ČÁST STŘEDOŠKOLSKÁ

Příspěvek k řešení rovnice $x^4 - y^4 = z^4 - u^4$ čísly celými.

Dr. *Mil. Hlaváček.*

I. Buďtež x, y, z, u celá čísla hovící uvažované rovnici. Zaveďme racionální čísla p, q, r, s vztahy

$$\begin{aligned} x + yi &= (p + qi)(z + ui), \\ x - yi &= (p - qi)(z - ui), \\ x + y &= r(z + u), \\ x - y &= s(z - u), \quad i = \sqrt{-1}. \end{aligned} \tag{1}$$

Rozštěpením prvé (nebo druhé) rovnice podle reálnosti obdržíme

$$\begin{aligned} x &= pz - qu, \\ y &= qz + pu. \end{aligned}$$

Připojíme 3. a 4. rovnici

$$\begin{aligned} x + y &= rz + ru, \\ x - y &= sz - su. \end{aligned} \tag{2}$$

Ježto vylučujeme triv. případ, že $x = y = z = u = 0$, platí

$$\begin{vmatrix} 1, & 0, & -p, & q \\ 0, & 1, & -q, & -p \\ 1, & 1, & -r, & -r \\ 1, & -1, & -s, & s \end{vmatrix} = 0,$$

čili po úpravě

$$p^2 + q^2 - p(r + s) + rs = 0. \tag{I}$$

Znásobením levých i pravých stran rovnic soustavy (1) dostaneme druhou základní rovnici

$$(p^2 + q^2)\, rs = 1. \tag{II}$$

Naopak, známe-li racionální řešení soustavy (I) a (II), můžeme známým způsobem ze soustavy (2) vypočísti x, y, z, u pomocí p, q, r, s (vlastně poměr těch veličin, ale o ten nám běží).

Vypočtěme ze (II) $p^2 + q^2$ a dosaďme do (I). Obdržíme

$$\frac{1}{rs} - p\,(r + s) + rs = 0, \text{ a z toho}$$

$$p = \frac{1 + r^2s^2}{rs\,(r + s)}. \tag{3}$$

Dosaďme tento výraz zpátky do (II) a vypočtěme q^2:

$$q^2 = \frac{1}{rs} - p^2 = \frac{rs\,(r^2 + s^2) - r^4s^4 - 1}{r^2s^2\,(r + s)^2}. \tag{4}$$

Čitatel ve (4) má tedy býti čtvercem rac. čísla. Známe-li tedy všechna rac. řešení rovnice

$$-r^4s^4 + rs^3 + r^3s - 1 = A^2, \tag{III}$$

známe i všechna x, y, z, u, jež hoví soustavě (1) a tím i rovnici v nadpise tohoto článku.

Máme-li nějaké řešení (III) ve tvaru $s = R_1(r)/R_2(r)$, kde R_1, R_2 jsou rac. celistvé funkce arg. r, dospějeme nejkratší cestou k výrazům pro x, y, z, u takto. Ježto

$$r = \frac{x + y}{z + u}, \quad s = \frac{x - y}{z - u},$$

můžeme psáti

$$x + y = kr, \qquad z + u = k, \tag{5}$$

$$x - y = l\,.\,R_1(r), \quad z - u = l\,.\,R_2(r), \tag{6}$$

a dosadíme tyto výrazy do rovnice

$$\begin{aligned}(x - y)\,(x + y)\,\,[(x - y)^2 + (x + y)^2] &= \\ = (z - u)\,(z + u)\,\,[(z - u)^2 + (z + u)^2],\end{aligned} \tag{7}$$

odkud vypočteme poměr k/l; čitatel obdrženého výrazu zvolíme za k, jmenovatelem pak jest l.

II. Pišme (III) ve tvaru

$$(r^3s - 1)\,(1 - rs^3) = A^2 \tag{III'}$$

a předpokládejme, že $r = t^3$, kde t je rac. číslo. Pak máme dalším rozkladem

$$(t^9\,.\,s - 1)\,(1 - ts)\,(1 + ts + t^2s^2) = A^2.$$

Položme $s = s' + 1/t^3$. Obdržíme

$$(t^9\,.\,s' + t^6 - 1)\,.\left(1 - \frac{1}{t^2} - ts'\right)\left[1 + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^4} + \right.$$

$$\left. + s'\left(t + \frac{2}{t}\right) + t^2s'^2\right] = A^2,$$

což upravíme na tvar