ČÁST MATEMATICKÁ

O jedné třídě funkcí spojitých.

Vojtěch Jarník.

(Došlo 8. ledna 1934.)

Tento článek je psán tak, aby jej mohl čísti každý čtenář, znalý základů diferenciálního počtu; prosím proto zkušenějšího čtenáře za prominutí, bude-li se mu výklad zdáti zbytečně obšírný. Úkolem jeho jest, seznámiti čtenáře na dvou jednoduchých příkladech s jednou metodou funkcionální analysy, která se v posledních letech osvědčila při mnoha podobných otázkách. Tato metoda spočívá na teorii bodových množství v „prostorech" obecnějších, než jsou prostory, vyšetřované v klasické geometrii; v tomto článku budeme potřebovati základy teorie t. zv. metrických prostorů. Čtenář nemusí z této teorie nic znáti; všechno, co budu v dalším potřebovati, odvozuji v § 2 (triviální pomocnou větu, jíž je věnován § 1, uvádím zvláště jenom proto, abych nemusil přerušovati myšlenkový pochod v § 2). V § 3 — jenž tvoří hlavní část tohoto článku — uvádím jednu aplikaci zmíněné metody; abych ukázal čtenáři, jak rozmanité jsou problémy, při nichž lze této metody použíti, uvádím v § 4 ještě jednu aplikaci (podotýkám, že obsah § 4 není původní — bližší viz v § 4). O jaké otázky jde a jak vypadá jejich řešení, vyložím podrobněji na začátku § 3 a § 4, až budeme míti připraveny potřebné pojmy.

Poznámka. (Připojena 24. ledna 1934.) Věty paragrafu 3 budou uvedeny — v jiné souvislosti — též v pojednání Über stetige Abbildungen der Strecke, jež má vyjíti v Monatshefte für Mathematik und Physik.

§ 1. Pomocná věta.

Jsou-li $x(t)$, $y(t)$ dvě funkce proměnné t, spojité v intervalu $[0, 1]$,[1]) označme znakem $\varrho(x(t), y(t))$ číslo $\max\limits_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - y(t)|$.

[1]) $[a, b]$ značí množství všech čísel t, pro něž platí $a \leq t \leq b$; (a, b) značí množství všech čísel t, pro něž platí $a < t < b$. V označení, týkajícím se teorie množství, přidržuji se jinak knihy K. Petr, Počet integrální, 2. vyd., str. 657—662 (tyto stránky lze čísti nezávisle na ostatním textu). Mimo to zavádím ještě toto označení: $a \varepsilon A$ znamená: „a je prvkem množ-

Pomocná věta 1. Jsou-li funkce $\mathrm{x}_1(t), \mathrm{x}_2(t), \mathrm{x}_3(t), \ldots$ spojité v intervalu $[0, 1]$ a lze-li ke každému kladnému δ nalézti číslo n_0 tak, že pro všechna $n > n_0$ jest $\varrho(\mathrm{x}_n(t), \mathrm{x}_{n_0}(t)) < \delta$, potom existuje funkce $\mathrm{x}(t)$, spojitá v intervalu $[0, 1]$ taková, že $\lim\limits_{n=\infty} \varrho(\mathrm{x}_n(t), \mathrm{x}(t)) = 0$.

D ů k a z : Z předpokladu plyne, že posloupnost $\mathrm{x}_1(t), \mathrm{x}_2(t), \ldots$ je v intervalu $[0, 1]$ stejnoměrně konvergentní. Tedy funkce $\mathrm{x}(t) = \lim\limits_{n=\infty} \mathrm{x}_n(t)$ je spojitá v intervalu $[0, 1]$. Ze stejnoměrné konvergence plyne: ke každému $\delta > 0$ lze nalézti n_0 takové, že pro všechna $n > n_0$ a pro všechna t intervalu $[0, 1]$ platí $|\mathrm{x}_n(t) - \mathrm{x}(t)| < \delta$; tedy je též $\varrho(\mathrm{x}_n(t), \mathrm{x}(t)) < \delta$ pro všechna $n > n_0$, jak bylo dokázati.

§ 2. Metrické prostory.

I. Budiž R množství; budiž každému páru x, y prvků z R přiřazeno určité číslo $\varrho(x, y)$. Potom nazýváme R *metrickým prostorem*, jestliže číslo $\varrho(x, y)$ má tyto vlastnosti:[2])

1. Je-li $x \varepsilon R$, jest $\varrho(x, x) = 0$.
2. Je-li $x \varepsilon R$, $y \varepsilon R$, $x \neq y$, jest $\varrho(x, y) = \varrho(y, x) > 0$.
3. Je-li $x \varepsilon R$, $y \varepsilon R$, $z \varepsilon R$, jest $\varrho(x, z) \leqq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$.

Prvky metrického prostoru R nazýváme též *body*; číslo $\varrho(x, y)$ nazýváme *vzdáleností* bodů x, y.

II. Budiž R metrický prostor; budiž $x_1, x_2, \ldots$ posloupnost bodů z R. Existuje-li bod $x \varepsilon R$ takový, že $\lim\limits_{n=\infty} \varrho(x_n, x) = 0$, říkáme, že posloupnost $x_1, x_2, \ldots$ je konvergentní a bod x nazýváme její limitou (značka $\lim\limits_{n=\infty} x_n = x$).[3])

III. Budiž $x_1, x_2, \ldots$ posloupnost bodů metrického prostoru R; jestliže ke každému kladnému číslu δ existuje číslo n_0 tak, že pro všechna $n > n_0$ jest $\varrho(x_n, x_{n_0}) < \delta$, nazýváme posloupnost $x_1, x_2, \ldots$ *fundamentální posloupností*. Každá konvergentní posloupnost bodů z R je fundamentální,[4]) ale fundamentální po-

ství A“ (písmena ε neužívám jinak než v tomto smyslu). Znakem 0 značím jednak nulu, jednak množství prázdné; ze souvislosti je vždy jasno, o který případ jde, takže nedorozumění je vyloučeno.

[2]) Podmínky 1, 2, 3 je možno nahraditi ekvivalentními podmínkami, jež jsou formálně poněkud jednodušší; viz třeba E. Čech, Příspěvek k teorii dimense, Časopis 62 (1933), str. 277—291 (viz zvláště str. 280—281, odst. 5).

[3]) Taková posloupnost může míti nejvýše jednu limitu; neboť je-li $\lim\limits_{n=\infty} \varrho(x_n, x) = 0$, $\lim\limits_{n=\infty} \varrho(x_n, y) = 0$, je podle I: $\varrho(x, y) \leqq \varrho(x, x_n) + \varrho(x_n, y)$ pro každé n, tedy $\varrho(x, y) = 0$, tedy $x = y$.

[4]) Neboť: je-li $\lim\limits_{n=\infty} \varrho(x_n, x) = 0$, lze ke každému $\delta > 0$ nalézti n_0 tak, že pro $n \geqq n_0$ jest $\varrho(x_n, x) < \frac{1}{2}\delta$; pro $n > n_0$ je tedy $\varrho(x_n, x_{n_0}) \leqq \varrho(x_n, x) + \varrho(x, x_{n_0}) < \delta$.

sloupnost nemusí býti vždy konvergentní. *Jestliže však každá fundamentální posloupnost bodů z R je konvergentní, nazýváme prostor R úplným.*

IV. Pro nás bude důležitý tento příklad metrického prostoru: Označme znakem C množství všech reálných funkcí jedné reálné proměnné, definovaných a spojitých v intervalu $[0, 1]$. Je-li $\mathrm{x}(t) \varepsilon C$, $\mathrm{y}(t) \varepsilon C$, klaďme $\varrho(\mathrm{x}(t), \mathrm{y}(t)) = \underset{0 \leqq t \leqq 1}{\mathrm{Max}} \mid \mathrm{x}(t) - \mathrm{y}(t) \mid$. Vlastnosti I 1 a I 2 jsou zřejmě splněny, vlastnost I 3 plyne takto: Je-li $\mathrm{x}(t) \varepsilon C$, $\mathrm{y}(t) \varepsilon C$, $\mathrm{z}(t) \varepsilon C$ a je-li $0 \leq t \leq 1$, jest $\mid \mathrm{x}(t) - \mathrm{z}(t) \mid \leqq \mid \mathrm{x}(t) - \mathrm{y}(t) \mid + \mid \mathrm{y}(t) - \mathrm{z}(t) \mid \leqq \varrho(\mathrm{x}(t), \mathrm{y}(t)) + \varrho(\mathrm{y}(t), \mathrm{z}(t))$, z čehož $\varrho(\mathrm{x}(t), \mathrm{z}(t)) \leqq \varrho(\mathrm{x}(t), \mathrm{y}(t)) + \varrho(\mathrm{y}(t), \mathrm{z}(t))$. Je tedy C metrický prostor a z pomocné věty 1. (§ 1) plyne ihned, že *C jest úplný metrický prostor.*[5])

V. Budiž R opět libovolný metrický prostor. Je-li $x \varepsilon R$ a $r > 0$, potom množství všech bodů prostoru R, jež mají od bodu x vzdálenost menší než r, budeme nazývati *koulí* (prostoru R) nebo určitěji koulí (prostoru R) o středu x a poloměru r.[6])

VI. Budiž R metrický prostor; množství $M \subset R$ nazýváme *nehustým*, jestliže ke každé kouli K prostoru R existuje koule K' tak, že $K' \subset K$, $K'M = 0$. (Na př. množství prázdné je nehusté.) Je-li M nehusté a $N \subset M$, je zřejmě i N nehusté, neboť z $K'M = 0$ plyne $K'N = 0$. Množství $M \subset R$ nazýváme *množstvím první kategorie*, existuje-li posloupnost množství nehustých $M_1, M_2, M_3, \ldots$ tak, že $M = \sum_{n=1}^{\infty} M_n$. Množství nehusté (a tedy speciálně množství prázdné) je ovšem první kategorie, neboť $M = M + M + \ldots$ Je-li M první kategorie a $M' \subset M$, je ovšem i M' první kategorie, neboť ze vztahu $M = \sum_{n=1}^{\infty} M_n$ plyne $M' = \sum_{n=1}^{\infty} M' M_n$. Množství $M \subset R$, jež není první kategorie, nazýváme *množstvím druhé kategorie*. Množství druhé kategorie je tedy vždy neprázdné. Je-li $M \subset R$ a je-li $R - M$ první kategorie, nazývá se M *residuel.*[7]) *Je-li $M_1, M_2, \ldots$ konečná nebo nekonečná posloupnost množství první kategorie, je i $M_1 + M_2 + M_3 + \ldots$ množství první kate-*

---

[5]) Písmenem C budeme vždy značiti tento prostor. Ještě jednodušší příklad úplného prostoru je n-rozměrný cartézský prostor (viz Petr, Počet integrální, 2 vyd., str. 692 a násl.), jejž však nebudeme potřebovati.

[6]) Střed a poloměr koule nemusí býti jednoznačně určen; na př. skládá-li se prostor R ze dvou bodů a, b, pro něž $\varrho(a, b) = 1$, je koule o středu a a poloměru 2 totožná s koulí o středu b a poloměru 2 a též s koulí o středu b a poloměru 3.

[7]) Je-li $M \subset M' \subset R$ a je-li M residuel, je tím spíše M' residuel; neboť $R - M$ je první kategorie a tedy tím spíše $R - M' \subset R - M$.

gorie: neboť je-li $M_n = \sum_{k=1}^{\infty} M_{kn}$, kde M_{kn} jsou nehustá, je $\sum_n M_n = \sum_{k,n} M_{kn}$ a nehustá množství M_{kn} lze srovnati v posloupnost.

Obdobně: *Je-li* $N_1, N_2, \ldots$ *konečná nebo nekonečná posloupnost residuelů, je i* $N_1 . N_2 . N_3 \ldots$ *residuel.* Neboť $R - N_1 . N_2 . N_3 \ldots = \sum_n (R - N_n)$ je množství první kategorie, ježto $R - N_n$ jsou množství první kategorie.

VII. *Budiž R neprázdný* **úplný** *prostor; potom R je druhé kategorie.*

Důkaz: Budiž $A \subset R$ libovolné množství první kategorie, t. j. $A = \sum_{n=1}^{\infty} M_n$, kde M_n jsou nehustá. Máme dokázati, že $A \neq R$, t. j. že existuje aspoň jedno $x \varepsilon R - A$.

Zvolme libovolnou kouli K_0[8]; ta má nějaký střed x_0 a poloměr $r_0 > 0$. Zavedeme posloupnost koulí $K_0, K_1, K_2, \ldots$ takto: je-li koule K_n (o středu x_n a poloměru r_n) pro určité celé $n \geqq 0$ definována, označme znakem K'_n kouli o středu x_n a poloměru $\mathrm{Min}\left(\frac{1}{2}r_n, \frac{1}{n+1}\right)$; kouli K_{n+1} (o středu x_{n+1} a poloměru r_{n+1}) sestrojme tak, že $K_{n+1} \subset K'_n$, $K_{n+1}M_{n+1} = 0$.[9] Pro $n > m \geqq 0$ je zřejmě $K_n \subset K'_m$ a tedy $\varrho(x_n, x_m) < \mathrm{Min}\left(\frac{1}{2}r_m, \frac{1}{m+1}\right)$. Tedy posloupnost $x_1, x_2, \ldots$ je zřejmě fundamentální; ježto R je úplné, existuje $x \varepsilon R$ tak, že $\lim_{n=\infty} x_n = x$. Pro $n > m \geqq 0$ jest $\varrho(x, x_m) \leqq \varrho(x_n, x_m) + \varrho(x_n, x) < \frac{1}{2}r_m + \varrho(x_n, x)$. Tedy $\varrho(x, x_m) \leqq \frac{1}{2}r_m + \lim_{n=\infty} \varrho(x_n, x) = \frac{1}{2}r_m < r_m$. Tedy jest $x \varepsilon K_m$ pro všechna $m > 0$, tedy (ježto $K_m M_m = 0$) x nepatří k žádnému M_m, tedy $x \varepsilon R - A$, jak bylo dokázati.

Důsledek. *Budiž R neprázdný úplný prostor; budiž* $M \subset R$ *residuel; potom je M druhé kategorie (a tedy* $M \neq 0$*).* Neboť $R - M$ je první kategorie; kdyby i M bylo první kategorie, bylo by i $R = M + (R - M)$ první kategorie, což je ve sporu s větou právě dokázanou.

---

[8]) Jde vesměs o koule prostoru R. Ježto $R \neq 0$, existuje aspoň jedna koule.

[9]) To lze, ježto M_{n+1} je nehusté.

§ 3. Hlavní věta.

Budeme se nyní zabývati prostorem C. Je-li $x(t) \varepsilon C$, potom nabývá spojitá funkce $x(t)$ v intervalu $[0, 1]$ alespoň pro jednu hodnotu t své maximální hodnoty $\underset{0 \leqq t \leqq 1}{\operatorname{Max}} x(t)$ a rovněž své minimální hodnoty $\underset{0 \leqq t \leqq 1}{\operatorname{Min}} x(t)$. Poněvadž $x(t)$ je spojitá v $[0, 1]$, nabývá $x(t)$ v intervalu $[0, 1]$ též každé hodnoty, ležící mezi hodnotou maximální a minimální. Dokážeme nyní, že existuje residuel A takový, že každá funkce $x(t) \varepsilon A$ (t. j. tedy každá funkce spojitá v $[0, 1]$, vyjma některé funkce, jež tvoří dohromady množství první kategorie) má tyto vlastnosti: 1. Funkce $x(t)$ nabývá své maximální (a též své minimální) hodnoty v intervalu $[0, 1]$ jen pro *jednu* hodnotu t. 2. Naproti tomu nabývá funkce $x(t)$ každé hodnoty y, ležící *mezi* její maximální a minimální hodnotou, pro *nekonečně* mnoho hodnot t.[10]) Připomeňme, že C je neprázdný úplný prostor, takže residuel A je neprázdný; t. j. existuje skutečně aspoň jedna funkce $x(t) \varepsilon C$, která má vlastnosti 1. a 2. Výsledky, o nichž jsem právě mluvil, vyslovíme podrobně v těchto třech větách, jež v následujícím dokážeme:

Věta 1. *Budiž A_1 množství oněch funkcí $x(t) \varepsilon C$, jež mají tuto vlastnost: existuje* **jen jedna** *hodnota $t \varepsilon [0, 1]$, pro kterou platí* $x(t) = \underset{0 \leqq \tau \leqq 1}{\operatorname{Max}} x(\tau)$. *Tvrdím: A_1 je residuel.*

Věta 2. *Budiž A_2 množství oněch funkcí $x(t) \varepsilon C$, jež mají tuto vlastnost: existuje* **jen jedna** *hodnota $t \varepsilon [0, 1]$, pro kterou platí* $x(t) = \underset{0 \leqq \tau \leqq 1}{\operatorname{Min}} x(\tau)$. *Tvrdím: A_2 je residuel.*

Věta 3. *Budiž A_3 množství oněch funkcí $x(t) \varepsilon C$, jež mají následující vlastnost: je-li $0 \leqq \alpha < \beta \leqq 1$ a je-li* $\underset{\alpha \leqq \tau \leqq \beta}{\operatorname{Min}} x(\tau) < y < \underset{\alpha \leqq \tau \leqq \beta}{\operatorname{Max}} x(\tau)$, *potom existuje* **nekonečně mnoho** *hodnot $t \varepsilon [\alpha, \beta]$, pro něž platí $x(t) = y$. Tvrdím: A_3 je residuel.*[11])

Poznámka. Položme $A = A_1 . A_2 . A_3$; A je tedy též residuel; t. j. také ty funkce $x(t) \varepsilon C$, jež mají *současně* všechny vlastnosti, vyslovené ve větě první, druhé i třetí, tvoří residuel (a tedy množství neprázdné).

Přistupme nyní k důkazům. Připomínám především známou větu Weierstrassovu[12]): Je-li $x(t)$ spojitá v intervalu $[0, 1]$ a je-li

---

[10]) Místo této vlastnosti dokážeme ve větě 3 vlastnost ještě ostřejší.

[11]) To je ono zostření, o němž jsem mluvil v poslední poznámce pod čarou; specielně pro $\alpha = 0$, $\beta = 1$ dostáváme právě vlastnost 2, o níž tehdy byla řeč.

[12]) Viz třeba K. Petr, Počet integrální, 2. vyd. (1931), str. 332.

$\delta > 0$, potom existuje (reálný) polynom $w(t)$[13]) tak, že pro všechna $t \varepsilon [0, 1]$ platí $| x(t) - w(t) | < \delta$.

Poznamenejme ještě: je-li $w(t)$ polynom, pak existuje číslo $p > 0$ tak, že pro $0 \leqq t < t' \leqq 1$ platí $\left| \frac{w(t') - w(t)}{t' - t} \right| < p$. Stačí totiž položiti $p = \underset{0 \leqq t \leqq 1}{\text{Max}} | w'(t) | + 1$; neboť potom jest podle věty o střední hodnotě $\left| \frac{w(t') - w(t)}{t' - t} \right| = | w'(\vartheta) | < p$, kdež $t < \vartheta < t'$. Těchto dvou poznámek budeme stále používati.

Důkaz věty 1. Je-li $n > 1$, n celé, označme znakem D_n množství oněch funkcí $x(t) \varepsilon C$, jež mají tuto vlastnost: existují dvě hodnoty t_1, t_2 takové, že platí

$$0 \leqq t_1 < t_2 \leqq 1, \quad t_2 - t_1 > 1/n, \quad x(t_1) = x(t_2) = \underset{0 \leqq \tau \leqq 1}{\text{Max}}\, x(\tau).$$

Je patrno: funkce $x(t) \varepsilon C$ patří aspoň k jednomu množství D_n tehdy a jen tehdy, nabývá-li $x(t)$ své maximální hodnoty v intervalu $[0, 1]$ aspoň dvakráte; čili platí $\sum_{n=2}^{\infty} D_n = C - A_1$. Máme tedy dokázati, že množství $\sum_{n=2}^{\infty} D_n$ je první kategorie; k tomu stačí dokázati, že množství D_n jsou nehustá. Budiž tedy n celé, $n > 1$; budiž K libovolná koule prostoru C; máme sestrojiti kouli K' takovou, že $K' \subset K$, $K'D_n = 0$. Budiž $v(t)$ střed a r poloměr koule K. Budiž $t_0 \varepsilon [0, 1]$ jedna z hodnot, pro kterou $v(t_0) = \underset{0 \leqq t \leqq 1}{\text{Max}}\, v(\tau)$. Definujme funkci $z(t)$ takto: pro $t \leqq t_0 - \frac{1}{2n}$ a pro $t \geqq t_0 + \frac{1}{2n}$ budiž $z(t) = 0$; pro $t = t_0$ budiž $z(t) = \frac{1}{2}r$; v intervalu $\left[t_0 - \frac{1}{2n}, t_0\right]$ a rovněž v intervalu $\left[t_0, t_0 + \frac{1}{2n}\right]$ budiž $z(t)$ lineární. Budiž K' koule o středu $v(t) + z(t)$ a o poloměru $\frac{1}{4}r$. Budiž $x(t) \varepsilon K'$, t. j. $x(t) = v(t) + z(t) + \xi(t)$, kde $\xi(t) \varepsilon C$, $\underset{0 \leqq t \leqq 1}{\text{Max}} | \xi(t) | < \frac{1}{4}r$; máme dokázati předně, že $x(t) \varepsilon K$, za druhé že $x(t) \varepsilon C - D_n$. Především pro $0 \leqq t \leqq 1$ jest $| x(t) - v(t) | < \frac{1}{2}r + \frac{1}{4}r < r$, tedy též $\varrho(x(t), v(t)) < r$, tedy $x(t) \varepsilon K$.

[13]) Všechny funkce pojímáme zde jako funkce, definované v intervalu [0, 1]. Tedy i tehdy, je-li původně funkce $w(t)$ definována třeba pro všechna t (na př. je-li $w(t)$ polynom), beru v úvahu pouze její hodnoty pro $0 \leqq t \leqq 1$, t. j. omezuji dodatečně její definiční obor na interval [0, 1].

Za druhé: pro $t = t_0$ jest $\mathrm{x}(t_0) = \mathrm{v}(t_0) + \frac{1}{2}r + \xi(t_0) > \mathrm{v}(t_0) + \frac{1}{4}r$, kdežto pro $0 \leq t \leq 1$, $|t - t_0| \geq 1/2n$ jest $\mathrm{x}(t) = \mathrm{v}(t) + \xi(t) < \mathrm{v}(t_0) + \frac{1}{4}r$. Funkce $\mathrm{x}(t)$ může tedy v intervalu $[0, 1]$ nabývati svého maxima jen v bodech intervalu $\left(t_0 - \frac{1}{2n}, t_0 + \frac{1}{2n}\right)$, jehož délka jest právě $1/n$; tedy $\mathrm{x}(t)$ nepatří k D_n, jak bylo dokázati.

Důkaz věty 2. není třeba prováděti, ježto je zcela obdobný důkazu věty 1.

Důkaz věty 3. je poněkud složitější. Ukáži napřed, že věta 3. je důsledkem této pomocné věty:

Pomocná věta 2. *Budiž* $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$. *Znakem* $A_{\alpha,\beta}$ *označme množství oněch funkcí* $\mathrm{x}(t) \varepsilon C$, *jež mají tuto vlastnost: je-li* $\underset{\alpha \leq t \leq \beta}{\mathrm{Min}}\, \mathrm{x}(t) < y < \underset{\alpha \leq t \leq \beta}{\mathrm{Max}}\, \mathrm{x}(t)$, *potom existuje nekonečně mnoho hodnot* $t \varepsilon [\alpha, \beta]$, *pro něž platí* $\mathrm{x}(t) = y$. *Tvrdím:* $A_{\alpha,\beta}$ *je residuel.*

Předpokládejme, že pomocná věta 2. je správná. Všechny intervaly $[\alpha, \beta]$, kde α, β jsou racionální čísla, $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$, lze srovnati v posloupnost $[\alpha_1, \beta_1], [\alpha_2, \beta_2], \ldots$ Položme $B = \prod_{n=1}^{\infty} A_{\alpha_n,\beta_n}$; B je residuel (neboť A_{α_n,β_n} jsou residuely podle pomocné věty 2). Budiž $\mathrm{x}(t) \varepsilon B$, budiž $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$, budiž $\underset{\alpha \leq t \leq \beta}{\mathrm{Min}}\, \mathrm{x}(t) < y < \underset{\alpha \leq t \leq \beta}{\mathrm{Max}}\, \mathrm{x}(t)$. Ježto racionální čísla leží všude hustě a ježto $\mathrm{x}(t)$ je spojitá v $[0, 1]$, existuje celé $n > 0$ tak, že platí $\alpha < \alpha_n < \beta_n < \beta$, $\underset{\alpha_n \leq t \leq \beta_n}{\mathrm{Min}}\, \mathrm{x}(t) < y < \underset{\alpha_n \leq t \leq \beta_n}{\mathrm{Max}}\, \mathrm{x}(t)$. Ježto $\mathrm{x}(t) \varepsilon A_{\alpha_n,\beta_n}$, existuje v intervalu $[\alpha_n, \beta_n]$ — a tedy tím spíše v intervalu $[\alpha, \beta]$ — nekonečně mnoho hodnot t, pro něž jest $\mathrm{x}(t) = y$. Tedy jest $\mathrm{x}(t) \varepsilon A_3$; tedy jest $B \subset A_3$, tedy jest také A_3 residuel, jak bylo dokázati. Zbývá nám tedy provésti:

Důkaz pomocné věty 2. Budiž $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$; budiž n celé, $n > 1$. Označme znakem E_n množství oněch funkcí $\mathrm{x}(t) \varepsilon C$, jež mají tuto vlastnost: Existuje aspoň jedna hodnota $y \varepsilon \left(\underset{\alpha \leq t \leq \beta}{\mathrm{Min}}\, \mathrm{x}(t) + \frac{1}{n}, \underset{\alpha \leq t \leq \beta}{\mathrm{Max}}\, \mathrm{x}(t) - \frac{1}{n}\right)$, které funkce $\mathrm{x}(t)$ nabývá v intervalu $[\alpha, \beta]$ méně než n-kráte.

Zřejmě jest $\sum_{n=2}^{\infty} E_n = C - A_{\alpha,\beta}$[14]; stačí tedy dokázati, že

[14]) Neboť: je-li předně $\mathrm{x}(t) \varepsilon E_n$ pro nějaké n, je jistě $\mathrm{x}(t) \varepsilon C - A_{\alpha,\beta}$. Budiž za druhé $\mathrm{x}(t) \varepsilon C - A_{\alpha,\beta}$; to znamená: existuje $y \varepsilon (\underset{\alpha \leq t \leq \beta}{\mathrm{Min}}\, \mathrm{x}(t), \underset{\alpha \leq t \leq \beta}{\mathrm{Max}}\, \mathrm{x}(t))$

množství E_n jsou nehustá. Budiž tedy $n > 1$, n celé; budiž K libovolná koule prostoru C o středu $\mathrm{v}(t)$ a poloměru r. Máme sestrojiti kouli K' tak, že jest $K' \subset K$, $K'E_n = 0$.

Existuje především polynom $\mathrm{w}(t)$ takový, že $\underset{0 \leqq t \leqq 1}{\mathrm{Max}} \mid \mathrm{w}(t) - \mathrm{v}(t) \mid < \frac{1}{2}r$. Existuje dále číslo $p > 0$ tak, že pro všechny hodnoty t, t', vyhovující vztahům $0 \leqq t < t' \leqq 1$, platí nerovnost $\left| \frac{\mathrm{w}(t') - \mathrm{w}(t)}{t' - t} \right| < p$. Položme

$$\sigma = \mathrm{Min}\left(\frac{1}{2n}, \tfrac{1}{4}r\right); \tag{1}$$

zvolme sudé číslo $m > 0$ tak velké, že platí

$$\frac{n+2}{m} < \beta - \alpha, \quad \frac{n+2}{m} p < \tfrac{1}{4}\sigma. \tag{2}$$

Definujme funkci $\mathrm{z}(t)$ takto:

$$\mathrm{z}\left(\frac{s}{m}\right) = 0 \text{ pro } s \text{ sudé, } 0 \leqq s \leqq m;$$

$$\mathrm{z}\left(\frac{s}{m}\right) = \sigma \text{ pro } s \text{ liché, } 1 \leqq s \leqq m - 1;$$

$\mathrm{z}(t)$ je lineární v každém intervalu

$$s/m \leqq t \leqq (s+1)/m \quad (s = 0, 1, 2, \ldots, m-1).$$

Budiž K' koule o středu $\mathrm{w}(t) + \mathrm{z}(t)$ a poloměru $\frac{1}{4}\sigma$. Dokážeme, že platí $K' \subset K$, $K'E_n = 0$. Budiž tedy $\mathrm{x}(t) \in K'$, to jest $\mathrm{x}(t) = \mathrm{w}(t) + \mathrm{z}(t) + \xi(t)$, $\xi(t) \in C$, $\underset{0 \leqq t \leqq 1}{\mathrm{Max}} \mid \xi(t) \mid < \frac{1}{4}\sigma$; máme dokázati, že $\mathrm{x}(t) \in K$, $\mathrm{x}(t) \in C - E_n$.

Předně jest pro $0 \leqq t \leqq 1$ [podle (1)]

$$\mid \mathrm{x}(t) - \mathrm{v}(t) \mid \leqq \mid \mathrm{w}(t) - \mathrm{v}(t) \mid + \mid \mathrm{z}(t) \mid + \mid \xi(t) \mid < \\ < \tfrac{1}{2}r + \sigma + \tfrac{1}{4}\sigma < r,$$

tedy $\mathrm{x}(t) \in K$. Za druhé: budiž

$$\underset{\alpha \leqq t \leqq \beta}{\mathrm{Min}}\, \mathrm{x}(t) + \frac{1}{n} < y < \underset{\alpha \leqq t \leqq \beta}{\mathrm{Max}}\, \mathrm{x}(t) - \frac{1}{n}; \tag{3}$$

---

tak, že funkce $\mathrm{x}(t)$ nenabývá hodnoty y v intervalu $[\alpha, \beta]$ nekonečně mnohokrát; potom však pro dostatečně velké n platí, že $y \in \left(\underset{\alpha \leqq t \leqq \beta}{\mathrm{Min}}\, \mathrm{x}(t) + \frac{1}{n}, \underset{\alpha \leqq t \leqq \beta}{\mathrm{Max}}\, \mathrm{x}(t) - \frac{1}{n}\right)$ a že funkce $\mathrm{x}(t)$ nabývá hodnoty y v intervalu $[\alpha, \beta]$ méně než n-krát; tedy $\mathrm{x}(t) \in E_n$ pro dosti velké n.

máme dokázati, že existuje n hodnot $t_1, t_2, \ldots, t_n$ takových, že $\alpha \leqq t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leqq \beta$, $\mathrm{x}(t_i) = y$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$. To dokážeme takto: z (3) plyne

$$\underset{\alpha \leqq t \leqq \beta}{\mathrm{Min}}\, \mathrm{w}(t) - \sigma - \tfrac{1}{4}\sigma - \tfrac{1}{2}\sigma + \frac{1}{n} < y - \tfrac{1}{2}\sigma < \underset{\alpha \leqq t \leqq \beta}{\mathrm{Max}}\, \mathrm{w}(t) + \sigma + \tfrac{1}{4}\sigma - \tfrac{1}{2}\sigma - \frac{1}{n}$$

a tedy podle (1)

$$\underset{\alpha \leqq t \leqq \beta}{\mathrm{Min}}\, \mathrm{w}(t) < y - \tfrac{1}{2}\sigma < \underset{\alpha \leqq t \leqq \beta}{\mathrm{Max}}\, \mathrm{w}(t); \tag{4}$$

existuje tedy aspoň jedna hodnota t_0 tak, že platí

$$\alpha \leqq t_0 \leqq \beta,\ \mathrm{w}(t_0) = y - \tfrac{1}{2}\sigma. \tag{5}$$

Podle (2) existuje interval $[\tau_1, \tau_2]$ takový, že

$$\tau_2 - \tau_1 = \frac{n+2}{m},\ \alpha \leqq \tau_1 \leqq t_0 \leqq \tau_2 \leqq \beta. \tag{6}$$

Následkem (6) existuje sudé číslo s $(0 \leqq s \leqq m)$ takové, že body $\frac{s}{m}, \frac{s+1}{m}, \frac{s+2}{m}, \ldots, \frac{s+n}{m}$ leží vesměs v intervalu $[\tau_1, \tau_2]$. Pišme $(s+i)/m = u_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Pro sudé i $(0 \leqq i \leqq n)$ je tedy $\mathrm{z}(u_i) = 0$ a tedy [podle (2), (5), (6)]

$$\mathrm{x}(u_i) = \mathrm{w}(u_i) + \xi(u_i) < \mathrm{w}(t_0) + |u_i - t_0| \,.\, p + \tfrac{1}{4}\sigma \leqq$$
$$\leqq \mathrm{w}(t_0) + \frac{n+2}{m}\, p + \tfrac{1}{4}\sigma < \mathrm{w}(t_0) + \tfrac{1}{2}\sigma = y;$$

kdežto pro liché i $(1 \leqq i \leqq n)$ je $\mathrm{z}(u_i) = \sigma$ a tedy [podle (2), (5), (6)]

$$\mathrm{x}(u_i) = \mathrm{w}(u_i) + \sigma + \xi(u_i) > \mathrm{w}(t_0) - |u_i - t_0|\, p + \sigma - \tfrac{1}{4}\sigma \geqq$$
$$\geqq \mathrm{w}(t_0) - \frac{n+2}{m}\, p + \frac{3\sigma}{4} > \mathrm{w}(t_0) + \tfrac{1}{2}\sigma = y.$$

Ježto $u_0 < u_1 < u_2 < \ldots < u_n$ a ježto $\mathrm{x}(u_i) < y$ pro sudé i a $\mathrm{x}(u_i) > y$ pro liché i, plyne ze spojitosti funkce $\mathrm{x}(t)$, že existuje n hodnot $t_1, t_2, \ldots, t_n$ tak, že platí

$$\alpha \leqq u_0 < t_1 < u_1 < t_2 < u_2 < t_3 < \ldots < u_{n-1} < t_n < u_n \leqq \beta,$$
$$\mathrm{x}(t_i) = y \text{ pro } i = 1, 2, \ldots, n,$$

jak bylo dokázati.

§ 4. O spojitých funkcí bez derivace.

Abych čtenáři ukázal, jak rozmanité jsou aplikace metody, kterou jsme v předešlém paragrafu objasnili na jednom jednoduchém příkladě, provedu zde podobnou metodou důkaz následující věty:

Věta 4. *Budiž P množství oněch funkcí* $x(t) \varepsilon C$, *jež mají aspoň pro jednu hodnotu* $t \varepsilon (0, 1)$ *konečnou derivaci. Tvrdím: P je množství první kategorie.*

Poznámka 1. Množství oněch funkcí $x(t) \varepsilon C$, jež nemají konečnou derivaci v *žádném* bodě $t \varepsilon (0, 1)$, jest tedy residuel (a tedy množství neprázdné). Existuje tedy funkce spojitá v intervalu $[0, 1]$, jež nemá konečnou derivaci v žádném vnitřním bodě tohoto intervalu. Existence takových funkcí byla dokázána již dávno (Weierstrass) a sice tak, že se taková funkce přímo zkonstruovala. Zde máme jiný, velmi jednoduchý důkaz této věty, při čemž není nutno takovou funkci skutečně konstruovati.

Poznámka 2. Jak jsem již v úvodu podotkl, není tento paragraf původní. Větu 4, ba dokonce větu o něco ostřejší, dokázali Mazurkiewicz a Banach.[15]) Důkaz, který zde provádím, pochází v hlavních rysech od Banacha.

Důkaz věty 4. Budiž $n > 2$, n celé; budiž P_n množství oněch funkcí $x(t) \varepsilon C$, jež mají tuto vlastnost: existuje aspoň jedno $t \varepsilon \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$ takové, že nerovnost $\left|\frac{x(t+h) - x(t)}{h}\right| \leqq n$ je splněna pro všechny hodnoty h, hovící nerovnostem $0 < |h| \leqq 1/n$. Je-li $x(t) \varepsilon P$, existuje aspoň jedna hodnota $t_0 \varepsilon (0, 1)$ tak, že $x(t)$ má v bodě t_0 konečnou derivaci. Pro dosti velké n jest pak jistě $t_0 \varepsilon \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$ a nerovnost $\left|\frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h}\right| \leqq n$ jest splněna pro všechna h, pro něž platí $0 < |h| \leqq 1/n$, t. j. pro dosti velké n jest $x(t) \varepsilon P_n$.

Tedy jest $P \subset \sum_{n=3}^{\infty} P_n$ a stačí tedy dokázati, že množství P_n jsou nehustá. Budiž tedy n celé, $n > 2$ a budiž K libovolná koule prostoru C o středu $v(t)$ a poloměru r. Máme sestrojiti kouli K' tak, že platí $K' \subset K$, $K'P_n = 0$. Sestrojme polynom $w(t)$ takový, že jest $\underset{0 \leqq t \leqq 1}{\mathrm{Max}} |v(t) - w(t)| < \frac{1}{2}r$; budiž $p > 0$ tak voleno, že pro všechny hodnoty t, t', splňující vztahy $0 \leqq t < t' \leqq 1$, platí ne-

[15]) Mazurkiewicz, Sur les fonctions non dérivables, Studia mathem., III (1931), str. 92—94; Banach, Über die Bairesche Klasse gewisser Funktionenmengen, Studia mathem. III (1931), str. 174—179. Další výsledky v tomto směru: Auerbach-Banach, Über die Höldersche Bedingung, Studia mathem. III (1931), str. 180—184; Saks, On the functions of Besicovitch in the space of continuous functions, Fundamenta mathem. 19 (1932), str. 211—219; Jarník, Über die Differenzierbarkeit stetiger Funktionen, Fundamenta mathem. 21 (1933), str. 48—58.