Řady vhodné k použití při přibližné integraci.

Pplk. *Jan Gebauer.*

(Došlo 15. prosince 1933.)

I. Úvod. V různých početních metodách vnější balistiky užívá se k integraci systému diferenciálních rovnic řady Taylorovy nebo Eulerovy-Mac Laurinovy.

V této své práci hledám jiné řady vhodné k použití při přibližné integraci podobně jako se v balistice užívá řady Eulerovy-Mac Laurinovy v metodě G. H. M.

Sumační vzorec Eulerův-Mac Laurinův je v matematice všude zařazován do integrálního počtu a všecky způsoby jeho odvození užívají integrálního počtu.

Různé řady, jež zde odvodím, vyvodím však jen ryze algebraickým postupem (bez užití integrací) z řady Mac Laurinovy užité na danou funkci a na všechny její derivace. Tento algebraický postup skýtá zajímavý průhled do vzniku vnitřní stavby všech těchto řad (Eulerovy-Mac Laurinovy i řad nových).

Panu prof. dr. Petrovi vděčím za laskavé upozornění, že systém řad 25, který jsem zde odvodil, je totožný s formulí, kterou on bez důkazu, v jiné formě a s jiným zbytkem uveřejnil,[1]) o čemž jsem nevěděl.

Postupným derivováním Mac Laurinovy řady

$$y = y_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{y_0^{(n)} x^n}{n!} \tag{1}$$

dostaneme řady

$$y^{(l)} = y_0^{(l)} + \sum_{n=l+1}^{n=\infty} \frac{y_0^{(n)} x^{n-l}}{(n-l)!} \quad \text{pro } l = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Omezíme se jen na takový interval argumentu x, v němž y, $y^{(l)}$ jsou spojité a řady (1), (2) stejnoměrně konvergují.

II. Algebraické odvození řady Eulerovy-Mac Laurinovy z řad (1) a (2). Z rovnice (2) plyne

$$\frac{y_0^{(l+1)} x^{l+1}}{(l+1)!} = \frac{x^l}{(l+1)!} (y^{(l)} - y_0^{(l)}) - \frac{1}{(l+1)!} \sum_{n=l+2}^{n=\infty} \frac{y_0^{(n)} x^n}{(n-l)!}, \tag{3}$$

---

[1]) Petr, O jedné formuli pro výpočet určitých integrálů. Časopis *44*, 1915; 454.

a pro $l = 1$ dostaneme

$$\frac{y''_0 x^2}{2!} = \frac{x}{2!}(y' - y'_0) - \frac{1}{2!}\sum_{n=3}^{n=\infty} \frac{y_0^{(n)} x^n}{(n-1)!},$$

což dosadíme do (1). Vyjde

$$y = y_0 + \frac{x}{2}(y' + y'_0) - \frac{1}{2!}\sum_{n=3}^{n=\infty}(n-2)\frac{y_0^{(n)} x^n}{n!}. \tag{4}$$

Odtud a z rovnice (3) (pro $l = 2$) vylučme $y_0^{(3)}$; dostaneme

$$y = y_0 + \frac{x}{2}(y' + y'_0) - \frac{x^2}{12}(y'' - y''_0) + \\ + \frac{1}{12}\sum_{n=5}^{n=\infty}(n-3)(n-4)\frac{y_0^{(n)} x^n}{n!}. \tag{5}$$

Z rovnic (3) (pro $l = 4$), (5) vylučme $y_0^{(5)}$, vyjde

$$y = y_0 + \frac{x}{2}(y' + y'_0) - \frac{x^2}{12}(y'' - y''_0) + \frac{x^4}{720}(y^{(4)} - y_0^{(4)}) + \\ - \frac{1}{720}\sum_{n=7}^{n=\infty}(n-3)(n-5)(n-6)(n+8)\frac{y_0^{(n)} x^n}{n!}. \tag{6}$$

Odtud a z rovnice (3) (pro $l = 6$) vylučme $y_0^{(7)}$, dostaneme

$$y = y_0 + \frac{x}{2}(y' + y'_0) - \frac{x^2}{12}(y'' - y''_0) + \frac{x^4}{720}(y^{(4)} - y_0^{(4)}) + \\ - \frac{x^6}{30240}(y^{(6)} - y_0^{(6)}) + \\ + \frac{1}{30240}\sum_{n=9}^{n=\infty}(n-3)(n-5)(n-7)(n-8)(n^2 + 8n + 36)\frac{y_0^{(n)} x^n}{n!}. \tag{7}$$

Z rovnic (3) (pro $l = 8$), (7) vylučme $y_0^{(9)}$, vyjde nám

$$y = y_0 + \frac{x}{2}(y' + y'_0) - \frac{x^2}{12}(y'' - y''_0) + \frac{x^4}{720}(y^{(4)} - y_0^{(4)}) + \\ - \frac{x^6}{30240}(y^{(6)} - y_0^{(6)}) + \frac{x^8}{1209600}(y^{(8)} - y_0^{(8)}) + \\ - \frac{1}{1209600}\sum_{n=11}^{n=\infty}(n-3)(n-5)(n-7)\,. \\ .\,(n-9)(n-10)(n^3 + 6n^2 + 40n + 128)\frac{y_0^{(n)} x^n}{n!}. \tag{8}$$

Tak jsme tu postupným vylučováním $y_0^{(2)}$, $y_0^{(3)}$, $y_0^{(5)}$, $y_0^{(7)}$, $y_0^{(9)}$ odvodili řady (5), (6), (7), (8), jejichž první členy jsou prvními členy známé řady Eulerovy-Mac Laurinovy

$$y = y_0 + \frac{x}{2}(y' + y'_0) + \sum_{k=1}^{k=p} a_{2k}x^{2k}(y^{(2k)} - y_0^{(2k)}) + R_{2p+3}, \quad (9)$$

jejíž zbytek R_{2p+3} je v rovnicích (5), (6), (7), (8) nově vyjádřen ve tvaru

$$R_{2p+3} = -a_{2p} \sum_{n=2p+3}^{n=\infty} \mathrm{P}_{2p}(n) \frac{y_0^{(n)}x^n}{n!}, \quad (10)$$

kde $P_{2p}(n)$ je polynom, jenž je v n stupně $2p$-tého.

O řadě Eulerově-Mac Laurinově je dokázáno jinými důkazy,[2] že má tvar rovnice (9), proto můžeme hodnoty jejích dalších koeficientů a_{2k} pro $k = 5, 6, \ldots$ vyšetřiti snáze aplikací řady 9 na některé jednoduché funkce.

Pro celistvou funkci $y = x^{2p}$ dostaneme tak rekursní vzorec

$$a_{2(p-1)} = -2\left[\frac{p-1}{(2p)!} + \frac{a_2}{[2(p-1)]!} + \frac{a_4}{[2(p-2)]!} + \ldots + \frac{a_{2(p-2)}}{(2\,.\,2)!}\right], \quad (11)$$

platný pro $p = 2, 3, \ldots$

Pro $y = x^{2p+1}$ dostaneme jiný rekursní vzorec

$$a_{2p} = -\left[\frac{2p-1}{2(2p+1)!} + \frac{a_2}{(2p-1)!} + \frac{a_4}{(2p-3)!} + \ldots + \frac{a_{2p-2}}{3!}\right], \quad (12)$$

platný pro $p = 1, 2, 3, \ldots$

Pro $y = \sin 2x$ nebo $y = \cos 2x$ vyjde nám

$$x\frac{\cos 2x + 1}{\sin 2x} = x\frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x} = x \operatorname{cotg} x = 1 - \sum_{k=1}^{k=\infty} (-1)^k 2^{2k} a_{2k} x^{2k}. \quad (13)$$

$$\text{Avšak } x \operatorname{cotg} x = 1 - \sum_{k=1}^{k=\infty} b_{2k}x^{2k} = 1 - \left[\frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{45} + \ldots \text{ in inf.}\right], \quad (13')$$

Z porovnání řad (13), (13′) plyne

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{b_{2k}}{2^{2k}}, \quad (14)$$

kterýmž vzorcem (14) vypočteme koeficienty a_{2k} nejsnáze z koeficientů b_{2k} známé řady (13′). Pro $y = e^{2x}$ dostaneme

[2]) Viz na př. Petr, Počet integrální, str. 134.

$$x \operatorname{Cotg} x = 1 - \sum_{k=1}^{k=\infty} (-1)^k b_{2k} x^{2k} \tag{15}$$

a opět přijdeme k rovnici (14).

III. Odvození nové řady

$$y = y_0 + \sum_{k=1}^{k=p} a_{2k-1} x^{2k-1} (y^{(2k-1)} + y_0^{(2k-1)}) + R_{2p+1} \text{ pro } p = 1, 2, \ldots \tag{16}$$

Vyjdeme z výše odvozené rovnice (4), jež již má tvar rovnice (16) pro $p = 1$.

Z rovnic (3) (pro $l = 3$), (4) vylučme $y_0^{(4)}$. Vyjde nám

$$y = y_0 + \frac{x}{2}(y' + y'_0) - \frac{x^3}{24}(y^{(3)} + y_0^{(3)}) +$$

$$+ \frac{1}{24} \sum_{n=5}^{n=\infty} (n-2)\,[n\,(n-1) - 12]\, \frac{y_0^{(n)} x^n}{n!}. \tag{17}$$

Odtud a z rovnice (3) (pro $l = 5$) vylučme $y_0^{(6)}$. Dostaneme

$$y = y_0 + \frac{x}{2}(y' + y'_0) - \frac{x^3}{24}(y^{(3)} + y_0^{(3)}) + \frac{x^5}{240}(y^{(5)} + y_0^{(5)}) +$$

$$- \frac{1}{240} \sum_{n=7}^{n=\infty} (n-2)\,[n\,(n-1)\,(n-3)\,(n-4) + \tag{18}$$

$$- 10\,\{n\,(n-1) - 12\}]\, \frac{y_0^{(n)} x^n}{n!}.$$

Z rovnic (3) (pro $l = 7$), (18) vylučme $y_0^{(8)}$, vyjde

$$y = y_0 + \frac{x}{2}(y' + y'_0) - \frac{x^3}{24}(y^{(3)} + y_0^{(3)}) +$$

$$+ \frac{x^5}{240}(y^{(5)} + y_0^{(5)}) - \frac{17x^7}{40320}(y^{(7)} + y_0^{(7)}) + R_9, \tag{19}$$

kde tvar zbytku R_9 vyjde obdobně jako tvary zbytkových řad R_5, R_7 v rovnicích (17), (18). Rovnice (4), (17), (18), (19) mají tvar rovnice (16). Podobně jako u řady (9), též u řady (16) odvodíme hodnoty dalších koeficientů a_{2k-1} snáze aplikací řady (16) na některé jednoduché funkce.

Užijeme-li řady (16) na celistvou funkci $y = x^{2p}$, dostaneme vzorec

$$a_{2p-1} = \frac{1}{(2p)!} - \left[\frac{a_1}{(2p-1)!} + \frac{a_3}{(2p-3)!} + \ldots + \frac{a_{2p-3}}{3!}\right]. \tag{20}$$

Užijeme-li řady (16) na celistvou funkci $y = x^{2p-1}$, vyjde nám rovnice

$$a_{2p-1} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(2p-1)!} - \sum_{k=1}^{k=p-1} \frac{a_{2k-1}}{[2(p-k)]!}\right]. \tag{21}$$

Rekursní vzorce (20), (21) platí pro libovolné $p = 1, 2, \ldots$ in inf. Pro $y = \sin 2x$ dostaneme

$$\frac{\sin 2x}{\cos 2x + 1} = \operatorname{tg} x = \sum_{k=1}^{k=\infty} (-1)^{k+1}\, 2^{2k-1} a_{2k-1} x^{2k-1}, \tag{22}$$

což porovnejme s řadou

$$\operatorname{tg} x = \sum_{k=1}^{k=\infty} b_{2k-1} x^{2k-1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \ldots \text{ in inf.} \tag{22'}$$

Dostaneme

$$a_{2k-1} = (-1)^{k+1} \frac{b_{2k-1}}{2^{2k-1}}, \tag{23}$$

kterýmž vzorcem vypočteme koeficienty a_{2k-1} nejsnáze z koeficientů b_{2k-1} známé řady (22'). Pro $y = e^{2x}$ vyjde nám

$$\operatorname{Tg} x = \sum_{k=1}^{k=\infty} (-1)^{k+1}\, b_{2k-1} x^{2k-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \ldots \text{ in inf.} \tag{24}$$

a zase dospějeme k rovnici (23).

IV. Odvození nekonečného počtu ($k = 1, 2, \ldots$ in inf.) řad tvaru

$$y = y_0 + \sum_{i=1}^{i=k} a_{k,i} \left(\frac{x}{2}\right)^i (y^{(i)} + [-1]^{i+1} y_0^{(i)}) + \\ - \left(\frac{1}{2}\right)^k a_{k,k} \sum_{n=2k+1}^{n=\infty} \frac{(n-k-1)!}{(n-2k-1)!} \frac{y_0^{(n)} x^n}{n!}. \tag{25}$$

Z řady (25) dostaneme řady (4), (5) pro $k = 1, 2$. Přes to odvodím řadu (5) znovu způsobem, jehož v dalším užiji k odvození dalších řad (25) pro $k = 2, 3, 4, \ldots$

Užijme označení

$$g_{2,n} = -\frac{n-2}{2} \frac{y_0^{(n)} x^n}{n!} : \frac{y_0^{(n)} x^{n-2}}{(n-2)!} = -\frac{x^2}{2} \frac{n-2}{n(n-1)}. \tag{26}$$

Poněvadž

$$g_{2,3} = g_{2,4} = -\frac{1}{1\,.\,3}\left(\frac{x}{2}\right)^2,$$

jest $$-\frac{1}{2}\sum_{n=3}^{n=4} (n-2) \frac{y_0^{(n)} x^n}{n!} = -\frac{1}{1\,.\,3}\left(\frac{x}{2}\right)^2 \sum_{n=3}^{n=4} \frac{y_0^{(n)} x^{n-2}}{(n-2)!},$$

což dosaďme do rovnice (4). Poněvadž řada (2) pro $l = 2$ dává

$$\sum_{n=3}^{n=4} \frac{y_0^{(n)} x^{n-2}}{(n-2)!} = y'' - y''_0 - \sum_{n=5}^{n=\infty} \frac{y_0^{(n)} x^{n-2}}{(n-2)!},$$

dostaneme ihned řadu (5), kterou pišme ve tvaru

$$\begin{aligned} y = y_0 + \frac{x}{2}(y' + y'_0) - \frac{1}{1\,.\,3}\left(\frac{x}{2}\right)^2 (y'' - y''_0) + \\ + \frac{1}{2^2\,.\,3} \sum_{n=5}^{n=6} (n-3)(n-4) \frac{y_0^{(n)} x^n}{n!} + \\ + \frac{1}{2^2\,.\,3} \sum_{n=7}^{n=\infty} (n-3)(n-4) \frac{y_0^{(n)} x^n}{n!}. \end{aligned} \tag{5'}$$

Užijme označení

$$\begin{aligned} g_{3,n} = \frac{(n-3)(n-4)}{2^2\,.\,3} \frac{y_0^{(n)} x^n}{n!} : \left[-\frac{n-4}{2} \frac{y_0^{(n)} x^{n-2}}{(n-2)!} \right] = \\ = -\frac{x^2}{2\,.\,3} \frac{n-3}{n(n-1)}. \end{aligned} \tag{27}$$

Poněvadž $g_{3,5} = g_{3,6} = -\frac{1}{3\,.\,5}\left(\frac{x}{2}\right)^2$, platí

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^2\,.\,3} \sum_{n=5}^{n=6} (n-3)(n-4) \frac{y_0^{(n)} x^n}{n!} = \\ = -\frac{1}{3\,.\,5}\left(\frac{x}{2}\right)^2 \left[-\frac{1}{2} \sum_{n=5}^{n=6} (n-4) \frac{y_0^{(n)} x^{n-2}}{(n-2)!} \right], \end{aligned}$$

což dosaďme do rovnice (5′). Všimneme-li si zároveň, že řada (4) (užita na funkci y'' místo y) dává

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \sum_{n=5}^{n=6} (n-4) \frac{y_0^{(n)} x^{n-2}}{(n-2)!} = y'' - y''_0 - \frac{x}{2}(y^{(3)} + y_0^{(3)}) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{n=7}^{n=\infty} (n-4) \frac{y_0^{(n)} x^{n-2}}{(n-2)!}, \end{aligned}$$

vypočteme

$$\begin{aligned} y = y_0 + \frac{x}{2}(y' + y'_0) - \left[\frac{1}{1\,.\,3} + \frac{1}{3\,.\,5}\right]\left(\frac{x}{2}\right)^2 (y'' - y''_0) + \\ + \frac{1}{3\,.\,5}\left(\frac{x}{2}\right)^3 (y^{(3)} + y_0^{(3)}) - \frac{1}{2^3\,.\,3\,.\,5} \sum_{n=7}^{n=\infty} \frac{(n-4)!}{(n-7)!} \frac{y_0^{(n)} x^n}{n!}, \end{aligned} \tag{28}$$

což je řada (25) pro $k = 3$. Porovnáme-li ji s předešlou ($k = 2$) řadou (5), vidíme, že koeficient u x^2 se změnil, přistoupil člen obsahující $x^3 (y^{(3)} + y_0^{(3)})$ a zbytek je v x řádu 7.

Podobně dále užijeme označení

$$g_{4,n} = -\frac{\dfrac{(n-4)(n-5)(n-6)}{2^3 . 3 . 5}\dfrac{y_0^{(n)}x^n}{n!}}{\dfrac{(n-5)(n-6)}{2^2 . 3}\dfrac{y_0^{(n)}x^{n-2}}{(n-2)!}} = -\frac{x^2}{2 . 5}\frac{n-4}{n(n-1)}. \qquad (29)$$

Zase jest $g_{4,7} = g_{4,8} = -\dfrac{1}{5 . 7}\left(\dfrac{x}{2}\right)^2$, tedy

$$-\frac{1}{2^3 . 3 . 5}\sum_{n=7}^{n=8}(n-4)(n-5)(n-6)\frac{y_0^{(n)}x^n}{n!} =$$

$$= -\frac{1}{5 . 7}\left(\frac{x}{2}\right)^2\frac{1}{2^2 . 3}\sum_{n=7}^{n=8}(n-5)(n-6)\frac{y_0^{(n)}x^{n-2}}{(n-2)!},$$

což dosaďme do rovnice (28) a zároveň si všimněme, že řada (5′) (užita na funkci y'' místo y) dává

$$\frac{1}{2^2 . 3}\sum_{n=7}^{n=8}(n-5)(n-6)\frac{y_0^{(n)}x^{n-2}}{(n-2)!} = y'' - y''_0 - \frac{x}{2}(y^{(3)} + y_0^{(3)}) +$$

$$+ \frac{1}{1 . 3}\left(\frac{x}{2}\right)^2(y^{(4)} - y_0^{(4)}) - \frac{1}{2^2 . 3}\sum_{n=9}^{n=\infty}(n-5)(n-6)\frac{y_0^{(n)}x^{n-2}}{(n-2)!};$$

vyjde nám

$$y = y_0 + \frac{x}{2}(y' + y'_0) - \left[\frac{1}{1 . 3} + \frac{1}{3 . 5} + \frac{1}{5 . 7}\right]\left(\frac{x}{2}\right)^2(y'' - y''_0) +$$

$$+ \left[\frac{1}{3 . 5} + \frac{1}{5 . 7}\right]\left(\frac{x}{2}\right)^3(y^{(3)} + y_0^{(3)}) - \frac{1}{3 . 5 . 7}\left(\frac{x}{2}\right)^4(y^{(4)} - y_0^{(4)}) +$$

$$+ \frac{1}{2^4 . 3 . 5 . 7}\sum_{n=9}^{n=\infty}\frac{(n-5)!}{(n-9)!}\frac{y_0^{(n)}x^n}{n!}. \qquad (30)$$

Řada (30) má tvar (25) (pro $k = 4$). Porovnáme-li ji s předešlými řadami (28) ($k = 3$), (5′) ($k = 2$), vidíme, že s rostoucím k se stále mění všecky koeficienty $a_{k,i}$ kromě prvního ($a_{k,1} = 1$). (U řady E. M. L. (5) i u řady (16) s přistupujícími dvojčleny se neměnily koeficienty dvojčlenů předešlých.)

Dokážeme nyní, že tímto postupem možno odvodit nekonečný počet řad, jež mají tvar (25), a zároveň odvodíme vztahy určující koeficienty $a_{k,i}$ všech těchto řad. Zde k značí pořadové číslo řady, i značí exponent argumentu x a zároveň řád derivací $y^{(i)}$, $y_0^{(i)}$ obsažených v dvojčlenu, jenž má koeficient $a_{k,i}$.

Při odvození řad (25) pro $k = 2, 3, 4$ jsme měli odvozeny řady, jež nazveme poslední a předposlední, a hledali jsme řadu následující.

Řady předposlední jsme užili na y'' (místo y) a z této řady pro y'' a z poslední řady pro y jsme *vždy rázem* vyloučili *oba* první členy druhé sumy na pravé straně rovnice (25). To nám bylo umožněno stejností podílů

$$g_{k,2k-1} = g_{k,2k} \tag{31}$$

pro $k = 2, 3, 4$ [rovnice (26), (27), (29)]. Dokažme, že (31) platí pro každé celé $k \geqq 2$. Podle rov. (26), (27), (29) pro $k = 2, 3, 4$ jest

$$g_{k,n} = -\left(\frac{x}{2}\right)^2 \frac{2\,(n-k)}{(2k-3)\,(n-1)\,n}. \tag{32}$$

Označíme-li
$$g_{k,n} = \frac{n\,(n-1)}{2\,(n-k)},$$
jest
$$q_{k,n} = -\left(\frac{x}{2}\right)^2 \frac{1}{(2k-3) q_{k,n}}. \tag{33}$$

Se zřetelem na (33) podmínka (31) žádá, aby bylo

$$q_{k,2k-1} = q_{k,2k} = 2k - 1 = q_k, \tag{34}$$

což platí identicky pro každé celé k.

Vidíme (34), že hodnoty tyto tvoří řadu lichých čísel a proto pro ně postačí kratší označení q_k jen s jedním indexem k, jímž jsou určeny. Podle rovnic (31), (33), (34) pro $k = 2, 3, 4$ jest

$$g_{k,2k-1} = g_{k,2k} = -\left(\frac{x}{2}\right)^2 \frac{1}{q_{k-1} q_k} = g_k$$

(s kratším označením g_k).

Porovnáme-li rovnice (25), (4), (5), (28), (30), vidíme, že:

$$a_{1,1} = a_{2,1} = a_{3,1} = a_{4,1} = 1 = \frac{1}{q_1};$$

$$a_{2,2} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{q_1 q_2} = -\frac{a_{1,1}}{q_2}, \quad a_{3,2} = \frac{-2}{5} = a_{2,2} - \frac{1}{q_2 q_3},$$

$$a_{4,2} = \frac{-3}{7} = a_{3,2} - \frac{1}{q_3 q_4};$$

$$a_{3,3} = \frac{1}{15} = \frac{1}{q_1 q_2 q_3} = -\frac{a_{2,2}}{q_3}, \quad a_{4,3} = \frac{2}{21} = a_{3,3} + \frac{1}{q_3 q_4},$$

$$a_{4,4} = -\frac{1}{105} = -\frac{a_{3,3}}{q_4}.$$

Již v těchto rovnicích pro $k = 2, 3, 4$ se jeví některé z hledaných obecných vztahů mezi koeficienty $a_{k,i}$, na př.

$$a_{k,k} = (-1)^{k-1} \frac{1}{q_1 q_2 \ldots q_k} = -\frac{a_{k-1,k-1}}{q_k}. \tag{35}$$

Pro určité k (na př. $k = 4$) známe $a_{k,i}$ i tvar zbytku řady (25). Hledáme $a_{k+1,i}$ a tvar zbytku následující $(k + 1)$ řady. k-tou řadu (25) napišme takto:

$$
\begin{aligned}
y - y_0 = {} & \frac{x}{2}(y' + y'_0) + a_{k,2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 (y'' - y''_0) + \\
& + \sum_{i=3}^{i=k} a_{k,i}\left(\frac{x}{2}\right)^i [y^{(i)} + (-1)^{i+1} y_0^{(i)}] + \\
& - \left(\frac{1}{2}\right)^k a_{k,k} \sum_{n=2k+1}^{n=2k+2} \frac{(n-k-1)!}{(n-2k-1)!} \frac{y_0^{(n)} x^n}{n!} + \\
& - \left(\frac{1}{2}\right)^k a_{k,k} \sum_{n=2k+3}^{n=\infty} \frac{(n-k-1)!}{(n-2k-1)!} \frac{y_0^{(n)} x^n}{n!}.
\end{aligned}
\tag{36}
$$

Předešlou $(k - 1)$-ní řadu dostaneme, dosadíme-li $k - 1$ místo k do (25). Vyjádříme-li jí $y'' - y''_0$ (místo $y - y_0$), vyjde nám

$$
\begin{aligned}
y'' - y''_0 = {} & \sum_{i=3}^{i=k+1} a_{k-1,i-2}\left(\frac{x}{2}\right)^{i-2} [y^{(i)} + (-1)^{i+1} y_0^{(i)}] + \\
& - \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} a_{k-1,k-1} \sum_{n=2k+1}^{n=2k+2} \frac{(n-k-2)!}{(n-2k-1)!} \frac{y_0^{(n)} x^{n-2}}{(n-2)!} + \\
& - \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} a_{k-1,k-1} \sum_{n=2k+3}^{n=\infty} \frac{(n-k-2)!}{(n-2k-1)!} \frac{y_0^{(n)} x^{n-2}}{(n-2)!}.
\end{aligned}
\tag{37}
$$

Členy řad (36), (37), obsahující $\sum\limits_{n=2k+1}^{n=2k+2}$, mají poměr

$$
g_{k+1,n} = \frac{x^2}{2} \frac{a_{k,k}}{a_{k-1,k-1}} \frac{n-k-1}{n(n-1)} = -\left(\frac{x}{2}\right)^2 \frac{1}{q_k q_{k+1,n}}, \tag{38}
$$

neboť podle rovnic (35), (33) jest

$$
\frac{a_{k,k}}{a_{k-1,k-1}} \frac{n-(k+1)}{n(n-1)} = -\frac{1}{q_k} \frac{1}{2q_{k+1,n}}.
$$

Poněvadž pro $n = 2(k + 1)$ jest

$$
q_{k+1,n-1} = q_{k+1,n} = q_{k+1} = 2k + 1,
$$

rovnice (38) zde dá

$$
g_{k+1,2(k+1)} = -\left(\frac{x}{2}\right)^2 \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = g_{k+1}.
$$

Opět stačí kratší označení g_{k+1} pro poměr, jenž umožňuje vyloučit z rovnic (36), (37) sumu od $n = 2k + 1$ po $n = 2k + 2$. Dostaneme tak pro koeficienty hledané $(k+1)$-ní řady rekursní vzorce

$$a_{k+1,2} = a_{k,2} - \frac{1}{q_k q_{k+1}}, \quad a_{k+1,i} = a_{k,i} + \frac{a_{k-1,i-2}}{q_k q_{k+1}},$$
$$a_{k+1,k+1} = \frac{a_{k-1,k-1}}{q_k q_{k+1}} = -\frac{a_{k,k}}{q_{k+1}} = (-1)^k \frac{1}{q_1 q_2 \dots q_{k+1}} \tag{39}$$

a zbytek $(k+1)$-ní řady vyjde jako součet

$$-\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \frac{a_{k-1,k-1}}{q_k q_{k+1}} \sum_{n=2k+3}^{n=\infty} \frac{(n-k-2)!}{(n-2k-1)!} \frac{y_0^{(n)} x^n}{(n-2)!} +$$
$$-\left(\frac{1}{2}\right)^{k} a_{k,k} \sum_{n=2k+3}^{n=\infty} \frac{(n-k-1)!}{(n-2k-1)!} \frac{y_0^{(n)} x^n}{n!} = \tag{40}$$
$$= -\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} a_{k+1,k+1} \sum_{n=2(k+1)+1}^{n=\infty} \frac{(n-[k+1]-1)!}{(n-2[k+1]-1)!} \frac{y_0^{(n)} x^n}{n!},$$

kterouž rovnost ještě dokážeme:

Na levé straně rovnice (40) je součet dvou řad, jejichž koresp. členy označme A_n, B_n. Jest

$$\frac{B_n}{A_n} = -2q_{k+1} \frac{n-(k+1)}{n(n-1)} = -2(2k+1) \frac{n-(k+1)}{n(n-1)}, \tag{41}$$

neboť platí (35), a jest $q_{k+1} = 2k+1$. Z rovnice (41) plyne

$$A_n + B_n = A_n \frac{[n-(2k+1)][n-(2k+2)]}{n(n-1)} =$$
$$= -\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} a_{k+1,k+1} \frac{(n-k-2)!}{[n-(2k+3)]!} \frac{y_0^{(n)} x^n}{n!}, \tag{42}$$

neboť již platí třetí rovnice (39). Z rovnosti (42) zřejmě plyne rovnost (40). Q. e. d.

V. Odvození vzorců pro přímý výpočet koeficientů $a_{k,i}$ řady (25). Pro $k = 2, 3, 4$ jest

$$a_{k,2} = -\frac{k-1}{2k-1} = -\frac{k-1}{q_k}, \tag{43}$$

kterýž vzorec platí pro celá $k \geqq 2$, neboť podle první rovnice (39) jest

$$a_{k+1,2} = -\frac{k-1}{2k-1} - \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = -\frac{(k+1)-1}{2(k+1)-1}. \quad \text{Q. e. d.}$$

Dále dokážeme, že

$$a_{k,3} = \frac{k-2}{3(2k-1)} = \frac{k-2}{3q_k} \tag{44}$$

pro celé $k \geqq 2$. Poněvadž $a_{k-1,1} = 1$, druhá rov. (39) pro $i = 3$ dá

$$a_{k+1,3} = a_{k,3} + \frac{1}{q_k q_{k+1}},$$

tedy vzhledem na první rov. (39) z rovnice (43) plyne (44).

Dále podle druhé rov. (39) jest

$$a_{k+1,4} = a_{k,4} - \frac{k-2}{(2k-3)(2k-1)(2k+1)}, \tag{45}$$

neboť jest

$$a_{k-1,2} = -\frac{k-2}{2(k-1)-1},\ q_k = 2k-1,\ q_{k+1} = 2k+1.$$

Podobně z rovnic (39), (44) odvodíme

$$a_{k+1,5} = a_{k,5} + \frac{a_{k-1,3}}{q_k q_{k+1}} = a_{k,5} + \frac{k-3}{3(2k-3)(2k-1)(2k+1)}. \tag{46}$$

Rovnicemi (39), (43) až (46) vypočteme tabulku koeficientů $a_{k,i}$.

V této tabulce si povšimněme zlomků, jimiž jsou koeficienty $a_{k,i}$ dány pro $k \leqq 10$. Shledáme, že jest

$$a_{k,4} = -\frac{(k-3)(k-2)}{6(2k-3)(2k-1)},\quad a_{k,5} = \frac{(k-4)(k-3)}{30(2k-3)(2k-1)},$$
$$a_{k,6} = -\frac{(k-3)(k-4)(k-5)}{90(2k-5)(2k-3)(2k-1)}, \tag{47}$$
$$a_{k,7} = \frac{(k-6)(k-5)(k-4)}{630(2k-5)(2k-3)(2k-1)}.$$

K důkazu, že rovnice (47) platí též pro $k+1$ (na př. $k+1 = 11$), postačí dosazovati z nich do rovnic (45), (46), po př. užíti rovnic (39). Úplnou indukcí plyne pak platnost rovnic (47) pro každé celé $k \geqq 2$.

Z odvozených vzorců (43), (44), (47) můžeme již uhádnouti obecný tvar koeficientů $a_{k,i}$. Vidíme, že obecně

pro $6 \geqq i = 2s \geqq 2$ jest

$$a_{k,2s} = -\frac{2^s}{(2s)!}\,\frac{(k-s)(k-s-1)\ldots(k-2s+1)}{(2k-1)(2k-3)\ldots(2k-2s+1)}, \tag{48}$$

pro $7 \geqq i = 2s-1 \geqq 3$ jest

$$a_{k,2s-1} = \frac{2^{s-1}}{(2s-1)!}\cdot\frac{(k-s)(k-s-1)\ldots(k-2s+2)}{(2k-1)(2k-3)\ldots(2k-2s+3)}. \tag{49}$$

Vskutku pohled na tabulku koeficientů $a_{k,i}$ přesvědčuje, že vzorce (48), (49) (odvozené jen pro $i \leqq 7$) platí pro $i \leqq 10$, $k \leqq 10$. Že platí obecně pro každé $k \geqq 2$, $k \geqq s \geqq 2$, dokážeme, ukážeme-li, že vyhovují rovnicím (39). Že vyhovují první rov. (39), jsme do-

$k \backslash i$	1	2	3	4	5	6	q_k
1	1	—	—	—	—	—	1
2	1	$\frac{-1}{3}$	—	—	—	—	3
3	1	$\frac{-2}{5}$	$\frac{1}{3.5} = \frac{1}{15}$	—	—	—	5
4	1	$\frac{-3}{7}$	$\frac{2}{3.7} = \frac{2}{21}$	$\frac{-1}{3.5.7} = \frac{-1}{105}$	—	—	7
5	1	$\frac{-4}{9}$	$\frac{3}{3.9} = \frac{1}{9}$	$\frac{-2.3}{6.7.9} = \frac{-1}{63}$	$\frac{1}{3.5.7.9} = \frac{1}{945}$	—	9
6	1	$\frac{-5}{11}$	$\frac{4}{3.11} = \frac{4}{33}$	$\frac{-3.4}{6.9.11} = \frac{-2}{99}$	$\frac{2.3}{30.9.11} = \frac{1}{495}$	$\frac{-1}{3.5.7.9.11} = \frac{-1}{10395}$	11
7	1	$\frac{-6}{13}$	$\frac{5}{3.13} = \frac{5}{39}$	$\frac{-4.5}{6.11.13} = \frac{-10}{429}$	$\frac{3.4}{30.11.13} = \frac{2}{715}$	$\frac{-2.3.4}{90.9.11.13} = \frac{-4}{19305}$	13
8	1	$\frac{-7}{15}$	$\frac{6}{3.15} = \frac{2}{15}$	$\frac{-5.6}{6.13.15} = \frac{-1}{39}$	$\frac{4.5}{30.13.15} = \frac{2}{585}$	$\frac{-3.4.5}{90.11.13.15} = \frac{-2}{6435}$	15
9	1	$\frac{-8}{17}$	$\frac{7}{3.17} = \frac{7}{51}$	$\frac{-6.7}{6.15.17} = \frac{-7}{255}$	$\frac{5.6}{30.15.17} = \frac{1}{255}$	$\frac{-4.5.6}{90.13.15.17} = \frac{-4}{9945}$	17
10	1	$\frac{-9}{19}$	$\frac{8}{3.19} = \frac{8}{57}$	$\frac{-7.8}{6.17.19} = \frac{-28}{969}$	$\frac{6.7}{30.17.19} = \frac{7}{1615}$	$\frac{-5.6.7}{90.15.17.19} = \frac{-7}{14535}$	19

$k \backslash i$	7	8	9	10	q_k
7	$\frac{1}{105.9.11.13} = \frac{1}{135135}$	—	—	—	13
8	$\frac{4}{105.11.13.15} = \frac{4}{225225}$	$\frac{-2^4.4.3.2.1}{8!\,15.13.11.9} = \frac{-1}{2027025}$	—	—	15
9	$\frac{10}{105.13.15.17} = \frac{2}{69615}$	$\frac{-2^4.5.4.3.2}{8!\,17.15.13.11} = \frac{-1}{765765}$	$\frac{2^4.4.3.2.1}{9!\,17.15.13.11} = \frac{1}{34459425}$	—	17
10	$\frac{20}{105.15.17.19} = \frac{4}{101745}$	$\frac{-2^4.6.5.4.3}{8!\,19.17.15.13} = \frac{-1}{440895}$	$\frac{2^4.5.4.3.2}{9!\,19.17.15.13} = \frac{1}{11904165}$	$\frac{-2^5.5.4.3.2.1}{10!\,19.17.15.13.11} = \frac{-1}{654729075}$	19

kázali již na počátku odst. V. Dokažme, že vyhovují též druhé rov. (39). Pro $i = 2s$ jest

$$a_{k+1,2s} = -\frac{2^s}{(2s)!}\cdot\frac{(k+1-s)(k-s)\dots(k-2s+2)}{(2k+1)(2k-1)\dots(2k-2s+3)},$$

$$a_{k-1,2s-2} = -\frac{2^{s-1}}{(2s-2)!}\cdot\frac{(k-s)(k-s-1)\dots(k-2s+2)}{(2k-3)(2k-5)\dots(2k-2s+1)}.$$

Dosadíme-li z těchto rovnic do druhé rov. (39), dostaneme identitu platnou pro každá k, s, jak se můžeme snadno přesvědčit.

Pro $i = 2s - 1$ jest

$$a_{k+1,2s-1} = \frac{2^{s-1}}{(2s-1)!}\cdot\frac{(k+1-s)(k-s)\dots(k-2s+3)}{(2k+1)(2k-1)\dots(2k-2s+5)},$$

$$a_{k-1,2s-3} = \frac{2^{s-2}}{(2s-3)!}\cdot\frac{(k-s)(k-s-1)\dots(k-2s+3)}{(2k-3)(2k-5)\dots(2k-2s+3)},$$

což zase dosaďme do druhé rov. (39); zase dostaneme identitu platnou pro každá k, s.

Přesvědčme se, že vzorce (48), (49) vyhovují též třetí rov. (39). Pro $k = 2s$ rov. (48) dá ihned totéž, co dává třetí rov. (39) pro $k + 1 = 2s$. Pro liché $k = 2s - 1$ rov. (49) dá totéž, co dává třetí rov. (39) pro $k + 1 = 2s - 1$.

Tím je dokázána platnost vzorců (48), (49) pro každé celé $k \geqq 2$, $s \leqq k$.

VI. Srovnávací posudek o vhodnosti řad (9), (16), (25) použitých k přibližné integraci. Zbytek Eulerovy-Mac Laurinovy řady (9) jsme označili R_{2p+3}, poněvadž je v x řádu $(2p + 3)$. Před ním je v této řadě derivace nejvyššího řádu $2p$.

Zbytek řady (25) označme R_{2k+1}, neboť je v x řádu $(2k + 1)$. Před ním v řadě (25) je nejvyšší derivace řádu k.

Zbytek řady (16) označme $R_{2p'+1}$; je řádu $2p' + 1$ a před ním v řadě (16) je nejvyšší derivace řádu $(2p' - 1)$.

Řad (9), (16), (25) užijme nyní k přibližné integraci, t. j. k výpočtu rozdílu $y - y_0$.

a) Užijme jich k výpočtu rozdílu $y - y_0$ tak, že interval x, jenž k tomu rozdílu přísluší, nerozdělíme v intervaly menší, t. j. vypočteme hodnotu omezeného integrálu

$$\int_0^x y'\,\mathrm{d}x = y - y_0$$

jen ze známých hodnot $y^{(i)}$, $y_0^{(i)}$ příslušných krajům integračního intervalu x.

Přesnost výpočtu různými řadami (9), (16), (25) smíme považovati za stejnou, jestliže zanedbané chyby (zbytky R) jsou v x stejného řádu, tedy když jest $2p + 3 = 2p' + 1 = 2k + 1$, neboli $p' = k = p + 1$. T. zn., že v Eulerově-Mac Laurinově řadě (9) musíme vzíti v počet hodnoty y', y'_0 a krajní hodnoty všech sudých derivací až k řádu $2p$, v řadě (16) musíme vzíti v počet krajní hodnoty všech lichých derivací až k řádu $2p' - 1 = 2(p + 1) - 1 = 2p + 1$, tedy až k řádu o 1 vyššímu než u řady (9), v řadě (25) musíme vzíti v počet krajní hodnoty všech derivací, avšak jen až k řádu $k = p + 1$, jenž pro $p > 1$ je vždy menší než nejvyšší řády derivací užitých v řadách (9) a (16). Tu se z řad (9), (16), (25) řada (25) jeví nejvýhodnější.

b) Užijme řad (9), (16), (25) k výpočtu $y - y_0$ tak, že interval x rozdělíme na n stejných dílčích intervalů $h = x/n$. Při tomto postupu je užití Eulerovy-Mac Laurinovy řady (9) nesporně výhodnější než užití řad (16), (25), a to proto, že suma v řadě (9) obsahuje jen rozdíly $y^{(2k)} - y_0^{(2k)}$, takže při součtu těchto sum příslušných dílčím intervalům zmizí (ruší se) členy obsahující hodnoty sudých derivací v dílčích bodech a zbudou jen rozdíly krajních hodnot (příslušných krajům integračního intervalu x).

Příklad. Vypočtěme přibližně číslo e užitím řad (9), (16), (25) a Mac Laurinovou řadou

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}. \tag{50}$$

Položme v nich $x = 1$. Zvolme stejný řád (9) zanedbaných zbytků R, tedy $2p + 3 = 2p' + 1 = 2k + 1 = n + 1 = 9$, neboli $p = 3$, $p' = 4$, $n = 8$, $k = 4$. Řada (9) (Eulerova-Mac Laurinova) dá

$$e - 1 \doteq \frac{1}{2}(e + 1) - \frac{1}{12}(e - 1) + \frac{1}{720}(e - 1) - \frac{1}{30240}(e - 1).$$

Odtud plyne

$$e \doteq \frac{47839}{17599} = 2{,}7182|\underline{794}.$$

Řada (16) zde dá

$$e - 1 \doteq \frac{1}{2}(e + 1) - \frac{1}{24}(e + 1) + \frac{1}{240}(e + 1) - \frac{17}{40320}(e + 1),$$

odkudž plyne

$$e \doteq \frac{58951}{21689} = 2{,}718|\underline{01}.$$

Řada (25) zde dá

$$e - 1 \doteq \frac{1}{2}(e + 1) - \frac{3}{28}(e - 1) + \frac{1}{84}(e + 1) - \frac{1}{1680}(e - 1),$$

odkudž plyne