Sur la stabilisation des oscillations par couplage.

Rostislav Košťál, Praha.

(Reçu le 20 novembre 1934.)

On cherche à établir des relations entre les coefficients de l'équation de mouvement pour l'élément libre et entre les autres coefficients qui entrent dans l'équation de mouvement par suite du couplage pour que les oscillations soient stables, c'est-à-dire que le couplage produise des oscillations stables.

Considérons un système de n éléments libres; les oscillations du système (stables ou non) soient données par les équations

$$a_k \ddot{\varphi}_k + b_k \dot{\varphi}_k + c_k \varphi_k = 0, \quad 1 \leqq k \leqq n.$$

Couplons les éléments du système. Puis le mouvement de l'élément de l'indice k sera donnée par les équations

$$\begin{aligned} a_k \ddot{\varphi}_k + b_k \dot{\varphi}_k + c_k \varphi_k + \sum_r{}' \, (a_{kr} \ddot{\varphi}_r + b_{kr} \dot{\varphi}_r + c_{kr} \varphi_r) + \\ + \sum_r{}' (\alpha_{kr} \ddot{\varphi}_k + \beta_{kr} \dot{\varphi}_k + \gamma_{kr} \varphi_r) = 0, \quad 1 \leqq k \leqq n, \end{aligned} \tag{1}$$

où Σ' signifie la somme pour tous les r, à l'exception de $r = k$. Les trois premiers termes représentent le mouvement de l'élément libre. On déduit l'équation ci-dessus en portant des expressions suivantes[1])

$$\left.\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} a_k \dot{\varphi}_k^2 + \tfrac{1}{2} \sum_k \sum_r{}' \, a_{kr} \dot{\varphi}_k \dot{\varphi}_r + \tfrac{1}{2} \sum_k \sum_r{}' \, \alpha_{kr} \dot{\varphi}_k^2 + \sum_k \sum_r{}' \, m_{kr} \varphi_r \dot{\varphi}_k, \\ V &= \tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k^2 + \tfrac{1}{2} \sum_k \sum_r{}' \, c_{kr} \varphi_k \varphi_r + \tfrac{1}{2} \sum_k \sum_r{}' \, \gamma_{kr} \varphi_k^2, \\ F &= \tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} b_k \dot{\varphi}_k^2 + \tfrac{1}{2} \sum_k \sum_r{}' \, d_{kr} \dot{\varphi}_k \dot{\varphi}_r + \tfrac{1}{2} \sum_k \sum_r{}' \, \beta_{kr} \dot{\varphi}_k^2, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

---

[1]) Rost. Košťál, Les vibrations des systèmes couplés. Publications de la faculté des sciences de l'université Masaryk No. 140. 1931.

où $a_{kr} = a_{rk}$, $c_{kr} = c_{rk}$, $d_{kr} = d_{rk}$, $e_{kr} = - e_{rk}$, $b_{kr} = m_{kr} - m_{rk} + d_{kr} = e_{kr} + d_{kr}$, par l'équation de Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_k} + \frac{\partial F}{\partial \dot{\varphi}_k} = 0; \; L = T - V.$$

Dans l'expression pour T il faut pour $1 \leqq k \leqq n$ $a_k \geqq 0$.

Si l'élément de l'indice k effectue l'oscillation composée définie par les équations (1), chacun parmi ces éléments libres ne doit pas forcément effectuer le mouvement harmonique, c'est-à-dire ses oscillations ne doivent pas être stables. Nous allons chercher les conditions entre les coefficients a_k, b_k, c_k et les autres coefficients de l'équation (1) qui y entrent par suite du couplage pour que l'équation (1) donne des oscillations stables, autrement dit, pour que le couplage produise des oscillations stables.

En éliminant, du système de n équations (1), les variables $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{k-1}, \varphi_{k+1}, \ldots, \varphi_n$, on obtient l'équation différentielle qui contient la variable φ_k et ses dérivées. Il s'agit alors de trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'élément k effectue des oscillations stables.

Désignons par

$$a_{kk} = a_k + \sum_r{}' \alpha_{kr}, \; b_{kk} = b_k + \sum_r{}' \beta_{kr}, \; c_{kk} = c_k + \sum_r{}' \gamma_{kr}$$

et l'équation (1) devient

$$\sum_{r=1}^{n} (a_{kr}\ddot{\varphi}_r + b_{kr}\dot{\varphi}_r + c_{kr}\varphi_r) = 0, \; 1 \leqq k \leqq n, \tag{3}$$

où la sommation est étendue sur tous les $1 \leqq r \leqq n$. Désignons les intégrales particulières de ce système des équations

$$\varphi_1 = e^{\lambda t}, \; \varphi_2 = e^{\lambda t}, \ldots, \varphi_r = e^{\lambda t}, \ldots, \varphi_n = e^{\lambda t},$$

donc

$$\dot{\varphi}_r = \lambda \varphi_r, \; \ddot{\varphi}_r = \lambda^2 \varphi_r, \; 1 \leqq r \leqq n$$

et en substituant ces quantités dans (3)

$$\sum_{r=1}^{n} (a_{kr}\lambda^2 + b_{kr}\lambda + c_{kr})\, \varphi_r = 0, \; 1 \leqq k \leqq n.$$

C'est un système de n équations homogènes à n variables. La solution est possible quand

$$\begin{vmatrix} a_{11}\lambda^2 + b_{11}\lambda + c_{11}, & a_{12}\lambda^2 + b_{12}\lambda + c_{12}, & \ldots, & a_{1n}\lambda^2 + b_{1n}\lambda + c_{1n} \\ a_{21}\lambda^2 + b_{21}\lambda + c_{21}, & a_{22}\lambda^2 + b_{22}\lambda + c_{22}, & \ldots, & a_{2n}\lambda^2 + b_{2n}\lambda + c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}\lambda^2 + b_{n1}\lambda + c_{n1}, & a_{n2}\lambda^2 + b_{n2}\lambda + c_{n2}, & & a_{nn}\lambda^2 + b_{nn}\lambda + c_{nn} \end{vmatrix} = 0;$$

d'où

$$\alpha_0\lambda^{2n} + \alpha_1\lambda^{2n-1} + \alpha_2\lambda^{2n-2} + \ldots + \alpha_{2n-1}\lambda + \alpha_{2n} = 0. \qquad (4)$$

où

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_0 &= \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \alpha_1 = \sum_{\frac{n!}{(n-1)!}} \left\{ \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1,n-1}, & b_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2,n-1}, & b_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{n,n-1}, & b_{nn} \end{vmatrix} \right\}, \\
\alpha_2 &= \sum_{\frac{n!}{(n-1)!}} \left\{ \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1,n-1}, & c_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2,n-1}, & c_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{n,n-1}, & c_{nn} \end{vmatrix} \right\} + \\
&\qquad + \sum_{\frac{n!}{(n-2)!2!}} \left\{ \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1,n-2}, & b_{1,n-1}, & b_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2,n-2}, & b_{2,n-1}, & b_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{n,n-2}, & b_{n,n-1}, & b_{nn} \end{vmatrix} \right\}, \ldots \\
\ldots \alpha_{2n-2} &= \sum_{\frac{n!}{(n-1)!}} \left\{ \begin{vmatrix} c_{11}, & c_{12}, & \ldots, & c_{1,n-1}, & a_{1n} \\ c_{21}, & c_{22}, & \ldots, & c_{2,n-1}, & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ c_{n1}, & c_{n2}, & \ldots, & c_{n,n-1}, & a_{nn} \end{vmatrix} \right\} + \\
&\qquad + \sum_{\frac{n!}{(n-2)!2!}} \left\{ \begin{vmatrix} c_{11}, & c_{12}, & \ldots, & c_{1,n-2}, & b_{1,n-1}, & b_{1n} \\ c_{21}, & c_{22}, & \ldots, & c_{2,n-2}, & b_{2,n-1}, & b_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ c_{n1}, & c_{n2}, & \ldots, & c_{n,n-2}, & b_{n,n-1}, & b_{nn} \end{vmatrix} \right\}, \\
\alpha_{2n-1} &= \sum_{\frac{n!}{(n-1)!}} \left\{ \begin{vmatrix} c_{11}, & c_{12}, & \ldots, & c_{1,n-1}, & b_{1n} \\ c_{21}, & c_{22}, & \ldots, & c_{2,n-1}, & b_{2n} \\ \vdots & & & & \\ c_{n1}, & c_{n2}, & \ldots, & c_{n,n-1}, & b_{nn} \end{vmatrix} \right\}, \\
\alpha_{2n} &= \begin{vmatrix} c_{11}, & c_{12}, & \ldots, & c_{1n} \\ c_{21}, & c_{22}, & \ldots, & c_{2n} \\ \vdots & & & \\ c_{n1}, & c_{n2}, & \ldots, & c_{nn} \end{vmatrix};
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

$\Sigma\{\}$ est la somme des déterminants (dont le nombre est indiqué à Σ) que l'on obtient en permutant les lettres a, b, c cités dans le déterminant. Désignons les racines de cette équation par λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Le nombre de racines deux à deux différentes soit ν; désignons ces racines par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$. Pour chaque $\nu + 1 \leqq \varrho \leqq 2n$ il existe un $1 \leqq \sigma \leqq \nu$ de telle propriété que $\lambda_\varrho = \lambda_\sigma$. Désignons la multiplicité de la racine λ_μ, $1 \leqq \mu \leqq \nu$ par p_μ; on a alors

$$\sum_{\mu=1}^{\nu} p_\mu = 2n.$$

La solution du système des équations différentielles (3) est donnée par les expressions

$$\varphi_k = \sum_{\mu=1}^{\nu} (C_{k,\mu,0} e^{\lambda_\mu t} + C_{k,\mu,1} t e^{\lambda_\mu t} + \ldots + C_{k,\mu,p_\mu - 1} t^{p_\mu - 1} e^{\lambda_\mu t}),$$

$$\varphi_k = \sum_{\mu=1}^{\nu} \sum_{\sigma=0}^{p_\mu - 1} C_{k,\mu,\sigma} t^\sigma e^{\lambda_\mu t}, \tag{6}$$

pour $k = 1, 2, \ldots, n$; où en général $C_{k,\mu,\sigma} \neq 0$ pour tous les k, μ, σ.

I. Quand λ_μ est réel, trois cas peuvent arriver:

1. $\lambda_\mu > 0$, puis pour $\sigma \geqq 0$ et $t \to \infty$ est $C_{k,\mu,\sigma} t^\sigma e^{\lambda_\mu t} \to \infty$,
2. a) $\lambda_\mu = 0$, puis pour $\sigma > 0$ et $t \to \infty$ est $C_{k,\mu,\sigma} t^\sigma e^{\lambda_\mu t} \to \infty$,
   b) $\lambda_\mu = 0$, puis pour $\sigma = 0$ et $t \to \infty$ est $C_{k,\mu,\sigma} t^\sigma e^{\lambda_\mu t} =$ const.,
3. $\lambda_\mu < 0$, puis pour $\sigma \geqq 0$ et $t \to \infty$ est $C_{k,\mu,\sigma} t^\sigma e^{\lambda_\mu t} \to 0$.

II. Quand la partie imaginaire de λ_μ est différente de zéro, en écrivant $\lambda_\mu = \varrho_\mu + i\omega_\mu$; trois cas peuvent se présenter de nouveau:

1. $\varrho_\mu > 0$, puis pour $\sigma \geqq 0$ et $t \to \infty$ est $C_{k,\mu,\sigma} t^\sigma e^{\lambda_\mu t} \to \infty$,
2. a) $\varrho_\mu = 0$, puis pour $\sigma > 0$ et $t \to \infty$ est $C_{k,\mu,\sigma} t^\sigma e^{\lambda_\mu t} \to \infty$,
   b) $\varrho_\mu = 0$, puis pour $\sigma = 0$ et $t \to \infty$ les oscillations arrivent,
3. $\varrho_\mu < 0$, puis pour $\sigma \geqq 0$ et $t \to \infty$ les oscillations arrivent.

Pour que les oscillations stables s'établissent, il faut que l'élongation primitive infiniment petite reste toujours infiniment petite, c'est-à-dire que les racines λ ne doivent pas être égales aux valeurs mentionnées sous 1 et sous 2a, dans le cas I de même que dans le cas II. La condition pour les oscillations stables est que les racines à la partie réelle nulle soient simples, les racines à la partie réelle négative peuvent être aussi multiples. Pour que les oscillations prennent naissance, il est nécessaire qu'au moins une racine ait la partie imaginaire différente de zéro.

Il s'agit maintenant de trouver les conditions, auxquelles doivent satisfaire les coefficients de l'équation (4) pour que ses racines satisfassent aux conditions citées ci-dessus. Nous n'avons rien supposé à l'égard des coefficients de l'équation (1), sauf qu'ils soient réels et $a_k \geqq 0$ pour $1 \leqq k \leqq n$. On ne peut donc rien dire des coefficients de l'équation (4). Supposons que le premier coefficient $\alpha \neq 0$ — en partant des puissances élevées — ait l'indice $2n - m$; divisons l'équation par ce coefficient et écrivons l'équation résultante sous la forme de

$$f(\lambda) \equiv \lambda^m + \beta_1 \lambda^{m-1} + \beta_2 \lambda^{m-2} + \ldots + \beta_m = 0, \tag{7}$$

où

$$\beta_k = \frac{\alpha_{2n-m+k}}{\alpha_{2n-m}}, \quad 1 \leqq k \leqq m.$$

Il en résulte que l'équation (7) peut avoir la racine égale à zéro qui n'est que simple. Quand l'équation (7) a la racine égale à zéro, écrivons $F(\lambda) = f(\lambda)/\lambda$, dans le cas contraire posons $F(\lambda) = f(\lambda)$; le degré de $F(\lambda)$ soit m'. Puis $F(\lambda)$ doit avoir des racines purement imaginaires exclusivement simples et des racines qui restent à partie réelle négative. Les conditions auxquelles doivent satisfaire les coefficients de l'équation donnée pour que ses racines possèdent les propriétés indiquées sont expliquées dans ma note ,,Contribution à la théorie des équations du n-ième degré.[2])"

La condition nécessaire et suffisante, pour que les racines purement imaginaires d'une équation donnée à coefficients réels

$$f(x) \equiv x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0, \tag{8}$$

$(a_n \neq 0$ et $a_\nu = 0$ pour $\nu > n)$ soient simples et que les racines qui restent aient la partie réelle négative, est

1. $a_{n-2\nu} > 0$ et ou tous les $a_{n-2\nu-1}$ positifs, ou tous égaux à zéro pour $0 \leqq \nu \leqq \left[\frac{n-1}{2}\right]$,

2. désignons par ϱ la signature de la forme quadratique

$$\sum_{\xi=1}^{\tau} \sum_{\eta=1}^{\tau} s_{\xi+\eta-2} y_\xi y_\eta, \tag{9}$$

où les s sont les sommes des puissances des racines du plus grand commun diviseur

$$d(y) \equiv d_0 y^\tau + d_1 y^{\tau-1} + \ldots + d_\tau = 0,$$

des deux polynômes $g(y) = g(x^2)$, $h(y) = h(x^2)$, l'un formé des termes aux puissances x paires, l'autre formé des termes aux puissances x impaires de l'équation (8) $f(x) = g(x) + xh(x^2)$. Il doit être

$$\Delta_\nu > 0 \text{ pour } 1 \leqq \nu \leqq n - 2\varrho,$$

où

$$\Delta_\nu = \begin{vmatrix} a_1, & a_3, & a_5, & \ldots, & a_{2\nu-1} \\ 1, & a_2, & a_4, & \ldots, & a_{2\nu-2} \\ 0, & a_1, & a_3, & \ldots, & a_{2\nu-3} \\ & & & & \vdots \\ & & & & a_\nu \end{vmatrix} {}^{3)}.$$

[2]) Časopis pro pěstování matem. a fysiky, **65** (1936), pp. 28—32.

[3]) Si la signature ϱ de la forme quadratique (9) satisfait à la condition $0 \leqq \varrho < \frac{1}{2}n$, les $n - 2\varrho$ déterminants Δ_ν pour $1 \leqq \nu \leqq n - 2\varrho$ sont positifs. Alors il faut qu'au moins un coefficient impair $a_{n-2\nu-1}$ soit positif

Les conditions de ce théorème étant satisfaites, on a $\Delta_\nu = 0$ pour $n - 2\varrho + 1 \leqq \nu \leqq n$.

Il faut y ajouter encore la condition qu'au moins une des racines soit complexe avec la partie imaginaire différente de zéro, autrement le mouvement oscillant n'aurait pas lieu. Cette condition arrive sous no 2. Alors nous allons résumer:

Pour que le système des équations différentielles (3) donne les oscillations stables, il faut et il suffit que l'équation caractéristique (7) remplisse les conditions suivantes:

1. S'il y a racine nulle, elle doit être simple. Dans ce cas introduisons la fonction $F(\lambda) = f(\lambda)/\lambda$, autrement $F(\lambda) = f(\lambda)$; désignons par m' le degré de $F(\lambda)$.

2. La signature de la forme quadratique

$$\sum_{\xi=1}^{m'} \sum_{\eta=1}^{m'} s'_{\xi+\eta-2} \lambda_\xi \lambda_\eta,$$

où s' sont les sommes des puissances des racines de l'équation caractéristique $F(\lambda) = 0$, doit être moindre que son rang au moins de 2.

3. $\beta_{m'-2\nu} > 0$ et ou tous les $\beta_{m'-2\nu-1}$ positifs ou tous égaux à zéro pour $0 \leqq \nu \leqq \left[\frac{m'-1}{2}\right]$.

4. Désignons par ϱ la signature de la forme quadratique

$$\sum_{\xi=1}^{\tau} \sum_{\eta=1}^{\tau} s_{\xi+\eta-2} y_\xi y_\eta,$$

où les s sont les sommes des puissances du plus grand commun diviseur

$$d(y) \equiv d_0 y^\tau + d_1 y^{\tau-1} + \ldots + d_\tau = 0$$

de deux polynômes, $g(y) = g(\lambda^2)$, $h(y) = h(\lambda^2)$, l'un formé des termes aux puissances x paires, l'autre formé des termes aux puissances x impaires de l'équation $F(\lambda) = 0$; $F(\lambda) = g(\lambda^2) + \lambda h(\lambda^2)$. Il doit être

$$\Delta_\nu > 0 \text{ pour } 1 \leqq \nu \leqq m' - 2\varrho,$$

---

et, par conséquence, que tous les coefficients soient positifs—c'est le théorème 2 de ma note citée ci-dessus.

Si la signature $\varrho = \frac{1}{2}n$, c'est-à-dire n est paire, le degré du plus grand commun diviseur peut être égal à $\frac{1}{2}n$, à condition que $h(x) = 0$ identiquement, c'est-à-dire que $a_{2\nu-1} = 0$ pour $1 \leqq \nu \leqq \frac{1}{2}n$. Puisque la signature est égale au degré $g(y)$, la forme quadratique (9) doit être définie positive, ce qui est équivalent à la condition 2 du théorème 1 de ma note citée ci-dessus.