ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY A FYSIKY

ČÁST MATEMATICKÁ

Poznámka k vytvoření prostorové křivky 4. řádu 2. druhu.

F. Vyčichlo.

(Došlo 25. srpna 1933.)

I. Promětnost základních útvarů 2. řádu vede přímo k vytvoření[1]) bikvadratické křivky K^4, která je druhého druhu, svazkem rovin (s) 2. třídy a promětnou k němu řadou přímek $(\check{R})$ na ploše druhého stupně **H**.

Budiž s vrchol kužele **S** obaleného rovinami a P přímka vytčené řady, která libovolné rovině π svazku promětně přísluší. Rovina π protíná $(\check{R})$ v bodové řadě na kuželosečce K a daný svazek rovin ve svazku přímek o vrcholu s, který je k této řadě promětný; procházejí tudíž tři přímky tohoto svazku příslušnými jim body uvedené řady, a to jsou body naší prostorové křivky, jejíž čtvrtý bod v rovině π je průsečíkem $(\pi \times P)$. Libovolná rovina ϱ, neobsahující s, protíná (s) ve svazku přímek 2. třídy a řadu $(\check{R})$ v řadě bodové 2. řádu, jež je k tomuto promětná. Procházejí tudíž 4 přímky svazku příslušnými body řady a tyto body náleží křivce K^4. Ale i když prochází rovina ϱ bodem s, plyne z dané promětnosti, že procházejí 4 roviny svazku (s) příslušnými body řady, v níž $(\check{R})$ seče tuto rovinu. Když konečně rovina ϱ prochází přímkou P řady $(\check{R})$, pak protíná **H** ještě v přímce řady druhé Q, na níž vzniká bodová involuce promětná ke svazku přímek, v němž ϱ seče svazek (s); leží tudíž tři body řady bodové na Q na příslušných přímkách tohoto svazku, z čehož usuzujeme, že na každé přímce řady $(\check{R})$ leží jeden bod a na každé přímce řady druhé náležející **H** leží tři body křivky K^4.

Promítněme uvažované útvary z bodu s do libovolné roviny μ. Především promítá se řada $(\check{R})$ svazkem rovin 2. třídy $(\check{r})$, který je promětný ke svazku (s), když každé rovině v (s) přiřadíme onu rovinu tohoto svazku, která prochází přímkou promětně jí příslušnou v $(\check{R})$. Tyto svazky vytvořují kužel 4. řádu $\mathbf{K}^4$, jímž se promítá K^4 z bodu s.

[1]) Různá vytvoření uvažované kvartiky uvádí: Gino Loria: Curve sghembe speciali I, pg. 276 etc., L. Vietoris: Eine besondere Erzeugungsweise der Raumkurve 4. Ordnung . . ., Sitzb. Wiener Ak. 1916, pg. 259 etc.

Průmět křivky K^4 do μ je tudíž křivka 4. řádu $K_\mu{}^4$.

Uvedená prométnost náleží kolineaci dvou trsů o společném vrcholu s. V této kolineaci příslušejí přímkám, v nichž se roviny svazku (s) dotýkají kužele, přímky kužele soustředného $\mathbf{L}$ a tečného k $\mathbf{H}$, v nichž se ho dotýkají odpovídající roviny ve svazku $(\check{r})$. Buďtež A_1, A_2, A_3 samodružné přímky uvedené kolineace. (Předpokládáme, že tato kolineace, stejně jako prométnost, je obecná.) Tečným přímkám k $\mathbf{S}$ vedeným přímkou A_1 odpovídají prométně roviny v $(\check{r})$, které procházejí rovněž přímkou A_1; obdobně pro A_2 a A_3.

Z toho plyne, že přímky A_1, A_2, A_3 jsou dvojnými přímkami plochy $\mathbf{K}^4$ a že tudíž tato je racionální. Je tedy také průmět $K_\mu{}^4$ křivky K^4 křivka racionální, která má stopníky a_1, a_2, a_3 přímek A_1, A_2, A_3 na μ za body dvojné. Odpovídají si tudíž svazky 2. třídy stopních křivek S_μ, L_μ ploch $\mathbf{S}$ a $\mathbf{L}$ v kolineaci, která má a_1, a_2, a_3 za body samodružné a vytvořují svými průsečíky křivku $K_\mu{}^4$.

Z prométnosti svazků tečen na L_μ a S_μ plyne, že 4 tečny křivky S_μ procházejí body dotyku prométně příslušných jim tečen křivky L_μ a naopak, ježto svazek tečen na S_μ je zároveň prométný s řadou bodů dotyku příslušných tečen křivky L_μ a naopak. Z toho plyne, že křivky S_μ a L_μ jsou vepsány křivce $K_\mu{}^4$ dotýkajíce se jí ve čtyřech bodech.

Zvolme nyní trojúhelník a_1, a_2, a_3 za základ prométné souřadné soustavy. Pak rovnice křivky $K_\mu{}^4$ má tvar:

$$a_{11}x_2{}^2x_3{}^2 + a_{22}x_3{}^2x_1{}^2 + a_{33}x_1{}^2x_2{}^2 + 2a_{12}x_1x_2x_3{}^2 + 2a_{23}x_3x_2x_1{}^2 + \\ + 2a_{31}x_3x_1x_2{}^2 = 0. \qquad (1)$$

Transformujeme-li křivku tak, aby každému bodu příslušela jeho harmonikála vzhledem k trojúhelníku a_1, a_2, a_3, pak se transformuje v kuželosečku V, jejíž rovnice v přímkových souřadnicích je:

$$a_{11}u_1{}^2 + a_{22}u_2{}^2 + a_{33}u_3{}^2 + 2a_{12}u_1u_2 + 2a_{13}u_1u_3 + 2a_{23}u_2u_3 = 0. \quad (2)$$

Libovolné tečně (u_1, u_2, u_3) křivky V přísluší určitý bod (x_1, x_2, x_3) křivky $K_\mu{}^4$ a naopak, jehož souřadnice plynou ze souřadnic tečny rovnicemi:

$$\varrho x_1 = \frac{1}{u_1}, \qquad \varrho x_2 = \frac{1}{u_2}, \qquad \varrho x_3 = \frac{1}{u_3}.$$

Tím bodem je stanoven svazek přímek:

$$u_1x_1 + (\varkappa - 1)\, u_2x_2 - \varkappa u_3x_3 = 0. \qquad (3)$$

Když (x_i) probíhá křivku (1), tu přímka u_i obaluje kuželosečku (2) a pro každé $\varkappa$ obaluje přímka (3), jejíž souřadnice U_i jsou dány rovnicemi:

$$\varrho U_1 = u_1, \quad \varrho U_2 = (\varkappa - 1)\, u_2, \quad \varrho U_3 = -\varkappa u_3,$$

kuželosečku:

$$(\varkappa-1)^2\,\varkappa^2 a_{11} U^2+\varkappa^2 a_{22} U_2{}^2+(\varkappa-1)^2\,a_{33} U_3{}^2+2\varkappa^2(\varkappa-1)\,a_{12} U_1 U_2-$$
$$-2\varkappa\,(\varkappa-1)\,a_{23} U_2 U_3-2\varkappa\,(\varkappa-1)^2\,a_{31} U_1 U_3=0.$$

Bodová rovnice této kuželosečky je:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dfrac{x_1}{\varkappa(\varkappa-1)} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \dfrac{x_2}{\varkappa} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} & -\dfrac{x_3}{\varkappa-1} \\ \dfrac{x_1}{\varkappa(\varkappa-1)} & \dfrac{x_2}{\varkappa} & -\dfrac{x_3}{\varkappa-1} & 0 \end{vmatrix}=0$$

aneb, značíme-li A_{ik} minory determinantu křivky (2):

$$A_{11}x_1{}^2+(\varkappa-1)^2\,A_{22}x_2{}^2+\varkappa^2 A_{33}x_3{}^2+2\,(\varkappa-1)\,A_{12}x_1x_2-$$
$$-2\varkappa\,(\varkappa-1)\,A_{23}x_2x_3-2\varkappa A_{31}x_3x_1=0. \qquad (4)$$

Můžeme ji psáti též ve tvaru:

$$\varkappa^2\,(A_{22}x_2{}^2+A_{33}x_3{}^2-2A_{23}x_2x_3)-2\varkappa\,(A_{22}x_2{}^2-A_{12}x_1x_2-A_{23}x_2x_3+$$
$$+A_{31}x_3x_1)+A_{11}x_1{}^2+A_{22}x_2{}^2-2A_{12}x_1x_2=0.$$

Mění-li se $\varkappa$, obdržíme soustavu kuželoseček, jež obalují křivku o rovnici:

$$(A_{22}x_2{}^2+A_{33}x_3{}^2-2A_{23}x_2x_3)\,(A_{11}x_1{}^2+A_{22}x_2{}^2-2A_{12}x_1x_2)-$$
$$-(A_{22}x_2{}^2-A_{12}x_1x_2-A_{23}x_2x_3+A_{31}x_3x_1)^2=0$$

čili

$$a_{11}x_2{}^2x_3{}^2+a_{22}x_3{}^2x_1{}^2+a_{33}x_1{}^2x_2{}^2+2a_{12}x_1x_2x_3{}^2+2a_{23}x_2x_3x_1{}^2+$$
$$+2a_{31}x_3x_1x_2{}^2=0.$$

Obaluje tudíž soustava těchto kuželoseček křivku $K_\mu{}^4$. Libovolné dvě z těch kuželoseček jsou prométné a přísluší sobě v kolineaci v rovině μ, která má a_1, a_2, a_3 za body samodružné. Neboť přísluší-li jedna z nich $K_\varkappa$ parametru $\varkappa$, druhá $K_{\varkappa'}$ parametru $\varkappa'$, plyne pro souřadnice U_1, U_2, U_3 tečen prvé z nich:

$$\varrho U_1=u_1,\quad \varrho U_2=(\varkappa-1)\,u_2,\quad \varrho U_3=-\varkappa u_3$$

a pro souřadnice druhé U'_1, U'_2, U'_3 pak:

$$\varrho' U'_1=u_1,\quad \varrho' U'_2=(\varkappa'-1)\,u_2,\quad \varrho' U'_3=-\varkappa' u_3,$$

takže $\quad \varrho'' U_1=U'_1,\quad \varrho'' U_2=\dfrac{\varkappa-1}{\varkappa'-1}\,U'_2,\quad \varrho'' U_3=\dfrac{\varkappa}{\varkappa'}\,U'_3$

a křivka K_μ^4 je vytvořena promětnými svazky tečen na těchto kuželosečkách.

Každá z těchto dvou kuželoseček se dotýká křivky K_μ^4 ve 4 bodech, poněvadž z naší promětnosti plyne, že 4 tečny kuželosečky $K_\varkappa$ procházejí body dotyku příslušných tečen kuželosečky $K_{\varkappa'}$.

Jedna z kuželoseček uvažované soustavy splývá s L_μ, promětně příslušnou S_μ můžeme tudíž nahraditi libovolnou jinou kuželosečkou naší soustavy.

Z toho plyne, že lze K^4 vytvořiti nekonečně mnoha způsoby řadou přímek na **H** a svazkem rovin 2. třídy k ní promětným, jehož vrchol je bod s. Je tedy možno bodem s vésti nekonečně mnoho kuželů 2. stupně, z nichž každý, jakožto svazek rovin 2. třídy promětných k řadě ($\check{R}$), vytvořuje s ní křivku K^4. Libovolné dva z těchto kuželů jsou promětné a v kolineaci, již tato promětnost určuje, jsou samodružné přímky bisekanty křivky K^4 bodem s vedené. Všechny tyto kužele obalují racionální kužel 4. řádu.

Jelikož je průmět křivky K^4 z libovolného bodu v prostoru s_μ do roviny μ racionální křivka 4. řádu, soudíme z toho, že pro každý bod s_μ, jenž neleží na K^4 (pro který je tedy průmět K^4 nerozpadlá křivka 4. řádu) lze sestrojiti nekonečně mnoho svazků rovin 2. třídy promětných k uvažované řadě přímek na **H**, jež s touto vytvořují křivku K^4, jejíž průmět z s_μ do μ je křivka K_μ^4.

Křivka K_μ^4 může míti ve zvláštním případě v jednom z bodů a_1, a_2, a_3 inflexní uzel. Předpokládejme, že tomu tak je pro bod a_3. V tomto případě procházejí přímkou $s_\mu a_3$ dvě oskulační roviny křivky K^4, z nichž jedna oskuluje v jednom, druhá v druhém bodě křivku K^4, v němž ji seče bisekanta $s_\mu a_3$, v tomto případě zvaná bisekantou hlavní.

Rovnice tečen křivky (1) v bodě a_3 je

$$a_{11}x_2^2 + a_{22}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 = 0;$$

ony protínají křivku ještě v bodech, jež leží na kuželosečce:

$$a_{33}x_1x_2 + 2a_{23}x_1x_3 + 2a_{31}x_2x_3 = 0,$$

která v případě, kdy tečny ty jsou inflexními, musí degenerovati v přímky

$$x_1 = 0, \ x_2 = 0,$$

takže $$a_{23} = a_{31} = 0.$$

Rovnice (1) potom přechází v rovnici:

$$a_{11}x_2^2x_3^2 + a_{22}x_3^2x_1^2 + a_{33}x_1^2x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2x_3^2 = 0,$$

nebo, změníme-li označení součinitelů:

$$a_1^2x_2^2x_3^2 + a_{22}x_3^2x_1^2 - a_3^2x_1^2x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2x_3^2 = 0.$$

Potom jsou tečny této křivky v bodě a_2 dány rovnicemi:

$$a_1x_3 - a_3x_1 = 0, \quad a_1x_3 + a_3x_1 = 0.$$

Prvá z nich protíná křivku $K_\mu{}^4$ mimo bod a_2 ještě v jednom bodě ležícím na přímce

$$a_{22}x_1 + 2a_{12}x_2 = 0.$$

Má-li tato tečna býti inflexní, musí tento bod splynouti s a_2 a tedy přímka právě uvedená musí splynouti s $x_1 = 0$, takže $a_{12} = 0$ a rovnice křivky jest v tomto případě, klademe-li $a_{22} = a_2{}^2$,

$$a_1{}^2x_2{}^2x_3{}^2 + a_2{}^2x_3{}^2x_1{}^2 - a_3{}^2x_1{}^2x_2{}^2 = 0. \tag{5}$$

Z této rovnice jest také patrno, že také tečna $a_1x_3 + a_3x_1 = 0$ jest tečnou inflexní, a proto je též a_2 inflexním uzlem. Pak je též a_1 inflexním uzlem. Z toho plyne, když bod s_μ náleží jedné hlavní bisekantě a když jím prochází další bisekanta té vlastnosti, že oskulační rovina křivky K^4, v jednom jejím bodě na ní ležícím, obsahuje tuto bisekantu, pak ji obsahuje též oskulační rovina křivky K^4 v druhém jejím bodě na této bisekantě ležícím. Je tedy též tato druhá bisekanta hlavní a bodem s_μ prochází pak ještě třetí hlavní bisekanta. Z nich mohou nejvýše dvě protínati K^4 v reálných bodech.

Vyjádříme si ještě parametrické rovnice křivky K^4 v případě, že průmět $K_\mu{}^4$ je dán rovnicí (5). Při tom pro jednoduchost budeme předpokládati, že rovina μ je polární rovinou bodu s_μ, a že soustava souřadná je vytknuta souřadným čtyřstěnem $a_1, a_2, a_3, a_4 \equiv s_\mu$. Potom stopa plochy **H** na rovině μ, jako kuželosečka L_μ, je

$$a_2{}^2a_3{}^2x_1{}^2 + (\varkappa - 1)^2\, a_3{}^2a_1{}^2x_2{}^2 - \varkappa^2a_1{}^2a_2{}^2x_3{}^2 = 0,$$

neboť L_μ patří do soustavy (4).

Rovnice plochy **H** je tudíž

$$a_2{}^2a_3{}^2x_1{}^2 + (\varkappa - 1)^2\, a_3{}^2a_1{}^2x_2{}^2 - \varkappa^2a_1{}^2a_2{}^2x_3{}^2 - a_4{}^2x_4{}^2 = 0,$$

kde a_4 je určitá hodnota.

Vyjádříme nejprve parametrické rovnice křivky $K_\mu{}^4$ a pak pro křivku K^4 užijeme rovnice plochy **H**.

Za tím účelem vytkneme si, jak známo, svazek kuželoseček

$$x_1\,(a_2x_3 - a_3x_2) + \lambda x_2x_3 = 0;$$

poněvadž každá kuželosečka tohoto svazku prochází dvojnými body křivky $K_\mu{}^4$ a dotýká se jí v bodě a_1, protne ji ještě v jednom bodě, pro který

$$\frac{x_3}{x_2} = \frac{a_3\dfrac{x_1}{x_2}}{a_2\dfrac{x_1}{x_2} + \lambda}.$$

Z rovnice (5) křivky $K_\mu{}^4$ plyne potom

$$a_1{}^2 - 2a_2\lambda \frac{x_1}{x_2} - \lambda^2 = 0,$$

takže

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{a_1{}^2 - \lambda^2}{2a_2\lambda}, \quad \frac{x_3}{x_2} = \frac{a_3(a_1{}^2 - \lambda^2)}{a_2(a_1{}^2 - \lambda^2) + 2\lambda^2 a_2}.$$

Jsou tedy parametrické rovnice křivky $K_\mu{}^4$:

$$\varrho x_1 = a_1{}^4 - \lambda^4, \quad \varrho x_2 = 2a_2\lambda(a_1{}^2 + \lambda^2), \quad \varrho x_3 = 2a_3\lambda(a_1{}^2 - \lambda^2). \quad (6)$$

Z rovnice plochy **H** plyne dosazením právě určených hodnot za x_1, x_2, x_3

$$\frac{\varrho^2 a_4{}^2 x_4{}^2}{a_2{}^2 a_3{}^2} = [4\varkappa a_1{}^2\lambda^2 - (a_1{}^2 + \lambda^2)^2]^2.$$

Rovnice je kvadratická — dostáváme dvě křivky $K_1{}^4$, $K_2{}^4$, v nichž kužel o vrcholu $a_4 \equiv s_\mu$ a který promítá $K_\mu{}^4$, protíná plochu **H**. Uvažujme tu, pro kterou jest

$$\frac{\varrho a_4 x_4}{a_2 a_3} = 4\varkappa a_1{}^2\lambda^2 - (a_1{}^2 + \lambda^2)^2.$$

Pro parametrické vyjádření této křivky přistupuje tedy k rovnicím (6) ještě rovnice

$$\varrho x_4 = + \frac{a_2 a_3}{a_4}[4\varkappa a_1{}^2\lambda^2 - (a_1{}^2 + \lambda^2)^2].$$

Zvolme ještě místo parametru λ parametr μ tak, aby $\lambda = a_1\mu$; potom

$$\varrho x_1 = a_1(1 - \mu^4), \quad \varrho x_2 = 2a_2\mu(1 + \mu^2), \quad \varrho x_3 = 2a_3\mu(1 - \mu^2),$$

$$\varrho x_4 = \frac{a_1 a_2 a_3}{a_4}[4\varkappa\mu^2 - (1 + \mu^2)^2].$$

Tyto rovnice převádíme mnohdy transformací

$$\sigma y_1 = \frac{x_1}{2a_1} - \frac{a_4 x_4}{2a_1 a_2 a_3}, \quad \sigma y_2 = \frac{x_2}{4a_2} + \frac{x_3}{4a_3}, \quad \sigma y_3 = \frac{x_2}{4a_2} - \frac{x_3}{4a_3},$$

$$\sigma y_4 = \frac{x_1}{2a_1} + \frac{a_4 x_4}{2a_1 a_2 a_3}, \quad \text{a } \varepsilon^2 = 2\varkappa - 1$$

na tvar

$$\sigma y_1 = 1 - \varepsilon^2\mu^2, \quad \sigma y_2 = \mu, \quad \sigma y_3 = \mu^3, \quad \sigma y_4 = \mu^2(\varepsilon^2 - \mu^2).$$[2]

II. Prostorová křivka 4. řádu 2. druhu K^4 vznikne též projektivností mezi kubickou involucí J_3 přímek řady jedné a řadou J přímek

[2]) Laguerre: Oeuvres II, pg. 281.

řady druhé na obecné přímkové ploše 2. stupně **H**. Každá přímka řady J je proťata přímkami z řady, jež tvoří příslušnou skupinu v J_3 ve třech bodech a každá přímka náležející některé skupině v J_3 jest proťata příslušnou přímkou v J v jednom bodě křivky K^4.

Buď s libovolný bod prostoru, z něhož promítáme do polární roviny σ bodu s vzhledem k **H**. Průměty přímek na **H** obalují kuželosečku K, jež je stopou kužele o vrcholu s opsaného ploše **H** a zároveň jeho křivkou dotyku s **H**. Stopníky přímek v J_3 na kuželosečce K tvoří kubickou involuci promětnou s řadou stopníků přímek v J a tedy, vzhledem k promětnosti bodové řady na kuželosečce a křivého svazku tečen v těchto bodech sestrojených, máme na kuželosečce K involuci 3. stupně tečen a promětný k ní svazek tečen 2. stupně.

Průsečíky takto sobě přiřaděných tečen kuželosečky vytvoří křivku 4. řádu racionální K_σ^4, která je průmětem křivky K^4 do roviny σ.

Pro křivku K^4 je možno snadno určiti parametrické rovnice, užijeme-li křivky K^4_σ.

Libovolná tečna A_3 kuželosečky K protne uvedenou involuci v involuci bodové 3. stupně J'_3 k J_3 promětné a uvedený svazek tečen v bodové řadě J' k J rovněž promětné. Jsou tedy J'_3 a J' mezi sebou taktéž promětné. Na A_3 zvolme dva body a_1, a_2 a veďme jimi tečny A_2, A_1 ke kuželosečce K různé od A_3, které nechť se protnou v bodě a_3.

Zvolíme-li trojúhelník $a_1a_2a_3$ za trojúhelník souřadný pro projektivní souřadnice, bude míti rovnice křivky K v souřadnicích tečnových tvar:

$$a_1u_2u_3 + a_2u_3u_1 + a_3u_1u_2 = 0$$

a tudíž bude v souřadnicích bodových

$$a_1^2x_1^2 + a_2^2x_2^2 + a_3^2x_3^2 - 2a_1a_2x_1x_2 - 2a_2a_3x_2x_3 - 2a_3a_1x_3x_1 = 0. \quad (K)$$

Libovolná tečna kuželosečky protne přímku A_3 v bodě t, pro nějž $x_3 = 0$ a pro nějž poměr x_1/x_2 klaďme roven λ. Tečny z toho bodu ke kuželosečce budou tudíž

$$x_3 = 0, \ (a_2 - a_1\lambda)\, x_1 + (a_1\lambda - a_2)\, x_2 + a_3\lambda x_3 = 0.$$

Poslední rovnice je rovnicí tečny bodem t procházející a různé od A_3. Promětnost mezi J'_3 a J' je vyjádřena obecně rovnicí

$$(\alpha\lambda^3 + \beta\lambda^2 + \gamma\lambda + \delta)\, \lambda_1 + \alpha_1\lambda^3 + \beta_1\lambda^2 + \gamma_1\lambda + \delta_1 = 0, \quad (\mathrm{I})$$

v níž určuje λ libovolný bod v J'_3 a λ_1 promětně příslušný bod v J'. Má tudíž příslušná tečna v involuci na K rovnici:

$$(a_2 - a_1\lambda)\, x_1 + (a_1\lambda - a_2)\, \lambda x_2 + a_3\lambda x_3 = 0$$

a tečna k ní promětná ve svazku tečen na K rovnici