žádných zásadních překážek, které by mohly státi v cestě provedení tohoto úkolu. Stejně jest v zásadě možno, stanovit libovolně přesně složky impulsu p'_x, p'_y, p'_z hmotné částice v určitém nějakém čase. Naproti tomu rozbor nejrozmanitějších experimentálních uspořádání navržených pro současné stanovení souřadnic i komponent impulsu vede k výsledku odlišnému, totiž k tomu, že je zásadně nemožno stanovit s libovolnou přesností současně polohu i impuls bodové hmotné částice. Zásadní hranice přesnosti měření je dána nerovností

$$\delta p'_x \delta q_x \geq h \quad (8)$$

a podobně pro ostatní komponenty (h je Planckova konstanta). Při tom značí $\delta p'_x, \delta q_x, \dots$ atd. pravděpodobné chyby naměřených hodnot $\bar{p}'_x, \bar{q}_x$ atd.

Je to způsobeno jednak vlivem výše zmíněných, empiricky zjištěných, neklasických vlastností světla (projevujících se na př. ve zjevu fotoelektrickém a zjevu Comptonově tím způsobem, že se energie i impuls záření přenáší na hmotné částice po konečných kvantech, nespojitě), jednak vlivem rovněž uvedených, empiricky zjištěných, neklasických vlastností hmotných částic (projevujících se na př. tím, že materiální paprsky jeví interferenci a ohyb). Při odvozování relací (8) se používá známých kvantitativních zákonitostí ovládajících zjev Comptonův a ohyb materiálních paprsků. Ty zákonitosti byly nalezeny empiricky. Jsou proto relace (8) také relace čistě empirické, tedy naprosto spolehlivé.

Z toho, co bylo právě řečeno, plyne v podstatě toto poučení: Není možno přímo empiricky ověřiti, že skutečné jednoduché

hmotné částice mají všechny charakteristické vlastnosti klasických hmotných bodů. Nemohl by nám ovšem nikdo bránit, abychom činili takový předpoklad, přes to, že je přímo prakticky neověřitelný, kdybychom na základě toho předpokladu dovedli podati uspokojivý výklad všech mikrofysikálních zjevů. Ale to se dosud nepodařilo. (Viz I.) Proto musíme býti nakloněni k přesvědčení, že základní předpoklad primitivní klasické teorie — klasický hmotný bod — jest nejen logicky nedostatečně odůvodněný, ale i fakticky nesprávný, t. j. že klasické hmotné body skutečně nejsou v přírodě realizovány.⁴⁾

Praktický neúspěch hypotese klasického hmotného bodu musí nás přimět k tomu, abychom se snažili nahraditi tuto fikci nějakou fikcí, řeckněme obecnější, při níž by bylo přímo využito volnosti dané nerovninou (8). Lze doufat, že tak bude možno dospěti zcela přirozeně k výkladu kvantových zjevů. Ovšem, že nemusí býti nový pojem, který nastoupí na místo pojmu klasického hmotného bodu (pojem hmotného bodu vlnové mechaniky) nikterak pojmem názorným. Postačí, když budeme uměti vlastnosti a chování nového hmotného bodu matematicky popsat, a když tento popis, v náležité interpretaci, bude ve shodě se zkušeností.

K pojmu hmotného bodu vlnové mechaniky dospějeme tímto formálním zobecněním pojmu klasického hmotného bodu: Komponenty průvodiče g a impulsu p' jakož i energii W' izolovaného hmotného bodu nebudeme pokládati za obyčejná prostá čísla, nýbrž za čísla obecnější, pro něž neplatí zákon o komutativnosti násobení, ale jsou splněny tyto zaměňovací relace

$$p'_x \cdot q_x - q_x \cdot p'_x = \frac{h}{2\pi i} \cdot 1 \text{ a cykl.} \quad (9)$$

Při tom 1 značí jednotku v oboru nekomutativních čísel. Všecky ostatní podvojně součiny veličin $q_x, q_y, q_z, p'_x, \dots, W'$ jsou záporné. Z teorie klasického hmotného bodu převezmeme do teorie hmotného bodu vlnové mechaniky pouze ještě relativistický vztah

$$W'^2 - c^2 p'^2 - m_0^2 c^4 = 0. \quad (10)$$

Přihlédněme nyní, jaké jsou bližší teoretické důsledky hypotese (9), a jaká je prakticko-fyzikální interpretace celého toho

⁴⁾ Že hypotese klasického hmotného bodu je skutečně logicky nedostatečně odůvodněna a že naprosto není nutná, jak by snad bylo možno se domnívati vzhledem k tomu, že je zásadně možno stanovit s libovolnou přesností polohu jednoduché hmotné částice v čase t_1 , jakož i impuls v jiném čase t_2 , dokazuje právě okolnost, že je možno vybudovati logicky bezespornou vlnovou mechaniku, v níž se ona hypotese popírá, kdežto obě právě zmíněná empirická fakta akceptují. Tím je též vyloučena eventualita, že by se mohlo podařiti dokázat správnost resp. nutnost hypotese klasického hmotného bodu nějak nepřímo.

formalismu. V experimentální fyzice jsou souřadnice, komponenty impulsu a také energie hmotné částice, jakožto výsledky fyzikálních měření, samozřejmě obyčejná čísla. Úkolem fyzikální teorie pak jest, tyto výsledky fyzikálních měření s největší zásadně možnou přesností — viz na př. relace (8) — předpovídati. Aby tedy formální zobecnění pojmu hmotného bodu dané rovnicemi (9) mohlo mít vůbec nějaký smysl, musí býti především možno, převést všechny výpovědi o abstraktních nekomutativních číslech (po případě vztahy mezi nimi) na jisté výpovědi o nějakých obyčejných číslech. To skutečně je možno učiniti, a to jak nás algebra učí, v podstatě jedině (jednoznačně) tímto způsobem: Každé z veličin W' , p'_x , q_x atd. přiřadíme — čistě formálně — jistou operaci, provedenou na obyčejných reálných nebo komplexních funkcích jistých obyčejných reálných čísel (plynulých parametrů) x, y, z, t ; jinými slovy, zobrazíme si každou z veličin W' , $p'_x, \dots$ pomocí jistého operátoru, působícího na funkce proměnných x, y, z, t .⁵⁾ Učiníme to podle této tabulky (značku $\rightarrow$ čtete slovy „je přiřazen operátor“):

$$\begin{aligned} W' &\rightarrow -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t}, \\ p'_x &\rightarrow \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x} \text{ a cykl.}, \\ q_x &\rightarrow x \text{ a cykl.}, \\ 1 &\rightarrow 1. \end{aligned} \quad (11)$$

Veličina W' je tedy zobrazena operátorem, který působí na libovolnou funkci proměnných x, y, z, t tak, že ji derivuje parciálně podle t a násobí faktorem $-\hbar/2\pi i$, operátor zobrazující q_x násobí ji prostě číslem x , operátor zobrazující 1 násobí jedničkou.⁶⁾ Důvod, proč jsme přiřazení abstraktních nekomutativních veličin a konkrétních operátorů provedli právě podle tabulky (11), poznáme v dalším. Součtu dvou veličin, na př. $p'_x + p'_y$ odpovídá operátor, který působí na libovolnou funkci $\omega(x, y, z, t)$ tak, že z ní utvoří funkci

$$\left(\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial y} \right) \omega, \text{ čili } \frac{h}{2\pi i} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \right).$$

Součinu dvou veličin odpovídá operátor, který provádí obě částečné operace po sobě. Na př. operátor odpovídající součinu $p'_x q_x$ mění funkci ω ve funkci

⁵⁾ Pojem operátoru je dobře známý na př. z vektorového počtu.

⁶⁾ Vektor p' je podle tabulky (11) zobrazen (až na faktor $\hbar/2\pi i$) pomocí operátoru grad, známého z vektorového počtu. Proměnné parametry x, y, z, t mají význam — a také transformační vlastnosti — plynulých prostorových souřadnic a času.

$$\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x} (x\omega),$$

kdežto operátor odpovídající součinu $q_x p'_x$ mění ω ve výraz

$$x \cdot \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \omega}{\partial x}, \text{ čili } \frac{\hbar}{2\pi i} \cdot x \frac{\partial \omega}{\partial x},$$

a podobně pro jiné součiny. Na základě obou právě uvedených pravidel lze nyní ke každému výrazu F , utvořenému pomocí sčítání a násobení z veličin W' , p'_x , q_x , atd. udati příslušný operátor Θ .

Zobrazení nekomutativních veličin pomocí operátorů má tento význam resp. následek: Každý vztah tvaru $F = 0$ mezi nekomutativními veličinami lze okamžitě proměnit v podmínku $\Theta\omega = 0$ pro jistou funkci ω proměnných x, y, z, t , tedy ve vztah mezi obyčejnými čísly, což je právě účel toho zobrazení. Jediné vztahy typu $F = 0$, které nevedou k žádným podmínkám pro funkci ω , jsou relace (9) a vztahy z nich plynoucí. Operátory (11) byly totiž právě tak zvoleny, aby relace (9) vedly k identitám.

Nyní si všimněme blíže fundamentálního vztahu (10); je to vztah typu $F = 0$. Dirac našel, že kvadratický výraz na levé straně této rovnice lze rozložit na součin dvou výrazů lineárních ve veličinách W' , p'_x , p'_y , p'_z , totiž výrazu

$$W'\alpha_4 + c(p'_x\alpha_1 + p'_y\alpha_2 + p'_z\alpha_3 + m_0c\alpha_0), \quad (12)$$

a výrazu lišícího se pouze opačným znaménkem členu v závorce, jestliže za koeficienty α zvolíme nekomutativní čísla splňující tyto zaměňovací relace:

$$\begin{aligned} \alpha_i\alpha_k + \alpha_k\alpha_i &= 2\delta_{ik} \cdot \mathbf{I}, & (i, k = 0, 1, 2, 3), \\ \alpha_i\alpha_4 - \alpha_4\alpha_i &= 0, & (i = 0, 1, 2, 3), \\ \alpha_4^2 &= \mathbf{I}, \end{aligned}$$

kde $\mathbf{I}$ je jednotka v oboru veličin α a δ_{ik} je známý symbol Kroneckerův ($\delta_{ik} = 0$ pro $i \neq k$, $\delta_{ii} = 1$). S veličinami W' , p'_x , q_x , atd. jsou veličiny α záměnné. O správnosti Diracova tvrzení lze se snadno přesvědčiti roznásobením. Veličiny α nelze zobraziti, ve smyslu výše vyloženém, pomocí operátorů působících na jedinou libovolnou funkci proměnných x, y, z, t , nýbrž pouze pomocí operátorů působících na čtveřici takových funkcí. Je-li $\psi_\sigma(x, y, z, t)$, ($\sigma = \text{I, II, III, IV}$), taková čtveřice, jest dáno přiřazení operátorů veličinám α touto tabulkou.

Operátor odpovídající veličině

$$\begin{aligned} \alpha_0 \text{ mění } \psi_{\text{I}} &\text{ v } \psi_{\text{I}}, & \psi_{\text{II}} &\text{ v } \psi_{\text{II}}, & \psi_{\text{III}} &\text{ v } -\psi_{\text{III}}, & \psi_{\text{IV}} &\text{ v } -\psi_{\text{IV}}, \\ \alpha_1 \text{ mění } \psi_{\text{I}} &\text{ v } \psi_{\text{IV}}, & \psi_{\text{II}} &\text{ v } \psi_{\text{III}}, & \psi_{\text{III}} &\text{ v } \psi_{\text{II}}, & \psi_{\text{IV}} &\text{ v } \psi_{\text{I}}, \\ \alpha_2 \text{ mění } \psi_{\text{I}} &\text{ v } i \cdot \psi_{\text{IV}}, & \psi_{\text{II}} &\text{ v } -i\psi_{\text{III}}, & \psi_{\text{III}} &\text{ v } i\psi_{\text{II}}, & \psi_{\text{IV}} &\text{ v } -i\psi_{\text{I}}, \end{aligned} \quad (13)$$

α_3 mění ψ_I v ψ_{III} , ψ_{II} v $-\psi_{IV}$, ψ_{III} v ψ_I , ψ_{IV} v $-\psi_{II}$,
 α_4 mění ψ_I v ψ_I , ψ_{II} v ψ_{II} , ψ_{III} v ψ_{III} , ψ_{IV} v ψ_{IV} .⁷⁾

Je-li L operátor odpovídající výrazu na levé straně rovnice (10), jest jasné, že čtyři funkce ψ_σ , ($\sigma = I, II, III, IV$), splňující soustavu čtyř diferenciálních rovnic

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \alpha_4 + \frac{\partial}{\partial x} \alpha_1 + \frac{\partial}{\partial y} \alpha_2 + \frac{\partial}{\partial z} \alpha_3 + \frac{2\pi i m_0 c}{h} \alpha_0 \right) \psi_\sigma = 0, \quad (12')$$

hová též rovnicím $L\psi_\sigma = 0$. Rovnice (12') jsou základní rovnice Diracovy vlnové mechaniky izolovaného hmotného bodu. Jejich nejdůležitější vlastnosti budou vyloženy ještě v dalším. Nyní se však musíme obrátiti k prakticko-fyzikální interpretaci celého dosud vyloženého teoretického formalismu.

Předpokládejme, že jsme našli nějaké řešení $\psi_I, \psi_{II}, \psi_{III}, \psi_{IV}$ rovnic (12'). Každé takové řešení popisuje určitý stav hmotného bodu. Pomocí funkcí ψ lze určit t. zv. pravděpodobné hodnoty (Erwartungswerte) veličin $W', q_x, p'_x, \dots$ i výrazů $G(q_x, p'_x, \dots)$ z nich utvořených, příslušné hmotnému bodu v dotyčném stavu. Obecný vzorec pro pravděpodobnou hodnotu $\bar{G}$ veličiny G jest

$$\bar{G} = \int \sum_{\sigma=1}^{IV} \psi_\sigma^* G \psi_\sigma dr, \quad (dr = dx dy dz) \quad (14)$$

kdež ψ_σ^* je funkce komplexně sdružená s ψ_σ a výraz G si myslíme nahrazen příslušným operátorem. Integrace se vztahuje na celý obor proměnných x, y, z . Pro $\bar{q}_x, \bar{q}_y, \bar{q}_z$ a $\bar{p}'_x, \bar{p}'_y, \bar{p}'_z$ máme speciálně tyto výrazy

$$q_x = \int \sum_{\sigma=1}^{IV} \psi_\sigma^* x \psi_\sigma dr = \int x \cdot Q(r, t) dr, \quad \text{atd.}, \quad (15)$$

$$\bar{p}'_x = \int \sum_{\sigma=1}^{IV} \psi_\sigma^* \cdot \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x} \psi_\sigma dr, \quad \text{atd.} \quad (15')$$

Pravděpodobné hodnoty $\bar{q}_x, \bar{p}'_x$ atd. udávají pravděpodobné výsledky měření souřadnic, komponent impulsu atd., provedených na uvažované hmotné částici, která je v dotyčném stavu ψ .

Ze vzorce (15) vidíme ihned, že výraz $Q(r, t) dr$ musíme interpretovati jako pravděpodobnost, že hmotný bod bude v čase t nalezen v prostorovém elementu $dr = dx dy dz$, ležícím na místě r (když bude proveden experiment resp. měření, dovolující určení polohy hmotného bodu s potřebnou přesností). Funkci

⁷⁾ Je tedy vlastně $\alpha_4 \equiv 1$. Operátory příslušné podle (13) abstraktním veličinám α budeme označovati stejně, jako veličiny α samotné.

$$Q(r, t) = \sum \psi^*_{\sigma} \psi_{\sigma} = \sum \psi^*_{\sigma} | \psi_{\sigma} = \sum \psi^*_{\sigma} \alpha_{\sigma} \psi_{\sigma}$$

lze tedy nazvat hustotou pravděpodobnosti polohy. Protože je vždy $Q \geq 0$, jest splněna samozřejmá nutná podmínka, kterou musíme na hustotu pravděpodobnosti klásti. Kromě toho lze normováním funkcí ψ_{σ} docílit, aby integrál

$$\int Q \, dr = 1. \quad (16)$$

Výpočtem lze dále obecně dokázat, že v každém možném stavu hmotného bodu je správná nerovnost

$$(q_x - q'_x)^2 \cdot (\overline{p'_x} - p'_x)^2 \geq h^2, \quad (8')$$

a podobně pro ostatní komponenty. To však je právě přesný význam „empirické“ nerovnosti (8). Nepatrná velikost Planckovy konstanty h je vysvětlením pro fakt, že pojem klasického hmotného bodu je pojmem názorným. Jest samozřejmě třeba dokázat, že všechny známé fyzikální zjevy, k jejichž výkladu bylo dosud třeba fikce klasického hmotného bodu (na př. Wilsonovy mlžné dráhy) lze teoreticky stejně dobře vyložit i na základě pojmu hmotného bodu vlnové mechaniky. To skutečně učiniti lze.⁸⁾

Je-li čtveřina ψ_{σ} taková, že platí pro jistý operátor G vztah

$$G\psi_{\sigma} = C \cdot \psi_{\sigma}, \quad (17)$$

kdež C je (obyčejná) konstanta, jest vzhledem k (14) a (16)

$$\overline{G} = C.$$

V případě (17) nazýváme stav ψ_{σ} hmotného bodu stavem charakteristickým, příslušným k hodnotě C veličiny G . Hodnota $\overline{G} = C$ je v tomto případě hodnotou jistou veličiny G . Každá pravděpodobná hodnota $\overline{G}$ libovolné veličiny G může býti — ve zvláštním stavu hmotného bodu — též hodnotou jistou. Teorie je tedy ve shodě s výše zmíněnou zásadní možností absolutně přesného určení buď polohy nebo impulsu hmotné částice. Tak na př. hmotná částice, pro niž jsme v čase t určili přesně třebas x -ovou souřadnici, jest v tom čase v charakteristickém stavu příslušném k naměřené hodnotě veličiny q_x . Určování pravděpodobných hodnot, které, jak uvedeno, mohou býti ve zvláštních případech též hodnotami jistými mechanických veličin (na př. souřadnic, komponent impulsu, impulsmomentu, energie hmotného bodu atd.) jest základní úkol a vlastně celý obsah vlnové mechaniky, neboť předpovídání pravděpodobných hodnot jest nyní jediný zásadně možný způsob fyzikálního předpovídání budoucnosti. Tím je dáno též dnešní nové pojetí fyzikální kausality.

⁸⁾ Při Wilsonových mlžných drahách ovšem nejde nikdy o izolovaný hmotný bod. K jejich výkladu je proto třeba úplné teorie z odst. 3.

O Diracových rovnicích lze dokázat, že nemění svůj tvar při Lorentzově transformaci plynulých souřadnic x, y, z a času t , přiřadíme-li ji jistou lineární transformaci funkcí ψ_σ .

Rovnice (12') mají ještě další vlastnosti zcela zásadní důležitosti. K výše uvedeným nutným podmínkám pro pravděpodobnostní hustotu Q přistupuje v relativistické teorii ještě podmínka další. Je totiž nutné, má-li nový pojem hmotného bodu mít vůbec smysl, aby pravděpodobnost Q dr byla relativistickým invariantem. K tomu je však třeba, aby z funkcí ψ_σ bylo možno kromě výrazu Q sestrojiti ještě tři výrazy S_x, S_y, S_z , které by se společně s Q transformovaly stejně, jako se transformují plynulé souřadnice x, y, z společně s časem t , nebo komponenty vektoru $\mathbf{p}'$ společně s energií W' . Ukazuje se, že vzhledem k výše zmíněným transformačním vlastnostem funkce ψ_σ jest tato velmi obtížná podmínka skutečně splněna. Komponenty S_x, S_y, S_z vektoru $\mathbf{S}$ jsou definovány takto:

$$\begin{aligned} S_x &= \sum \psi_\sigma^* \alpha_1 \psi_\sigma \\ S_y &= \sum \psi_\sigma^* \alpha_2 \psi_\sigma \\ S_z &= \sum \psi_\sigma^* \alpha_3 \psi_\sigma. \end{aligned} \quad (18)$$

Dokonce platí na základě rovnic (12') pro vektor $\mathbf{S}$ a veličinu Q známá rovnice kontinuity

$$\operatorname{div} \mathbf{S} = -\frac{1}{c} \frac{\partial Q}{\partial t}. \quad (19)$$

Veličina $e \cdot Q$ udává pravděpodobnou hustotu (pravděpodobnou hodnotu hustoty) elektrického náboje. Je tedy $e \cdot Q = \bar{\rho}$. Podobně můžeme vzhledem k (19) psáti

$$e \cdot c \cdot \mathbf{S} = \bar{\mathbf{i}}.$$

Přirozeně je rovnicemi (12') docleno i náležitý souhlas se zkušeností. Charakteristický stav hmotného bodu, v němž máme jistotu naléztí určitý impuls $\mathbf{p}'$, je popsán čtveřicí funkcí ψ_σ tohoto tvaru:

$$\psi_\sigma(x, y, z, t) = a_\sigma \cdot e^{\frac{2\pi i}{h} (\bar{p}'_x \cdot x + \bar{p}'_y \cdot y + \bar{p}'_z \cdot z - \bar{W}' \cdot t)}.$$

Představují rovinnou vlnu o frekvenci

$$\nu = \frac{1}{h} \cdot \bar{W}' = \frac{1}{h} \cdot \sqrt{c^2 \bar{p}'^2 + m_0^2 c^4}$$

a délce vlny $\lambda = h/\bar{p}'$, kdež $\bar{p}'$ je absolutní hodnota vektoru $\mathbf{p}'$. Pomocí těchto vln lze kvantitativně vyložit interferenci a ohyb materiálních paprsků. K danému $\mathbf{p}'$ existují dokonce čtyři lineárně nezávislé čtveřice charakteristických funkcí, které všechny mají tvar rovinné vlny postupující ve směru vektoru $\mathbf{p}'$. Dvěma z nich odpovídá kladná hodnota energie

$$\bar{W}' = + \sqrt{c^2 \bar{p}'^2 + m_0^2 c^4},$$

druhým dvěma hodnota $-\bar{W}'$. Přesný fyzikální význam těchto „záporných“ řešení není ještě úplně jasný. V případě elektronu jsou v souvislosti s pozitrony. Dosud se však nepodařilo tu souvislost zcela uspokojivě matematicky formulovati. Oba dva stavy hmotného bodu odpovídající „kladným“ vlnám se vzájemně liší různou (opačnou) orientací t. zv. spinu. Tak nazýváme vektor $\mathbf{s}$, jehož komponentám odpovídají operátory: $s_x \rightarrow \alpha_1 \alpha_3$, $s_y \rightarrow \alpha_2 \alpha_3$, $s_z \rightarrow \alpha_1 \alpha_2$. O jeho významu se zmíním příležitostně v dalším.

2. *Druhá základní fikce: Kvantované elektromagnetické pole.* Rovnice klasického elektromagnetického pole ve vakuu popisují i kvantované pole. Také výrazy pro hustotu energie a impulsu pole zůstávají přirozeně v platnosti. Veličiny A_x, A_y, A_z, Φ (viz I, 2) však již nepokládáme za obyčejná čísla, nýbrž (podobně jako v předcházejícím odstavci veličiny $q_x, \dots$) za čísla obecnější, pro jejichž násobení neplatí zákon komutativnosti, ale platí tyto zaměňovací relace:

$$\Phi' \Phi - \Phi \Phi' = -\frac{c\hbar}{2\pi i} \cdot D(l, \tau) \cdot 1 \quad (20)$$

$$A'_x \cdot A_x - A_x A'_x = \frac{c\hbar}{2\pi i} \cdot D(l, \tau) \cdot 1 \text{ a cykl.}, \quad (20')$$

$$\Phi' A_x - A_x \Phi' = 0 \text{ a cykl.}, \quad (20'')$$

$$A'_x A_y - A_y A'_x = 0 \text{ a cykl.} \quad (20''')$$

Při tom je $\Phi = \Phi(r, t)$ a $\Phi' = \Phi(r', t')$; analogicky pro ostatní veličiny. Dále funkce D má tento význam:

$$D(l, \tau) = \frac{1}{l} \{ \delta(l + c\tau) - \delta(l - c\tau) \},$$

kdež $l = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, $\tau = t - t'$ a $\delta(\varepsilon)$ je definováno rovnicemi (4). Ukážeme v tomto odstavci pouze na nejjednodušším případě důsledky a fyzikální interpretaci zaměňovacích relací (20)–(20''').

Budiž dána lineárně polarizovaná světelná vlna, postupující ve směru osy z , rovnicemi

$$A_x = \nu \cdot \sqrt{\frac{\hbar}{2\pi c}} \left(B e^{-\frac{2\pi i \nu}{c}(z-ct)} + B^* e^{\frac{2\pi i \nu}{c}(z-ct)} \right) \quad (21)$$

$$A_y = A_z = \Phi = 0$$

Faktor před závorkou byl zvolen jen pro pohodlí. Pro energii této vlny, obsaženou v krychli, která má hrany rovnoběžné s osami a délku hrany rovnu c/ν (je to nejmenší a nejjednodušší dutina, v níž mohou interferencí vlny (21) a vlny postupující v opačném směru vzniknouti stojaté vlny), plyne výraz

$$T = \frac{1}{8\pi} \cdot \int (\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2) dr = \frac{\hbar \nu}{2} (BB^* + B^*B). \quad (22)$$

Amplitudy B, B^* nejsou tu obyčejná komplexní čísla, nýbrž veličiny nekomutativní. Po dosazení za A_x z rovnice (21) do rovnice (20') a jednoduché úpravě, kterou zde netřeba prováděti,^{*)} dostaneme pro ně tuto zaměňovací relaci:

^{*)} Zahrnuje též prostorovou integraci přes zvolenou krychli o hraně c/ν .

$$BB^* - B^*B = 1. \quad (23)$$

Veličina T daná rovnicí (22) také ovšem není obyčejné číslo. V experimentální fyzice však jest energie elektromagnetického pole, jakožto výsledek měření, nutně obyčejným číslem. Vysvětlení jest zase toto: Nekomutativní veličiny, jako A_x (rov. (21)), B , B^* a podobné lze zobraziti pomocí operátorů, působících na funkce jisté proměnné u . Existuje nyní funkce $\chi(u)$, která charakterisuje kvantový stav pole (21), a pomocí níž lze stanovit pravděpodobné hodnoty (Erwartungswerte) oněch veličin v příslušném stavu pole. Obecný předpis pro jejich výpočet jest zase tento: Je-li U operátor působící na funkce proměnné u , jest jeho pravděpodobná hodnota

$$\bar{U} = \int \chi^* U \chi \, du \quad (24)$$

(Srovnej formuli (14) z odst. 1.) Analogicky s (16) musí též platit

$$\int \chi^* \chi \, du = 1. \quad (25)$$

Pravděpodobné hodnoty udávají zase pravděpodobné výsledky fyzikálních měření. Tím je dána praktická fyzikální interpretace kvantování pole pomocí nekomutativních čísel.

Budiž Ω (resp. Ω^*) operátor, který působí na každou funkci proměnné u tak, že ji mění v touž funkci proměnné $u + 1$ (resp. $u - 1$). Operátory $\Omega\Omega^*$ a $\Omega^*\Omega$ tedy nemění vůbec onu funkci. Veličiny B , B^* , splňující relaci (23), lze zobraziti takto:

$$B \rightarrow \sqrt{u+1} \cdot \Omega, \quad B^* \rightarrow \sqrt{u} \cdot \Omega^*. \quad (26)$$

Aby teorie mohla býti v souhlase se zkušeností, jest nutno, aby každá pravděpodobná hodnota $\bar{T}$ energie T světelné vlny (21) byla zároveň hodnotou jistou. Tento požadavek stačí k tomu, abychom mohli určit jak tvar funkce $\chi(u)$, tak i všechny naměřitelné hodnoty veličiny T . Podle (24), (22), (26) platí předně

$$\bar{T} = \frac{1}{2} h\nu \cdot \int \chi^* \cdot (BB^* + B^*B) \chi \, du = \frac{1}{2} h\nu \cdot \int \chi^* (2u + 1) \chi \, du.^{10)}$$

Aby $\bar{T}$ byla hodnota jistá, musí býti

$$u \cdot \chi = N \cdot \chi, \quad (27)$$

kdež N je konstanta. Z (27) a (25) plyne, že χ musí býti tvaru $\sqrt{\delta(u - N)}$, kdež δ je funkce definovaná rovnicí (4). Pak je prostě

$$\bar{T} = N \cdot h\nu + \frac{1}{2} h\nu. \quad (28)$$

(Příště dokončení.)

¹⁰⁾ Operátor příslušný výrazu $BB^* + B^*B$ jest totiž

$$\sqrt{u+1} \Omega \sqrt{u} \Omega^* + \sqrt{u} \Omega^* \sqrt{u+1} \Omega = (2u+1) \Omega \Omega^*.$$

VYUČOVÁNÍ.

Poznámky k pokusům v učebnici Petírově-Šmokově.

Vratislav Charfreitag, Hradec Králové.

(Část pátá.)

Str. 202. Souznění (správně resonance). Rozezvučení druhé ladičky lze objektivně ukázati pomocí skleněné kuličky (knoflíku s otvorem) podobně jako při ukázání uzlů ladičky. Kuličku pověsíme tak, aby se dotýkala ramene ladičky blíže horního konce. — Jsou-li ladičky dobře sladěny, možno přenést ještě chvění druhé ladičky zpátky na první; rozezvučíme silně prvou ladičku, vezmeme ji do ruky, tím ji utlumíme, pak ji pustíme, utlumíme druhou ladičku a první opět zní — ovšem slabě. — Na klavíru zmáčkne klapku c tak, aby tón nezavzněl, a pak ostře a krátce vezmeme tón C ; tón c zní dále na důkaz, že ve zvuku C byl obsažen jako tón harmonický a resonancí se rozezvučel. Analogicky dají se rozezvučeti i další tóny harmonické (g, c_1, e_1, g_1), ano i celý trojzvuk $c_1 e_1 g_1$ zní — byl-li před tím neslyšitelně zmáčknut — vezmeme-li silně tón C (ihned jej pustiti). — Pěkný pokus k objasnění resonance je tento: dosti těžkou olověnou nebo železnou kouli zavěsíme bifilárně na Strouhalův stojan tak vysoko, aby se dotýkala malého, ale dlouhého štětečku připevněného k tyčince metronomu. Posuvným závažíčkem na metronomu upravíme jeho dobu kyvu tak, aby souhlasila s dobou kyvu kyvadla. Pranepatrné nárazy štětečku stačí, aby kyvadlo se značně rozhoupalo. Rozladíme-li závažíčkem soustavu, koule se nerozkýve.

Str. 202, obr. 274. Nemáme-li přístroj s posuvnou trubici, stačí vzíti válcový skleněný cylindr (k lampě) a zasunovati jej do vody tak dlouho, až nastane nejsilnější resonance. Pak jej upevníme.

Optika. Str. 205 a násl. Zatmění Slunce a Měsíce. Slunce znázorníme silnější žárovkou uzavřenou ve větší kouli z mléčného skla. Měsíc a Země budou dřevěnými koulemi, natřenými bílou matovou barvou o poloměrech asi 3, resp. 8 cm, jež zavěsíme na tenký černý drátek na Strouhalův stojan. Volíme-li vzdálenost středů Měsíce a Země menší než $\frac{r_1 c}{r_2 - r_1}$, kde r_1

je poloměr Měsíce, r_2 pol. Slunce a c vzdálenost jejich středů, je na Zemi velmi dobře viděti vržený plnostín i polostín. Zaměníme-li pak kouli znázorňující Zemi mapou zemské polokoule, ve které jsou na různých místech otvory, jimiž se díváme, možno vhodnou volbou těchto otvorů předvésti zatmění Slunce úplné, částečné i kruhové. — Zatmění Měsíce ukážeme pak tím, že menší kouli dáme za větší, aby byla buď zcela nebo částečně v jejím plnostínu. Upozorníme při tom, že stín Země na Měsíci (nejen na modelu, ale i ve skutečnosti) je vždy kruhový, z čehož soudíme, že Země je kulatá.

Str. 206. Čočky. Jako předmětu lze použiti buď svíce nebo žárovky s uhlíkovým vláknem.

Str. 210. Kulová vada. Na rovinnou plochu plosko-vypuklé čočky (průměru asi 5 cm) přilepíme (stačí navlhčiti) tmavou papírovou clonu tvaru mezikruží tak, aby vnitřní část čočky průměru asi 1 cm a vnější mezikruží šířky asi 6 mm zůstaly volné. Zachytíme-li rovinnou plochou přímé sluneční paprsky, možno na stínítku pozorovati zřetelně dvě různá ohniska, pocházející od paprsků nulových a okrajových. Zakryjeme-li ještě vnitřní část maličkým stínítkem (pětihalér připájený k drátu), shledáme, že krajovým paprskům přísluší ohnisko bližší. — Obyčejnou (nekorigovanou) spojkou průměru 6—10 cm s krátkým ohniskem zobrazíme čtvercový otvor o straně 3—4 cm, zezadu silně osvětlený na nepříliš vzdáleném stínítku; strany obrazu jsou prohnuty dovnitř. Nebo zobrazíme touž čočkou drátěnou sítku (téže velikosti) rovněž jasně osvětlenou; podaří se nám zobraziti ostře buď kraje nebo prostředek, obojí současně však nikoli.

Str. 211. Postup při fotografování. Do dvou zkumavek nalijeme trochu roztoku dusičnanu stříbrného v destilované vodě (1 : 10), přilejeme něco zředěného roztoku kuchyňské soli a jednu ze zkumavek s vzniklým chloridem stříbrným vystavíme přímému slunečnímu světlu; chlorid poznenáhlu zčerná. Do druhé zkumavky nalijeme přiměřené množství nasyceného roztoku sirnatanu sodného v destilované vodě (1 : 3) a protřepeme; chlorid se rozpustí. — Kopírovací papír (celoidinový, na „denní světlo“) pokryjeme z poloviny červeným sklem; na druhou dáme nějaký negativ nebo vylisovaný list na př. javorový, pokryjeme jej sklem, vložíme celek do kopírovacího rámečku nebo připevníme skla tenkou gumičkou a vystavíme přímému slunečnímu světlu; ve fixační lázni obraz ustálíme. Pod červeným sklem zůstane papír bílý, žebrovní listu se pěkně prokreslí.

Str. 212. Oko lidské. — O jsoucnosti žluté skvrny možno se přesvědčiti tímto pokusem: Do černého papíru uděláme jehlou otvor a držíme jej asi $1\frac{1}{2}$ cm před okem (druhé zavřeme) a hle-

díme otvorem na jasnou oblohu. Opisujeme-li nyní otvorem malé kroužky (průměru 4—5 mm), vidíme šedé pozadí oblohy protkané tmavšími žilkami. Je to obraz žilek na sítnici našeho oka; uprostřed je místo prosté žilek, a to je obraz žluté skvrny.

Str. 213. Obraz musí vzniknouti na sítnici. Spojkou ($f = 60$ cm) utvoříme na stínítku vzdáleném 90 cm ostrý obraz předmětu (žárovky), vzdáleného od čočky 180 cm ($\frac{1}{90} + \frac{1}{180} = \frac{1}{60}$); stínítko představuje tu sítnici našeho oka. Dáme-li předmět blíže na př. do vzdálenosti 72 cm od čočky, je obraz na stínítku nezřetelný; užijeme-li však spojky o ohniskové vzdálenosti $f = 40$ cm, je obraz opět ostrý (a větší) ($\frac{1}{40} + \frac{1}{90} = \frac{1}{36}$); tuto změnu ohniskové dálky provádí oko akomodací čočky. — Místo uvedených čoček a vzdáleností možno ovšem použití i jiných; příslušné hodnoty si jednou pro vždy poznamenáme. Jako čoček lze použítí laciných skel do brejlí. Pokusy provádíme na optické lavici.

Str. 214. Oko krátkozraké a dalekozraké. Kromě pokusů na optické desce, uvedených v knize, možno postupovati takto: Kombinací spojky ($f = 5$ cm) a rozptylky ($f = -1$ m) vytvoříme na stínítku (sítnici) ostrý obraz předmětu. Odstraníme-li rozptylku (brejle), je obraz nejasný a musíme předmět dáti blíže k čočce; krátkozraký, čte-li bez brejlí, musí dáti knihu do kratší vzdálenosti. — Obdobný pokus s dvěma spojkami ($f_1 = 5$ cm, $f_2 = 1$ m). Po odstranění slabší spojky musíme dáti předmět dále od čočky; dalekozraký čte bez brejlí z větší vzdálenosti než s použitím brejlí.

Str. 215. Drobnohledy a dalekohledy. Ve školních sbírkách bývají často (ze starších dob) modely těchto přístrojů na prkénku, na němž je vyznačen chod paprsků. Nemají valné ceny a je poučnější sestavovati tyto přístroje přímo na optické lavici.

Str. 216. Složený drobnohled. Za okulár použijeme spojky $f = 5$ cm, za objektiv spojky $f = 2,5$ cm. Jako předmětu možno užítí na př. křídla mouchy nebo nějakého mikroskop. preparátu (třeba mechu); předmět dáme do vzdálenosti asi 2,5 cm od objektivu. Okulár bude pak od předmětu vzdálen asi 22 cm; předmět osvětlíme pomocným zrcátkem. Hledíme okulárem, při čemž objektiv jemně posunujeme; při určité vzdálenosti uvidíme asi 40krát zvětšený obraz předmětu; zorné pole je ovšem malé.

Str. 217. Dalekohled hvězdářský. Dvě spojky ($f_1 = 5$ cm a $f_2 = 20$ nebo 30 cm); slabší je objektivem, silnější okulárem. Hledíme-li na vzdálený předmět, jeví se jeho obraz nejzřetelněji, je-li vzdálenost obou čoček 25 cm (35 cm), t. j. rovná-li se součtu ohniskových vzdáleností obou čoček.

Dalekohled holandský. Objektiv spojka ($f_1 = 20$ cm),

okulár rozptylka ($f_2 = -5$ cm). Při vzdálenosti obou čoček 15 cm (20—5) je obraz vzdáleného předmětu nejzřetelnější. V obou případech možno obraz zlepšiti užitím clony mezi oběma čočkami.

Str. 218. Dalekohled hranolový. Z obrazce 301, uvedeného v učebnici, není žákovi patrné, že se obraz po úplném čtyřnásobném odrazu převrátí; na tabuli provedeme chod dvou paprsků (různobarevnými křídami) asi tak, jak je v Ryšavého Fysice pro nižší tř. stř. škol obr. 295. Pochopení tohoto zjevu pódeprme ukázáním modelu, kde totálně reflektující hranoly jsou nahrazeny dvěma páry zrcadel, skloněných pod úhlem 90° . Model si snadno zhotovíme podle obr. 490 v II. dílu knihy Dr. K. Rosenberg: Experimentierbuch für den Unterricht in der Naturlehre, 4. vyd., 1924. Uvádím tu jen rozměry svého přístroje: zrcadla 10×15 cm, desky 20×24 cm; zrcadla jsou zasazena do příslušně velkého plechu, ohnutého v pravém úhlu. Ježto objektiv triedru dává obraz převrácený, užijeme za předmět pro náš přístroj na př. titulu některého denního listu, který přilepíme na tuhý papír a převrácený umístíme za přístrojem; hledíme-li směrem $\overline{AB}$ v shora uvedeném obrazi, vidíme písmo správně, jak má býti.

Str. 218. Spektra světelných zdrojů. Místo pozorování spekter pouhým hranolem jest výhodné pozorovati je malým přímohledným hranolem. Pozorujeme jím světlo žárovky, které vhodným reostatem regulujeme tak, aby žárovka z tmavě červeného záření přešla až do bílého žáru; ve spektru pozorujeme zprvu jen barvu červenou, k níž přibývá postupně oranžová, žlutá atd. až fialová. — K ukázání spektra sodíku je vhodnější bromid sodný než kuchyňská sůl (neprská a nerozstříkuje se). Kromě spektra sodíku ukážeme ještě jedno spektrum, vyznačené více čarami, na př. Ca, Ba, Sr. — Pozorujeme-li spektroskopem rozsvícenou doutnavou žárovku, uvidíme krásné spektrum neonu.

(Příště dokončení.)

Dynamika letu v pokusech.

František Boček, Praha.

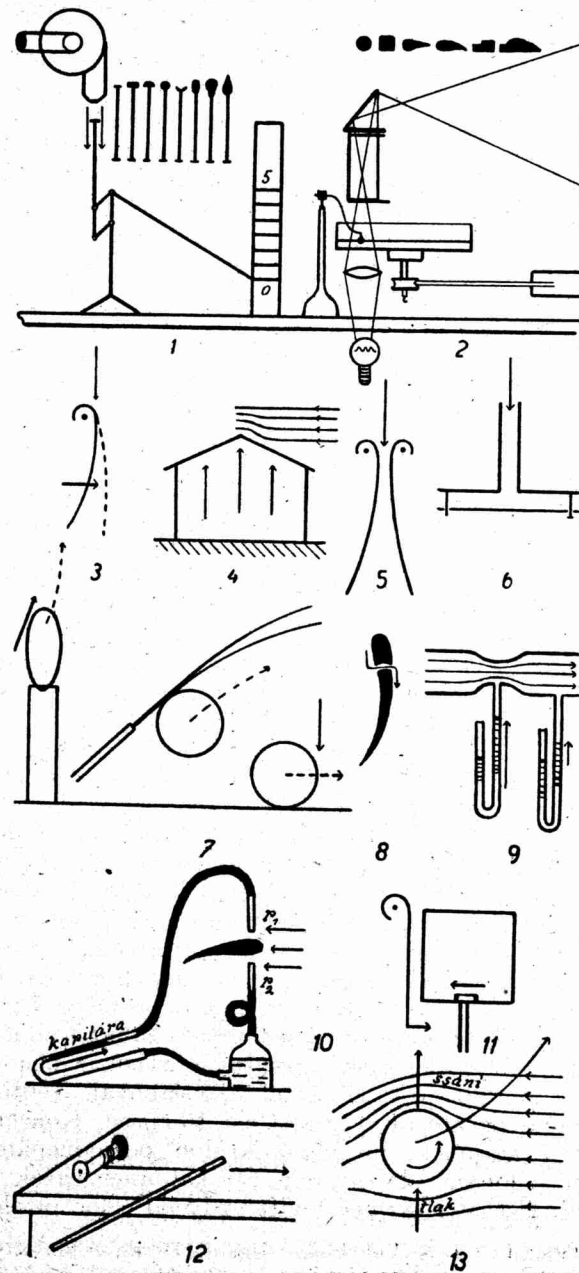
Rozvoj letectví a jeho všestranný význam upoutává všechny vrstvy obyvatelstva bez rozdílu stavu a stáří. Zejména vojenská stránka, tak důležitá pro obranu státu, vyžaduje, aby bylo co nejúčinněji propagováno, a to hlavně tam, kde leží jeho budoucnost, mezi mládeží. Proto škola může se státi hlavním činitelem, neboť v ní se mládež soustřeďuje a zde je tudíž nejkrásnější možnost,

jak ji zaujmouti pro letectví a jak vybudovati kádr občanů, kteří by měli živý a bezprostřední zájem.

Domnívám se však, že to, co dnes žák ve škole slyší o létání, o jeho vzniku, zejména pak o jeho teorii, samo o sobě nestačí, i když výklad je sebe lepší. Mladí dychtí podívat se každé věci na kloub — prostě viděti. Má-li slovo vniknouti do hloubky, musí býti, zejména u tak eminentně praktické aplikace fysiky, jako je létání, doprovázeno pokusem. Po této stránce zůstaly nám dosavadní učebnice mnoho dlužny, omezující se téměř výlučně na teorii. A přece jest slušná řada pěkných pokusů, které lze provést s velmi jednoduchými a levnými prostředky, takže žák hravě porozumí podstatě létání, a vyučování samo se jemu i učiteli příjemní a zradostní. V Německu na př. správně vystihli důležitost aerodynamických pokusů ve škole a vybudovali metody, pokusy i přístroje, které se výborně osvědčily. Upozorňuji tu na zajímavou knížku „Einführung in die Physik des Fliegens“ od Dra K. Schütta.*)

Vysvětlím nyní několik základních pokusů vybraných z této knihy (t. zv. Schauversuche) a některé vlastní. Především třeba osvětliti základní problém, to jest fysikální poměry vznikající kolem tělesa obtékaného proudem vzdušným — jeho odpor, rozvrstvení (proudnic), víry a tlaky. Odporem se rozumí síla, která je namířena proti pohybu, která tedy pohyb brzdí, přičemž jest relativně stejné, co jest v pohybu, zda těleso či prostředí. Pro měření užívá se prakticky případu, kdy těleso jest v klidu a prostředí proudí (aerodyn. kanály, tunely). Obr. č. 1 ukazuje jednoduché, pro pokusy orientační postačující zařízení k měření odporu. Obyčejné listovní vážky upravíme tak, že odebereme čoučku i miskou a na kratší rameno nasadíme pevně asi 20 cm dlouhý tenký drát. Jako ukazovatele výchylek připevníme k ose asi 100 cm dlouhé lehké rameno ze stébel do sebe zastrkaných. Dále si opatříme několik odporových tělísek různých tvarů, na př. deštičku kruhovou, kouli, polokouli dutou i plnou a konečně tělíska tvaru kapkovitého a vejčitého. Upravíme je tak, aby se dala jednotlivě na drát nasaditi, aneb upevníme každé zvlášť na samostatný drát. První deštička jest o průměru 1 cm, druhá 2 cm. Dále si obstaráme zdroj přibližně homogenního proudu vzduchového, a sice elektrický vysušovač vlasů, z něhož odstraníme topnou spirálu, aby se proud nezeslaboval. Tento přístroj vyrábí proud o počáteční rychlosti asi 15 m/sec. Konečně potřebujeme černý stojánek, na němž křídou poznameníme dílky, odpovídající polohám ukazovatele při kalibraci vážek závažími 1, 2, 3 g atd. Ústí vysušovače budiž vždy od čelné plochy tělísek

*) Nakladatel C. J. E. Volkmann Nachf., Berlin - Charlottenburg. — Zprávu o ní podal v tomto Časopise roč. 61, str. 366, prof. dr. A. Záček.



vzdáleno 5 cm. Čelnou plochou rozumíme maximální řez, kolmý ke směru proudu.

Nyní provádíme měření tak, že nejprve zjistíme odpor samotného drátu (bez tělíska) včetně pohyblivých částí vážek, na něž proud dopadá. Zjistíme na př., že jest asi 1 g. Na to měříme odpory postupně pro další tělíska. Pro desku první ukáže se výchylka 2 g, pro desku větší 4 g, plná koule 2,1 g, polokoule nahoru vypouklá 2,3 g, polokoule nahoru vydutá 5,0 g, těleso vejčité 1,8 g, konečně těleso nejmenšího odporu tupým koncem vzhůru 1,4 g a totéž těleso hrotem vzhůru 1,8 g.

Odečteme-li nyní ode všech hodnot 1 g, to jest přibližnou hodnotu odporu samotného drátu, jsou odpory po řadě: 1, 3, 1,1, 1,3, 4,0, 0,8, 0,4, 0,8. Vidíme tudíž, že tělesa různých tvarů při stejné čelné ploše a rychlosti proudu kladou různý odpor; nejmenší odpor klade kapkovité těleso napředu tupé, a sice asi $\frac{1}{7}$ odporu desky o stejné ploše čelné. Překvapuje, že odpor téhož tělesa se značně zvětší, je-li obráceno hrotem proti proudu. Vysvětlení tohoto zjevu jest prosté, poznáme-li blíže způsob proudění vzduchu v okolí tělesa a tvoření vírů za ním, jež směřují proti hlavnímu proudu a odpor zvětšují.

K tomu účelu improvisoval jsem přístroj k sestavení, jež schematicky podává obr. č. 2. Na osu odstředivého stroje našroubujeme malou dřevěnou desku a potřeme ji hustou vaselinou, načež na ni přitiskneme válcovitou skleněnou miskou (odpařovací) o průměru aspoň 25 cm. Čím jest širší, tím lépe. Její dno musí býti k vůli projekci rovné a bez větších kazů. Do misky nalijeme čisté vody do výše asi $1-1\frac{1}{2}$ cm a posypeme buď plavuní nebo velmi jemnými korkovými pilinami, ne však příliš hustě. Vzduchové bubliny vytvořené na dně odstraníme mícháním. Zdola osvětlíme misku obyčejnou žárovkou větší svítivosti. Mezi ní a miskou vložíme případně vhodnou čočku jako kondensor. Centrálně nad žárovkou se umístí projekční soustava, k níž přidáme eventuálně totálně reflektující hranol, abchom dostali obraz na svislé stínítko. Dále si vyřežeme z gumy nebo korku a pilníkem opracujeme řadu profilů, na př. válec, poloviční válec, desku čtvercovou, křídlo letadla, auto starého a nového typu (viz obr. 2). Výška jejich asi 1 cm, velikost taková, že pokryjí minci 20 h. Tyto profily nasazujeme na drát upevněný na stojánku (posouvatelem vzhůru a dolů) a vkládáme je do vody centrálně vzhledem k projekčnímu zařízení. Ponor budiž asi do $\frac{3}{4}$. Otáčíme-li nyní odstř. strojem velmi pomalu, uvidíme po zaostření na projekční stěně krásné obrázky proudnic a vznikajících vírů, tak pěkné, že nás za trochu té námahy dokonale odmění. Nejdůležitější a nejzajímavější jsou víry vznikající za profilem letadlovým, který natáčíme víc nebo míň proti proudu, pak u profilu nej-

menšího odporu a konečně u profilu auta tvaru aerodynamického, za nímž vznikají víry jen nepatrné. Krátce po provedení této improvisace dostal se mně do ruky prospekt,*) kde je nabízen podobný přístroj v poněkud jiném uspořádání (t. zv. Drehwanne).

Z projekcí vidíme, jak se homogenní pole při pohybu změní, a sice na straně vypuklé se zhuští a rychlost částic je větší, naopak na duté straně proudnice zřídnu a rychlost je menší. Dalším pokusem dokážeme, že zhuštění proudových čar a zvýšení rychlosti má za následek zmenšení tlaku a tedy ssání; naopak zmenšení rychlosti vyvolává zvýšení tlaku, při čemž oba účinky jsou téhož smyslu, tedy se navzájem podporují.

Vezměme pohlednici a udělme jí prohnutý tvar jako na obr. č. 3. Na konci ji zahněme více, abychom mohli provléci drát, kolem něhož by se mohla lehce otáčet. Foukáme-li shora na ni, překvapí nás, že se vždy vychýlí na stranu vypuklou, ať proud dopadá zprava či zleva. Totéž lze ukázati pomocí tenkého plíšku téže formy (1 cm šířka, 6 cm délka), pustíme-li naň vodní paprsek. Odchýlí se opět na vypuklou stranu asi o 30°. Tím je dokázáno, že na straně vypuklé působí ssání, na duté tlak. Týž úkaz přichází někdy při prudkých větrech, kdy vzduch proudící nad střechou domu zvětší svoji rychlost, takže vznikne ssání (podtlak), jímž může býti kryt nadzdvížen a snesen (obr. č. 4). Ženeme-li proud vzduchu na dvě podobné karty k sobě vypuklými plochami obrácené, tedy vidíme i slyšíme, jak chvějí, máme samočinný přerušovač proudu (5). Výklad je zřejmý. Totéž nastává u známého přístroje Clément-Désormesova (6, aerodynamické paradoxon), který lze improvizovati velmi jednoduše tak, že foukáme shora do mezery mezi ukazováčkem a prostředním prstem levé ruky, zatím co pravou rukou přidržíme na chvíli pod štěrbinou na plocho kousek papíru velikosti asi 4×4 cm. Papírek se drží u štěrbině a odpadne teprve, přestaneme-li foukati.

Názorný je též pokus s balonkem (7), nejlépe protáhlého tvaru. Položme jej na sklenici a foukněme se strany prudce na jeho vršek. Uvidíme, že se vznese přímo do výše, zřejmě vtlačen okolním přetlakem do zředěného prostoru, jenž se vytvoří za prvotním nárazem. Kdybychom přiblížili balonek ke vzdušnému či vodnímu proudu, bude balonek nassáván a stržen do jeho směru, po případě zůstane ve vzduchu viseti. Podobně, foukáme-li shora na balonek na stole ležící, uvede se v pohyb.

Také jest vhodné připomenouti žákům pokus s Venturiho trubicí (obr. č. 9). Na zúženém místě jeví se „statický“ tlak vzdušného proudu menší než na širším, proud ssaje, podobně jako u vodní vývěvy, u rozprašovače, u splynovače, u parního injektoru

*) Phys. Werkstätten A. G. (Göttingen).

(pára tryskající z trubice strhuje s sebou vodu do parního kotle), u Bunsenova hořáku.

Tlakové poměry kolem nosné plochy můžeme také demonstrovati formací jednoduchého, šikmo položeného manometru (obr. 10). Po vložení profilu křídla mezi rourky r_1, r_2 posune se sloupec v kapiláře vzhůru. Každá rourka sama o sobě způsobí stoupání, z čehož je zřejmo, že nad plochou je zředění, pod plochou přetlak. A sice ssání je značně větší. Tento tlakový rozdíl můžeme sledovati po celé délce profilu. Z toho také plyne, že nosná plocha jest nahoře více namáhána než vespodu. Totéž ukážeme v projekci pomocí profilu 8 rozděleného mezerou ve dvě části. Kapalina proudí zespoda na svrchní část nosné plochy, kde je tlak menší.

Povšimněme si dále tvoření vírů a jejich významu pro pohyb tělesa. Poněvadž vznikají pohybem tělesa v prostředí, je zřejmo, že jejich živá síla tvoří se na útraty energie potřebné k udržení tělesa v pohybu a představují tudíž ztrátu, odpor. Poněvadž se víry za sebou od tělesa postupně odpoutávají, je jasné, že vznikající odpor nemůže býti časově konstantní, nýbrž kolísá, jak také pozorujeme na dříve popsaných vážkách. Tím způsobem se také uvádějí telegrafní dráty ve chvění, zpívají.

Víry také způsobují ssání tělesa. Ukážeme to jednoduše takto. Nasaďme na osu odstředivého stroje krabici od konzervy a uveďme ji v prudkou rotaci. Přiblížíme-li čtvrtku papíru, tedy se přitahuje. Následkem tření o stěnu uvede se okolní tenká vrstva vzduchu v rotaci a vzniklé víry papír nassávají. Tvoření vírů vystupuje zejména mocně v tropech při tornadu a tajfunech, kdy vzduch rotuje kol svislé osy obrovskou rychlostí. Podobně tlakové níže (cyklony) jsou rovněž mocné víry o průměru několika set km, dále i víry na slunci a vířivé proudy Foucaultovy.

Zvlášť významné jsou víry vznikající u letadel. Čím jest úhel náběhu větší, tím jsou mocnější. Jimi se pravidelný chod zhuštěných proudnic nad letadlem ruší a tím ovšem klesá i ssání, to jest nosivá síla. Proto při překročení jisté hodnoty tohoto úhlu může nastati propadnutí, zřícení letadla.

Na konec můžeme ještě upozorniti na zajímavé důsledky rotace těles při postupném pohybu. Učiníme pokus následující. Položíme na stůl lehký (30 g) lepenkový válec (obr. č. 12) po stranách opatřený kotoučky na způsob cívký (průměr 5 cm, délka 25 cm). Ovineme jej širším páskem (1,5 m) upevněným na konci hůlky jako bič. Trhneme-li prudce hůlkou, tedy válec dostane vedle postupného pohybu i prudkou rotaci a vzlétne obloukem do výše až ke stropu, po případě se vrátí zpět jako bumerang. Tento případ nastává, souhlasí-li rotace válce se směrem vzniklých proudnic na straně horní; při opačném navinutí pásku běží na okraj stolu a náhle, prudce a s nárazem dopadá k zemi.

Z toho poznáváme, že na válec působí přetlakové vzdušné síly, jež jej z původního směru silně odchyľují. Vysvětlení tohoto efektu (Magnus 1852) jest jednoduché. Rotující válec strhne s sebou a v rotaci uvede přilehlou vrstvu vzduchu. Nad válcem, kde rotace této hraničné vrstvy má týž směr jako proud vznikající postupným pohybem tělesa, nastane zrychlení proudu, zhuštění proudnic a tedy ssání, na spodu, kde rychlosti mají opačný směr, pak rychlost se zmenší, proudnice zřídnou a nastane přetlak vzhůru. Oba účinky se pak, poněvadž jsou téhož smyslu, sčítají.

Tohoto zjevu užil Flettner k sestrojení rotorové lodi. Dva svislé, vysoké válce uvádějí se Dieselovými motory v rotaci. Přichází-li vítr se strany, tedy při správné rotaci vzniká přetlak, jenž žene loď kupředu. Tento efekt byl pozorován koncem 18. století při dělostřeleckém cvičení, kdy v jednom případě střela se obloukem vrátila a dopadla za dělem k zemi. Patrně jen proto, že následkem excentrické polohy těžiště upadla v rotaci kol osy příčné ku směru výstřelu, takže se vychýlila jako zmíněný lepenkový válec. Týž úkaz pozorujeme někdy při golfu a tenisu.

Domnívám se, že tyto pokusy úplně postačí k osvětlení těch zvláštních sil, jež podmiňují let. Dala by se sice provést ještě řada jiných,*) avšak časová tíseň při nynějším zmenšeném počtu hodin fysiky ve tř. 6 sotva dovolí, aby se látka rozšířila. Proto by bylo správné, některé tyto pokusy přenést již do třídy čtvrté.

*

Poznámka. Veškeré přístroje a potřeby pro shora popsané pokusy vyrábí a dodává FYSMA, společnost s ruč. omez., Praha XIX, Bubeneč, Piettova 180.

*) Viz na př. články vztahující se k témuž tématu v 15. ročníku časopisu „Praktische Schulphysik“ (1935) na str. 2 (K. Wildermuth), str. 33 a 161 (E. Roller) a str. 249 (G. Leimbach).

Pozn. red.

ZPRÁVY A DROBNOSTI.

Osobní zprávy. Na českém vysokém učení technickém v Praze byl zvolen na rok 1935—36 rektorem prof. Dr. Jindřich Svoboda; děkany byli zvoleni prof. Dr. František Rádl na vys. škole strojního a elektrotechnického inženýrství a prof. Dr. Karel Dusl na vys. škole speciálních nauk. Děkanem přírodovědecké fakulty Karlovy university byl zvolen prof. Dr. Miloš Kössler. Řádnými profesory přírodovědecké fakulty Karlovy university byli jmenováni dosavadní mimořádní profesori Dr. Václav Dolejšek pro experimentální fyziku a Dr. Vojtěch Jarník pro matematiku. Mimořádnými profesory byli jmenováni Dr. Vladimír Kořínek na přírodovědecké fakultě Karlovy university (pro matematiku) a Dr. Rudolf Kreutzinger na německé vys. škole technické v Brně (pro deskriptivní geometrii). Dr. Otomar Pankraz habilitoval se na přírodovědecké fakultě Karlovy university pro obor pojistné matematiky a matematické statistiky. Prof. Dr. Václav Hlavatý byl zvolen mimořádným členem II. třídy České akademie. Dne 10. ledna 1936 se dožil 60 let prof. dr. František Rádl. Dne 13. ledna 1936 dosáhl 50 let prof. dr. August Žáček.

Poznámka o soustavách číselných. Úlohy o soustavách číselných jsou dvojce, buďto $A \rightarrow (A)_B$ nebo $(A)_B \rightarrow A$, t. j. číslo v desítkové soustavě převádí se na číslo v soustavě o základu B nebo naopak. K těmto možno přičleniti i další typ, kde dané číslo v soustavě desítkové je psáno v neznámé soustavě ve tvaru $(A)_x$. Všechny tři úlohy provádějí se velmi prakticky a jednotně, píšeme-li

$$A = (A)_B = a_0 + a_1B + a_2B^2 + a_3B^3 + a_4B^4 + \dots,$$

na př. pro pěticičné číslo ve tvaru

$$A = (A)_B = \{[(a_4B + a_3)B + a_2]B + a_1\}B + a_0. \quad (*)$$

První úloze v učebnicích učí se tak, že se stanoví nejdříve cifra nejvyššího řádu tím, že se dělí dané číslo nejblíže nižší mocninou nového základu. Vhodnější je — jak upozornil p. vl. r. Červenka na tomto místě, R. 56, D, str. 46 — stanoviti číslice v hledaném čísle od nejnižšího řádu, což se děje tak, že dělíme dané číslo novým základem, zbytek je číslicí nultého řádu a s podílem zacházíme stejně, jak je patrné z tvaru (*). Ale i druhou úlohu lze poněkud praktičtěji a rychleji provést, než je uváděno v učebnicích; prostě počneme s výrazem v kulaté závorce. Na př. $(32561)_{VII}$ jest převést do soustavy desítkové. Výpočtu dáme pak tvar:

$$\begin{array}{r}
3 \cdot 7 \\
21 + 2 \\
\hline
23 \cdot 7 \\
161 + 5 \\
\hline
166 \cdot 7 \\
1162 + 6 \\
\hline
1168 \cdot 7 \\
8176 + 1 \\
\hline
8177
\end{array}$$

Jest tedy $(32561)_{VII} = 8177$. Zvykneme-li si při čítání následující číslici z paměti, je i způsob vypsání velmi krátký.

V třetí úloze jsme vedeni k rovnici n -tého stupně o kladných celých koeficientech až na absolutní člen, jenž je záporným:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 - A = 0,$$

jež vznikne ze soustavy rovnic — vzhledem k tvaru A (*) — :

$$\begin{aligned}
A &= y_1 x + a_0, \\
y_1 &= y_2 x + a_1, \\
y_2 &= y_3 x + a_2, \\
&\dots\dots\dots \\
y_n &= a_n.
\end{aligned}$$

Tato se dá různými způsoby řešiti. Buďtež některé uvedeny. Předně stanovíme, zda symbol $\bar{A} \geq (A)_x$, tak jak vypsáno, čímž je rozhodnuto, je-li základ x větší či menší než 10. Pro čísla $(A)_x$, v nichž vyskytují se znaky pro číslice větší než 9, je to zřejmé a největší z číslic v čísle $(A)_x$ je dolní mezí pro základ x . Pak postupujeme následovně: Vypočteme $A - a_0$, na tento rozdíl provedeme rozklad prvočíselný a vypíšeme všechny možné dělitele (stačí ovšem zjistiti ony, jež hoví výše uvedenému omezení). Necht' jsou tyto seřazeny podle velikosti $d_1, d_2, d_3, \dots, d_r$. Číslem d_1 dělíme $A - a_0$, odečteme od podílu a_1 a opět dělíme atd., pokud je dělení beze zbytku proveditelné. Není-li tomu tak, nutno pokročiti k dalšímu děliteli d_2 . Není-li tomu tak vůbec, je $(A)_x$ chybně udáno a úloha je nemožná.

Ale je možné prakticky úlohu i jinak řešiti. Na př. $12658 = (2314)_x$. Zde je zřejmé, že $10 < x < 20$, neboť $2 \cdot 20^3 = 16\,000$, tedy číslice desítek základu je 1. Hledejme nyní číslici jednotek. Je-li

$$\begin{array}{ll}
\text{zakončeno } x & \text{na } 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \\
\text{končí } 2x^3 & \text{,, } 0, 2, 6, 4, 8, 0, 2, 6, 4, 8, \\
3x^2 & \text{,, } 0, 3, 2, 7, 8, 5, 8, 7, 2, 3, \\
2x^3 + 3x^2 + x & \text{,, } 0, 6, 0, 4, 0, 0, 6, 0, 4, 0.
\end{array}$$

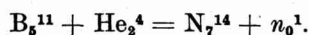
Tedy, ježto $2x^3 + 3x^2 + x = 12654$, je x zakončeno buďto 3 nebo 8. Dosazením nebo jinak snadno zjistíme, že $x = 13$. Stačí na př. určití poslední číslici výrazu $2x^3 + 3x^2$ pomocí uvedené tabulky.

Karel Lerl, Valašské Meziříčí.

Nobelovy ceny za fyziku a chemii v r. 1935 byly uděleny J. Chadwickovi v Cambridgi (z fyziky za objev neutronu) a manželům Joliotovi v Paříži (z chemie za objev umělé radioaktivity).

Neutron byl Chadwickem rozpoznán vlastně již r. 1932. Úmyslně píše rozpoznán, protože ponejprv ho objevili — aniž si však jasně byli vědomi, co našli, Bothe a Becker již r. 1930. Také manželé Joliotovi (Frédéric Joliot a Irena roz. Curie, dcera slavné Marie Curie) r. 1931 při svých pokusech pracovali vlastně s neutrony. Všichni tito předchůdci Chadwickovi pokládali neutrony za velmi tvrdé (pronikavé) záření gama. Dnes víme, že neutrony, poněvadž nemají elektrického náboje, pronikají obrovskými vrstvami i těžkých kovů; elektrické náboje v atomech na ně nepůsobí tak jako na částičky nabitě (částice alfa, protony, negatrony, positrony). Je zajímavé prohlížeti práce týkající se vlastně již neutronů před Chadwickem. Všichni badatelé snaží se v nich odhadnouti energii domnělých paprsků gama; svoje údaje postupně zvyšují, až Joliotovi, těsně před zásahem Chadwickovým, udávají již $35 \cdot 10^6$ elektronvoltů. Nejtvrďší složce záření gama prvků radioaktivních přirozených přísluší necelých $12 \cdot 10^6$ e. v. Již z toho je možno souditi, jak záhadné se jevílo nové záření.

Chadwick se první pokusil o stanovení hmoty neutronu. Použil k tomu energetického zabarvení procesu jadrové přeměny, speciálně přeměny boru bombardovaného částicemi alfa. Příslušná atomová rovnice zní:



Výsledkem bombardování boru částicemi alfa (He^{++}) je dusík a neutrony. Na jednu stranu rovnice dodáváme kinetickou energii částičky alfa, na druhé straně rovnice musí se nám tato energie objeviti jednak jako kinetická energie neutronu, jednak jako kinetická energie vzniklého jádra dusíkového, které je nárazem také uvedeno do pohybu. Tak bylo možno odhadnouti hmotu neutronu. První výsledek byl ten, že se hmota neutronu neliší valně od hmoty volného protonu, pravděpodobně je o něco menší. Rozdíl hmot protonu a neutronu měl býti asi o 20% menší než hmota elektronu. Celá tato otázka není dosud spolehlivě rozřešena; co však se již asi nezmění, je tvrzení, že se hmota neutronu prakticky neliší od hmoty protonu. V poslední době (zejména zásluhou Němců) vzniká úsilí po přesném rozpoznání energetické bilance těchto atomových rovnic. To úsilí přinese na konec jistě také přesné stanovení hmoty neutronu.

Objev neutronu byl největším objevem r. 1932 a potomní leta jen dokázala, jak důležitý a plodný je to objev. Připomínám jen věci novější, na př. zjevy umělého zpomalování neutronů hmotami obsahujícími vodík, stoupání účinnosti takových zpomalených neutronů při vyvolávání umělé radioaktivity atd. Také fyziologické účinky neutronů se již začínají studovati a nejsou ani zde vyloučena různá překvapení, protože se jedná o částičky, jakých dosud nikdy nebylo použito.

Zjev umělé radioaktivity, objevený vlastně již r. 1933 a popsáný podrobně r. 1934 manžely Joliotovými, byl ve své podstatě také vlastně objevem rázu fyzikálního a bylo při něm používáno metod a přístrojů převážně fyzikálních, jako počítače paprsků, elektrometru Hofmannova a Wilsonovy metody mlžných drah. Podstata objevu byla popsána v Časopise roč. 63, str. 314, 1934. Stručně jen rekapituluji s hlediska dnešního.

První uměle radioaktivní prvky byly radiodusík, radiokřemík a radiofosfor, isotopy dusíku, křemíku a fosforu. Na př. radiofosfor vzniká bombardováním hliníku částicemi alfa a rozpadá se samovolně, když bylo bombardování zastaveno, s poločasem 3,2 minuty. K důkazu bylo použito i chemické evidence, že běží vskutku o isotope fosforu. Objev umělé radioaktivity byl umožněn v pařížském Institut du Radium tím, že byly k dispozici silné zdroje polonia, které vysílá záření alfa potřebné k bombardování; zdrojem Po ekvivalentním 100 milicurie radonu bylo získáno množství uměle radioaktivních atomů řádu 10^5 , jehož rozpad již bylo možno konstatovati. Výtěžek umělé radioaktivity je totiž jen asi téhož řádu, jako výtěžek rozbití atomu, t. j. 10^{-6} až 10^{-8} na jednu částčku. Částčky, které tyto prvně objevené uměle radioaktivní prvky vysílaly, byly kladné elektrony, pozitrony, jejichž existence již tři leta před objevem umělé radioaktivity byla dokazována a diskutována. Záhy se ukázalo, že nový zjev je základem celého nového oboru radiologie a také — fyziky (nebojme se toho slova užiti, i když nám to vše připadá zvláštní ve světle té pravé a staré fyziky). Postupně dokázáno, že radioaktivních isotopů je veliké množství a že mnohem účinněji vyvolávají umělou radioaktivitu neutrony (pokusy Fermiho a jeho školy) a zejména deutony (= diplony, jádra atomů těžkého vodíku). Postupně se fyzikové snaží osvoboditi od poměrně malého počtu částček, které jsou pro bombardování k dispozici a používají částček uměle důvtipnými způsoby zrychlených. Tak se podařilo výtěžky pokusů silně zlepšiti a pomýšlení na umělé radium není dnes již takovou utopií, jakou bylo před několika lety. To by také znamenalo možnosti praktického využití umělé radioaktivity.

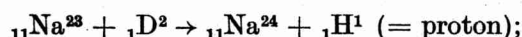
V. Santholzer.

Lawrencovo umělé radium. V posledním ročníku Časopisu (str. D 68) bylo referováno o předběžném sdělení kalifornského fyzika E. O. Lawrence, o pokusech s radiosodíkem, uměle připraveným bombardováním sodíku (čistého nebo i ve sloučenině, na př. v kuchyňské soli) deutony (diplony, ionty atomů těžkého vodíku). Ty byly urychlovány ve speciální akceleračtorové trubici, v níž deutony probíhají několik stupňů nižších napětí zařazených za sebou. V jednom z posledních čísel americké Physical Review (47, 17, 1935) uveřejnil Lawrence podrobnou zprávu o svých pokusech s radiosodíkem. Od původního napětí $1,75 \cdot 10^6$ voltů postoupil k napětí $2,15 \cdot 10^6$ voltů, zrychlené deutony pak vypouštěl tenkým hliníkovým okénkem do vzduchu. Deutony za okénkem

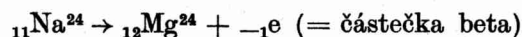
měly doběh asi 5 cm a tvořily modře žhnoucí chvost. Jen u malé části deutonů jevil se anomální doběh až do vzdálenosti 9 cm. Sodík (nebo látka sodík obsahující) byl umístěn 5 mm od okénka. Stačilo jej ozařovati asi 30 minut, sodík jevil pak po zastavení bombardování umělou radioaktivitu s dobou polovičního rozpadu 15,5 hodin.

Samotný radiosodík vysílá jen záření gama a částice beta; nyní ukázal Lawrence, že radiosodík vysílá i protony, neutrony a částice alfa, ale jen pokud trvá bombardování deutony. Různé typy záření bombardovaným sodíkem vysílané byly studovány různě upravenými ionizačními komorami. Výtěžek radiosodíku byl poměrně značný a právem zařadil Lawrence do svojí práce kapitulu s nadpisem: „Užitečnost radiosodíku“. Při napětí $2,15 \cdot 10^6$ voltu a proudu 1 mikroampéru dostal tolik radiosodíku, že záření beta a gama jím vysílané bylo skoro stejné jako záření jednoho miligramu radia. Lawrence uvádí, že brzo bude možno jak napětí, tak i proud zvýšiti, aby výtěžek radiosodíku stoupl stokrát. Lze tedy mluviti o *umělém radíu*, kterým pravděpodobně bude možno radium v budoucnosti v některých případech nahrazovati, až ovšem technika výbojových trubíc ještě více pokročí.

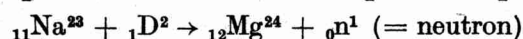
Transmutaci sodíku vzniklou bombardováním deutony lze nejlépe popsatí atomovou rovnicí



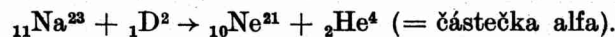
uměle radioaktivní isotope sodíku ${}_{11}\text{Na}^{24}$ rozpadá se pak dále podle rovnice



Začáteční pochod však může také probíhati přes radiohořík



anebo přes radioneon



Tak lze si vysvětliti vznik všech částic, které bombardovaný sodík vysílá, t. j. částic beta, částic alfa, protonů a neutronů. Radiosodík vysílá mimo to ještě záření gama, pravděpodobně jeden foton doprovází jednu transformaci beta. Maximální energie částic beta odpovídala $1,2 \cdot 10^6$, energie paprsků gama $5,5 \cdot 10^6$ elektronvoltů. Paprsky gama jsou tedy vysílány z radiohoříku ${}_{12}\text{Mg}^{24}$ (protože následují po rozpadu β), a zajímavé je, že gama paprsky podobné energie vysílá také radiouhlík (${}_6\text{C}^{12}$) a radio-kyslík (${}_8\text{O}^{16}$), látky známé z pokusů o umělé radioaktivitě v malém. Všechna tři jádra lze považovati za typ zbudovaný z částic alfa (čísla 24, 12 a 16 jsou dělitelná čtyřmi) a pravděpodobně tato jádra mají stejné excitační hladiny.

Počet vysílaných protonů je týž jako počet utvořených atomů radiosodíku. Protony, neutrony a částčky alfa jsou vlastně jen doprovázející záření, vznikající při tvoření jader sodíku $_{11}\text{Na}^{24}$, hořčíku $_{12}\text{Mg}^{24}$ a neonu $_{10}\text{Ne}^{21}$. Částčky alfa mají doběh 6,5 cm ve vzduchu za normálních poměrů, protony až do 49 cm. Reakce, kterou vznikají částčky alfa, není tak častá jako ostatní dvě reakce, což je v souhlase s názorem, že potenciální hladina kolem jádra je pro částčku alfa vyšší. Vlastnímu radiosodíku přísluší jen záření gama a částčky beta; obojí záření má pro značnou pronikavost velký význam praktický. Počet vysílaných neutronů je asi stejného řádu jako počet protonů.

Pro lepší porozumění zrekapitulujme: sodík, bombardovaný atomy těžkého vodíku, mění se, pokud bombardování trvá, podle uvedených čtyř rovnic. Podle první rovnice vzniká radiosodík $_{11}\text{Na}^{24}$, který je nestálý a rozpadá se jako radioaktivní atom, žije tedy jistou střední dobu životní. Při rozpadu vyše částčku beta, změní se na jádro atomu hořčíku $_{12}\text{Mg}^{24}$, které je excitované a vyše paprsek gama. Vyslání paprsku gama (fotonu) tedy následuje po vyslání částčky beta. Pokud bombardování trvá, může se stejnou pravděpodobností nastati také jiný způsob změny sodíku, přímo na hořčík $_{12}\text{Mg}^{24}$ za vyslání neutronů. Ještě jiný způsob změny sodíku záleží ve vytvoření jádra neonu $_{10}\text{Ne}^{21}$ za vyslání částčky alfa. Tento způsob však je méně pravděpodobný. Pokud bombardování trvá, musí býti vysílány také protony; zřejmě je vysíláno celkem tolik protonů, kolik se vytvoří atomů radiosodíku, a tedy také kolik se celkem vyše částček beta nebo fotonů.

Když bombardování je zastaveno, jsou vysílány pouze částčky beta a záření gama, protože se rozpadají již jen atomy radiosodíku $_{11}\text{Na}^{24}$, které bombardování přežily, t. j. nerozpadly se v čase, po který bombardování trvalo. Pro použití praktické jsou právě důležité tyto atomy, které přežily; těch je podle svrchu uvedeného tak veliké množství, že na praktické použití radiosodíku možno vskutku pomýšleti.

V. Santholzer.

LITERATURA.

A. Recenze vědeckých publikací.

Stefan. Banach: Théorie des opérations linéaires. Monografie matematyczne, sv. 1. Warszawa, Sem. matem. uniw. Warsz., 1932. VII, 254 str. Kč 81,—.

Tato kniha je věnována studiu prostorů, které, ač mají nekonečně velkou dimenzi, jsou velmi podobné obyčejnému prostoru. Popíše několik nejdůležitějších příkladů takových prostorů. Jejich elementy („body“) nejsou ovšem body v obyčejném smyslu.

Prostor C . Elementy jsou spojité funkce $x(t)$ v intervalu $0 \leq t \leq 1$.

Prostor c . Elementy jsou konvergentní posloupnosti $\{\xi_n\}$ reálných čísel.

Prostor L^p ($p \geq 1$). Elementy jsou funkce $x(t)$ definované v intervalu $0 \leq t \leq 1$ a takové, že

$$\int_0^1 |x(t)|^p dt \text{ (v Lebesgueově smyslu)}$$

je konvergentní, při čemž dvě takové funkce $x(t)$ a $y(t)$ považujeme za stejné, když

$$\int_0^1 |x(t) - y(t)|^p dt = 0$$

(což je podmínka pouze formálně závislá na p).

Prostor l^p ($p \geq 1$). Elementy jsou posloupnosti $\{\xi_n\}$ takové, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p \text{ je konvergentní.}$$

Všecky tyto prostory jsou *vektorové prostory*, což má následující význam. Předně, jsou-li x a y dva body kteréhokoli z našich prostorů (označme jej E) lze jim přiřaditi jako jejich *součet* bod $x + y$ prostoru E (čtenář snadno uhodne konkrétní definici součtu v každém z hořejších prostorů) tak, že jsou splněna následující pravidla: (1) $(x + y) + z = x + (y + z)$, (2) existuje „nulový“ bod Θ (který čtenář sám sestrojí), t. j. takový, že $x + \Theta = \Theta + x = x$, (3) ke každému bodu x existuje bod $-x$ (zase je snadno jej sestrojiti) takový, že $x + (-x) = \Theta$, (4) $x + y = y + x$. Za druhé, je-li x bod prostoru E a je-li t reálné číslo, lze jim přiřaditi jako jejich *součin* bod tx prostoru E (jehož definici v hořejších příkladech opět čtenář uhodne) tak, že: (1) $t(x + y) = tx + ty$, (2) $(t_1 + t_2)x = t_1x + t_2x$, (3) $t_1(t_2x) = (t_1t_2)x$, (4) $1 \cdot x = x$.

Hořejší prostory E jsou dále *normované*, což má následující význam: Každému bodu x lze přiřaditi jako jeho „normu“ reálné číslo $\|x\|$ tak, že: (1) $\|\Theta\| = 0$, (2) $\|x\| > 0$, když $x \neq \Theta$, (3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, (4) $\|tx\| = |t| \cdot \|x\|$. Konkrétní definice normy v hořejších příkladech je tato: Bod $x = x(t)$ prostoru C má za normu $\|x\|$ největší z čísel $|x(t)|$ ($0 \leq t \leq 1$). Bod $x = \{\xi_n\}$ prostoru c má za normu nejmenší z čísel, která nejsou menší než žádné z čísel $|\xi_n|$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Bod $x = x(t)$ prostoru L^p má za normu číslo

$$\|x\| = \left(\int_0^1 |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

Bod $x = \{\xi_n\}$ prostoru l^p má za normu $\|x\|$ číslo $\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$.

Jak známo, nazývá se *metrickým prostorem* libovolná množina E , ve které každému páru x, y bodů (elementů) bylo přiřazeno reálné číslo (x, y) (zvané *vzdáleností* x od y) tak, že: (1) $(x, x) = 0$, (2) $(x, y) > 0$, když $x \neq y$, (3) $(x, y) = (y, x)$, (4) $(x, y) + (y, z) \geq (x, z)$. Každý normovaný vektorový prostor je metrický prostor, definujeme-li vzdálenost (x, y) rovnicí

$$(x, y) = \|x - y\|.$$

V každém metrickém prostoru E je zvykem definovati relaci $\lim x_n = x$ (kde x_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) a x jsou body prostoru E) jako ekvivalentní s relací $\lim (x_n, x) = 0$ (což je limita v obvyklém smyslu, neboť (x_n, x) jsou čísla). Aby relace $\lim x_n = x$ platila, k tomu je vždy *nutné*, aby každému kladnému číslu ε bylo lze přiřaditi index N tak, aby vzdálenost (x_p, x_q) byla menší než ε , kdykoli oba indexy p a q jsou větší než N . Tato podmínka není vždy *postačující*; je-li, pak se metrický prostor E nazývá *úplným*. Normované vektorové úplné prostory se nyní zpravidla nazývají *Banachovy prostory* (espace du type (B) v Banachově knize). Všecky hořejší příklady jsou Banachovy prostory.

Předmětem studia v Banachově knize jsou v pozdějších kapitolách Banachovy prostory, v prvních čtyřech kapitolách obecnější (ale analogické) prostory.

Jsou-li E a E_1 dva Banachovy prostory, a je-li U operace, která každému bodu x prostoru E přiřazuje bod $y = U(x)$ prostoru E_1 , pravíme, že U je *aditivní*, když

$$U(x + y) = U(x) + U(y).$$

O operaci U pravíme, že je v bodě x prostoru E *spojitá*, když

$$\lim U(x_n) = U(x), \text{ kdyžli } \lim x_n = x.$$

Aditivní operace U , která je spojitá v *jednom* bodě (Banachova) prostoru E , je spojitá v *každém* bodě prostoru E a nazývá se *lineární operace*. Místo slova operace užíváme slova *funkcionál*, když E_1 je množina reálných čísel (což je Banachův prostor, když součet $x + y$ a součin tx dvou reálných čísel je obyčejný součet a obyčejný součin a když normou v E_1 rozumíme absolutní hodnotu).

Je-li $f(x)$ aditivní funkcionál v Banachově prostoru E , pak $f(x)$ je lineární, když a jen když existuje číslo $m \geq 0$ takové, že

$$|f(x)| \leq m \cdot \|x\| \text{ pro každý bod } x.$$

Volíme-li m co nejmenší, pak m je t. zv. *norma* lineárního funkcionálu f . Je-li $\bar{E}$ systém všech lineárních funkcionálů v Banachově prostoru E , pak lze definovati součet $f + g$ (f a g v $\bar{E}$) a součin tf (t reálné číslo, f v $\bar{E}$) způsobem, který čtenář uhodne. Definujeme-li ještě normu v $\bar{E}$ způsobem, který byl výše naznačen, pak $\bar{E}$ je nový Banachův prostor. Jako příklad vezmeme prostor $E = L^p$ ($p > 1$). Definujeme $q > 1$ rovnicí

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

(takže $p = q$ pouze v případě $p = 2$, což je t. zv. *Hilbertův prostor*). Každému elementu $y = y(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) prostoru L^q lze přiřaditi lineární funkcionál f v prostoru L^p takový, že pro každý bod $x = x(t)$ prostoru L^p jest

$$f(x) = \int_0^1 x(t) y(t) dt.$$

Obráceně každý lineární funkcionál f v prostoru L^p vznikne popsáním způsobem přesně z jednoho bodu prostoru L^q , takže máme jednoznačnou korespondenci mezi body prostorů L^q a $\bar{E}$ (kde $E = L^p$); tato korespondence je taková, že obrazem součtu je součet obrazů, že obrazem součinu čísla t s bodem y je součin čísla t s obrazem bodu y , a že norma bodu je rovna normě obrazu, takže prostor $\bar{E}$ (kde $E = L^p$) je v podstatě totožný s prostorem L^q . Podobně pro $E = l^p$ ($p > 1$) prostor $\bar{E}$ je v podstatě totožný s prostorem l^q .

Už jsem uvedl, jak lze definovati konvergenci

$$\lim x_n = x \quad (*)$$

v Banachově prostoru E ; to je t. zv. *silná konvergence*. V Banachově prostoru lze definovati relaci (*) ještě jiným způsobem. Je to t. zv. *slabá konvergence*, která podle definice nastane, když a jen když pro každý lineární funkcionál f v prostoru E platí

$$\lim f(x_n) = f(x)$$

(kde limitu je chápati ve smyslu obvyčejném; $f(x_n)$ a $f(x)$ jsou čísla). Silná konvergence má vždy za důsledek slabou konvergenci. Někdy to platí také naopak; na př. v prostoru l^1 ; zpravidla tomu však tak není. Rozdíl mezi silnou a slabou konvergencí je zvláště veliký na př. v prostoru C . Jsou-li $x_n = x_n(t)$ a $x = x(t)$ body prostoru C , pak (*) ve smyslu silné konvergence znamená, že

$$\lim x_n(t) = x(t) \quad (**)$$

stejněměrně pro $0 \leq t \leq 1$; kdežto (*) ve smyslu slabé konvergence znamená pouze jednak, že (**) platí pro každé t , ne však nutně stejnoměrně, jednak, že existuje číslo A takové, že $|x_n(t)| < A$ pro všechna $n = 1, 2, 3, \dots$ a pro všechna t ($0 \leq t \leq 1$).

Co jsem řekl, postačí snad, aby čtenář poznal, co je vcelku předmětem Banachovy knihy. Nepouštím se do detailního rozboru jednotlivých kapitol, které obsahují velkou spoustu rozmanitých výsledků. Mnohé z nich byly dříve známy ve zvláštních případech (pro některý konkrétní případ Banachova prostoru) a je zajímavé pozorovati, jak jeden a týž abstraktní teorem často shrnuje několik na prvý pohled hodně od sebe vzdálených výsledků.

Myslím, že Banachova kniha je jednou z nejzajímavějších matematických knih poslední doby. Otázky zde vyšetřované jsou důležité pro celou řadu významných matematických disciplín, a metody zde volené se zdají zvláště slibné pro studium otázek dosud neřešených. Nemohu ovšem zamlčeti, že její četba je místy hodně obtížná, což je snad mnohde zaviněno také ne dosti pečlivou korekturou. Čtenář, kterému je množinová matematika zcela cizí, sotva bude s to, s úspěchem ji studovati. Doufám však, že na př. český čtenář, který pozorně pročte moji knihu „Bodové množiny I“, jež v brzkou vyjde nákladem JČMF, bude náležitě připraven ke studiu Banachovy knihy, která žádného dobře připraveného čtenáře nezklame.

Nová Banachova kniha, věnovaná tentokrát *nelineárním* operacím, se připravuje a bude tvořit jeden z dalších svazků téže sbírky. Čech.

Stan. Saks: Théorie de l'intégrale. Monografie matematyczne, sv. 2. Warszawa, Sem. matem. uniwers. Warsz., 1933. VII, 290 str. Kč 108,—.

Pojem integrálu, který je ve své elementární formě jedním z nejzákladnějších pojmů v matematice, byl postupem doby rozmanitými způsoby zobecněn, a živý vývoj v tomto směru trvá dodnes. V poslední době bylo dosaženo velmi pozoruhodných výsledků a potřeba soustavného knižního výkladu byla velmi citelná. Účelem Saksovy knihy je právě výklad nejmodernějších výsledků v teorii integrálu, a budiž ihned poznamenáno, že se tento těžký úkol podařil autorovi zcela brilantně. Je prostě úžasné, jak mnohem soustavnější, přehlednější a jednodušší je Saksův výklad na mnohých místech, než jak se jeví v originálních publikacích. A jako po stránce logické, tak stejně dokonalou je Saksova kniha i po stránce didaktické; u čtenáře se předpokládá pouze znalost nejjednodušších pojmů matematické analýsy, formulace definic, vět i důkazů je všude bezvadně jasná, a tiskových chyb prakticky není.

Knihu lze dobře rozdělití ve dvě poloviny, z nichž první je věnována dnes klasickému integrálu Lebesgueovu, a druhá neabsolutně konvergentním integrálům.

První kapitola shrnuje základní vlastnosti funkcí s konečnou variací a absolutně spojitých. Druhá kapitola obsahuje na pouhých 24 stranách úplnou teorii Lebesgueovy míry. Třetí kapitola studuje derivabilitu funkcí s konečnou variací a je přípravou ke kapitole následující, ve které je studován Lebesgueův integrál definovaný jako absolutně spojitá funkce, jejíž derivace má skoro všude předepsanou hodnotu. V páté kapitole je Lebesgueův integrál v euklidovském E_n studován znovu na základě nové definice (podle níž integrál v E_n je roven Lebesgueově míře speciálních množin v E_{n+1}). Tím je skončena první polovina knihy, na niž navazuje kapitola šestá (na niž jsou další kapitoly nezávislé), ve které je Lebesgueův integrál aplikován na teorii plošného obsahu ploch $z = f(x, y)$ (kde f je funkce, u níž se předpokládá pouze spojitost).

Kapitola sedmá je věnována Perronovu integrálu, který lze zhruba definovati takto: Perronův integrál funkce $f(x)$ je funkce, jejíž přírůstek je vždy větší než přírůstek funkce mající všude derivaci menší než $f(x)$, a vždy menší než přírůstek funkce mající všude derivaci větší než $f(x)$.

V osmé kapitole jsou definovány a studovány funkce, které jsou zobecněním funkcí s konečnou variací a funkcí absolutně spojitých; jsou dvě různá taková zobecnění. Předmětem deváté kapitoly jsou teoremy o derivovaných číslích funkcí jednak zcela libovolných, jednak náležejících speciálním třídám. V desáté kapitole je definován Denjoyův integrál způsobem, který odpovídá definici Lebesgueova integrálu volené v kapitole čtvrté; tato definice je mnohem jednodušší než původní definice Denjoyova.

V kapitolách I—V a VII je studován integrál v n dimenzích. Kapitoly VIII—X jsou omezeny na funkce jedné reálné proměnné; teorie derivování a integrování funkcí jedné proměnné zde vyložená je pravděpodobně v hlavních rysech definitivně uzavřena. Naproti tomu diferencování funkcí několika reálných proměnných dnes daleko ještě není v tak zakončeném tvaru; hlavní z věcí dnes zde známých jsou vyloženy v kapitole jedenácté. Po ní následují dva dodatky. První je věnován abstraktní teorii aditivních funkcí množin. Teorie Lebesgueovy míry a integrálu — pokud je nezávislá od t. zv. Vitaliovy věty — objevuje se zde znovu, nyní jako speciální případ abstraktnější teorie. Druhý dodatek (psaný Banachem), je věnován t. zv. Haarově míře, která má základní význam v moderní teorii grup.

Končím svůj referát vřelým přáním, aby Saksova kniha našla u nás co nejvíce čtenářů! Její četba není nikterak nesnadná, a pro každého, kdo se chce orientovati v moderní matematické analýze, je zcela nepostradatelná.

Čech.

Pplk. ing. Bohumil Konečný: Základy vysokofrekvenční techniky, I. část: Použití vektorového počtu při počítání s harmonickými funkcemi, 1935. 123 str. 87 obr. Kč 36,—. Kniha je rozdělena ve dvě části. V první se pojednává o harmonických funkcích času a jejich grafickém znázorňování pomocí diagramových vektorů Fresnelových, jež třeba dobře odlišovat od vlastních vektorů fyzikálních. Autor odvozuje obecně a obsírně veškeré operace s těmito vektory a užívá rozkladu do kosoúhlých souřadnic. Dále přechází na souřadnice pravoúhlé a ukazuje, za jakých předpokladů lze užití komplexního způsobu počítání. V druhé části probírá autor harmonické funkce času a místa (postupné vlny), jež znázorňuje Fresnelovými vektorovými plochami šroubovými, a vlnění stojaté; celek doplňuje několik příkladů. V této knize je symbolika důsledně provedena pro všechny uvedené operace s harmonickými funkcemi. Výsledky složitějších úkonů (na př. násobení dvou harmonických funkcí stejné frekvence) ve formě vektorové jsou jistě zajímavé, ale stěží názornější; názvosloví pro některé pojmy liší se od obvyklého. Hlavní význam spisu záleží v odůvodnění a výkladu komplexního způsobu počítání, které dnes má velkou důležitost ve vysokofrekvenční technice a technice střídavých proudů vůbec. *Chládek.*

Wien-Harms: Handbuch der Experimentalphysik. Ergänzungswerk, herausgegeben von M. Wien u. G. Joos. Bd. II. E. Fues: Beugungsversuche mit Materiewellen. Einführung in die Quantenmechanik. Akad. Verlagsges. Leipzig, 1935. XIV, 351 stran, Kč 204,—.

První, menší část svazku (126 stran) je věnována prakticko-technickému popisu a klasicko-vlnové interpretaci důležitých experimentů týkajících se ohybu a interference materiálních paprsků. Teoretický výklad je založen v podstatě na Kirchhoffově klasické teorii ohybu vln. Nejprve je pojednáno o ohybu katodových paprsků (elektronových vln) na jednotlivých atomech a molekulách (ohyb v plynech), pak několik slov o ohybu v kapalinách, a konečně je obsírněji vykládáno o rozličných úkazech při ohybu a interferenci katodových paprsků v krystalových mřížích. (Laueho bodové interference, Kikuchiho čárové, Debye-Scherrerovy diagramy, interference při reflexi na krystalových plochách a pod.)

V druhé části vykládá autor nejprve způsobem ve většině učebnic obvyklým o statistické interpretaci de Broglieových vln. V druhé kapitole je pojednáno o Schrödingerově elementární vlnové mechanice jediného hmotného bodu a propočtena řada příkladů; v třetí kapitole pak o vlnové mechanice soustav hmotných bodů. Další kap. obsahuje stručný výklad o principech kvantové mechaniky, o Diracově teorii elektronu a pozitronu a o statistikách. V předposlední kapitole je vyložena v podstatě stará O. Kleinova korespondenční elektrodynamika, v poslední pak Bornova teorie atomových srážek (Stossvorgänge.) Celkem nepřináší tento nový svazek Wien-Harmsova Handbuchu nic pozoruhodného po stránce didakticko-metodické, poslouží však dobře k informaci o otázkách, jimiž se zabývá.

V. Votruba.

B. Recenze didaktických publikací.

Zeitschrift für mathematischen u. naturwissenschaftlichen Unterricht aller Schulgattungen. Ročník 65; 1934. Tento ročník časopisu se vyznačuje zcela jiným rázem, nežli předchozí, a roč. 64 byl k němu přechodem. Algebraických článků jest tu tentokrát málo. Jungeho „Eine Veranschaulichung der Formel $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ “, kde užívá výrazu $(1 + i/n)^n$ pro $n = 2, 3, 4, \dots, 10, \dots, 100, n \rightarrow \infty$. Potom Pöschlův „Ein Verfahren zur angenäherten Auflösung der kubischen und biquadratischen Gleichungen“, při němž užívá soustav parabol a hyperbol.

V poslední třídě dobře upotřebitelný jest Münznerův článek „Über eine einfache Lösung einer Wahrscheinlichkeitsaufgabe in der Kundenwerbung“, jenž se zabývá úlohou, kolik asi kusů zboží, k němuž se přibalují serie obrázků, musí zákazník koupiti, aby ji sebral úplnou. Výsledek: $n \cdot (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n})$ kusů.

Z geometrických článků jsou tu: Geckův „Affingeometrische Behandlung der Kegelschnitte“, odvozuje analyticky vlastnosti elipsy z vlastností kružnice, hyperboly z hyperboly rovnostanné a paraboly z křivky užití při grafickém řešení rovnice druhého stupně. Ohniskové vlastnosti zůstanou stranou. Fladt uvádí v krátkém článku „Eine kurze Behandlung der allgemeinen Kegelschnittsgleichung“, vycházejí z vrcholové rovnice kuželosečky $y^2 = 2px + qx^2$, jak odvoditi rovnici os — $Bf^2x + (A - C) \cdot f'x f'y + Bf^2y = 0$ tím, že soustavu souřadnou nejdříve otočí o úhel α a obdrží podmínku, aby obecná rovnice druhého stupně bez prostého členu znamenala kuželosečku s vrcholem v počátku, a potom pošine soustavu souřadnou, načež srovnáním vzniklé rovnice s obecnou rovnicí druhého stupně dostane žádanou rovnici. Dobré pro septimu. Dále se zabývá obecnou rovnicí druhého stupně Schröder v pojednání „Herstellung des Kurvenbildes auf Grund der Zerspaltung der Kurvengleichung“, rozkládá rovnici křivky ve dva činitele s proměnným parametrem; činitele třeba voliti tak, aby značily útvary, které se dají snadno konstruovati. Čary náležející téže hodnotě parametru určují body křivky. Kromě kuželoseček uvádí také konstrukci Descartesova listu a lemniskaty. Lony v článku „Die allgemeine Gültigkeit der Formeln der analytischen Geometrie“ vzpomíná toho, že se formule analytické geometrie odvozují zpravidla pro nejjednodušší polohu útvarů, t. j. v prvním kvadrantu, a ukazuje, jak dokazovati obecnou platnost formulí. Benneckeův článek „n-Teilung beliebiger Winkel für alle rationale Zahlen n“ řeší tuto úlohu jednak užitím křivek, jež mají polární rovnici $r = 2a \cos \varphi/n$, jednak zvláště konstruovanými soustavami pravítek pohyblivě spojených. Fuhrův „Konstruktionen mit dem Zeichenwinkel“ se zabývá řešením úloh 3. a 4. stupně tímto nástrojem a to trisekcí úhlu a konstrukcí pravidelného sedmi- a třináctiúhelníka. Zacharias ukazuje v článku „Die trilineare Verwandschaft eine Quelle dreieckgeometrischer Sätze“, jak užití tohoto vztahu v žákovských matematických kroužcích. Arndtův článek „Der Sekantensatz mit seinen Nebenformen“ uvádí důkaz této věty bez užití podobnosti a potom k důkazu věty Pythagorovy a vět Euklidových a dále ke konstrukcím. Bögel tu má články „Über die Berechnung der Kugeloberfläche und der Kugelkappe“ a „Das Klostergewölbe und verwandte Körper, Gegenstände für methodische Übungen“; v prvním vychází z objemů, aby určil povrchy. Aplikacemi se zabývají Scholz a Stiegler v článku „Zehn Aufgaben von der Eisenbahn“ z částí užitím anal. geometrie; hodí se velmi dobře pro vyučování, aby nabylo praktičtějšího a zajímavějšího zabarvení. Dále Wagner a Gentil v článcích „Feldmeßübungen als landheimgerechter und zeitgemäßer Mathematikunterricht“ a „Kleinentfernungsmesser“.

Fysikální články tu mají Müller „Neuere Untersuchungen über Ultrastrahlung“, v němž popisuje rozvoj výzkumů o radioaktivitě a kosmickém záření a jiný „Das Neutron und das Positron“ také informativního rázu. Potom Eichler, jenž v článku „Ein einfacher U. V. Strahler für Lumineszenzanalysen u. Fluoreszenzmikroskopie“ popisuje zařízení pro vytváření těchto paprsků bez rtuťové lampy, již nahrazuje obloukovou, jejíž záření vhodným zařízením filtruje. Gentil v krátkém článku přináší znázornění, jak postupovalo zkoumání elektromagnetických vln v posledních 20 letech a jak rychle neprozkoumané intervaly mizely. Mayer v článku „Fortschritte der akustischen Meßtechnik u. musikalischen Akustik“ líčí pokroky na tomto poli fyziky a to po stránce měření energetických. Svá

měřicí zařízení popisují Ganzlin a Hermann v článcích „Zur Einführung des Stoßgalvanometers im Unterricht“ a „Zwei Spiegelmagnetometer“. Adler má tu popis svého zařízení pro měření zrychlení zemské tíže. Lampe pak článek „Zur Mathematik der Wurfübungen im Geländesport“ o hodu kulí a kladivem. Engel: „Die lebendige Reibung“, v němž se zabývá úkazem postranního smyku po náhlém zabrzdění auta, což by jistě zajímalo i naše studenty. Při vyučování by se také hodil článek Weinrauchův „Attische Wasseruhren u. ihre Mathematik“ v němž se vyšetřuje tvar nádoby. Aparaturu k znázornění vztahu síly, hmoty a urychlení popisuje Kahra. Také obsah Müllerova článku „Die stabilisierende Wirkung der V-förmig gestellten Tragflügel eines Flugzeuges“ by naše studenty, kteří mají zájem o letectví, zajímal. Petry má tu krátké sdělení „Ein Beitrag zur exakten Behandlung der schiefen Ebene auf der Schule“, v němž odvozuje velikost síly jako výslednici tíže a pevnosti roviny.

Z chemie je tu Herrmannův článek, jak provést při vyučování nebo v žákovském praktiku důkaz Hesseova zákona.

Metodickými hledisky se zabývá Balser v článku „Spiegelungen“ a Dreetz v „Gruppenbegriff u. Abbildung im mathem. Unterricht“, jež náleží v okruh ankety redakce o zavedení pojmu grupy, jež počala již v minulých dvou ročnících. Další článek toho druhu jest Seyfarthův „Zum Unterricht in der Infinitesimalrechnung“, jež obhajuje nutnost jeho ponechání na střední škole proti opačným míněním, jež se v Německu vyskytla. Reinhardt doporučuje začínati inf. počet na střední škole počtem integrálů a ukazuje jak, v článku „Zur Behandlung der Integralrechnung auf der Schule“.

Psychologického rázu jest Herbstovo pojednání „Über mathematische Begabung u. Erziehung“, v němž se praví, že není zvláštních částí mozku pro matematické nebo jazykovědné myšlení; matematika nečiní menších nároků na paměť nežli učení řeči; jest omyl, že by bylo možno zapomenutou matematickou poučku snadno opět si odvoditi; vědomí naprosté (lückenlos) souvislosti jest spíše na překážku zapamatování; po stránce citové jest učení řečem ve výhodě; matematika je prý odkázána zcela na mechanickou paměť a proto se brzy zapomíná; logické myšlení není zvláštní intelektuální nadání, nýbrž jest funkcí pílě, vytrvalosti a svědomitosti a záleží na charakteru. Rose v článku „Der Grundriß eines organischen mathematischen Bildungsplans“ se snaží vybudovati jej na zásadách německého národního socialismu a žádá, aby se stejnoměrně pěstovala abstraktní matematika i její aplikace. Hamel pluje plnými plachtami v modním dnes směru v Německu článkem „Die Mathematik im Dienste des dritten Reiches“. Tím více další autorové píšící o biologii; jest tu viděti že výstrelky přemrštěnců, kteří by chtěli předkládati své fantasie žactvu, dělají hodně starosti střízlivým lidem. Do okruhu této ideologie náleží také Högrehboho článek: „Altnordische Beobachtungs- u. Meßkunst an der Sonnenbahn“ a nemá k němu, myslím, daleko Lietzmann s článkem „Geometrie und Urgeschichte“.

V referátech o schůzích je zajímavé, že se redakce staví proti návrhům německého výboru pro technické školství na odstranění inf. počtů ze střední školy. Na 36. valné schůzi společnosti pro podporování přírodovědného vyučování je s velikou pozorností přijat projev říšského ministra války. Rothe tu přednášel o matematice a vojenské vědě. Jednalo se tam také o vytvoření německého matematického názvosloví, jehož návrh časopis přináší.

Jos. Vavřinec.

C. Původní publikace československých matematiků a fyziků.

- F. Bouchal-V. Dolejšek:** Sur l'application de la méthode de Valouch pour mesurer les constantes des réseaux cristallines à la méthode de précision de Kunzl et Köppel. C. R. **199** (1934), 1054.
- V. Dolejšek:** Sur une modification de la loi de Moseley. Acta Polonica **2** (1934), 439.
- V. Dolejšek-A. Němejcová:** Sur l'inversion photographique due à l'action simultanée de deux rayonnements différents. C. R. **198** (1934), 2081.
- V. Dolejšek-J. M. Bačkovský:** The *L*-emission Spectrum of Argon. Nature **136** (1935), 643.
- V. Dolejšek-M. Hylmar:** Sur la structure fine de la discontinuité d'absorption *L_{III}* des terres rares. C. R. **201** (1935), 600.
- V. Dolejšek-J. M. Bačkovský:** Occurrence of the reversed absorption edges of the long wave lengths of X-rays. Nature **136** (1935), 836.
- V. Dolejšek-J. Marek:** Über die *L*-Absorptionskanten des Protactiniums. Zeitschr. f. Phys. **97** (1935), 70.
- T. Gajdoš:** Akustická měření na píšťalách metodou interferenční. Spisy přírod. fak. Masar. univ. čs. **218** (1935), str. 1—12.
- Z. Kopál:** Über den Lichtwechsel von *γ* Herculis. Astr. Nachr. **257** (1935), 11.
- Z. Kopál:** Über die Atmosphären der Planeten. Astr. Nachr. **257** (1935), 129.
- V. Kunzl:** K-series of Magnesium and Sodium. Nature **136** (1935), 437.
- V. Kunzl:** Sur une nouvelle méthode de focalisation dans la spectrographie des rayons X. C. R. **201** (1935), 656.
- V. Kunzl-J. B. Slavík:** Anwendung eines neuen Ventiles bei Strömungen der Gase durch einen Spalt. Annal. der Phys. **24** (1935), 409.
- V. Kunzl:** Sur l'étude de l'absorption des rayons X dans l'anticathode du tube ionique à tension basse. Acta Polonica **2** (1934), 447.
- V. Kunzl-Z. Köppel:** Une méthode nouvelle pour mesurer les constantes cristallines. Journ. de Phys. **5** (1934), 145.
- V. Kunzl-J. B. Slavík:** Ventil für feine Regulierung der Drücke von Gasen und seine Anwendung für Ionenröhre. Zeitschr. f. techn. Phys. **16** (1935), 272.
- F. Link:** Sur les éclipses de satellites de Jupiter. C. R. **200** (1935), 2063.
- F. Link:** Sur la structure et la composition de la haute atmosphère. Journ. des Observ. **18** (1935), 113.
- A. Záček a V. Petržílka:** Klínové piezoelektrické resonátory. Elektrotechn. obzor, **24** (1935), 687.
- A. Záček a V. Petržílka:** Über keilförmige piezoelektrische Resonatoren. Ztschr. f. Hochfrequenztechnik u. Elektroakustik, **46** (1935), 157.
- Autoři studovali kmity klínových piezoelektrických resonátorů a ukázali — na rozdíl od dosavadních představ — že takové resonátory neúčinkují jako pásmový filtr, nýbrž že kmitají jako samostatný oscilační systém v řadě diskretních vlastních frekvencí.

SPOLKOVÝ VĚSTNÍK.

Zápis o řádné valné schůzi JČMF

konané dne 9. prosince 1935 v posluchárně fyzikálního ústavu Karlovy university v Praze.

Místopředseda v. š. r. PETÍRA zahajuje schůzi v 17h 30m za přítomnosti 34 členů. Omluvili se prof. BYDŽOVSKÝ, vl. r. ČERVENKA, prof. PETR, prof. VALOUCH, prof. VYČICHLO a prof. ŽÁČEK. Od čtení protokolu minulé valné schůze bylo upuštěno, ježto byl otištěn ve spolkovém věstníku.

Místopředseda vzpomíná zemřelých členů Jednoty: čestných a zakládajících členů A. PLESKOTA a V. POSEJPALA, skutečných členů L. BAHNÍKA, V. FISCHERA, B. HOBZKA, E. KLEINA, V. NEJDLA, O. OTTISE, J. PAZDÍRKA, H. SECHOVSKÉHO, J. ŠEDA, V. TVRDEHO, činného člena K. JANOVSKÉHO, kterýžto projev vyslechli přítomní stojíce.

Ředitel dr. VALOUCH doplňuje tištěnou výroční zprávu některými poznámkami, zejména o učebnicích, Rozhledech (počet odběratelů stoupl proti loni o 546) a o závěrečných účtech. Doc. dr. TRUKSA upozorňuje na přílišné horko a nedostatečné osvětlení v čítárně.

Za kontrolující komisaře navrhuje prof. dr. LENZ, aby bylo uděleno absolutorium výboru a jemu poděkováno, což bylo schváleno jednomyslně.

Volby byly provedeny na návrh prof. dr. KOŘÍNKA aklamací, proti níž nebylo námitek. Zvoleni byli jednomyslně podle kandidátní listiny: ředitelem VALOUCH, členy výboru (na 3 roky) HRDLÍČKA, HRUŠKA, KÖSSLER, RYCHLÍK, ŠMOK, ŠTĚPÁNEK, ZÁVIŠKA, (na 1 rok) VYČICHLO, náhradníky TEPLÝ, LEHAR, RÖSSLER, ZACHOVAL, KREJČÍ, PROCHÁZKA, kontrolujícími komisaři LENZ, ŠALAMON, ŠRÚTEK, členem fyzikální sekce vědecké rady BŘEZINA (na 1 rok místo resignovavšího prof. FRIEDRICHA).

Ježto volných návrhů nebylo, končí místopředseda valnou schůzi v 18h 10m.

Výbor JČMF pro správní rok 1935/36 se skládá z těchto členů:

Předseda: LADISLAV ČERVENKA, vládní rada v Praze (do konce r. 1936).

Místopředseda: STANISLAV PETÍRA, vrchní školní rada v. v. v Praze (1936).

Ředitel: dr. MILOSLAV VALOUCH, sekční šéf v. v. v Praze (1938).

Pokladník: dr. BOHUMIL BYDŽOVSKÝ, profesor university Karlovy v Praze (1937).

Jednatel: dr. MILOŠ KÖSSLER, profesor university Karlovy v Praze (1938).

Knihovníci: dr. FRANTIŠEK ZÁVIŠKA, profesor university Karlovy v Praze (1938);

dr. JAN BŘEZINA, profesor reál. gymnasia v Praze (1937);

dr. KAREL RYCHLÍK, profesor vys. učení techn. v Praze (1938);

dr. VIKTOR TRKAL, profesor university Karlovy v Praze (1937).

Účetní správce: dr. JOSEF ŠTĚPÁNEK, vrchní školní rada v Praze (1938).

Archivář: dr. MIKULÁŠ ŠMOK, ředitel reálky v Praze (1938).

Zapisovatel: dr. ALOIS WANGLER, profesor reál. gymnasia v Praze (1937).

Bez zvláštní funkce: dr. JOSEF HRDLÍČKA, docent vys. učení techn. v Praze (1938);

dr. VÁCLAV HRUŠKA, profesor vys. učení techn. v Praze (1938);
 VÁCLAV INGRIS, profesor reál. gymnasia v Praze (1936);
 dr. VOJTĚCH JARNÍK, profesor university Karlovy v Praze (1937);
 ing. dr. RUDOLF KUKAČ, profesor vys. učení techn. v Praze (1937);
 dr. BOHUSLAV MAŠEK, místoředitel st. hvězdárny v Praze (1936);
 dr. FRANTIŠEK NACHTIKAL, prof. vys. učení techn. v Praze (1936);
 dr. FRANTIŠEK NUŠL, ředitel hvězdárny v Praze (1937);
 dr. KAREL PETR, profesor university Karlovy v Praze (1936);
 dr. FRANTIŠEK VÝČICHLO, profesor reálky v Praze (1936);
 dr. AUGUST ŽÁČEK, profesor university Karlovy v Praze (1936);
 JOSEF ŽDÁREK, profesor st. průmyslové školy v Praze (1937).

Náhradníci (na rok 1935/36):

STANISLAV TEPLÝ, profesor reál. gymnasia v Praze;
 dr. FRANTIŠEK LEHAR, profesor reál. gymnasia v Praze;
 dr. KAREL RÖSSLER, profesor reál. gymnasia v Praze;
 dr. LADISLAV ZACHOVAL, asistent vys. učení techn. v Praze;
 ZDENĚK KREJČÍ, posluchač university Karlovy v Praze;
 FRANTIŠEK PROCHÁZKA, posluchač vys. učení techn. v Praze.

Kontrolující komisaři (na rok 1935/36):

dr. VÁCLAV LENZ, profesor vys. učení technického v Praze;
 dr. BEDŘICH ŠALAMON, profesor university Karlovy v Praze;
 JAN ŠRŮTEK, profesor reál. gymnasia v. v. v Praze.

Vědecká rada. Členové sekce matematické (do konce r. 1936):

dr. VLADIMÍR HEINRICH, profesor university Karlovy v Praze;
 dr. EMIL SCHOENBAUM, profesor university Karlovy v Praze;
 dr. JAN VOJTĚCH, profesor vys. učení technického v Praze;
 dr. VOJTĚCH JARNÍK jakožto delegát výboru.

Členové sekce fyzikální (do konce r. 1936):

dr. JAN BŘEZINA, profesor reál. gymnasia v Praze;
 dr. VÁCLAV DOLEJŠEK, profesor university Karlovy v Praze;
 dr. MILOSLAV A. VALOUCH, profesor vys. učení techn. v Praze;
 dr. FRANTIŠEK NACHTIKAL jakožto delegát výboru.

Zprávy členských schůzí.

Matematická sekce vědecké rady pořádala tyto schůze:

Dne 7. listopadu 1935 přednášel prof. dr. VLADIMÍR KOŘÍNEK: Dílo Emmy Noetherové. Obsah přednášky byl uveřejněn v článku otištěném v tomto ročníku Časopisu, str. D 1.

Dne 16. ledna 1936 přednášel doc. dr. OTOMAR PANKRAZ: O rovnici pro výrobní rychlost.

Přednášející vychází ze své práce Zum Problem der Massenfabrication, Aktuárské vědy, 5 (1935), 34—47, a odvozuje nová kriteria pro pomocné funkce problému výroby s respektováním výrobních zásob. Dále hledá stacionární stavy pro tento problém. Jedna část přednášky bude uveřejněna německy v Aktuárských vědách, druhá část pak anglicky v americkém čas. Econometrica.

Fyzikální sekce vědecké rady pořádala tyto schůze:

Dne 22. října 1935 přednášel prof. dr. FRANTIŠEK LINK: Zatmění měsíčků Jupiterových a jeho atmosféra.

Atmosféry planet se projevují jednak při zákrytech stálé odchýlkou paprsků a jejich absorpcí, jednak zatmíváním kotoučku k okraji planety a konečně selektivní absorpcí ve spektru planety. Při zákrytech stálé jest

odchylka paprsků velmi nepatrná, ježto přicházejí v úvahu jen nejvyšší části atmosféry. Mnohem citlivější jest měření zeslabení světla stálice, jež má původ hlavně v refrakci. Takto se dají odvoditi některé konstanty charakterisující vnější atmosféru.

Na případ zákrytu se dají převést zatmění měsíčků Jupiterových. Jak plyne z měření Eropkinových jasnost zatmívajícího měsíčku počne klesati dosti daleko od hranic stínu Jupiterova. Vliv atmosféry v takových výškách jest zanedbatelný. Jde spíše o absorbující vrstvu koncentrovanou částečně v rovníkové rovině ve výši 10% až 5% poloměru a absorbující asi 7% až 5% dopadajícího světla. O složení této vrstvy se nedá dosud ničeho říci. Analogický případ se vyskytuje při výkladu některých zjevů ve vysoké atmosféře zemské a Martově.

Dne 5. listopadu 1935 přednášeli dr. VILÉM KUNZL a Ing. JOSEF B. SLAVÍK (Spektroskopický ústav Karlovy university): Proudění plynu šterbinou za vyšších tlaků. (Přednesl Ing. Slavík.)

Přednášející podává aplikace nového ventilu pro regulaci velmi malých tlaků plynu (o kterém bylo zde referováno dne 5. března 1935) při studiu proudění plynu šterbinou za vyšších tlaků. Své experimentální výsledky porovnává s hodnotami teoretickými a sice vyšetřuje, do jaké míry platí vztahy odvozené pro t. zv. skluzový člen v Poiseuilleově rovnici. Rozborem této rovnice ukazuje možnost stanovení šířky šterbiny z naměřených výsledků nezávisle na skluzovém členu. Na základě toho určuje šířku šterbiny dostatečně přesně a jednoduše ze směrnice průběhu hodnot G jako funkce středního tlaku p . Z výsledků měření určuje dále spodní tlakovou mez, pro kterou ještě platí Poiseuilleho rovnice při proudění plynu šterbinou. Pod touto spodní tlakovou mezí byla nalezena v průběhu hodnot G v tomto tlakovém oboru dosud nepozorovaná maxima, která s klesajícím středním tlakem p mizí.

Dne 5. listopadu 1935 přednášel dr. VILÉM KUNZL: K -serie sodíku, hořčíku a hliníku a nové výsledky v N -serii X -spekter.

Přednášející referoval o výsledcích dosažených v K -serii Na, Mg a Al za použití iontové trubice pro nízké napětí ve spojení s fokusační metodou jím vypracovanou, o níž již dříve zde referoval. Za tohoto experimentálního uspořádání podařilo se autoru jednak některé linie nalezené již jinými autory u Mg a Al sledovati až k Na, na př. v α -grupě linie α_7 a α_8 , jednak nalézt u těchto prvků některé další linie dosud ještě neznámé. Tak v α -grupě na př. dublet $\alpha_{13}\alpha_{14}$, v β -grupě linie β_{VI} , β_{VII} a β_{VIII} . Vedle těchto linií, které klasifikoval, vystoupily linie, o jichž příslušnosti na podkladě dosavadního experimentálního metriału nebylo možno rozhodnouti.

Dne 19. listopadu 1935 přednášel SWAMI INANANANDA: Nové výsledky v přesném měření X -spekter. (Anglicky.) Vyšlo současně v Časopise 65, 97, 1936.

Dne 3. prosince 1935 přednášel JINDŘICH M. BAČKOVSKÝ: O emisním spektru argonu a o absorpčních hranách v dlouhovlnném oboru paprsků X .

K získání emisních spekter inertních plynů udal autor metodu užitím iontové trubice konstrukce prof. Dolejška a Dr. Kunzla, vypracováním vhodných experimentálních podmínek udržení správného charakteru výboje pro vznik X -spekter. Tímto způsobem našel hlavní linky L -spektra argonu, L_I a L_{II} (viz Nature, říjen 1935).

Při vpouštění argonu se objevilo velmi silné rozprašování, takže vystoupily i linky vápníku ze skla, což přispělo ke správné identifikaci obrácení absorpční hrany draslíku z fotografické desky. Množství draslíku ve fotografické desce postačující pro absorpci vypočítal přednášející podle Jöns-sona. Toto množství draslíku dokázal doc. Brdička polarografickou analýsou. Tímto výsledkem je dokázána existence obrácení absorpční hrany draslíku

z fotografické desky a změřena jeho absorpční hrana dosud neměřená. (Viz Nature, listopad 1935.)

Dále autor diskutoval další obrácené absorpční hrany v ultraměkkém oboru X-paprsků, kde jednak potvrdil, jednak opravil výsledky dosažené Dolejškem a Janíčkem, při čemž vysvětlil rozpor identifikace absorpční hrany stříbra v práci Prinsové a Takensové a vysvětlil a identifikoval rovněž absorpční bílou linii nalezenou Siegbahnem a Magnussonem v okolí 115 Å.

Slovenské učebnice podle osnov z r. 1933.

ARITMETIKA

- I. tř. střed. škol: Červenka - Bučan, Aritmetika, I., 3. v., 12,20 (163)
- II. tř. střed. škol: Červenka - Bučan, Aritmetika, II., 3. v., 14,80 (164)
- III. tř. střed. škol: Červenka - Bučan, Aritmetika, III., 2. v., 11,— (165)
- IV. tř. střed. škol: Bydžovský - Teplý - Vyčichlo - Ondruš, Aritmetika, IV., 2. v., 12,60 (160)
- V.-VII. tř. střed. škol: Bydžovský - Teplý - Vyčichlo - Fischer, Aritmetika, V.-VII., 2. v., připravuje se (161)

GEOMETRIE

- I. tř. střed. škol: Valouch - Špaček - Říman, Meroveda, I., 3. v., 8,40 (169)
- II. tř. střed. škol: Valouch - Špaček - Říman, Meroveda, II., 3. v., 7,60 (170)
- III. tř. střed. škol: Valouch - Špaček - Říman, Meroveda, III., 3. v., 7,40 (171)
- IV. tř. střed. škol: Vojtěch - Bučan, Geometria, IV., 2. v., 11,60 (174)
- V. tř. g. vš. typů: Vojtěch - Vanovič, Geometria, V. g., 2. v., připravuje se (175)
- r.: Vojtěch - Vanovič, Geometria, V. r., 2. v., připravuje se (181)
- VI. tř. g. vš. typů: Vojtěch - Vanovič, Geometria, VI. g., připravuje se (176)
- r.: Vojtěch - Vanovič, Geometria, VI. r., připravuje se (182)
- VII. tř. g. a r. g.: Vojtěch - Vanovič, Geometria, VII. g., 13,60 (177)
- r. a r. r. g.: Vojtěch - Vanovič, Geometria, VII. r., 20,— (183)
- VIII. tř. r. r. g.: Vojtěch - Vanovič, Geometria, VII. r., 20,— (183)

DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE A RÝSOVÁNÍ

- III. tř. g. a r. g.: Klíma - Ingriš - Říman, Rysovanie, g., 8,80 (172)
- r. a r. r. g.: Klíma - Ingriš - Říman, Rysovanie, r., 10,80 (173)
- IV. tř.: *tytéž*
- VII.-VIII. tř. r. g. Klíma - Ingriš - Fischer, Deskript. geometria, r. g., a r. r. g.: připravuje se (168)

FYZIKA

- III.-IV. tř. stř. škol: Petíra - Šmok - Říman, Fyzika, 3. v., 30,— (167)
- VI. tř. r.: Devorecký - Šmok - Fischer, Fyzika, I., v tisku (179)
- VII. tř. g. vš. typů: *táž*
- r.: Devorecký - Šmok - Fischer, Fyzika, II., připravuje se (180)
- VIII. tř. g. vš. typů: *táž*

V závorce je uvedeno orientační číslo učebnice. Prosíme, aby při každé objednávce bylo číslo to uvedeno, neboť se tím zabrání omylu. Scházějící učebnice dlužno zatím nahradit českými.