Veškeré veličiny ve skupinách (II), (III) atd. jsou faktory původního čísla y.

Z toho vyplývá zřejmě, že v našem čísle y musí býti obsažen faktor 2 s lib. mocnitelem — jinými slovy, že y (jakožto číslo *konečné*) musí býti nulou. Kdyby bylo větším než nula, musili bychom konečně dospěti ke skupině

$$y_\alpha^2 + y_\beta^2 = y_\gamma^2,$$
$$y_\alpha^2 - y_\beta^2 = y_\delta^2,$$

v níž by ve středu stojící veličina y_β neměla už faktor 2 (tedy byla by lichou). To jest však vyloučeno, poněvadž podle provedeného rozboru a důkazu veličina uprostřed skupinových rovnic stojící ($y, y_4, y_8, \ldots, y_\beta$) je vždy číslo sudé.

Tím jest proveden důkaz, že naše původní veličina y musí býti nulou a že tedy číselná rovnice

$$x^4 + y^4 = z^4 \quad (x, y \text{ a } z \text{ relativně nesoudělná})$$

je možná jen ve tvaru

$$1 + 0 = 1.$$

Věta Fermatova pro exponent 4 je tím tedy dokázána.

O Heronových trojuholníkoch.

I.

Štefan Schwarz, posl. přírodov. fakulty.

Trojuholník, ktorého strany i obsah sú vyjadrené racionálnymi číslami, nazýva sa Heronovým.

Podám tu jedno riešenie Heronovho trojuholníka na podklade geometrickom *nezahrňujúce v sebe síce všetky možné riešenia*, ale majúce tú výhodu, že vyjadruje strany i obsah pomerne veľmi jednoduchými výrazmi a že ľahko prejdeme od neho k riešeniu daného problému číslami celými.

Ako pomocnej vety užijeme poznatku, že rovnica $x^2 + y^2 = z^2$ má racionálné korene $m^2 - n^2$, $2mn$, $m^2 + n^2$.

Obsah trojuholníka o súradniciach vrcholov (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$, je

$$O = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}.$$

Sú li súradnice racionálné, je i obsah racionálny; poneváč hneď vidíme, že záleží iba na rozdielu súradníc či je obsah racionálny, alebo nie, bude bez ujmy obecnosti, zvolíme-li jeden vrchol v počiatku súradnom, takže obsah bude $O = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$.

Teraz však musíme určiť x_i, y_i $(i = 1, 2)$ tak, aby i strany boly racionálné.

Strany sú
$$a = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \tag{1}$$
$$b = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{2}$$
$$c = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \tag{3}$$

Vzťahom (1), (3) bude vyhovené — vzhľadom na to čo bolo povedané o rovnici $x^2 + y^2 = z^2$ — keď

$$x_1 = m^2 - n^2,\ y_1 = 2mn$$
$$x_2 = p^2 - q^2,\ y_2 = 2pq;$$

potom je $a = m^2 + n^2$, $c = p^2 + q^2$.

Treba teraz určiť q tak, aby i strana b t. j. výraz

$$\sqrt{(p^2 - q^2 - m^2 + n^2)^2 + (2pq - 2mn)^2}$$

bol racionálny. Keby sme znali všetky q, pre ktoré výraz pod odmocninou je úplný štvorec, mali by sme všetky riešenia danej úlohy. Obecne to však previesť je veľmi namáhavé, lebo užijeme-li totiž vlastnosti rovnice $x^2 + y^2 = z^2$ a dosadíme za prvý výraz $r^2 - s^2$ a za druhý $2rs$, alebo naopak a vylúčime na pr. z oboch rovnic s, dostaneme obecnú neurčitú rovnicu o dvoch neznámych (r, q) štvrtého stupňa.

Avšak jedno riešenie najdeme ľahko. Učiníme-li jeden výraz pod odmocninou rovným nule, potom odmocnina je iste číslo racionálné.

Položíme-li

$$p^2 - q^2 - m^2 + n^2 = 0$$

dostaneme q iracionalné a preto nevyhovuje.

Je-li však

$$2pq - 2mn = 0,$$

t. j.

$$q = \frac{mn}{p},$$

máme jedno riešenie.

Je potom

$$x_2 = p^2 - \frac{m^2n^2}{y^2},\ y_2 = 2mn,\ x_1 = m^2 - n^2,\ y_1 = 2mn$$

a ďalej

$$a = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = m^2 + n^2,$$