Poznámka k teorii křivek kaustických.

Zdeněk Pírko, Praha.

1. Vrcholným bodem metricko-analytické teorie křivek kaustických jest známá věta *Queteletova-Gergonneova,*[1]) která praví: Kaustika B (zrcadlící nebo lámavé) křivky Γ pro takové paprsky, které se dotýkají křivky A (čili jsou normálami jiné křivky A', evolventy to křivky A), jest evolutou sekundární kaustiky B'. Sekundární kaustika B' jest obálkou kružnic K, jejichž středy leží v incidenčních bodech na křivce Γ a které se dotýkají křivky A (v případě katakaustik), nebo mají poloměr rovný $1/\lambda$ poloměru kružnice K (v případě diakaustik); při tom zákon lomu je dán vztahem

$$\frac{\sin \nu}{\sin \nu'} = \lambda.$$

Jestliže křivka A se redukuje na bod, platí rovněž známá věta *Weyrova*[2]) pro katakaustiky: Sekundární katakaustika B' jest podoidou křivky Γ vzhledem k svítícímu bodu jako pólu. Při tom podoidou rozumíme podle *Brocarda*[3]) geom. místo bodů souměrně sdružených s daným bodem (pólem) podle všech tečen dané křivky (křivky základní). Je patrno tudíž, že podoida není nic jiného než křivka homotetická v poměru 2 : 1 k úpatnici křivky základní vzhledem k pólu.

Větou Weyrovou stává se teorie křivek katakaustických pro bodový zdroj kapitolou teorie úpatnic. V následujícím platnost věty Weyrovy, jde-li opět o bodový zdroj, rozšíříme i na případ diakaustik.

2. Budiž dána základní křivka Γ_0 s rovnicí $f(x, y) = 0$. Rovnici šikmé úpatnice pro úhel ε, Γ_1^ε (definujeme-li jistý smysl) vzhledem k počátku jako pólu obdržíme eliminací x, y z rovnic $f(x, y) = 0$ a

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{\mu}\left(\mu \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) \frac{x\,\partial f/\partial x + y\,\partial f/\partial y}{(\partial f/\partial x)^2 + (\partial f/\partial y)^2}, \\ \eta &= \frac{1}{\mu}\left(\mu \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x}\right) \frac{x\,\partial f/\partial x + y\,\partial f/\partial y}{(\partial f/\partial x)^2 + (\partial f/\partial y)^2}, \end{aligned} \tag{1}$$

($\mu = \operatorname{tg} \varepsilon$). Výsledek budiž tvaru $F(\xi, \eta) = 0$.

[1]) *Quetelet,* Démonstration et développements des principes fondamentaux de la théorie des caustiques sécondaires, Mém. Acad. Belg., V, 1829; *Gergonne,* Sur les caustiques planes, Ann. de Math., XV, 1824—1825; viz na př. *Loria,* Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven, II, 1911, str. 306 a n.

[2]) *Emil Weyr,* Über die Identität der Brennlinien mit den Evoluten der Fußpunktcurven, Zeitschrift Math. Phys., XIV, 1869, str. 376 a n.

[3]) *Brocard,* Notes de bibliographie des courbes géométriques, 1897, str. 221.

Rovnice (1) — spolu s příslušnou rovnicí pro $\frac{d\eta}{d\xi}$ — určují speciální případ *Ludwigových-Wilsonových*[4]) lineárně-kvadratických dotykových transformací s aequatio directrix tvaru

$$\Omega(\xi, \eta; x, y) \equiv \xi^2 + \eta^2 - \left(x - \frac{y}{\mu}\right) \xi - \left(\frac{x}{\mu} + y\right) \eta = 0.$$

Rovnice tato v souřadnicích ξ, η představuje kružnici

$$\left[\tfrac{1}{2}\left(x - \frac{y}{\mu}\right), \tfrac{1}{2}\left(\frac{x}{\mu} + y\right); \frac{\sqrt{1 + \mu^2}}{2\mu} r\right],$$

jdoucí pólem. Při tom r je průvodič základní křivky měřený od pólu, tudíž poloměr uvažované kružnice je ve stálém poměru k poloměrům kružnic majících středy na křivce Γ_0 a jdoucích počátkem.

Dokážeme nyní snadno, že šikmá úpatnice Γ_1^ε je obálkou kružnic $\Omega = 0$. Speciálně pro $\varepsilon = \frac{1}{2}\pi$ obdržíme známou větu *Stubbsovu*[5]) o obyčejných úpatnicích.

Hledejme dále geom. místo bodů souměrně sdružených s pólem podle bodů šikmé úpatnice Γ_1^ε. Křivku označíme $^*\Gamma_1^\varepsilon$; její rovnice jsou $^*\xi = 2\xi$, $^*\eta = 2\eta$, kde ξ, η jsou dány rovnicemi (1); nazveme ji analogicky k podoidě Brocardově šikmou podoidou křivky Γ_0. Tato křivka je tedy obálkou kružnic

$$\left(x - \frac{y}{\mu}, \frac{x}{\mu} + y; \frac{\sqrt{1 + \mu^2}}{\mu} r\right).$$

3. Tuto kružnici můžeme tedy co do velikosti identifikovati s kružnicí K z odstavce 1, položíme-li

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\sqrt{1 + \mu^2}}{\mu}, \text{ t. j. } \lambda = \sin \varepsilon. \tag{2}$$

Máme tedy hledané rozšíření věty Weyrovy ve tvaru: Sekundární kaustika B' jest šikmou podoidou křivky Γ' vzhledem k svítícímu bodu jako pólu; je-li rovnice křivky Γ tvaru $f(x, y) = 0$, přísluší jí křivka Γ' s rovnicí $f\left(x - \frac{y}{\mu}, \frac{x}{\mu} + y\right) = 0$, úhel promítání má oblouk arcsin λ, je-li λ index lomu.

Vlastní větu Weyrovu obdržíme pro $\lambda = 1$ ($\varepsilon = \frac{1}{2}\pi$, $\mu = \infty$); šikmá podoida přejde v podoidu Brocardovu, křivky Γ a Γ' splynou.

[4]) *Wilson*, Untersuchung einer linearquadratischen Berührungstransformation, 1913. (Thomas & Hubert, Weida i. Thüringen.)

[5]) *Salmon-Fiedler*, Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven, 1882, str. 390 (pozn. str. 504).