ČÁST FYSIKÁLNÍ

Náhrada astronomických tabulek babylonských trigonometrickými vzorci.

Dr. *Arnošt Dittrich*, Stará Ďala.

(Došlo 28. června 1933.)

V pojednání ,,Matematické prostředky babylonských astronomů", jež uveřejněno v tomto časopise roč. 63, str. 17, r. 1933, podán v resumé stručný návod, jak normální oscilující kolonu babylonskou lze stáhnouti v jediný trigonometrický vzorec.

Předvedu tento převod na koloně G z tabulky pro nové světlo, Nr. 272, 81—7—6.[1]) Kolona G následuje bezprostředně za sloupcem F, jejž jsme zpracovali jako příklad v uvedeném pojednání. Převodem těchto kolon razíme si cestu k babylonské teorii Luny.

Východiskem je kolona G v tabulce 1. Poloha ideálního maxima M naznačena tenkou dvojitou čarou, ideální minimum m označeno jedinou čarou, tenkou. Podle návodu v resumé na str. 29, roč. 63 tohoto časopisu obdržíme:

$$M = 4^z\ 29^0\ 27'\ 05'' = 4{,}4908564\dot{8}\dot{1}^z$$

$$m = 1^z\ 52^0\ 34'\ 35'' = 1{,}876373\dot{1}4\dot{8}^z$$

$$\tfrac{1}{2}(M + m) = 3^z\ 11^0\ 00'\ 50'' = 3{,}183564\dot{8}\dot{1}^z = \mu$$

$$\tfrac{1}{2}(M - m) = 1^z\ 18^0\ 26'\ 15'' \doteq 1{,}307291\dot{6}^z = A$$

Nastane-li změna o diferenci tabulkovou

$$d = 22^0\ 30' = 0{,}375\dot{0}^z$$

za čas τ, je perioda tabulky p dána relací

$$\frac{p}{\tau} = \frac{4A}{d} = \frac{251}{18} = 13{,}9\dot{4}.$$

Numerická hodnota ve sloupci G v n-tém řádku zní opravena

$$G^*_n = \mu + A \cos \frac{360}{p} (n\tau - \gamma).$$

Všechny konstanty tohoto vzorce jsou známé až na γ. To se určí z relace

[1]) Kugler: Die babylonische Mondrechnung, 12, 1900.

Tab. 1.
Z tab. pro nové světlo Luny*) č. 272, 81—7—6.

No.	G				g	g*	g — g*
0.					z	z	z
1.	3	59	52	30	3,99792	4,26797	— 0,27005
2.	4	22	22	30	4,37292	4,47775	— 0,10483
3.	4	14	1	40	4,23380	4,42899	— 0,19519
4.	3	51	31	40	3,85880	4,13162	— 0,27282
5.	3	29	1	40	3,48380	3,64501	— 0,16121
6.	3	6	31	40	3,10880	3,06628	0,04252
7.	2	44	1	40	2,73380	2,51096	0,22284
8.	2	21	31	40	2,35880	2,08991	0,26889
9.	1	59	1	40	1,98380	1,88717	0,09663
10.	2	8	37	30	2,14375	1,94321	0,20054
11.	2	31	7	30	2,51875	2,24685	0,27190
12.	2	53	37	30	2,89375	2,73747	0,15628
13.	3	16	7	30	3,26875	3,31714	— 0,04839
14.	3	38	37	30	3,64375	3,87014	— 0,22639
15.	4	1	7	30	4,01875	4,28610	— 0,26735
16.	4	23	37	30	4,39375	4,48197	— 0,08822
17.	4	12	46	40	4,21296	4,41865	— 0,20569
18.	3	50	16	40	3,83796	4,10879	— 0,27083
19.	3	27	46	40	3,46296	3,61425	— 0,15129
20.	3	5	16	40	3,08796	3,03373	0,05423
21.	2	42	46	40	2,71296	2,48311	0,22985
22.	2	20	16	40	2,33796	2,07232	0,26564
23.	1	57	46	40	1,96296	1,88336	0,07960
24.	2	9	52	30	2,16458	1,95394	0,21064
25.	2	32	22	30	2,53958	2,26997	0,26961
26.	2	54	52	30	2,91458	2,76837	0,14621
27.	3	17	22	30	3,28958	3,34965	— 0,06007
28.	3	39	52	30	3,66458	3,89778	— 0,23320
29.	4	2	22	30	4,03958	4,30334	— 0,26376
30.	4	24	52	30	4,41458	4,48537	— 0,07079
31.	4	11	31	40	4,19213	4,40754	— 0,21541
32.	3	49	1	40	3,81713	4,08539	— 0,26826
33.	3	26	31	40	3,44213	3,58322	— 0,14109
34.	3	4	1	40	3,06713	3,00127	0,06586
35.	2	41	31	40	2,69213	2,45570	0,23643
36.	2	19	1	40	2,31713	2,05544	0,26169
37.	1	56	31	40	1,94213	1,88036	0,06177
38.	2	11	7	30	2,18542	1,96543	0,21999
39.	2	33	37	30	2,56042	2,29366	0,26676

$$n\frac{\tau}{p} - \frac{\gamma}{p} = \pm\left(\frac{1}{4} - \frac{y_n}{4A}\right) + k,$$

kde k je celistvé číslo,

*) Kugler: Mondrechnung. 12, 13. První dva sloupce. — Další jsou počítány od nás.

$$y_n = G_n - \mu.$$

Závorka dostane znamení minus, pokud serie y_n stoupá, plus, když klesá. Počítáme-li pak pro kterékoliv z 39 přípustných n, dostaneme vždy totéž nejmenší kladné číslo

$$\gamma = 0{,}165980 \,.\, p.$$

Trigonometrická náhrada kolony G zní tedy:

$$G^*_n = 3{,}18356\dot{4}8\dot{1}^z + 1{,}307291\dot{6}^z \cos 360\,(n \,.\, 0{,}07171314 - 0{,}165980) \tag{0}$$

K počítání hodnoty γ pořídili jsme si sloupec hodnot y_n. Můžeme je hned použít k stanovení korigované hodnoty

$$y^*_n = A \,.\, \sin y_n/4A.$$

V třetím sloupci tab. 1 nalezneme

$$g^* = \mu + y^*.$$

ve 4. sloupci rozdíl $g - g^*$, jenž udává chybu, jíž se Babyloňané dopouštěli pro nedokonalost jimi užívané interpolace. Činí nanejvýš $0{,}27^z$, což odpovídá asi 1 hod., jak v dalším odstavci uvidíme.

Dosud nebylo třeba, abychom se o smyslu kolony G vyslovili. Jen jsme předpokládali, že čísla jsou psána šedesátičně. Vyjmuli jsme však první čísla, protože nepřestupují číslo 4. Epping postřehl, že se tu celek nedělí šedesátičně, ale jen na 6 dílů. Označil tento dílek písmenou „z", kterou i my jsme převzali. Sloupec G je pomocný k počítání časových intervalů mezi sousedními novy. Proto je celkem, jenž se dělí na 6 dílů, den, takže $1^z = 4^h$, $1^0 = 4^m$, $1' = 4^s$, $1'' = 4^t$ naší obvyklé časomíry.

Epping a Lorentz[2]) objasnili společně smysl sloupců F i G. Také G porozumíme prostřednictvím střední hodnoty μ. Proměníme-li

$$\mu = 3{,}18356481^z$$

ve zlomek dne

$$\mu = 0{,}5\dot{3}0594136^d,$$

poznáme v něm zlomek středního synodického oběhu Luny

$$T_S = 29{,}530594136^d.$$

Je to přesně hodnota Hipparchova, jak nám ji zachoval Almagest.

Sloupec G potlačuje důsledně 29 dnů, což zabezpečuje i pozdější sloupec L. — Sloupec G určuje tedy za sebou jdoucí délky synodických měsíců, které oscilují . . . následkem čeho? — O tom nás poučí perioda oscilace. Je tatáž jako v koloně F, je to anomalistický měsíc. Skutečný synodický měsíc kolísá však nejen pro

[2]) Kugler: Mondrechnung, 11.

anomalii Luny, ale i pro anomalii slunce. Kolísání s periodou anomalistického měsíce T_a poukazuje na to, že v prvém přiblížení se pokládá pohyb slunce za rovnoměrný.

Budiž t_n čas, kdy n-tý nov naší tabulky nastane, pak jest

$$t_n = 29n + \sum_1^n{}_k\, g^*{}_k.$$

Na př.

$$t_1 = 29 + g^*{}_1,$$

kterým novem tabulka začíná. Narazili jsme tu na složitější případ, kdy teprve diference veličiny t_n tvoří řadu $g^*{}_n$ babylonským způsobem oscilující.

Položme obecně zase

$$g^*{}_k = \mu + A \cos 2\pi/p\,(k\tau - \gamma)$$

a hledejme součet

$$\sum_1^n{}_k\, g^*{}_k = n\mu + A \sum_1^n{}_k \cos\frac{2\pi}{p}\,(k\tau - \gamma).$$

Třeba tedy pomocí trigonometrických vzorců sečísti

$$\sum_1^n{}_k \cos\frac{2\pi}{p}\,(k\tau - \gamma) = \sum_1^n{}_k \cos(ka - b),$$

kde

$$a = 2\pi\tau/p, \quad b = 2\pi\gamma/p.$$

Protože

$$\cos(ka - b) = \cos ka \cos b + \sin ka \sin b,$$

je

$$\sum_1^n{}_k \cos(ka - b) = C \cos b + S \sin b,$$

kde

$$C = \sum_1^n{}_k \cos ka, \quad S = \sum_1^n{}_k \sin ka.$$

Suma C je dobře známa z teorie Fourierových řad. Položme proto $a = 2y$ a stanovme

$$C = \sum_1^n{}_k \cos 2ky, \qquad S = \sum_1^n{}_k \sin 2ky.$$

Násobíme $2 \sin y$:

$$2 \sin y\, C = \sum_1^n{}_k 2 \sin y \cos 2ky, \qquad 2 \sin y\, S = \sum_1^n{}_k 2 \sin y \sin 2ky.$$

Součiny trigonometrických funkcí rozvedeme v rozdíly pomocí vzorců

$$2 \sin y \cos 2ky = \sin (2k + 1)\, y - \sin (2k - 1)\, y,$$
$$2 \sin y \sin 2ky = \cos (2k - 1)\, y - \cos (2k + 1)\, y,$$

takže

$$2 \sin y\, C = \sum_1^n {}_k \sin (2k + 1)\, y - \sum_1^n {}_k \sin (2k - 1)\, y,$$

$$2 \sin y\, S = \sum_1^n {}_k \cos (2k - 1)\, y - \sum_1^n {}_k \cos (2k + 1)\, y.$$

Rozepíšeme-li součty v rovnici pro C, jest

$$2 \sin y\, C =$$
$$= \sin 3y + \sin 5y + \ldots + \sin (2n - 1)\, y + \sin (2n + 1)\, y$$
$$- \sin y - \sin 3y - \sin 5y - \ldots - \sin (2n - 1)\, y.$$

Po sloučení zbude

$$2 \sin y\, C = \sin (2n + 1)\, y - \sin y.$$

Obdobně rozpíšeme sumy pro S a dostaneme

$$2 \sin y\, S = \cos y + \cos 3y + \ldots + \cos (2n - 1)\, y$$
$$- \cos 3y - \ldots - \cos (2n - 1)\, y - \cos (2n + 1)\, y,$$

takže po sloučení zbude

$$2 \sin y\, C = \cos y - \cos (2n + 1)\, y.$$

Dosadíme $a = 2y$ a dostaneme

$$C = \frac{\sin (2n + 1)\, \frac{1}{2}a - \sin \frac{1}{2}a}{2 \sin \frac{1}{2}a},$$

$$S = \frac{\cos \frac{1}{2}a - \cos (2n + 1)\, \frac{1}{2}a}{2 \sin \frac{1}{2}a}.$$

Vyvineme

$$C \cos b + S \sin b = \frac{- \sin (\frac{1}{2}a - b) + \sin [(2n + 1)\, \frac{1}{2}a - b]}{2 \sin \frac{1}{2}a}.$$

Je tedy

$$\sum_1^n {}_k \cos \frac{2\pi}{p} (k\tau - \gamma) = \frac{1}{2 \sin \pi\tau/p} \left\{ \sin \left[(2n + 1) \frac{\pi\tau}{p} - \frac{2\pi\gamma}{p} \right] - \right.$$
$$\left. - \sin \left(\frac{\pi\tau}{p} - \frac{2\pi\gamma}{p} \right) \right\},$$

takže

$$\sum_1^n {}_k g^*{}_k = n\mu + \frac{A}{2 \sin \pi\tau/p} \left[\sin \frac{2\pi}{p} \left(\frac{2n + 1}{2} \tau - \gamma \right) - \right.$$
$$\left. - \sin \frac{2\pi}{p} \left(\frac{\tau}{2} - \gamma \right) \right],$$

Tab. 2.

Z tab. pro nové světlo Luny*) č. 272, 81—7—6.

No.	H	h	J	i	i*	i — i*
0.				+ 13°,017	12°,241	+ 0°,776
1.	— 20 20	— 20°,3̇	7 19 lal	— 7,317	— 5,013	— 2,304
2.	— 14 52 30	— 14,875	22 11 30 lal	— 22,192	— 19,984	— 2,208
3.	— 8 5	— 8,083	30 16 30 lal	— 30,275	— 29,907	— 0,368
4.	— 1 17 30	— 1,292	31 34 lal	— 31,56̇	— 32,276	+ 0,709
5.	+ 5 30	+ 5,5	27 52 lal	— 27,86̇	— 26,494	— 1,373
6.	+ 12 17 30	+ 12,292	15 34 30 lal	— 15,575	— 14,019	— 1,556
7.	+ 19 5	+ 19,083	3 30 30 tab	+ 3,508	1,996	+ 1,512
8.	+ 16 7 30	+ 16,125	19 38 tab	+ 19,63̇	17,507	+ 2,126
9.	+ 9 20	+ 9,3̇	28 58 tab	+ 28,96̇	28,597	+ 0,370
10.	+ 2 22 30	+ 2,375	31 30 30 tab	+ 31,508	32,463	— 0,955
11.	— 4 15	— 4,250	29 10 30 tab	+ 29,175	28,130	+ 1,045
12.	— 11 2 30	— 11,042	18 8 tab	+ 18,13̇	16,692	+ 1,441
13.	— 17 50	— 17,83̇	0 18 tab	+ 0,30̇	1,038	— 0,738
14.	— 17 22 30	— 17,375	17 4 30 lal	— 17,075	— 14,878	— 2,197
15.	— 10 35	— 10,583	27 39 30 lal	— 27,658	— 27,037	— 0,621
16.	— 3 47 30	— 3,792	31 27 lal	— 31,450	— 32,366	+ 0,916
17.	+ 3	+ 3,	30 29 lal	— 30,483	— 29,521	— 0,962
18.	+ 9 47 30	+ 9,792	20 41 30 lal	— 20,692	— 19,219	— 1,473
19.	+ 16 35	+ 16,583	4 6 30 lal	— 4,108	— 4,063	— 0,045
20.	+ 18 37 30	+ 18,625	14 31 tab	+ 14,517	12,119	+ 2,398
21.	+ 11 50	+ 11,83̇	26 21 tab	+ 26,350	25,240	+ 1,110
22.	+ 5 2 30	+ 5,042	31 23 30 tab	+ 31,392	31,986	— 0,594
23.	— 1 45	— 1,750	31 47 30 tab	+ 31,792	30,653	+ 1,139
24.	— 8 32 30	— 8,542	23 15 tab	+ 23,250	21,578	+ 1,672
25.	— 15 20	— 15,3̇	7 35 tab	+ 7,583	7,053	+ 0,530
26.	— 19 52 30	— 19,875	11 57 30 lal	— 11,958	— 9,254	— 2,704
27.	— 13 5	— 13,083	25 2 30 lal	— 25,042	— 23,223	— 1,819
28.	— 6 17 30	— 6,292	31 20 lal	— 31,3̇	— 31,327	— 0,006
29.	— 0 30	— 0,50̇	31 50 lal	— 31,83̇	— 31,518	— 0,315
30.	+ 7 17 30	+ 7,292	25 48 30 lal	— 25,808	— 23,749	— 2,059
31.	+ 14 5	+ 14,083	11 43 30 lal	— 11,725	— 9,981	— 1,744
32.	+ 20 52 30	+ 20,875	9 9 tab	+ 9,150	6,308	+ 2,842
33.	+ 14 20	+ 14,3̇	23 29 tab	+ 23,483	21,004	+ 2,479
34.	+ 7 32 30	+ 7,542	31 1 30 tab	+ 31,025	30,394	+ 0,631
35.	+ 0 45	+ 0,750	31 46 30 tab	+ 31,775	32,108	— 0,333
36.	— 6 2 30	— 6,042	27 7 tab	+ 27,117	25,712	+ 1,405
37.	— 12 50	— 12,83̇	14 17 tab	+ 14,283	12,822	+ 1,461
38.	— 19 37 30	— 19,625	5 20 30 lal	— 5,342	— 3,307	— 2,035
39.	— 15 35	— 15,583	20 55 30 lal	— 20,925	— 18,600	— 2,325

*) Kugler: Mondrechnung. 12, 13.

když

$$g^*_k = \mu + A \cos \frac{2\pi}{p} (k\tau - \gamma).$$

Součtový vzorec lze častěji použíti v babylonských tabulkách. Na př. v tabulce, z níž bereme numerický materiál, bezprostředně za kolonou F a sousední G následují dvě další H, J. Kolona H obsahuje diference za sebou jdoucích hodnot J. Kolona H jeví normální babylonskou oscilaci, kolona J obsahuje serii součtů veličiny H. Proto lze na ně aplikovati poslední dva naše vzorce. Třeba arci nejdříve určiti konstanty kolony H.

Nastane malá komplikace znaménky. V koloně J nalezneme za každým číslem babylonská slova lal po příp. tab. Lal dává předchozímu číslu znamení záporné, tab udílí znamení +. Čísla kolony J jsou tedy opatřena znaménky. Má-li se relace

$$J_{n+1} = J_n + H_{n+1} \tag{1}$$

zachovat, musíme také H_n opatřit znaménky. Provedli jsme to v tabulce 2. Nyní jsou H prostě diference za sebou jdoucích hodnot J. Výjimka je jen tam, kde je čára jednoduchá (negativní minimum) neb dvojitá (positivní maximum). Je zcela logické, že H dostalo znaménka. Přejímá funkci diference d, jež také po serii kladných hodnot přejde v záporné a naopak. Vrátíme se k věci, až budeme zkoumat sloupec J.

Soustavné zpracování sloupce H vede ke konstantám jeho:

$$\begin{aligned} d &= 6^0\ 47'\ 30'' = 6{,}791\dot{6}^0 \\ M &= +\ 21^0 \\ m &= -\ 21^0 \\ \mu &= 0 \\ A &= 21^0 \end{aligned}$$

Perioda oscilace $p = t_a$ je anomalistický rok, tabulkový interval časový $\tau = T_S$ je synodický měsíc. Je pak

$$p/\tau = 84/6{,}791\dot{6} = 2016/163 = t_a/T_S.$$

To je babylonský (ne zcela správný) poměr mezi rokem anomalistickým t_a a střední lunací T_S.[3])

Je tedy

$$H_n = A \cos \frac{2\pi}{t_a} (nT_S - \gamma)$$

a numericky

$$H_n = 21^0 \cos 2\pi \left(\frac{163}{2016} n - \frac{\gamma}{t_a}\right).$$

[3]) Kugler: Mondrechnung, 26. Anomalistický rok babylonský je o 32^m kratší než naše dnešní hodnota.

Protože $\mu = 0$, jest

$$y_n = H_n,$$

takže

$$n \frac{T_S}{t_a} - \frac{\gamma}{t_a} = \pm \left(\frac{1}{4} - \frac{H_n}{4A} \right) + k.$$

Když serie H_n stoupá, užije se před závorkou —, když klesá +. Propočítáním dostaneme

$$\gamma = 0{,}5887895\, t_a.$$

Numericky jest tedy

$$H_n = 21^0 \cos 2\pi\, (0{,}08085317n - 0{,}5887895).$$

Tak specialisuje se nám vzorec

$$H_n = A \cos 2\pi \left(n \frac{T_S}{t_a} - \frac{\gamma}{t_a} \right).$$

Babyloňané užívali však hodnot H_n jen k tomu, aby počítali — viz vzorec (1) —

$$J_n = J_0 + \sum_1^n{}_k H_k,$$

$$J_n = \\ = J_0 + \frac{A}{2 \sin \pi T_S/t_a} \left[\sin \frac{2\pi}{t_a} \left(\frac{2n+1}{2} T_S - \gamma \right) - \sin \frac{2\pi}{t_a} \left(\frac{T_S}{2} - \gamma \right) \right].$$

Dosadíme konstanty:

$$A = 21^0, \quad T_S = 0{,}08085317\, t_a, \quad \gamma = 0{,}5887894\, t_a, \quad J_0 = 13^0\, 01'$$

a dostaneme numerický vzorec

$$J_n = 0{,}513776^0 + 41{,}78522^0 \sin \frac{2\pi}{t_a} \left(\frac{2n+1}{2} T_S - \gamma \right).$$

Nahradíme-li sinus kosinem ve vzorci, dostaneme

$$J_n = 0{,}513776^0 + 41{,}78522^0 \cos 2\pi \left(n \frac{T_S}{t_a} - \frac{\gamma}{t_a} - \frac{1}{4} \right). \qquad (2)$$

To je ale normální kosinusový vzorec. Babyloňané byli tedy v omylu, když mínili, že užíváním normální babylonské řady jako řada diferencí získají. Zisk byl jen zdánlivý, od nedokonalosti jejich zpracování periodických zjevů.

Vzorec (2) je výsledkem počtu, když H pokládáme za diferenci po sobě jdoucích J. Ale čísla ve vzorci, ač správně počítána, neodpovídají skutečnosti. J je sluneční korekční člen, jejž musíme připojiti k ryze lunárnímu členu G, abychom dostali trvání lunace. Protože G užívá již správné střední lunace, nesmí na ni J již nic korigovat, tedy střední hodnota, kolem níž J kolísá, jest nulou, nikoliv $0{,}5138^0$. Ale také amplituda $41{,}785^0$ není k potřebě. Babyloňané počítají, jako by J kolísalo mezi

$$M = +\,32^0\;28' \text{ a } m = -\,32^0\;28',$$

takže

$$\mu = 0, \quad A = 32^0\;28' = 32{,}4\dot{6}^0.$$

V normální řadě je d konstantní, střídavě kladné a záporné. V koloně J nahradí se d hodnotou H, opatřenou znaménkem. Jsou-li J_n, J_{n+1} členové obstupující ideální minimum, jest

$$2m = J_n + J_{n+1} - |\,H_{n+1}\,|.$$

Obstupují-li ideální maximum, je

$$2M = J_n + J_{n+1} + |\,H_{n+1}\,|.$$

Vyšetřili jsme si, že zavedení kolísavých diferencí $d = H_n$ je zbytečnou komplikací, užíváme-li trigonometrických vzorců. — Stačí, když J_n osciluje kolem $\mu = 0$ amplitudou $A = 32{,}4\dot{6}^0$ s periodou t_a, což vede ke vzorci

$$J_n = 32{,}4\dot{6}^0 \cos 2\pi \left(n\,\frac{T_S}{t_a} - \frac{\beta}{t_a}\right).$$

Srovnáme-li se vzorcem (2), vidíme, že μ změnilo se o $0{,}51^0$, A o $9{,}32^0$, při čemž zůstane

$$T_S = 0{,}08085317\,t_a,$$

$$\beta/t_a = \gamma/t_a + 0{,}25 = 0{,}8387894.$$

Z opatrnosti budeme veličinu tu přímo na tabulce kontrolovat. Upravme

$$J_n = 32{,}4\dot{6}^0 \cos\,(29{,}1071412^0\,n - 301{,}964184^0).$$

V tabulce 2. nalezneme v 3. koloně serii hodnot J. Počítati budeme s jejich decimálním vyjádřením „i“ v koloně sousední. Dostaneme pak 40 hodnot $\beta : t_a$. Na první pohled není tato konstanta příliš „konstantní“. Kdyby kolísání bylo od nahodilých chyb, musili bychom se spokojiti s jedinou decimálkou 0,8. Ale chyby jsou od nedokonalosti babylonské početní techniky. Proto se v nich musí obrážeti perioda tabulky. Tato čítá skoro 14 tabulkových intervalů, přesně $13{,}9\dot{4}$. Proto musí součty 14 za sebou následujících hodnot našich $\beta : t_a$ kolísati mnohem méně než tyto samy o sobě. Tak tomu skutečně jest. Vezmeme-li střed ze 27 součtů, dostaneme,

že
$$14\beta/t_a = 11{,}2865\dot{3},$$

takže
$$\beta = 0{,}8061809\,t_a.$$

Tedy i tato konstanta se musí změnit, takže se počítá podle vzorce

$$J_n = 32{,}4\dot{6}^0 \cos (29{,}1071412^0\, n - 290{,}225124^0). \tag{3}$$

Pomocí jeho počítán sloupec i^*, jenž je 5. v tabulce 2. O chybách, jež Babyloňané dělali následkem nedokonalé interpolace, poučuje nás sloupec 6. označený $i - i^*$. Vidíme, že rozdíl ten dosahuje nanejvýše $2{,}7^0$. Protože časový stupeň platí 4^m, jest chyba při sluneční korektuře $10{,}8^m$. — To není tragické. Ještě Ptolemaiovy hodiny byly o 15^m nespolehlivé.[4])

Smysl další kolony K jest velmi jednoduchý. V n-tém řádku stojí

$$K_n = G_n + J_n.$$

Trigonometricky vyjádří se K vzorci (0) + (3), tak, že

$$K_n = 3{,}183564\dot{8}\dot{1}^z + 1{,}307291\dot{6}^z \cos 360^0 (0{,}07171314\,n - 0{,}165980) +$$
$$+ 32{,}4\dot{6}^0 \cos 360^0 (0{,}08085317\, n - 0{,}8061809).$$

Význam této kolony objasnili Epping a Lorenz.[5]) Objevili, že

$$29 + K_{n+1}$$

je interval mezi n-tým a $(n + 1)$-vým novem tabulky. Volíme-li den za jednotku času, jest[6])

$$29 + K_n = 29{,}5305941\dot{3}\dot{6}^d +$$
$$+ 0{,}2128819\dot{4}^d \cos 360\, (0{,}07171314\, n - 0{,}165980) +$$
$$+ 0{,}090\dot{1}8\dot{5}^d \cos 360\, (0{,}08085317\, n - 0{,}8061809).$$

Abychom zase přehlédli vliv nedokonalé interpolace, založíme tab. 3 pro K. V první koloně jsou babylonské hodnoty.[7]) V druhé je k, předchozí hodnota přepočtená na zlomek dne. V třetí a čtvrté je g^* a i^* přepočteno z tab. 1 a tab. 2 také na zlomek dne. Sečtením obdržíme

$$k^*_n = i^*_n + g^*_n,$$

což tabulováno v sloupci 5. V šestém je rozdíl $k - k^*$, jenž nás poučuje o velikosti babylonské chyby následkem nedokonalé interpolace. Tato činí až $\pm\, 0{,}05^d$, což je asi 5 čtvrthodin, tedy $\pm\, 1^h\, 15^m$.

Epping a Lorenz objevili také význam kolony K. Slouží k zjištění dat novolunních v babylonském kalendáři. Tato data obsahuje sloupec L, první v tab. 4. Hodnoty K jsou diference

[4]) Schoch: Die säkulare Acceleration des Mondes und der Sonne, určuje z dotyku Spiky a srpu Luny, že vodní hodiny Timocharisovy šly o 42^m napřed. Astr. Abh. Sv. 8. No. 2. Str. B. 1. 1930.

[5]) Kugler: Mondrechnung, 11.

[6]) Ludendorff: Das Mondalter in den Inschriften der Maya, 8, 1931 praví, že pravý nov nikdy o víc než $0{,}59^d$ se nevzdaluje od středního. — Babyloňanům kolísá lunace kol střední hodnoty nejvýše o $0{,}30^d$.

[7]) Kugler: Mondrechnung, 13.

Tab. 3.

Z tab. pro nové světlo Luny*) č. 272, 81—7—6.

No.	K	k	g*	i*	k*	k — k*
				d		
0.		d	d	0,03400	d	d
1.	3 52 33 30	0,64600	0,71133	— 0,01393	0,69740	— 0,05140
2.	4 0 11 0	0,66718	0,74629	— 0,05551	0,69078	— 0,02360
3.	3 43 45 10	0,62154	0,73817	— 0,08307	0,65510	— 0,03356
4.	3 19 57 40	0,55545	0,68860	— 0,08966	0,59894	— 0,04349
5.	3 1 9 40	0,50322	0,60750	— 0,07359	0,53391	— 0,03069
6.	2 50 57 10	0,47487	0,51105	— 0,03894	0,47211	+ 0,00276
7.	2 47 32 10	0,46538	0,41849	+ 0,00555	0,42404	+ 0,04134
8.	2 41 9 40	0,44767	0,34832	+ 0,04863	0,39695	+ 0,05072
9.	2 27 59 40	0,41110	0,31453	+ 0,07943	0,39396	+ 0,01714
10.	2 40 8 0	0,44482	0,32387	+ 0,09018	0,41405	+ 0,03077
11.	3 0 18 0	0,50083	0,37447	+ 0,07814	0,45261	+ 0,04822
12.	3 11 45 30	0,53266	0,45625	+ 0,04637	0,50262	+ 0,03004
13.	3 16 25 30	0,54562	0,55286	+ 0,00288	0,55574	— 0,01012
14.	3 21 33 0	0,55986	0,64502	— 0,04133	0,60369	— 0,04383
15.	3 33 28 0	0,59296	0,71435	— 0,07510	0,63925	— 0,04629
16.	3 52 10 30	0,64493	0,74699	— 0,08991	0,65708	— 0,01215
17.	3 42 17 40	0,61749	0,73644	— 0,08200	0,65444	— 0,03695
18.	3 29 35 10	0,58218	0,68480	— 0,05339	0,63141	— 0,04923
19.	3 23 40 10	0,56575	0,60237	— 0,01129	0,59108	— 0,02533
20.	3 19 47 40	0,55498	0,50562	+ 0,03366	0,53928	+ 0,01570
21.	3 9 7 40	0,52536	0,41385	+ 0,07011	0,48396	+ 0,04140
22.	2 51 40 10	0,47686	0,34539	+ 0,08885	0,43424	+ 0,04262
23.	2 29 34 10	0,41547	0,31389	+ 0,08515	0,39904	+ 0,01643
24.	2 33 7 30	0,42535	0,32566	+ 0,05994	0,38560	+ 0,03975
25.	2 40 17 30	0,44525	0,37838	+ 0,01959	0,39797	+ 0,04728
26.	2 42 55 0	0,45255	0,46140	— 0,02570	0,43570	+ 0,01685
27.	2 52 20 0	0,47870	0,55827	— 0,06451	0,49376	— 0,01506
28.	3 8 32 30	0,52373	0,64963	— 0,08702	0,56261	— 0,03888
29.	3 30 32 30	0,58484	0,71722	— 0,08755	0,62967	— 0,04483
30.	3 59 4 0	0,66407	0,74756	— 0,06597	0,68159	— 0,01752
31.	3 59 48 10	0,66612	0,73459	— 0,02773	0,70686	— 0,04074
32.	3 58 10 40	0,66161	0,68090	+ 0,01752	0,69842	— 0,03681
33.	3 50 0 40	0,63892	0,59720	+ 0,05834	0,65554	— 0,01662
34.	3 35 3 10	0,59737	0,50021	+ 0,08443	0,58464	+ 0,01273
35.	3 13 18 10	0,53695	0,40928	+ 0,08919	0,49847	+ 0,03848
36.	2 46 8 40	0,46151	0,34257	+ 0,07142	0,41399	+ 0,04752
37.	2 10 48 40	0,36336	0,31339	+ 0,03562	0,34901	+ 0,01435
38.	2 5 47 0	0,34940	0,32757	— 0,00919	0,31838	+ 0,03102
39.	2 12 42 0	0,36861	0,38228	— 0,05167	0,33061	+ 0,03800

*) Kugler: Mondrechnung. 12, 13.

za sebou jdoucích L, takže

$$L_n + K_{n+1} = L_{n+1}. \qquad (4)$$

Zlomek dne při datu udává přesný nov, pokud jej Babyloňané dovedli stanovit. Den začíná půlnocí, jako u nás.[8])

Pomocí relace (4) lze určiti,[9]) zda měsíc má 29 či 30 dnů. Má-li (viz datum 1. a 2.)

$$\begin{array}{llcl} \text{Adaru} & 29^d\ 1^z\ 2^0\ 43'\ 50'' + K_2 & = & \text{Nisannu}\ 28^d\ 5^z\ 2^0\ 54'\ 50'' \\ \text{kde} & 29^d\ 4^z\ 0^0\ 11'\ 00'' & = & K_2 \\ \hline \text{Adaru} & 58^d\ 5^z\ 2^0\ 54'\ 50'' & = & \text{Nisannu}\ 28^d\ 5^z\ 2^0\ 54'\ 50'' \end{array}$$

Ale 58. den od 1. Adaru čítaný stane se 28. dnem následujícího měsíce jen, když Adaru čítal 30 dnů. Tak lze skrze celou tabulku vyšetřiti počet dnů v měsíci. Je to vyznačeno v koloně 2. (úzké) znamením + pro 30, znamením — pro 29.

Tabulku můžeme doplniti datem nultým, teoretickým východiskem tabulky. Užije se specialisace vzorce (4), jež zní:

$$L_0 + K_1 = L_1.$$

Aby datum stalo se určitým, musíme arci věděti, kolik dnů měl Šabatu, jenž Adar, jímž tabulka začíná, předcházel. Můžeme to určiti dvojím způsobem: Přejíždíme-li kolonu L v tab. 4 zdola nahoru, vidíme, že obecně po 29 přijde 28. Jen při $n = 33$, 34 objeví se 29, 29. — Je tedy skoro jisto, že Šabatu měl jen 28. Pak vychází ale, že tento měsíc čítal 29 dnů (viz znamení — v 2. sloupci). To ale musíme očekávat, byl-li kalendář v pořádku. Jinak by totiž v úzké koloně šla za sebou tři znamení plus: + + +! Tři plné měsíce za sebou v lunárním kalendáři jsou ale velikou vzácností.[10]) Schoch praví, že taková kombinace je rovnocennou se zprávou o zatmění slunce.

Čítejme 28 Šabatu, přesněji den nultého úplňku za nultý den naší tabulky, za východisko. Pak byl začáteční (nultý) nov naší tabulky v čas

$$t_0 = 0{,}528256^d.$$

Viz tab. 4, sloupec 4. Další hodnoty $t_1, t_2, \ldots$ tohoto sloupce dostaneme postupným připočítáním hodnot $k_1, k_2, k_3, \ldots$ Jsou to babylonské hodnoty originálním datům L ekvivalentní; proto jsme je označili písmenou t, bez hvězdičky.[11])

---

[8]) Kugler: Mondrechnung, 31.

[9]) Kugler: Mondrechnung, 22.

[10]) Schoch: Die Schaltjahre von Bursin 1 bis Ibisin 1 in Umma, Z. f. Assyriologie, 39. 226. 1930.

[11]) Originální data babylonská v šedesátičné soustavě značím velkou písmenou na př. K. Táž data decimálně vyjádřená značím k, malou písmenou k předchozí velké náležející. Naše hodnoty, použitím trigonometrie korigované, dostanou hvězdičku, tedy k^*. Index dole na př. k^*_5 poukazuje na pátý řádek v tabulce.

Tab. 4.

Z tab. pro nové světlo Luny*) č. 272, 81—7—6.

No.	L							l		t	t^*	$t - t^*$
									d	d	d	d
0.	·						—	Šabâtu	28,52826	0,52826	0,45472	+ 0,07354
1.	Adâru	29	1	2	43	50	+	Adâru	29,17425	30,17425	30,15213	+ 0,02212
2.	Nisannu	28	5	2	54	50	+	Nisannu	28,84143	59,84143	59,84291	— 0,00148
3.	Airu	28	2	46	40	0	—	Airu	28,46296	89,46296	89,49800	— 0,03504
4.	Simannu	29	0	6	37	40	+	Simannu	29,01841	119,01841	119,09695	— 0,07854
5.	Dûzu	28	3	7	47	20	—	Dûzu	28,52164	148,52164	148,63085	— 0,10921
6.	Âbu	28	5	58	44	30	+	Âbu	28,99651	177,99651	178,10296	— 0,10645
7.	Ulûlu I	28	2	46	16	40	—	Ulûlu I	28,46188	207,46188	207,52699	— 0,06511
8.	Ulûlu II	28	5	27	26	20	—	Ulûlu II	28,90955	236,90955	236,92394	— 0,01439
9.	Tišrîtu	29	1	55	26	0	+	Tišrîtu	29,32065	266,32065	266,31791	+ 0,00274
10.	Arah-s	28	4	35	34	0	—	Arah-s	28,76546	295,76546	295,73195	+ 0,03351
11.	Kislimu	29	1	35	52	0	+	Kislimu	29,26630	325,26630	325,18456	+ 0,08174
12.	Tebitu	28	4	47	37	30	—	Tebitu	28,79896	354,79896	354,68717	+ 0,11179
13.	Šabâtu	29	2	4	3	0	+	Šabâtu	29,34458	384,34458	384,24292	+ 0,10166
14.	Adâru	28	5	25	36	0	+	Adâru	28,90444	413,90444	413,84661	+ 0,05783
15.	Nisannu	28	2	59	4	0	—	Nisannu	28,49741	443,49741	443,48586	+ 0,01155
16.	Airu	29	0	51	14	30	+	Airu	29,14234	473,14234	473,14295	— 0,00061
17.	Simannu	28	4	33	32	10	+	Simannu	28,75982	502,75982	502,79739	— 0,03757
18.	Dûzu	28	2	3	7	20	—	Dûzu	28,34201	532,34201	532,42880	— 0,08679
19.	Âbu	28	5	26	47	30	—	Âbu	28,90775	561,90776	562,01989	— 0,11213
20.	Ulûlu	29	2	46	35	10	+	Ulûlu	29,46274	591,46274	591,55917	— 0,09643
21.	Tišrîtu	28	5	55	42	50	+	Tišrîtu	28,98809	620,98810	621,04314	— 0,05504
22.	Arah-s	28	2	47	23	0	—	Arah-s	28,46495	650,46496	650,47738	— 0,01242
23.	Kislimu	28	5	16	57	10	—	Kislimu	28,88042	679,88043	679,87642	+ 0,00401
24.	Tebitu	29	1	50	4	40	+	Tebitu	29,30577	709,30578	709,26201	+ 0,04377
25.	Šabâtu	28	4	30	22	10	—	Šabâtu	28,75103	738,75103	738,65998	+ 0,09105
26.	Adâru	29	1	13	17	10	+	Adâru	29,20357	768,20358	768,09567	+ 0,10791
27.	Nisannu	28	4	5	37	10	—	Nisannu	28,68228	797,68228	797,58944	+ 0,09284
28.	Airu	29	1	14	9	40	+	Airu	29,20600	827,20601	827,15205	+ 0,05396
29.	Simannu	28	4	44	42	10	+	Simannu	28,79084	856,79084	856,78172	+ 0,00912
30.	Dûzu	28	2	43	46	10	—	Dûzu	28,45492	886,45492	886,46331	— 0,00839
31.	Âbu	29	0	43	34	20	+	Âbu	29,12103	916,12104	916,17018	— 0,04914
32.	Ulûlu	28	4	41	45	0	—	Ulûlu	28,78264	945,78264	945,86860	— 0,08596
33.	Tišrîtu	29	2	31	45	40	+	Tišrîtu	29,42156	975,42156	975,52414	— 0,10258
34.	Arah-s	29	0	6	15	40	+	Arah-s	29,01739	1005,01893	1005,10878	— 0,08985
35.	Kislimu	28	3	20	7	0	—	Kislimu	28,55588	1034,55588	1034,60726	— 0,05138
36.	Tebitu	29	0	6	48	50	+	Tebitu	29,01893	1064,01740	1064,02125	— 0,00385
37.	Šabâtu	28	2	17	4	20	—	Šabâtu	28,38076	1093,38076	1093,37026	+ 0,01050
38.	Adâru I	28	4	22	51	20	—	Adâru I	28,73015	1122,73016	1122,68865	+ 0,04151
39.	Adâru II	29	0	35	33	20		Adâru II	29,09876	1152,09877	1152,01926	+ 0,07951

*) Kugler: Mondrechnung. 12, 13.

Počáteční datum t_0 lze počítati z každé hodnoty t_n. Určí se

$$t_0 = t_n - (k^*_n + k^*_{n-1} + \ldots + k^*_1) - 29n.$$

Korigované hodnoty k^* vezmeme ze sloupce 5 tabulky 3. Tak dostaneme 40 hodnot t_0. Na grafu se t_0 vlní. Perioda činí (asi)