Konstrukce meridiánu šroubové plochy.

F. Vyčichlo.

(Došlo 17. prosince 1933.)

1. Pro šroubovou plochu **P** buď dána osa O, normální křivka N v rovině $\nu \perp O$ (t. zn., že je známo konstruktivní vytvoření křivky N, konstrukce jejích tečen a evoluty) a parametr určující šroubový pohyb i co do smyslu.

Vytkněme na křivce N libovolný nesingulární bod a a označme n střed křivosti křivky N pro bod a. Rovina $\mu \equiv (a, O)$ protne šroubovou plochu v meridiánu M. Naší úlohou je sestrojení tečny a středu křivosti křivky M pro bod a, je-li znám bod n. (Resp. obráceně.)

Zvolme si roviny ν a μ za prvou resp. druhou průmětnu ortogonálního promítání, potom $(\nu \times \mu) \equiv X$ prochází bodem a. (Viz obr.)

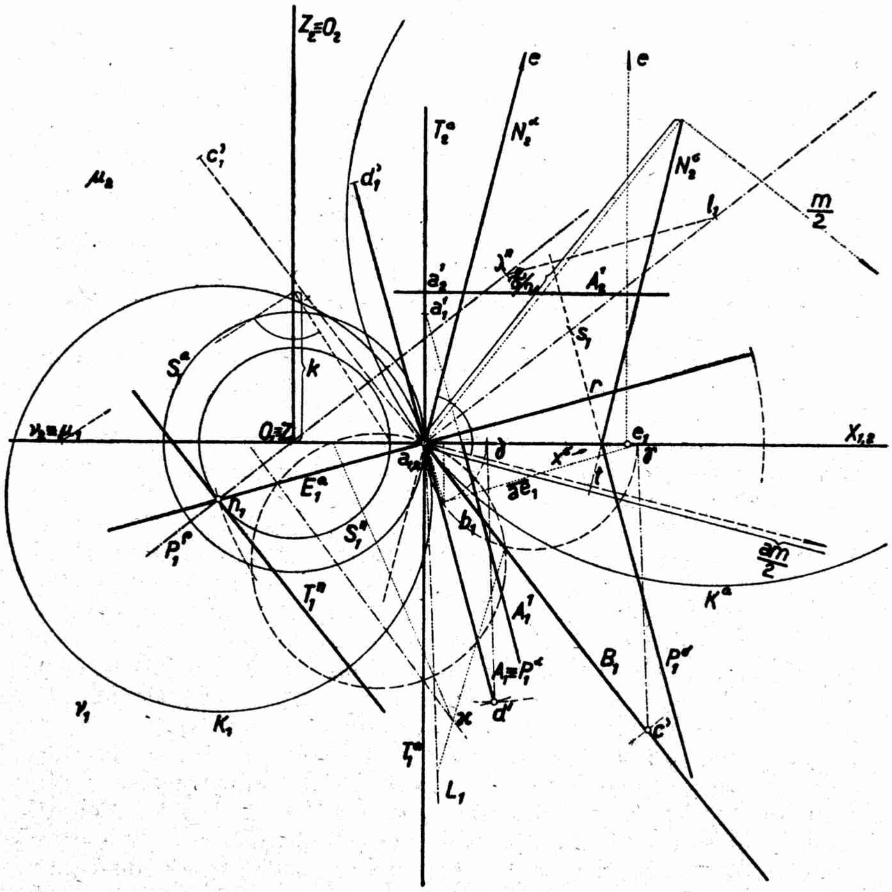
Křivku N nahraďme pro naši úlohu kružnicí křivosti K, jejíž střed je bod n, a plochu **P** plochou **P***, jež vzniká příslušným šroubovým pohybem křivky K.

Společná tečná rovina α těchto ploch v bodě a je určena tečnou A kružnice K v bodě a a tečnou T^a šroubovice S^a, která leží na obou plochách a je vytvořena příslušným šroubovým pohybem bodu a. Při tom je $P^\alpha \equiv A$; $T_{1,2}^a \perp X_{1,2}$ a jde bodem $a_{1,2}$.

Abychom určili T^a, nanesme na T_1^a úsečku $aa_1^1 = aO_1$ a na T_2^a (v příslušném smyslu) úsečku aa_2^1 rovnou parametru šroubového pohybu. Pak $aa^1 \equiv T^a$. Pro rovinu α potom: $\alpha \equiv (P^\alpha, a^1)$. Přímka $N^a = (\mu \times \alpha)$ je patrně tečnou meridiánu M v bodě a.

Spádová přímka E^a (vzhledem k rovině ν) roviny α, procházející bodem a, vytvořuje při našem šroubovém pohybu rozvinutelnou šroubovou plochu, jež se dotýká ploch **P**, **P*** podél S^a; proto jsou E^a a T^a jedním párem jejich sdružených tečen v bodě a. Válec, který se dotýká plochy **P*** podél K, dotýká se v bodě a také plochy **P**; jeho povrchové přímky jsou rovnoběžné k tečně T^n sestrojené v bodě n k šroubovici S^n, již při našem pohybu tento bod opíše. Je tedy přímka A s přímkou B, vedenou bodem a rovnoběžně k T^n, druhým společným párem sdružených tečen v bodě a ploch **P** a **P***. Obě plochy mají tedy v bodě a společnou involuci sdružených tečen a rovina ν je protíná v křivkách, které se v bodě a oskulují (mají tam trojbodový styk). Jsou tedy jejich indikatrix pro bod a totožny a obě plochy se v bodě a oskulují, t. j. libovolná rovina jdoucí a (a různá od roviny tečné) seče obě plochy v křivkách, které mají v bodě a styk nejméně trojbodový.

Pro přímku B platí: $B_1 \perp nO_1$ a je-li b_1 průsečík B_1 s hlavní přímkou $A_1{}^1 \parallel A_1$ roviny α, která prochází a^1, je $ab_1 = nO_1$.



Nahraďme dále šroubovici S^n její oskulační kružnicí K^n v bodě n. Její rovinu označme ϱ. Posouváme-li kružnici K tak, aby její střed n probíhal kružnicí K^n a její rovina byla stále rovnoběžná k rovině ν, vytvoříme translační plochu **P****.

Snadno nahlédneme, že pro řešení naší úlohy je možno nahraditi v okolí bodu a plochu **P*** plochou **P****.

Posuneme-li křivku K^n ve směru na, až bod n splyne s a, přejde do polohy $\overline{K}^n$, která patrně leží na ploše $\mathbf{P}^{**}$. Je-li l střed této kružnice $\overline{K}^n$ a λ^n střed kružnice K^n, je $na = \lambda^n l$.

Konečně mysleme si kružnice K a $\overline{K}^n$ nahrazeny parabolami Π a $\overline{\Pi}$, jež je v bodě a oskulují a mají v průmětu do ν přímku al za společný průměr. Translační plocha stanovená parabolami bude paraboloidem $\mathbf{P}^2$, který plochu $\mathbf{P}$ v bodě a oskuluje, jak opět snadno lze ukázati. Za účelem konstrukce naší úlohy můžeme tedy plochu $\mathbf{P}$ nahraditi paraboloidem $\mathbf{P}^2$. Rovina μ protíná jej v kuželosečce, jejíž střed křivosti pro bod a je hledaným bodem m. Abychom jej mohli snadno sestrojiti, transformujeme afinně paraboloid, aby zůstal oskulačním v bodě a a rovina μ protínala jej v parabole, která příp. v bodě a má vrchol.

Libovolná rovina σ rovnoběžná k rovině α vytne z parabol Π a $\overline{\Pi}$ dvě tětivy, jež jsou sdruženými průměry kuželosečky R, v níž σ seče paraboloid $\mathbf{P}^2$; její střed je průsečík $(\sigma \times al) \equiv s$. Označme dále x^σ průsečík σ s osou X.

Sestrojme konečně k paraboloidu $\mathbf{P}^2$ paraboloid $\mathbf{P}_0^2$ afinně položený, pro rovinu α jakožto samodružnou rovinu afinity a v níž bodu s přísluší $s_0 \equiv x^\sigma$. Potom je i tento paraboloid oskulačním k ploše $\mathbf{P}$ v bodě a, jak je přímo patrno, a rovina σ jej protíná v kuželosečce R_0, která vznikne z R posunutím určeným $\overline{ss_0}$.

Tětiva křivky $\overline{\Pi}$ obsažená v rovině σ promítá se do ν v tětivu paraboly $\overline{\Pi}_1$, která má al_1 za osu, a za vrchol a kružnici K^a (středu l_1) za kružnici křivosti ve vrcholu. Prvý průmět této tětivy je kolmý k al_1 a její poloviční délka je rovna $\sqrt{2\,\overline{al_1}\,.\,\overline{as_1}}$; je tedy reálná, když l a s leží na téže straně bodu a, imaginární, když tyto body jsou na přímce al rozděleny bodem a.

Přenesme rovnoběžně tuto polotětivu do ac'. Tedy:

$$\overline{ac'} = \sqrt{2\,\overline{al_1}\,.\,\overline{as_1}}, \quad ac' \perp al_1.$$

(V obrazci zvolili jsme l_1 souměrně k a vzhledem k s_1, proto $\overline{ac'} = \overline{al_1}$.)

Tětiva křivky Π v rovině σ leží na P^σ a je rovna tětivě paraboly, v níž seče plochu P_0^2 rovina ν. Seče-li tedy $\overline{an}$ přímku P^σ v bodě r, platí pro délku d tětivy:

$$\tfrac{1}{2}d = \sqrt{2\,\overline{an}\,.\,\overline{ar}}.$$

Přeneseme-li tuto úsečku $\frac{1}{2}d$ buď reálnou nebo imaginární od a na kolmici k an do ad', obdržíme dva sdružené poloměry ac', ad' kuželosečky R_1^a, která posunutím daným úsečkou $\overline{ax^\sigma}$ přechází v první průmět $R_{0,1}$ křivky R_0.

Rovina μ seče potom plochu $\mathbf{P}_0^2$ v parabole Λ_0, jejíž střed křivosti příslušný bodu a je hledaným bodem m. Tětivu této paraboly rozpůlenou bodem x^σ obdržíme jakožto průměr křivky $R_{0,1}$. Je-li tudíž $\overline{ae_1}$ poloměr kuželosečky R_1^a položený na X, jest e_1 průmětem bodu e položeným na N^a a úsečka $\overline{ae}$ udává směr a poloviční délku uvedené tětivy.

Bod m leží na kolmici k N^a v bodě a a značí-li t průsečík této kolmice a N^σ, jest:

$$\overline{am} = \frac{\overline{ae}^2}{2\,\overline{at}},$$

poněvadž parabola Λ_0 a afinně k ní položená parabola, pro N^a jako osu afinity a v níž bodu x^σ přísluší bod t, mají v bodě a stejnou křivost.

Abychom tedy sestrojili bod m z daného bodu n, sestrojíme $\overline{ac'}$, $\overline{ad'}$, dále v involuci ve svazku, jehož vrchol je a a v níž (A_1, ab_1), (T_1^a, an_1) jsou dvě dvojice odpovídajících si paprsků, sestrojíme přímku L_1, které s X tvoří další pár involuce; body c', d' vedeme rovnoběžky k L_1, která X protnou v bodech γ a δ. Potom $\overline{ae_1}^2 = \overline{a\gamma}^2 + \overline{a\delta}^2$. Je-li jeden z poloměrů křivky R_1^a imag., buďto na ac' nebo na ad' repres. reálnou úsečkou ac' resp. $\overline{ad'}$, potom je $\overline{ae_1}^2 = -\overline{a\gamma}^2 + \overline{a\delta}^2$ resp. $\overline{ae_1}^2 = \overline{a\gamma}^2 - \overline{a\delta}^2$.

Tím je též délka $\overline{ae}$ stanovena. Je-li $\overline{ae}^2$ kladné, plyne z výrazu:

$$\overline{am} = \frac{\overline{ae}^2}{2\,\overline{at}},$$

že body m a t nejsou rozděleny bodem a; je-li $\overline{ae}^2$ záporné, pak body t a m jsou rozděleny bodem a.

2. Máme-li obráceně sestrojiti bod n, když je dán bod m, sestrojíme nejprve délku $\overline{ae}$ a tedy poloměr $\overline{ae_1}$ křivky R_1^a, jakož i poloměr $\overline{ac'}$, k němuž známe pro poloměr sdružený v R_1^a sice polohu, ale nikoliv délku. Poněvadž konstrukce přímky L_1 nedozná tu žádné změny, lze také bod γ sestrojiti jako prve a z relací dříve uvedených vyplývá konstrukce bodu δ, ať již jsou délky na X nebo na $\overline{ac'}$ reálné nebo imaginární. Rovnoběžka bodem δ k L_1 stanoví na A bod d', takže konečně obdržíme bod n z relace:

$$\overline{an} = \frac{\overline{ad'}^2}{2\,\overline{ar}},$$

při čemž n, r leží opět na téže straně, nebo na různých stranách bodu a, podle toho, je-li délka průměru $\overline{ad'}$ reálná nebo imaginární.

3. Konstrukce se zjednoduší, když tečná rovina α plochy $\mathbf{P}$ je kolmá k rovině μ, nebo když prochází osou X.

V prvém případě je tečna A kolmá k ose X. Zavedeme rovinu α