Contribution à la théorie des équations du n-ième degré.

Rostislav Košťál, Praha.

(Reçu le 20 novembre 1934.)

Cette Note est destinée surtout aux lecteurs de mon article „Sur la stabilisation des oscillations par couplage“, publié dans ce recueil pp. 40—48, où j'ai besoin de deux théorèmes dont je vais donner ici la démonstration.

Dans tout ce qui suit, nous allons considérer une équation à coefficients réels

$$f(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0\,(a_0 = 1). \quad (1)$$

Pour exclure la racine zéro, nous allons supposer $a_n \neq 0$; pour simplifier la notation, nous allons poser $a_\nu = 0$ pour $\nu < 0$ et pour $\nu > n$.

Le but de cette note est la démonstration de deux théorèmes suivants:

Théorème 1. Pour que toutes les racines de (1) *soient simples et purement imaginaires, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites:*

1. $n = 2m$ *(m entier)*, $a_{2\nu} > 0$, $a_{2\nu-1} = 0$ *pour* $1 \leqq \nu \leqq m$.

2. $$\begin{vmatrix} s_0, s_1, \ldots, s_\nu \\ s_1, s_2, \ldots, s_{\nu+1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ s_\nu, s_{\nu+1}, \ldots, s_{2\nu} \end{vmatrix} > 0 \text{ pour } \nu = 0, 1, \ldots, m-1;$$

s_λ *signifie la somme des λ-ièmes puissances des racines de l'équation*

$$a_0y^m + a_2y^{m-1} + a_4y^{m-2} + \ldots + a_{2m} = 0. \quad (2)$$

Théorème 2. Soit ϱ un nombre entier, $0 \leqq 2\varrho < n$. Pour que l'équation (1) *ait 2ϱ racines simples et purement imaginaires et $n - 2\varrho$ racines dont les parties réelles sont négatives, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient remplies:*

1. *$a_\nu > 0$ pour $\nu = 0, 1, \ldots, n$.*

2. *Posons $f(x) = g(x^2) + xh(x^2)$, où $g(y)$, $h(y)$ sont des polynomes et soit $d(y)$ le plus grand commun diviseur de $g(y)$, $h(y)$; soit τ le degré de $d(y)$. Alors la signature de la forme quadratique*

$$\sum_{\xi=1}^{\tau} \sum_{\eta=1}^{\tau} s_{\xi+\eta-2} y_\xi y_\eta \tag{3}$$

(où s_λ signifie la somme des λ-ièmes puissances des racines de l'équation $d(y) = 0$) doit être égale à ϱ.

3. *En posant*

$$\Delta_\nu = \begin{vmatrix} a_1, a_3, a_5, \ldots, a_{2\nu-1} \\ a_0, a_2, a_4, \ldots, a_{2\nu-2} \\ 0, a_1, a_3, \ldots, a_{2\nu-3} \\ 0, a_0, a_2, \ldots, a_{2\nu-4} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, a_\nu \end{vmatrix},$$

on doit avoir $\Delta_\nu > 0$ pour $1 \leqq \nu \leqq n - 2\varrho$.

Remarque. Les conditions du théorème 2 étant satisfaites, on a $\Delta_\nu = 0$ pour $n - 2\varrho < \nu \leqq n$.

Citons, tout d'abord, quelques résultats connus:

A. Pour que toutes les racines de l'équation (1) soient réelles et simples, il faut et il suffit que l'on ait

$$\begin{vmatrix} s_0, s_1, \ldots, s_\nu \\ s_1, s_2, \ldots, s_{\nu+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_\nu, s_{\nu+1}, \ldots, s_{2\nu} \end{vmatrix} > 0 \text{ pour } \nu = 0, 1, \ldots, n-1,$$

s_λ étant la somme des λ-ièmes puissances des racines de l'équation (1).[1]

B. Le nombre de toutes les racines réelles *différentes*[2] de l'équation (1) est égale à la signature de la forme quadratique

$$\sum_{\xi=1}^{n} \sum_{\eta=1}^{n} s_{\xi+\eta-2} x_\xi x_\eta,$$

s_λ ayant la même signification que dans A.[3]

C. Pour que les parties réelles de toutes les racines de l'équation (1) soient négatives, il faut et il suffit que l'on ait

[1]) Voir p. ex. H. Weber, Lehrbuch der Algebra I (2ième édition 1912), p. 322.

[2]) Donc, on ne tient pas compte de la multiplicité des racines — on ne compte chaque racine (simple ou multiple) qu'une fois.

[3]) Voir p. ex. O. Perron, Algebra II (1927), p. 3.

$$\begin{vmatrix} a_1, a_3, \ldots, a_{2\nu-1} \\ a_0, a_2, \ldots, a_{2\nu-2} \\ 0, a_1, \ldots, a_{2\nu-3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots, a_\nu \end{vmatrix} > 0 \text{ pour } \nu = 1, 2, \ldots, n.^{4)}$$

D. Posons $f(x) = g(x^2) + xh(x^2)$, $g(y)$ et $h(y)$ étant des polynomes[5]; soit $d_1(x)$ le plus grand commun diviseur de $g(x^2)$, $h(x^2)$. Soit α un nombre purement imaginaire; alors, pour que l'on ait $f(\alpha) = 0$, il faut et il suffit que l'on ait $d_1(\alpha) = 0$.

Démonstration du théorème 1. Pour que toutes les racines de (1) soient purement imaginaires et simples, il faut et il suffit que l'on ait $n = 2m$ (m entier),

$$f(x) = \prod_{k=1}^{m} (x^2 + \beta_k^2),$$

les nombres $\beta_k > 0$ étant différents deux à deux. Pour cela, il faut que l'on ait

$$a_{2\nu} > 0, \ a_{2\nu-1} = 0 \text{ pour } 1 \leqq \nu \leqq m; \tag{4}$$

en supposant cette condition remplie, l'équation (2) doit avoir m racines réelles, négatives et simples. Aucune racine de (2) ne pouvant être $\geqq 0$ (voir (4)), la condition nécessaire et suffisante est donnée par A, où les s_λ doivent être construits à partir de l'équation (2).

Démonstration du théorème 2. Si les racines de l'équation (1) satisfont à la condition du théorème 2, la fonction $f(x)$ peut être représentée comme un produit de facteurs de la forme

$$x^2 + \beta_k^2 \ (\beta_k > 0),$$
$$(x + \alpha_k)^2 + \gamma_k^2 = x^2 + 2\alpha_k x + \alpha_k^2 + \gamma_k^2 \ (\alpha_k > 0, \gamma_k > 0), \tag{5}$$
$$x + \delta_k \ (\delta_k > 0), \tag{6}$$

où au moins un de ces facteurs a ou bien la forme (5) ou bien la forme (6); en multipliant ces facteurs, on voit que

$$a_\nu > 0 \text{ pour } 0 \leqq \nu \leqq n. \tag{7}$$

Supposons la condition (7) remplie. Pour que l'équation (1) possède précisément 2ϱ racines purement imaginaires différentes, il faut et il suffit que l'équation $d_1(x) = 0$ (dans la notation de D) possède précisément 2ϱ racines purement imaginaires différentes, c'est-à-dire que l'équation $d(y) = 0$ (on obtient $d(y)$, en posant $x^2 = y$ dans $d_1(x)$) ait précisément ϱ racines réelles différentes[6]); pour

[4]) A. Hurwitz, Math. Annalen **46** (1895), pp. 273—284.

[5]) C'est-à-dire: dans $g(x^2)$ sont réunis les termes de $f(x)$ avec une puissance paire, dans $x\,h(x^2)$ ceux avec une puissance impaire de x.

[6]) Chaque racine réelle de $d(y)$, c'est-à-dire chaque racine réelle commune de $g(y)$ et $h(y)$, est *négative*, en conséquence de (7).

cela, il faut et il suffit (voir B) que la signature de la forme (3) — où les s_λ sont construits à partir de $d(y)$ — soit égale à ϱ. Supposons aussi cette condition remplie.

Alors on peut écrire

$$f(x) = \varphi(x)\,\psi(x),$$
$$\varphi(x) = b_0x^\sigma + b_1x^{\sigma-1} + \ldots + b_{\sigma-1}x + b_\sigma,$$
$$\psi(x) = c_0x^{2\varrho} + c_2x^{2\varrho-2} + c_4x^{2\varrho-4} + \ldots + c_{2\varrho},$$

$\sigma = n - 2\varrho$, $b_0 = c_0 = 1$, $b_\nu = 0$ pour $\nu < 0$ et pour $\nu > \sigma$, $c_\nu = 0$ pour $\nu < 0$ et pour $\nu > 2\varrho$, $c_{2\nu-1} = 0$ pour $1 \leqq \nu \leqq \varrho$, où l'équation $\psi(x) = 0$ possède 2ϱ racines purement imaginaires différentes deux à deux (donc simples); et il faut chercher encore la condition nécessaire et suffisante pour que les parties réelles de toutes les racines de l'équation $\varphi(x) = 0$ soient négatives. D'après C, cette condition peut être exprimée comme il suit: en posant

$$\Delta_\nu = \begin{vmatrix} b_1, b_3, b_5, \ldots, b_{2\nu-1} \\ b_0, b_2, b_4, \ldots, b_{2\nu-2} \\ 0, b_1, b_3, \ldots, b_{2\nu-3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, b_\nu \end{vmatrix} \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

on doit avoir

$$\Delta_\nu > 0 \text{ pour } 1 \leqq \nu \leqq \sigma = n - 2\varrho.$$

Transformons Δ_ν de la manière suivante: à la colonne s-ième ($s = 1, 2, \ldots, \nu$), ajoutons la colonne $(s-1)$-ième, multipliée par c_2, ensuite la colonne $(s-2)$-ième, multipliée par $c_4, \ldots$ et enfin la colonne première, multipliée par c_{2s-2}. On obtient ainsi un déterminant dont la valeur est égale à Δ_ν et dont le terme, situé dans la r-ième ligne et s-ième colonne est égal à

$$\sum_{\nu=0}^{s-1} b_{2s-r-2\nu}\, c_{2\nu} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} b_{2s-r-2\nu}\, c_{2\nu} = a_{2s-r}$$

(remarquons que $c_0 = 1$); on a donc

$$\Delta_\nu = \begin{vmatrix} a_1, a_3, a_5, \ldots, a_{2\nu-1} \\ a_0, a_2, a_4, \ldots, a_{2\nu-2} \\ 0, a_1, a_3, \ldots, a_{2\nu-3} \\ 0, a_0, a_2, \ldots, a_{2\nu-4} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, a_\nu \end{vmatrix},$$

ce qui achève la démonstration. Pour démontrer encore la remarque ajoutée à la fin du théorème 2, il suffit de remarquer que pour $\mu > \sigma$ on a $b_\mu = 0$, d'où $\Delta_\nu = 0$ pour $\nu > \sigma$.

*

Příspěvek k teorii rovnic n-tého stupně.

(Obsah předešlého článku.)

Vyšetřujme rovnici s reálnými koeficienty

$$f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

kde $a_0 = 1$, $a_n \neq 0$. Klaďme $a_\nu = 0$ pro $\nu > n$.

Obsahem této práce je důkaz následujících vět:

Věta 1. Aby všechny kořeny rovnice (1) byly ryze imaginární a jednoduché, je nutné a stačí, aby byly splněny tyto podmínky:

1. $n = 2m$ (m celé), $a_{2\nu} > 0$, $a_{2\nu-1} = 0$ pro $1 \leqq \nu \leqq m$.

2. $$\begin{vmatrix} s_0, s_1, & \ldots, s_\nu \\ s_1, s_2, & \ldots, s_{\nu+1} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ s_\nu, s_{\nu+1}, & \ldots, s_{2\nu} \end{vmatrix} > 0 \text{ pro } 0 \leqq \nu \leqq m - 1;$$

při tom s_λ značí potenční součty kořenů rovnice

$$a_0 y^m + a_2 y^{m-1} + a_4 y^{m-2} + \ldots + a_{2m} = 0.$$

Věta 2. Budiž ϱ celé, $0 \leqq 2\varrho < n$. Aby rovnice (1) měla 2ϱ kořenů ryze imaginárních a jednoduchých a $n - 2\varrho$ kořenů s reálnou částí zápornou, je nutné a stačí, aby byly splněny tyto podmínky:

1. $a_\nu > 0$ pro $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n$.

2. Položme $f(x) = g(x^2) + xh(x^2)$, kde $g(y)$, $h(y)$ jsou polynomy; budiž $d(y)$ největší společná míra mnohočlenů $g(y)$, $h(y)$; nechť τ je stupeň mnohočlenu $d(y)$. Potom signatura kvadratické formy

$$\sum_{\xi=1}^{\tau} \sum_{\eta=1}^{\tau} s_{\xi+\eta-2} y_\xi y_\eta$$

má býti rovna číslu ϱ (znakem s_λ značíme zde potenční součty kořenů rovnice $d(y) = 0$).

3. Klademe-li

$$\Delta_\nu = \begin{vmatrix} a_1, a_3, a_5, \ldots, a_{2\nu-1} \\ a_0, a_2, a_4, \ldots, a_{2\nu-2} \\ 0, a_1, a_3, \ldots, a_{2\nu-3} \\ 0, a_0, a_2, \ldots, a_{2\nu-4} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, a_\nu \end{vmatrix},$$

má býti $\Delta_\nu > 0$ pro $1 \leqq \nu \leqq n - 2\varrho$.

Poznámka. Jsou-li splněny podmínky věty 2, jest $\Delta_\nu = 0$ pro $n - 2\varrho < \nu \leqq n$.