

Werk

Label: Article

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311028X_0065|log18

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

Poznámka k stejnoúhlým rovinám čtyřrozměrného prostoru.

Libuše Kučerová, Nymburk.

Dvě roviny ${}^1\varepsilon$, ${}^2\varepsilon$ v čtyřrozměrném prostoru S_4 , jejichž obě extrémní odchylky jsou si rovny, nazýváme rovinami stejnoúhlými.¹⁾ Každou přímkou čtyřrozměrného operačního prostoru S_4 , jehož úběžným prostorem je trojrozměrný eliptický prostor E_3 , lze vésti pouze dvě²⁾ roviny stejnoúhlé k pevné zvolené rovině o úběžnicích Q , Q' . Tedy úběžníkem b (na E_3) přímky, kterou roviny prokládáme, lze vésti pouze dvě úběžnice 1Q , 2Q stejnoúhlých rovin k původní dané.

V následujícím ukážeme, že úběžnice zmíněných přímkou proložených stejnoúhlých rovin čtyřrozměrného prostoru S_4 jsou ve vzájemném vztahu s Cliffordovými³⁾ rovnoběžkami eliptického trojrozměrného prostoru E_3 (vedenými bodem k přímce).

I. Základem E_3 jest reálný polární prostor imaginární plochy druhého řádu. V obrázku zvolena imaginární plocha kulová, jejíž představitelkou jest reálná koule o středu s , dotýkající se půdorysny π .

Úloha: Bodem k vedme obě možné Cliffordovy rovnoběžky k volené přímce Y .

Z bodu k vedeme příčku K (elipticky kolmici) k Y a její absolutní poláre Y' . Kolmice K protíná přímky Y , Y' v bodech e , 1e a její absolutní polára K' v bodech c , 1c . Od bodu c na K' nanese se pak „elipticky“ na obě strany délku ke do cm nebo do cn . Spojením bodu k s koncovými body m resp. n obdržíme již obě Cliffordovy rovnoběžky M , N z bodu k k Y , Y' .

Avšak přenést v eliptickém prostoru délku ek z K na K' od c ⁴⁾ znamená, nalézt na K' takový bod m , aby

$$(\xi_i, {}^1\xi_i; ek) = (\xi'_i, {}^1\xi'_i; cm). \quad (1)$$

Při tom $\left\{ \begin{matrix} \xi_i, {}^1\xi_i \\ \xi'_i, {}^1\xi'_i \end{matrix} \right\}$ jsou absolutní elementy na $\left\{ \begin{matrix} K \\ K' \end{matrix} \right\}$.

Rovnice (1) však předpokládá projektivnost řad

$$K(\xi_i, {}^1\xi_i, e, k, \dots) \pi K'(\xi'_i, {}^1\xi'_i, c, m, \dots),$$

¹⁾ Josef Klíma: „K určení úhlu dvou rovin v prostoru čtyřrozměrném a některé úlohy s tím související.“ Časopis M. F., 62 (1933), str. 132—139.

²⁾ H. de Vries: „Die Lehre von der Zentralprojektion im vierdimensionalen Raume“, str. 70.

³⁾ Bonola-Liebmann: „Die nichteuklidische Geometrie“, str. 199.

⁴⁾ Václav Hlavatý: „Úvod do neeuklidovské geometrie“, str. 97. Přenos délek v hyperbolické rovině. — Zde úlohu provádíme v eliptickém prostoru.

v nichž známe $\xi_i, {}^1\xi_i, e, k, \xi'_i, {}^1\xi'_i, c$. Hledáme m následujícím způsobem:

Projektivní řady na K a K' (jichž skutečné délky získáme sklopením do 0K a ${}^0K'$) učiníme perspektivními v rovině tak, aby střed perspektivity byl v jednom γ neb druhém γ' středu, z nichž se promítá⁵⁾ absolutní involuce, určující dvojčinu absolutních elementů $\xi_i, {}^1\xi_i$ na K , do absolutní involuce, určující základní elementy $\xi'_i, {}^1\xi'_i$ na K' . Při tom $e \equiv c$ necht' je samodružným bodem obou perspektivních řad. Hledané středy γ, γ' budou tedy na spojnici přidružených bodů ${}^1e, {}^1c$.

Absolutní involuce na K ($\xi_i, {}^1\xi_i$), obsahuje bodové páry e^1e, f^1f, h^1h ; involuce na K' ($\xi'_i, {}^1\xi'_i$) páry c^1c, r^1r, l^1l . Body jednotlivých párů si odpovídají tak, že na př. volenému f na K (v rovině rovnoběžné s nárysnou středem koule s) přísluší průsečík l^1 jeho antipolární roviny $\varepsilon^\times$ (kolmé k ν) s K ($\varepsilon^\times_2 \equiv K'_2$).

Obě absolutní involuce na sklopených 0K a ${}^0K'$, určené dříve zmíněnými bodovými páry (při čemž involuce bodová ze sklopeného ${}^0K'$ jest přenesena do K'_0 tak, že ${}^0e \equiv c_0$), promítneme paprskovými involucemi ze středu 1s na kružnici Ω , jím jdoucí. Střed absolutní involuce na 0K je η , na K'_0 δ . Pár dělicí harmonicky $\left\{ \begin{smallmatrix} {}^0e, {}^1e \\ c_0, {}^1c_0 \end{smallmatrix} \right\}$ na $\left\{ \begin{smallmatrix} {}^0K \\ K'_0 \end{smallmatrix} \right\}$ a náležící tedy absolutní involuci o dvojných bodech $\left\{ \begin{smallmatrix} {}^0e, {}^1e \\ c_0, {}^1c_0 \end{smallmatrix} \right\}$ a středu $\left\{ \begin{smallmatrix} \eta' \\ \delta \end{smallmatrix} \right\}$ jest $\left\{ \begin{smallmatrix} {}^0a, {}^0a' \\ b_0, b'_0 \end{smallmatrix} \right\}$. Pak jsou v průsečících $\left\{ \begin{smallmatrix} \gamma \equiv \\ \gamma' \equiv \end{smallmatrix} \right\}$ $\equiv ({}^0ab'_0, {}^0a'b_0)$ oba středy (na ${}^1e^1c_0$), z nichž se promítá jedna involuce ve druhou a tedy i (${}^0\xi_i, {}^1\xi_i, {}^0e, {}^0k$) do ($\xi'_i, {}^1\xi'_i, c_0, \left\{ \begin{smallmatrix} m_0 \\ n_0 \end{smallmatrix} \right\}$).

Bod m_0 perspektivně přidružený bodu 0k získáme promítnutím 0k ze středu γ . Přemístíme-li obě perspektivní čtveřiny (${}^0\xi_i, {}^1\xi_i, {}^0e, {}^0k$) a ($\xi'_i, {}^1\xi'_i, c_0, m_0$) zpět na K a K' v prostoru, dostaneme:

$$(\xi_i {}^1\xi_i ek) = (\xi'_i {}^1\xi'_i cm).$$

Tato rovnice, dřívější (1), však definuje elipticky rovnost

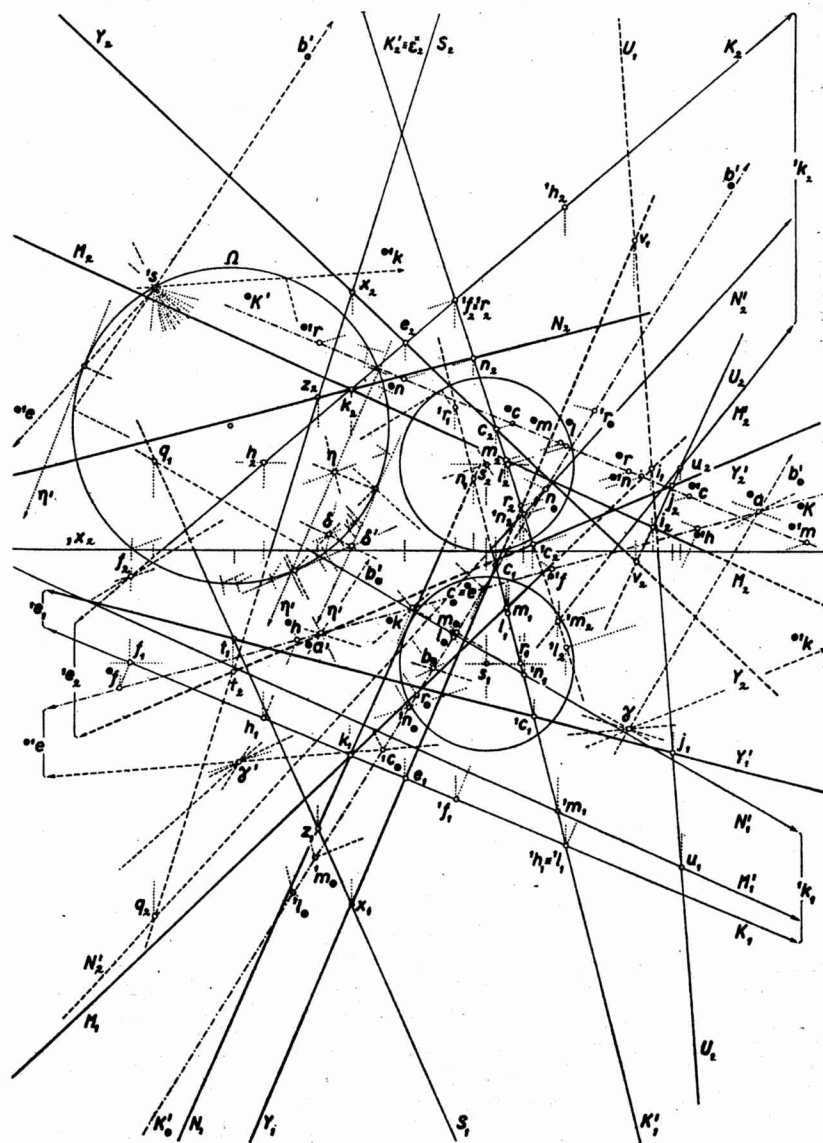
$$ek = cm.$$

Promítneme-li 0k z druhého středu γ' perspektivity, dostaneme na K'_0 bod n_0 té vlastnosti, že zase elipticky

$$ek = nc.$$

Úsečky $\left\{ \begin{smallmatrix} c_0 m_0 \\ n_0 c_0 \end{smallmatrix} \right\}$ přeneseme z překlopení do průmětů a spojením

⁵⁾ Eduard Weyr: „Projektivná geometrie základních útvarů prvního řádu“, str. 135.



$\left\{ \begin{matrix} km \\ kn \end{matrix} \right\}$ dostaneme obě Cliffordovy rovnoběžky $\left\{ \begin{matrix} M \\ N \end{matrix} \right\}$ k Y, Y' . Absolutní poláry M', N' , vycházejíce z 1k absolutně přidruženého ke k na K , procházejí body 1m a 1n sdruženými v absolutní involuci δ

na K' vůči m, n . Body ${}^1m_0, {}^1n_0$ na K'_0 jsou vlastně průměty bodu ${}^{01}k$ ze středů γ a γ' na K'_0 .

Pro kontrolu rovnoběžnosti (hyperboloidické polohy) rovnoběžek Y, Y' $\left\{ \begin{matrix} M, M' \\ N, N' \end{matrix} \right.$ jsou vedeny v obrázku: přímka $\left\{ \begin{matrix} U \\ S \end{matrix} \right.$ z bodu $\left\{ \begin{matrix} i \\ z \end{matrix} \right.$ na $\left\{ \begin{matrix} M \\ N \end{matrix} \right.$, jež protíná Y, Y' $\left\{ \begin{matrix} M' \\ N' \end{matrix} \right.$ postupně v bodech $\left\{ \begin{matrix} v, j, u \\ x, t, q \end{matrix} \right.$.

II. Uvažujme nyní perspektivu čtyřrozměrného prostoru! Jsou-li v S_4 dvě roviny ε a ${}^1\varepsilon$ stejnoúhlé,⁶⁾ mají jejich úběžnice $Q, {}^1Q$ i normálovinové úběžnice $Q', {}^1Q'$ hyperboloidickou polohu. Pak jsou si rovny oba dvojpoměry $(aa'bb')$ a $(a \times a' \times b \times b')$, které tvoří průsečíky zmíněných čtyř úběžnic s oběma v obecném případě možnými jejich absolutně sdruženými transversálami Q^v, Q^v .⁷⁾ Úběžnice Q, Q' pevné roviny protínají transversály $\left\{ \begin{matrix} Q^v \\ Q^v \end{matrix} \right.$

v párech $\left\{ \begin{matrix} aa' \\ a \times a' \end{matrix} \right.$, absolutní involuce na $\left\{ \begin{matrix} Q^v \\ Q^v \end{matrix} \right.$.

Stejnoúhlé roviny povedeme v prostoru S_4 přímkou, jejíž úběžník nechť je zvolený bod b na Q^v . Tím jdou již obě možné úběžnice ${}^1Q, {}^2Q$ rovin stejnoúhlých k pevné rovině o úběžnicích Q, Q' . Absolutní poláry (Normalebenenflüchtlinien) ${}^1Q', {}^2Q'$ procházejí bodem b' , absolutně sdruženým k b na Q^v .

Na druhé přímce Q^v hledáme takový pár absolutně sdružených bodů $b \times b \times'$ (je možný ještě druhý pár $b \times \times b \times \times'$), aby $(aa'bb') = (a \times a' \times b \times b \times')$.

Pak spojnice

$$\begin{cases} bb \times \equiv {}^1Q & b'b \times' \equiv {}^1Q' \\ bb \times \times \equiv {}^2Q & b'b \times \times' \equiv {}^2Q' \end{cases}$$

jsou již úběžnicemi stejnoúhlých rovin $\left\{ \begin{matrix} {}^1\varepsilon \\ {}^2\varepsilon \end{matrix} \right.$ a mají hyperboloidickou polohu s Q, Q' .

$\alpha)$ V díle Vriesově jsou páry $b \times b \times' - b \times \times b \times \times'$ hledány způsobem, který, jak ukážeme v odstavci $\beta)$, je vlastně sestrojováním Cliffordových rovnoběžníků v eliptické geometrii (čili je eliptickým přenosem délky ab z Q^v do $a \times b \times$ neb v druhou stranu $a \times b \times \times$ na Q^v).

Ke každému bodu p na Q^v je sestrojen jednak jemu přidružený p' v absolutní involuci a za druhé bod $p \times$ přidružený tak, aby

$$(a \times a' \times pp \times) = (aa'bb').$$

Body $p \dots$ a $p \times \dots$ tvoří na Q^v dvě projektivní řady bodové s dvojnými body $a \times, a \times'$. Jsou tedy prostřednictvím bodů $p \dots$

⁶⁾ H. de Vries: „Die Lehre von der Zentralprojektion im vierdimensionalen Raume“, str. 66.

⁷⁾ Kadeřávek-Klíma-Kounovský: „Deskriptivní geometrie“, II. díl, str. 946.

projektivní i řady:

$$p' \dots \pi p^\times \dots$$

Volíme-li na Q^ν takový bod $p \equiv b^\times$, aby jemu odpovídající p' v absolutní involuci i $p^\times$ v řadě o dvojných bodech $a^\times, a^{\times'}$ splývaly v jediném $b^{\times'}$, pak tento je dvojným bodem řad $p' \dots \dots \pi p^\times \dots$.

Dvojina $b^\times b^{\times'}$ je párem absolutní involuce na Q^ν a vyhovuje zároveň podmínce

$$(a^\times a^{\times'} b^\times b^{\times'}) = (aa'bb'). \quad (2)$$

Existuje ještě druhý pár $b^{\times \times} b^{\times \times'}$ podobných vlastností jako $b^\times b^{\times'}$.

β) Abychom ukázali, že jsme ke konstrukci projektivních čtveřin (2) mohli použít eliptického přenosu délek, uvedeme je do perspektivní polohy tak, že učiníme $a \equiv a^\times$ samodružným bodem obou nyní perspektivních řad. Střed perspektivity λ, λ' jsou pak na spojnici odpovídajících bodů $a', a^{\times'}$. Pár bb' absolutní involuce na Q^ν se má promítnouti zase do páru $b^\times b^{\times'}$ absolutní involuce na Q^ν , vyhovujícího zároveň podmínce (2). Je proto nutno středy perspektivity λ, λ' na $a'a^{\times'}$ voliti v jednom neb druhém středu, z nichž se promítá absolutní involuce na Q^ν (dvojně body τ_i, τ'_i) do absolutní involuce na Q^ν (κ_i, κ'_i). Jsou pak perspektivní ($\tau_i, \tau'_i, a, a', b, b'$) a ($\kappa_i, \kappa'_i, a^\times, a^{\times'}, b^\times, b^{\times'}$). Po rozmístění tedy

$$(\tau_i \tau'_i ab) = (\kappa_i \kappa'_i a^\times b^\times),$$

čímž definována elipticky rovnost délek ab a $a^\times b^\times$. Promítáme-li z druhého středu λ' , dostaneme $ab = b^{\times \times} a^\times$.

Přenesli jsme tedy vlastně elipticky délku ab z Q^ν do $a^\times b^\times$ nebo $b^{\times \times} a^\times$ na Q^ν právě tak, jako jsme při sestrojování Cliffordových rovnoběžek k Y, Y' bodem k (v oddíle I.) přenášeli délku ke z K do cm neb v druhou stranu nc na K' . Dostáváme tudíž:

„Úběžný trojrozměrný prostor euklidovského čtyřrozměrného prostoru S_4 je eliptický prostor E_3 . Uvažujeme-li v tomto prostoru E_3 obě Cliffordovy rovnoběžky M, N vedené bodem k k dané přímce Y , pak tyto jsou úběžnicemi dvou možných stejnoúhlých rovin čtyřrozměrného prostoru S_4 , proložených přímkou (o úběžníku k) k rovině, jejíž úběžnice je přímka Y .“