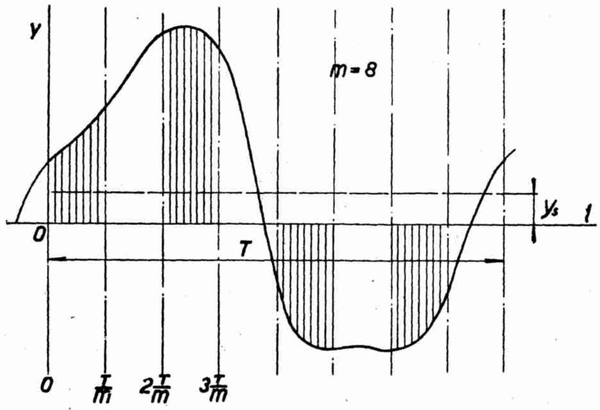
Príspevok k predchádzajúcemu článku prof. L. Šimka o analýze kriviek napätia a prúdu.

Ing. *L. Kneppo*, asistent.

(Došlo 3. října 1933.)

Na popud p. prof. Ing. L. Šimka previedol som matematický rozbor metody uvedenej v predchádzajúcom článku, ktorý dosiaľ súborne nebol v známej technickej literatúre podaný.



Obr. 1.

a) Rozdeľme mnohovlnný priebeh v čase jednej periody T počínajúc ľubovolným bodom postupne na m dielov, kde

$$m = 0, 2, 4, 6, 8, \ldots$$

prebieha prirodzeným radom párnych (sudých) čísel. Vypočítajme si strednú hodnotu súčtu nepárnych (lichých) dielov (na obr. 1 sú uvažované diely čiarkované pre $m = 8$) vychádzajúc z analytického výrazu mnohovlnného priebehu daného Fouřierovým radom

$$y = \sum_{k=0}^{n} (a_k \sin k\omega t + b_k \cos k\omega t),$$

kde $k = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n$ prebieha prirodzeným radom číselným.

Omedzený integrál radu pre hranice $t = t_1$ resp. t_2 bude

$$\int_{t_1}^{t_2} y \,.\, \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=0}^{n} (a_k \sin k\omega t + b_k \cos k\omega t) \,.\, \mathrm{d}t =$$

$$= b_0 (t_2 - t_1) + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k\omega} \Big|_{t_1}^{t_2} - \cos k\omega t + \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{k\omega} \Big|_{t_1}^{t_2} \sin k\omega t. \tag{1}$$

Pre $m = 0$, t. j. pri nedelenej vlne strednú hodnotu dostaneme priamo dosadzením $t = t_1$ resp. t_2, t. j. 0 resp. T a delením s T

$$y_{s0} = b_0.$$

Pre $m = 2, 4, 6, \ldots$ strednú hodnotu prvého dielu dostaneme dosadzením $t = t_1$ resp. t_2, t. j. 0 resp. T/m, $\omega = 2\pi/T$ a delením s T

$$\frac{1}{T} b_0 \frac{T}{m} + \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k T}{2\pi k} \Big|_{0}^{\frac{T}{m}} - \cos \frac{2\pi k}{T} t + \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k T}{2\pi k} \Big|_{0}^{\frac{T}{m}} \sin \frac{2\pi k}{T} t =$$

$$= \frac{b_0}{m} + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2\pi k} \left(1 - \cos \frac{k}{m} 2\pi\right) + \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{2\pi k} \sin \frac{k}{m} 2\pi.$$

Stredná hodnota tretieho dielu pre $t = 2T/m$ resp. $3T/m$

$$\frac{b_0}{m} + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2\pi k} \left(\cos 2 \frac{k}{m} 2\pi - \cos 3 \frac{k}{m} 2\pi\right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{2\pi k} \left(\sin 3 \frac{k}{m} 2\pi - \sin 2 \frac{k}{m} 2\pi\right)$$

a podobne pre ostatné nepárné diely.

Potom stredná hodnota všetkých nepárnych dielov sa dá vyjádriť

$$y_s = \left(\frac{b_0}{m} + \frac{b_0}{m} + \ldots\right) + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2\pi k} \left(1 - \cos \frac{k}{m} 2\pi + \cos 2 \frac{k}{m} 2\pi - \ldots\right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{2\pi k} \left(\sin \frac{k}{m} 2\pi - \sin 2 \frac{k}{m} 2\pi + \sin 3 \frac{k}{m} 2\pi - \ldots\right) =$$

$$= \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2\pi k} \sum_{p=0}^{m-1} (-1)^{p+2} \,.\, \cos p \frac{k}{m} 2\pi +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{2\pi k} \sum_{p=1}^{m-1} (-1)^{p+1} \,.\, \sin p \frac{k}{m} 2\pi.$$

Členov b_0/m je $\frac{1}{2}m$, preto súčet jejich dáva $\frac{1}{2}b_0$.

Členov cos je $2 \, . \, \frac{1}{2}m = m$, preto (počítajúc s nultým členom) budú hranice súčtu $p = 0$ resp. $(m - 1)$.

Členov sin je $2 \, . \, \frac{1}{2}m - 1 = m - 1$, preto (počítajúc s prvým členom) budú hranice druhého súčtu $p = 1$ resp. $(m - 1)$.

U radu $\sum\limits_{p=0}^{m-1} (-1)^{p+2} \, . \cos p \frac{k}{m} 2\pi$ môžeme vylúčiť osciláciu znamienok jednotlivých členov substituciou

$$(-1)^{p+2} \, . \cos p \frac{k}{m} 2\pi = \cos p \left(\frac{k}{m} 2\pi + \pi\right)$$

a potom súčet tohoto trigonometrického radu bude (srovnaj na pr. podľa tech. prievodcu I. str. 146)

$$\sum_{p=0}^{m-1} (\ldots) = \begin{cases} m; \text{ keď } \left(\frac{k}{m} 2\pi + \pi\right) \equiv 0 \bmod 2\pi \\ \dfrac{\cos \frac{1}{2} (m - 1) \left(\frac{k}{m} 2\pi + \pi\right) . \sin \frac{1}{2}m \left(\frac{k}{m} 2\pi + \pi\right)}{\sin \frac{1}{2} \left(\frac{k}{m} 2\pi + \pi\right)}; \\ \text{keď } \left(\frac{k}{m} 2\pi + \pi\right) \not\equiv 0 \bmod 2\pi. \end{cases}$$

U druhej hodnoty člen sin v čitateli

$$\sin \tfrac{1}{2}m \left(\frac{k}{m} 2\pi + \pi\right) = \sin (k + \tfrac{1}{2}m) \pi = 0,$$

lebo podľa predpokladov m môže byť len párnym číslom a preto $(k + \frac{1}{2}m)$ je vždy celým číslom. To znamená, že druhý výsledok je vždy 0.

Podmienku $\left(\frac{k}{m} 2\pi + \pi\right) \equiv 0 \bmod 2\pi$ môžeme si formulovať

$$\frac{\frac{k}{m} 2\pi + \pi}{2\pi} = \frac{k}{m} + \frac{1}{2} = \text{číslo celé} = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

z toho

$$\frac{k}{m} = \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{2}, \tfrac{7}{2}, \ldots$$

U radu $\sum\limits_{p=1}^{m-1} (-1)^{p+1} \, . \sin p \frac{k}{m} 2\pi$ zase vylúčime osciláciu znamienok substituciou

$$(-1)^{p+1} \, . \sin p \frac{k}{m} 2\pi = \sin p \left(\pi - \frac{k}{m} 2\pi\right),$$

potom súčet tohoto trigonometrického radu bude

$$\sum_{p=1}^{m-}(\ldots) = \begin{cases} 0; \text{ keď } \left(\pi - \frac{k}{m}2\pi\right) \equiv 0 \bmod 2\pi \\ \dfrac{\sin \frac{1}{2}(m-1)\left(\pi - \frac{k}{m}2\pi\right) . \sin \frac{1}{2}m \left(\pi - \frac{k}{m}2\pi\right)}{\sin \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{k}{m}2\pi\right)}; \\ \text{keď } \left(\pi - \frac{k}{m}2\pi\right) \not\equiv 0 \bmod 2\pi. \end{cases}$$

U druhej hodnoty člen sin v čitateli bude zase

$$\sin \tfrac{1}{2}m \left(\pi - \frac{k}{m}2\pi\right) = \sin\left(\tfrac{1}{2}m - k\right)\pi = 0,$$

tedy oba výsledky sú 0.

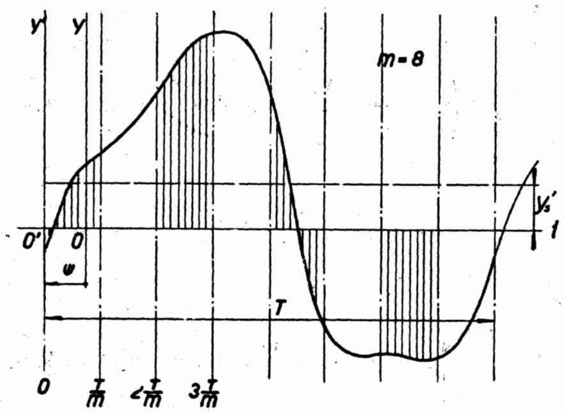
Keď shrnieme uvedené výsledky, dostaneme obecne pre strednú hodnotu súčtu $\frac{1}{2}m$ nepárnych dielov potrojný výsledok:

$$y_{s\frac{1}{2}m} = \begin{cases} b_0; \text{ pre } m = 0 \\ \frac{1}{2}b_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2\pi k} m; \text{ keď pomer } k/m \text{ je z radu } \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots \\ 0; \text{ pre ostatné pomery } k/m. \end{cases} \tag{2}$$

Postupným delením jednej vlny mnohovlnného priebehu na $m = 0, 2, 4, \ldots$ dielov prichádzame dosadzovánim do rovnice (2) za k a m k výrazom:

$$\left.\begin{aligned} y_{s0} &= b_0 \\ y_{s1} &= \tfrac{1}{2}b_0 + \frac{1}{\pi}\left(a_1 + \tfrac{1}{3}a_3 + \tfrac{1}{5}a_5 + \ldots\right) \\ y_{s2} &= \tfrac{1}{2}b_0 + \frac{1}{\pi}\left(a_2 + \tfrac{1}{3}a_6 + \tfrac{1}{5}a_{10} + \ldots\right) \\ y_{s3} &= \tfrac{1}{2}b_0 + \frac{1}{\pi}\left(a_3 + \tfrac{1}{3}a_9 + \tfrac{1}{5}a_{15} + \ldots\right) \\ y_{s4} &= \tfrac{1}{2}b_0 + \frac{1}{\pi}\left(a_4 + \tfrac{1}{3}a_{12} + \tfrac{1}{5}a_{20} + \ldots\right) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned}
y_{s5} &= \tfrac{1}{2}b_0 + \frac{1}{\pi}\left(a_5 + \tfrac{1}{3}a_{15} + \tfrac{1}{5}a_{25} + \ldots\right)\\
y_{s6} &= \tfrac{1}{2}b_0 + \frac{1}{\pi}\left(a_6 + \tfrac{1}{3}a_{18} + \tfrac{1}{5}a_{30} + \ldots\right)\\
y_{s7} &= \tfrac{1}{2}b_0 + \frac{1}{\pi}\left(a_7 + \tfrac{1}{3}a_{21} + \tfrac{1}{5}a_{35} + \ldots\right)\\
y_{s8} &= \tfrac{1}{2}b_0 + \frac{1}{\pi}\left(a_8 + \tfrac{1}{3}a_{24} + \tfrac{1}{5}a_{40} + \ldots\right)\\
y_{s9} &= \tfrac{1}{2}b_0 + \frac{1}{\pi}\left(a_9 + \tfrac{1}{3}a_{27} + \tfrac{1}{5}a_{45} + \ldots\right)\\
&\text{atď.}
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$



Obr. 2.

b) Posunme osu Y proti smeru času o ψ (obr. 2) od zvoleného počiatku, vymedzme si zase priebeh odpovedajúci jednej periody a rozdelme tento opäť postupne na m dielov. Stredná hodnota súčtu nepárnych dielov vypočíta sa analogicky jako v odstavci *a*).

Rovnica Fourierovho radu pre nový počiatok bude

$$y' = \sum_{k=0}^{n} [a_k \sin k\omega\,(t - \psi) + b_k \cos k\omega\,(t - \psi)] = \sum_{k=0}^{n} [(a_k \cos\psi' + b_k \sin\psi') \sin k\omega t + (-\,a_k \sin\psi' + b_k \cos\psi') \cos k\omega t],$$

keď rozvinieme goniometrické funkcie súčty úhlov a dosadíme za

$$\psi' = k\omega\psi.$$

Omedzený integrál pre hranice $t = t_1$ resp. t_2

$$\int_{t_1}^{t_2} y' \,.\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=0}^{n} [(a_k \cos \psi' + b_k \sin \psi') \sin k\omega t + (-a_k \sin \psi' + $$
$$+ b_k \cos \psi') \cos k\omega t] \,.\, dt =$$
$$= b_0 (t_2 - t_1) + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k \cos \psi' + b_k \sin \psi'}{k\omega} \Bigg|_{t_1}^{t_2} - \cos k\omega t + \tag{4}$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{-a_k \sin \psi' + b_k \cos \psi'}{k\omega} \Bigg|_{t_1}^{t_2} \sin k\omega t.$$

Keď dosadíme za

$$\frac{a_k \cos \psi' + b_k \sin \psi'}{k\omega} = \frac{C_k}{k\omega},$$
$$\frac{-a_k \sin \psi' + b_k \cos \psi'}{k\omega} = \frac{D_k}{k\omega},$$

dostaneme stejný výraz, jako je rovnica (1), kde a_k, b_k treba nahradiť C_k, D_k. Poneváč pri ďalšej úprave tieto členy nedoznávajú zmien, môžeme pre tento prípad hneď písať výsledok pre strednú hodnotu súčtu $\frac{1}{2}m$ nepárnych dielov

$$y'_{s\frac{1}{2}m} = \begin{cases} b_0; \text{ pre } m = 0 \\ \frac{1}{2}b_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{2\pi k}\, m; \text{ keď pomer } k/m \text{ je z radu } \frac{1}{2}, \frac{3}{3}, \frac{5}{2}, \ldots \\ 0; \text{ pre iné pomery } k/m. \end{cases} \tag{5}$$

Výsledok platí pre ľubovolné ψ. V prípade, že volíme ψ vždy také, aby bolo vyhoveno vzťahu

$$\psi = \frac{T}{2m}; \text{ tedy } \psi' = k\omega\psi = \frac{k}{m}\,\pi,$$

bude

$$C_k = a_k \cos \frac{k}{m}\,\pi + b_k \sin \frac{k}{m}\,\pi = (-1)^{k/m - \frac{1}{2}} \,.\, b_k,$$

poneváč k/m musí tiež vyhovovať podmienke

$$k/m = \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{2}, \ldots$$

Tedy konečný výsledok bude mať obecný tvar

$$y'_{s\frac{1}{2}m} = \begin{cases} b_0; \text{ pre } m = 0 \\ \frac{1}{2}b_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k/m - \frac{1}{2}} \cdot b_k}{2\pi k} m; \\ \text{keď } k/m \text{ je z radu } \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots \\ 0; \text{ pre iné pomery } k/m. \end{cases} \tag{6}$$

Postupným delením jednej vlny mnohovlnného priebehu na $m = 2, 4, 6, \ldots$ dielov pri súdobom posunováni počiatku proti smeru času o $T/2m = \frac{1}{4}T, \frac{1}{8}T, \frac{1}{12}T, \ldots$ dostávame dosadzovánim za k a m do rovnice (6):

$$\left.\begin{aligned} y'_{s0} &= b_0 \text{ (pre ľubovolný posuv)} \\ y'_{s1} &= \tfrac{1}{2}b_0 + \frac{1}{\pi}(b_1 - \tfrac{1}{3}b_3 + \tfrac{1}{5}b_5 - \ldots) \\ y'_{s2} &= \tfrac{1}{2}b_0 + \frac{1}{\pi}(b_2 - \tfrac{1}{3}b_6 + \tfrac{1}{5}b_{10} - \ldots) \\ y'_{s3} &= \tfrac{1}{2}b_0 + \frac{1}{\pi}(b_3 - \tfrac{1}{3}b_9 + \tfrac{1}{5}b_{15} - \ldots) \\ y'_{s4} &= \tfrac{1}{2}b_0 + \frac{1}{\pi}(b_4 - \tfrac{1}{3}b_{12} + \tfrac{1}{5}b_{20} - \ldots) \\ y'_{s5} &= \tfrac{1}{2}b_0 + \frac{1}{\pi}(b_5 - \tfrac{1}{3}b_{15} + \tfrac{1}{5}b_{25} - \ldots) \\ y'_{s6} &= \tfrac{1}{2}b_0 + \frac{1}{\pi}(b_6 - \tfrac{1}{3}b_{18} + \tfrac{1}{5}b_{30} - \ldots) \\ y'_{s7} &= \tfrac{1}{2}b_0 + \frac{1}{\pi}(b_7 - \tfrac{1}{3}b_{21} + \tfrac{1}{5}b_{35} - \ldots) \\ y'_{s8} &= \tfrac{1}{2}b_0 + \frac{1}{\pi}(b_8 - \tfrac{1}{3}b_{24} + \tfrac{1}{5}b_{40} - \ldots) \\ y'_{s9} &= \tfrac{1}{2}b_0 + \frac{1}{\pi}(b_9 - \tfrac{1}{3}b_{27} + \tfrac{1}{5}b_{45} - \ldots) \\ &\text{atď.} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Pri jednotnom posunutí počiatku o $\psi = \frac{1}{4}T$ proti smeru času bude člen

$$C_k = a_k \cos \psi' + b_k \sin \psi' = a_k \cos \tfrac{1}{2}\pi k + b_k \sin \tfrac{1}{2}\pi k$$

a stredné hodnoty pri rôznom delení $m = 2, 4, 6, \ldots$ budu dané rovnicou