ČÁST DIDAKTICKO-METODICKÁ

VOJTĚCH TUČEK (Mor. Budějovice):

Staré a nové o středoškolské geometrii vůbec a o geometrii trojúhelníku zvlášť.

I.

Učebné osnovy pro středoškolské vyučování geometrii lze charakterisovati třemi znaky:

1. Planimetrická a trigonometrická látka od IV. do VI. třídy jest soustředěna k nauce o trojúhelníku. Ke konfiguračním a metrickým vlastnostem trojúhelníku se sbíhá, od nich se rozvětvuje k vlastnostem jiných útvarů.

2. Při vyučování jest sledována v podstatě cesta historického vývoje geometrie přirozené, která, vylučujíc prvky imaginární a nekonečné, buduje na nauce o shodnosti a podobnosti ve smyslu Euklidovy systematiky a vyšetřuje vlastnosti geometrických útvarů převážnou měrou synteticky, synteticky ve starším smyslu slova.

3. Rozlišujeme-li vztahy konfigurační a metrické, shledáme, že středoškolská geometrie dává přednost metrice; sestrojuje a počítá délky, plošné obsahy, úhly a jiné veličiny z daných prvků. A tu zase shledáme, že konstrukce i výpočty postrádají téměř docela soustavnosti, ujednocenosti a uspořádanosti netoliko s hlediska praktických potřeb, ale i po stránce metodické a teoretické, kde jde o odvození základních metrických vztahů, jež pak slouží k oněm konstrukcím a výpočtům.

Z uvedených znaků plyne zřejmě řada nedostatků a chyb středoškolské geometrie vůbec a geometrie trojúhelníku zvlášť. Nejdůležitější z nich jsou dány okolností, že jest středoškolská geometrie trojúhelníku v zásadním a hlubokém rozporu *s moderním chápáním geometrie jako exaktní vědy a s chápáním významu a vztahu jmenovaného speciálního oboru k celku této vědy.*

Sledujeme-li rozvoj geometrie, shledáme, že přirozená geometrie trojúhelníku je v podstatě uzavřena v první polovině 19. století. *K. W. Feuerbach:* „Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreieckes und mehrerer durch sie bestimmten Linien und Figuren", 1822; *C. F. Jacobi:* „De trianguli rectilinei proprietatibus", 1825; *Ch. G. Nagel:* „Untersuchungen über die wichtigsten zum Dreiecke gehörenden Kreise", 1836; *J. B. Feaux:* „Úplná teorie rovinného trojúhelníku", 1846 a *C. Adams:* „Die merkwürdigsten Eigenschaften des geradlinigen Dreieckes", 1846 rozvedli pouze objevy, které učinili *G. Ceva:* „De lineis rectis se invicem secantibus", 1698; *L. Euler:* „Solutio facilis", 1765; *O. Fagnano:* „Problemae quaedam", 1775 a *A. L. Crelle:* „Über einige Eigenschaften des geradlinigen Dreieckes", 1816. Poslední souborná díla z druhé polovice 19. století napsali *G. Reuschle:* „Über die Punkte, Transversalen und Kreise des Dreieckes", 1853; *G. B. Marsano:* „Considerazioni sul triangolo rettilineo", 1863; *E. Uhlich:* „Altes und neues zur Lehre von den merkwürdigen Punkten", 1886 a *J. S. Mackay* — četné práce z posledního desítiletí stol. 19. Vše ostatní jsou kratší i delší pojednání různých autorů, jichž počet jde podle M. Simona do půl třetího sta jen v druhé polovici minulého století, uveřejněná v rozličných časopisech periodických pro matematiku a geometrii.

Převážné většině jmenovaných prací jest společné, že:

1. Po stránce vlastností konfiguračních vyšetřují polohové vztahy t. zv. pozoruhodných bodů, t. j. průsečíků os stran, os úhlů, výšek a jiných transversál, které v triplech poskytují určité průsečíky, jako mimo uvedené bod *Grebe-Lemoinův*, *Fermatův*, *Torricelliův*, body *Nagelovy*, *Brocardovy* a j.; dále vyšetřují polohové vztahy určitých kružnic, jdoucích více než třemi body, na př. *Feuerbachovy*, *Lemoinovy*, *Brocardovy*, *Tuckerových* a j., a to tak, že vznik každého takovéhoto útvaru jest samostatnou, od ostatních isolovanou otázkou.

2. Po stránce metrické vyšetřují a počítají z podobnosti nebo trigonometricky vzdálenosti oněch bodů, délky úseků na stranách a transversálách, poloměry uvedených kružnic, plošné obsahy zvláštních obrazců, aritmetické vztahy mezi nimi a různými jednoduchými prvky základního trojúhelníku, odvozují z výsledných výrazů, interpretujíce je geometricky, různé vlastnosti konfigurační. Přitom není ani zde žádného jednotícího hlediska, usoustavňujícího principu.

Tak se jeví přirozená geometrie trojúhelníku jako pouhá snůška *přečetných polohových a metrických vztahů, nikoliv jako* soustava *poznatků navzájem spjatých a logicky učleněných podle určitých myšlenek, které plynou z povahy samé základní konfigurace tří bodů a tří přímek v prostoru.*

Bral-li se vývoj přirozené geometrie do polovice 19. století cestou, která vedla k vylíčené roztříštěnosti a nevědeckosti, je to pochopitelné. Nechápeme však, proč ustrnula na střední škole a proč se tam dosud udržuje, když její vývoj se nezastavil a šel dále od padesátých let minulého století až po naše dny. Ovšemže nepřišel náhle; byl již dříve připravován objevy a výzkumy předcházejících staletí. Přípravu třeba jest viděti ve třech skupinách vět; **první**

1. ve větě *Menelaově* z 1. st. po Kr. o transversálách v trojúhelníku a

2. ve větě *Cevově* o průsečíku tří libovolných transversál vrcholových, z r. 1698; jest to duální obměna věty Menelaovy.

Proč procházejí na př. všechny těžnice trojúhelníku A_1T_1, A_2T_2, A_3T_3 týmž bodem?*) Proto, poněvadž prochází týmž bodem každá trojice vrcholových transversál, sekoucích strany trojúhelníku $A_1A_2A_3$ v bodech P_1, P_2, P_3, je-li splněna Cevova metrická podmínka

$$\frac{A_1P_3 \,.\, A_2P_1 \,.\, A_3P_2}{P_2A_1 \,.\, P_3A_2 \,.\, P_1A_3} = 1.$$

Poněvadž platí o těžnicích vztah

$$\frac{A_1T_3 \,.\, A_2T_1 \,.\, A_3T_2}{T_2A_1 \,.\, T_3A_2 \,.\, T_1A_3} = \frac{\frac{1}{2}a_3 \,.\, \frac{1}{2}a_1 \,.\, \frac{1}{2}a_2}{\frac{1}{2}a_2 \,.\, \frac{1}{2}a_3 \,.\, \frac{1}{2}a_1} = 1,$$

o výškách A_1V_1, A_2V_2, A_3V_3 vztah

$$\frac{A_1V_3 \,.\, A_2V_1 \,.\, A_3V_2}{V_2A_1 \,.\, V_3A_2 \,.\, V_1A_3} = \frac{a_2 \cos \alpha_1 \,.\, a_3 \cos \alpha_2 \,.\, a_1 \cos \alpha_3}{a_3 \cos \alpha_1 \,.\, a_1 \cos \alpha_2 \,.\, a_2 \cos \alpha_3} = 1,$$

o spojnicích vrcholů A_1, A_2, A_3 s dotykovými body D_1, D_2, D_3 kružnice vepsané na stranách vztah

$$\frac{A_1D_3 \,.\, A_2D_1 \,.\, A_3D_2}{D_2A_1 \,.\, D_3A_2 \,.\, D_1A_3} = \frac{(s - a_1)\,(s - a_2)\,(s - a_3)}{(s - a_1)\,(s - a_2)\,(s - a_3)} = 1,$$

atd., proto prochází každá z uvedených trojic transversál týmž bodem, těžištěm, ortocentrem atd.

Nebo jiná známá věta: Proč leží průsečíky stran trojúhelníku $A_1A_2A_3$ s příslušnými stranami trojúhelníku výškových pat V_1, V_2, V_3 na téže přímce? Proto, poněvadž lze dokázati, že jmenované průsečíky S_1, S_2, S_3 vyhovují Menelaovu metrickému vztahu

$$\frac{A_1S_3 \,.\, A_2S_1 \,.\, A_3S_2}{S_2A_1 \,.\, S_3A_2 \,.\, S_1A_3} = -1,$$

který platí pro každou trojici bodů B_1, B_2, B_3 na stranách A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 trojúhelníku $A_1A_2A_3$, leží-li body na téže přímce, tedy

*) Příslušné obrazce, o nichž bude uvažováno, nechť si čtenář narýsuje sám. Jsouť zcela jednoduché a s dostatečnou podrobností popsány. — Z technických důvodů jsou vynechány značky úseček nad písmenami; značí tedy A_1P_3 úsečku $\overline{A_1P_3}$ atd.

vztah

$$\frac{A_1B_3 \,.\, A_2B_1 \,.\, A_3B_2}{B_2A_1 \,.\, B_3A_2 \,.\, B_1A_3} = -1.$$

Důkaz provedeme takto:

V $\triangle A_1A_2A_3$ jsou paty výšek V_1 proti vrcholu A_1, V_2 proti A_2, V_3 proti A_3. Spojnice V_2V_3 protíná stranu A_2A_3 v bodě S_1, V_3V_1 stranu A_3A_1 v bodě S_2, V_1V_2 stranu A_1A_2 v bodě S_3. Poněvadž je $V_2V_3S_1$ transversála v $\triangle A_1A_2A_3$, jest podle Menelaovy věty

$$A_1V_3 \,.\, A_2S_1 \,.\, A_3V_2 = -\, V_2A_1 \,.\, V_3A_2 \,.\, S_1A_3.$$

a podle Cevy

$$A_1V_3 \,.\, A_2V_1 \,.\, A_3V_2 = V_2A_1 \,.\, V_3A_2 \,.\, V_1A_3;$$

dělením obou rovnic a odstraněním zlomků obdržíme

$$A_2S_1 \,.\, V_1A_3 = -\, S_1A_3 \,.\, A_2V_1;$$

podobně jest

$$A_3S_2 \,.\, V_2A_1 = -\, S_2A_1 \,.\, A_3V_2,$$
$$A_1S_3 \,.\, V_3A_2 = -\, S_3A_2 \,.\, A_1V_3.$$

Násobením všech rovnic obdržíme

$$A_1S_3 \,.\, A_2S_1 \,.\, A_3S_2 \,.\, (V_1A_3 \,.\, V_2A_1 \,.\, V_3A_2) = \\ = -\, S_2A_1 \,.\, S_3A_2 \,.\, S_1A_3 \,.\, (A_1V_3 \,.\, A_2V_1 \,.\, A_3V_2).$$

Součiny v závorkách mají podle Cevovy podmínky stejnou hodnotu, a po krácení obdržíme Menelaovu podmínku

$$\frac{A_1S_3 \,.\, A_2S_1 \,.\, A_3S_2}{S_2A_1 \,.\, S_3A_2 \,.\, S_1A_3} = -1,$$

což bylo třeba dokázati; body S_1, S_2, S_3 leží na téže přímce.

Není tudíž s hlediska Cevovy a Menelaovy poučky žádných „pozoruhodných" bodů a transversál. Všechny takové útvary jsou stejně pozoruhodné, je-li jen vyhověno oběma metrickým vztahům. Všechny specielní příbuzné konfigurační vlastnosti jsou oněmi metrickými vztahy vázány, všechny specielní metrické vztahy toho druhu plynou nutně z oněch konfigurací a zase naopak. *Zde jest jednotící princip, který mění snůšku isolovaných vztahů v uspořádanou soustavu.*

Druhá skupina vět, které připravovaly vývoj moderní syntetické geometrie, jest

1. věta *Desarguesova* z r. 1630, že průsečíky sobě odpovídajících stran dvou trojúhelníků v takové poloze, že spojnice sobě odpovídajících vrcholů jdou týmž bodem, leží na jedné přímce, a
2. vlastnosti *úplného čtyřrohu*, jímž jest definován čiře konfiguračně metrický vztah harmonické čtveřiny bodů.

Jimi jest vyjádřena podstata druhého jednotícího principu, v němž jsou obsaženy přečetné konfigurační vlastnosti bodů a transversál.

Jako příklad uvedu známou větu *van Swindenovu*, že paty kolmic, spuštěných s paty libovolné výšky v trojúhelníku na druhé dvě výšky a druhé dvě strany trojúhelníku, leží na jedné přímce, rovnoběžné k protilehlé straně trojúhelníku výškových pat. Důkaz lze provésti takto:

V_1, V_2, V_3 jsou paty výšek A_1V_1, A_2V_2, A_3V_3 v $\triangle A_1A_2A_3$. Veďme

$$\begin{aligned} V_1K_2 &\perp A_3A_1, \text{ tedy } \parallel A_2V_2, \\ V_1K_3 &\perp A_2A_1, \text{ tedy } \parallel A_3V_3, \\ V_1S_3 &\perp A_3V_3, \text{ tedy } \parallel A_2A_1, \\ V_1S_2 &\perp A_2V_2, \text{ tedy } \parallel A_3A_1; \end{aligned}$$

V jest průsečík výšek; v konfiguraci bodů $V_1S_3VV_3A_1$ jest

$$V_1A_1 : V_1V = S_3V_3 : S_3V,$$

a podobně $$V_1A_1 : V_1V = S_2V_2 : S_2V$$

v konfiguraci bodů $V_1S_2VV_2A_1$; jest tudíž i

$$S_3V_3 : S_3V = S_2V_2 : S_2V,$$

z čehož nutně plyne, že jest

$$S_3S_2 \parallel V_2V_3.$$

Dále jest v konfiguraci bodů $A_2V_1A_3S_3V_3$

$$A_2V_1 : V_1A_3 = V_3S_3 : S_3A_3,$$

a podobně $$A_2V_1 : V_1A_3 = V_2K_2 : K_2A_3$$

v konfiguraci bodů $A_2V_1A_3K_2V_2$; jest tudíž i

$$V_3S_3 : S_3A_3 = V_2K_2 : K_2A_3,$$

z čehož nutně plyne, že jest

$$S_3K_2 \parallel V_3V_2.$$

Konečně jest v konfiguraci bodů $A_2V_1A_3V_2S_2$

$$A_2V_1 : V_1A_3 = A_2S_2 : S_2V_2,$$

a podobně $$A_2V_1 : V_1A_3 = A_2K_3 : K_3V_3$$

v konfiguraci bodů $A_2V_1A_3V_3K_3$; jest tudíž i

$$A_2S_2 : S_2V_2 = A_2K_3 : K_3V_3,$$

z čehož nutně plyne, že jest

$$K_3S_2 \parallel V_3V_2.$$

Musí tudíž úseky K_3S_2, S_2S_3 a S_3K_2 ležeti na jedné přímce, na spojnici bodů $K_3S_2S_3K_2$, rovnoběžné ke straně V_3V_2, což bylo dokázati.

Na první pohled se zdá, že věta van Swindenova nemá nic společného s úplným čtyřrohem. Všimneme-li si však konfigurace bodů $A_1V_3VV_2A_2A_3$, vidíme ihned, že určují úplný čtyřroh s úhlopříčkami V_2V_3, A_1V a A_2A_3. A skutečně; věta van Swindenova jest jen zvláštní případ konfigurační vlastnosti v každém úplném čtyřrohu:

Vedeme-li v libovolném úplném čtyřrohu $ABCDEF$ průsečíkem úhlopříček AC a BD, bodem O, přímky:

$OG \parallel DC$ až k průsečíku G na straně AB,
$OH \parallel AB$ až k průsečíku H na straně DC,
$OI \parallel AD$ až k průsečíku I na straně BC,
$OK \parallel BC$ až k průsečíku K na straně AD, leží body $GHIK$

na jedné rovnoběžce k úhlopříčce EF.

Rozdíl mezi trojúhelníkem a úplným čtyřrohem jest pouze ten, že jest trojúhelník nesčíslněkráte bohatší specialisacemi téže všeobecné konfigurace v úplném čtyřrohu, poněvadž jest trojúhelník spojením tří úplných čtyřrohů netoliko se svými výškami, tedy čtyřrohů $A_1V_3VV_2A_2A_3$, $A_2V_1VV_3A_3A_1$, $A_3V_2VV_1A_1A_2$, nýbrž triplem úplných čtyřrohů s každým triplem vrcholových transversál, které jdou týmž bodem O_n, tedy čtyřrohů $A_1S_{n-1}O_nS_{n+1}A_2A_3$, $A_2S_nO_nS_{n-1}A_3A_1$, $A_3S_{n+1}O_nS_nA_1A_2$, označíme-li S_n průsečík transversály A_1O_n na straně A_2A_3, S_{n+1} průsečík transversály A_2O_n na straně A_3A_1, S_{n-1} průsečík transversály A_3O_n na straně A_1A_2.

Třetí jednotící princip, v němž jsou rovněž zahrnuty četné konfigurační vlastnosti trojúhelníku, jest princip projektivity. Projektivní geometrie, vybudovaná analyticky *Möbiusem*, 1827 a *Plückerem*, 1829, synteticky *Steinerem*, 1832 a *v. Staudtem*, 1847, uvažuje kuželosečky jako výtvory projektivních svazků paprsků. Lze tudíž i geometrii trojúhelníku, především pokud máme na mysli „pozoruhodné" kružnice a kuželosečky vůbec ve spojení s trojúhelníkem, vybudovati projektivně. Ale nejen to, i geometrii trojúhelníku samotného. Ukáži to na jednom příkladě.

Jak je známo, vytvořuje svazek kuželoseček na libovolné transversále páry průsečíků, které jsou v involuci. Obě mohou degenerovati ve dva páry přímek a obdržíme úplný čtyřroh. Je-li označen $ABCDEF$, jest dvojice stran ABE a DCE jedna, dvojice ADF a BCF druhá degenerovaná kuželosečka. Každá transversála protíná tedy konfiguraci stran a úhlopříček v šesti bodech, které musí býti v involuci, což dokázal již v r. 1843 *C. Adams* ve spise „Die Lehre von den Transversalen in ihrer Anwendung auf die Planimetrie". To však máme zase trojúhelníkovou konfiguraci AEF a tři transversály bodem C. Anebo ještě jinak. $ABCD$ může být i čtyřúhelník tětivový, jemuž lze opsati kružnici; v trojúhelníku $A_1A_2A_3$ se všemi třemi výškami jest to zřejmě čtyřúhelník $A_1V_3VV_2$.

Zůstanou-li body A_1VV_2 pevné, a šine-li se pata V_3 po kružnici, opsané čtyřúhelníku $A_1V_3VV_2$ směrem k vrcholu A_1, splyne s ním konečně, a obdržíme konfiguraci specialisovanou: trojúhelník A_1VV_2, $V_3 \equiv A_1$, $V_3A_3 \equiv VA_1$ a strana V_3A_1 přejde v tečnu v bodě A_1 ke kružnici opsané. Každá transversála musí opět poskytnouti na stranách trojúhelníku, na kružnici a tečně šest bodů v involuci. I to dokázal již *Adams* ve jmenovaném díle.

Uvedeným příkladem jest dokázána příbuznost geometrie projektivní s geometrií úplného čtyřrohu, takže se dosud uvažované jednotící principy redukují na dva: *na princip projektivity a na princip, vyjádřený větou Menelaovou a její duální obměnou, větou Cevovou.* V nich jest podstata jednotícího hlediska, *jimi stmeluje moderní geometrie všechny konfigurační a metrické vztahy a vlastnosti trojúhelníku v ucelený systém, jenž nepřipouští hledati a viděti v jednotlivých vlastnostech úkoly a problémy isolované.* Přibereme-li ještě jiné přínosy vývoje moderní geometrie, uvážíme-li ještě význam imaginárních prvků v geometrii, obdržíme exaktní definici geometrie trojúhelníku, kterou podal *Felix Klein* ve své „Elementargeometrie vom höheren Standpunkte“:

Geometrie trojúhelníku není než projektivní teorie invariant pěti bodů; tří reálných a obou absolutních bodů kruhových $(1, i, 0)$, $(1, -i, 0)$. A hned dodává: *„Erst sie verleiht der Geometrie des Dreieckes den Charakter eines systematischen, durchsichtigen Lehrgebäudes, den man bisher an ihr so sehr vermisste.“*

Chceme-li tedy pěstovati středoškolskou geometrii v duchu moderní exaktní vědy, **musíme ji v naznačeném smyslu reformovati.** Tím však netoliko překonáme zásadní a hluboký rozpor středoškolské, přirozené geometrie s moderní geometrií syntetickou, nýbrž odstraníme i druhou základní chybu, jíž se ona dopouští: *Odstraníme disproporci mezi upřílišněnou péčí o metrické vztahy a mnohdy o příliš mechanické používání těchto vztahů k výpočtům čiře formalistickým a poměrně malou péčí o vztahy konfigurační.*

Slovo „geometrie“ znamená sice měřictví. Vývoj dal však této vědě jiný smysl. Měřictví ve starém toho slova významu nikterak neproniká až k podstatě vlastností prostorových útvarů; naopak, ono ji zastírá. *Podstata moderní geometrie záleží však v pronikání lidského ducha do struktury prostorových konfigurací,* kde jest metrika pouhou aritmetickou ilustrací vlastností konfiguračních. **Jest tudíž i po této stránce reforma nutna.**

II.

Než však bude moci býti provedena žádoucí reforma, uplynou možná desítiletí. Jest třeba věc důkladně promysliti a provésti výběr příslušné látky velmi pečlivě. To nemůže býti dílem jediného člověka; *práce musí býti vykonána* společným úsilím kolektivu středoškolských a vysokoškolských profesorů geometrie. Organisačním střediskem a dirigentem *může býti* **Jednota čsl. matematiků a fysiků.**

Co však možno učiniti v době přechodné? Jest možno odstraniti roztříštěnost při vyučování geometrii na půdě geometrie přirozené? Roztříštěnost záleží podle mého mínění hlavně v tom, *že odvozujeme základní konfigurační a metrické vztahy isolovaně, každý z jiného základu.* To má ten neblahý následek, že je

1. v hlavách žáků v nejlepším případě snůška přečetných formulí, pro něž však není žádné jednotné opory pro zapamatování, jak byly odvozeny,

2. že při převaze metriky a výpočtů nad konfiguračními vztahy a vlastnostmi unikají žákům přečetné zajímavé a důležité vlastnosti *konfigurační.*

Příčina tohoto nežádoucího stavu nespočívá ovšem pouze ve středoškolských osnovách. Jest také v tom, *že se na vysokých školách věnuje středoškolské geometrii nepatrná pozornost.* Tím se stane, že mladý absolvent university neovládá důkladně ani svůj vlastní obor, jemuž bude na střední škole vyučovati. Ze středoškolské geometrie nepoznal na universitě nic nového a učí pak v praxi zase jenom tomu, čemu se naučil před maturitou. Tak se potom nutně neustále točíme na témž místě.

Chci však ukázati, že jest východisko aspoň z roztříštěnosti na půdě staré geometrie středoškolské. Jest velmi jednoduchý konstruktivní předpis pro východiskovou konfiguraci, která umožňuje vycházeti při odvozování základních vztahů vždy z téhož základu jak na středním, tak na vyšším stupni.

Jest ostroúhlý trojúhelník $A_1A_2A_3$; jeho strany mají délku a_1, a_2, a_3 tak, že jest $a_1 > a_3 > a_2$, a úhly $\alpha_1 > \alpha_3 > \alpha_2$. Úhel α_2 přeneseme kružítkem k vrcholu A_1 od strany (ramene) A_1A_3 směrem dovnitř trojúhelníku. Jeho druhé rameno protne pak stranu A_2A_3 v bodě B_1. Podobně přeneseme α_3 k vrcholu A_1 od strany A_1A_2 směrem dovnitř trojúhelníku a obdržíme na straně A_2A_3 průsečík C_1. Ze vztahu $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 180^0$ plyne, že jest

$$\sphericalangle A_1B_1C_1 = \sphericalangle A_1C_1B_1 = \alpha_1,$$

$\triangle A_1B_1C_1$ jest *rovnoramenný* a

$$\triangle B_1A_1A_3 \sim \triangle C_1A_2A_1 \sim \triangle A_1A_2A_3.$$

Stejně lze přenésti α_3 k vrcholu A_2 od strany A_2A_1, α_1 k vrcholu A_2 od strany A_2A_3; α_1 k vrcholu A_3 od strany A_3A_2, α_2 k vrcholu A_3 od strany A_3A_1, vždy směrem dovnitř $\triangle A_1A_2A_3$. Druhá ramena přenesených úhlů poskytnou postupně průsečíky B_2 a C_2 na straně A_3A_1, průsečíky B_3 a C_3 na straně A_1A_2. Opět jest

$$\sphericalangle A_2B_2C_2 = \sphericalangle A_2C_2B_2 = \alpha_2, \quad \sphericalangle A_3B_3C_3 = \sphericalangle A_3C_3B_3 = \alpha_3,$$

a trojúhelníky $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ jsou *rovnoramenné,* trojúhelníky $A_1B_2A_2$, $A_2C_2A_3$, $A_3A_2B_3$, $A_1A_3C_3$, $A_1A_2A_3$ jsou podobné.

První význam popsané konstrukce jest, že lze jí použíti k poučení žáků o podstatě funkcionálního myšlení v geometrii. Uvažujeme, co se mění v konfiguraci vrcholových transversál A_nB_n a A_nC_n, zmenšuje nebo zvětšuje-li se úhel α_1 tím, že se šine vrchol A_1 ,,přímo" vzhůru nebo ,,přímo" dolů. Vzdaluje-li se vrchol A_1 od základny $A_2A_3 \equiv a_1$, zmenšuje se α_1, α_2 a α_3 se zvětšují; proto se body B_1 a C_1 od sebe vzdalují a blíží se k vrcholům A_2, případně A_3. B_1 splyne s A_2, C_1 s A_3, uběhne-li A_1 do nekonečna, kdy jest $\alpha_2 = \alpha_3 = 90^0$. Naproti tomu se body B_2 a C_2 k sobě přibližují; podobně i body B_3 a C_3. Blíží-li se však vrchol A_1 k základně a_1, zvětšuje se α_1, α_2 a α_3 se menší; body B_1 a C_1 se vzdalují od vrcholů A_2, A_3 a blíží se k sobě. Body B_2 a C_2, B_3 a C_3 se však od sebe vzdalují. V okamžiku, kdy je úhel α_1 pravý, jest $\triangle A_1A_2A_3$ při A_1 pravoúhlý, body B_1 a C_1 splynou, a ramena rovnoramenného trojúhelníka A_1B_1, A_1C_1 utvoří výšku A_1P_1 ($P_1 \equiv B_1 \equiv C_1$), kolmici vrcholem A_1 na stranu A_2A_3. Vrátíme-li se k původní konfiguraci, kdy jest trojúhelník ostroúhlý, zůstane kolmice A_1P_1 výškou jak v $\triangle A_1A_2A_3$, tak v $\triangle A_1B_1C_1$, půlíc základnu B_1C_1 i úhel při vrcholu $B_1A_1C_1$. Poněvadž jest v každém trojúhelníku $A_3B_3 \parallel A_1C_1$, $A_2C_2 \parallel A_1B_1$, $A_3C_3 \parallel A_2B_2$, jest v pravoúhlém $A_3B_3 \perp A_2A_3$, $A_2C_2 \perp$ $\perp A_2A_3$; tu je A_3A_1 výškou v $\triangle B_3A_3C_3$, A_2A_1 výškou v $\triangle B_2A_2C_2$. Vrchol A_1 jest pak společnou patou výšek A_3A_1 a A_2A_1 v pravoúhlém trojúhelníku, $P_2 \equiv P_3 \equiv A_1$.

Přejde-li konečně trojúhelník $A_1A_2A_3$ v tupoúhlý při A_1, přejde B_1, jež bylo dříve mezi A_2 a P_1, napravo mezi P_1 a A_3, a C_1, jež bylo před tím mezi P_1 a A_3, přejde nalevo mezi A_2 a P_1. Úhly při základně $A_1B_1C_1$ jsou teď $180^0 - \alpha_1$. Až později dokážeme žákům, že se výšky A_nP_n protínají v témž bodě, v ortocentru V, upozorníme, že v trojúhelníku ostroúhlém leží paty všech výšek mezi vrcholy trojúhelníku bodů A_n, ortocentr pak uvnitř jeho plochy; v tupoúhlém při A_1 však leží pouze P_1 mezi A_2 a A_3, avšak P_2 a P_3 vně úseček A_3A_1 a A_2A_1 za vrcholem A_1 na prodloužených stranách a_2 případně a_3; ortocentr V je vně plochy trojúhelníku.

Považuji toto a vůbec každé zkoumání funkční stránky konfiguračních vztahů, zde mezi body $B_nC_nP_n$ a V a příslušnými úsečkami A_nB_n, A_nC_n, A_nP_n, B_nC_n za velmi důležité prohlubování spojitosti mezi názorem a logickým myšlením. Ostatně může jenom touto cestou vniknouti žák do podstaty specialisace konfiguračních i metrických vztahů — všeobecně platných — na případech ,,zvláštních" poloh a forem geometrických útvarů.

Druhý význam popsané konfigurace záleží v tom, že můžeme obrátiti pozornost žáků k nezbytnosti zavedení pojmu kladných a záporných úseček do geometrie. Jest to důležité netoliko vzhledem k rozmanitým konfiguračním a metrickým vztahům, jejichž základem jest věta Menelaova a Cevova, ale i pro všechny metrické relace, mají-li býti upraveny tak, aby měly všeobecnou platnost pro všechny druhy a zvláštní případy trojúhelníků.

Jest ovšem třeba jednou provždy stanoviti způsob označování různých úseček, které se vždy vyskytují v triplu, aby bylo možno pouhou cyklickou záměnou značek odvoditi bez počítání celý tripl příslušné relace. Toho dosáhneme nejjednodušším způsobem, označíme-li prvky téhož konfiguračního druhu týmž písmenem s ukazovateli 1, 2, 3. Dále definujeme úsečky A_1B_3, A_2B_1, A_3B_2; A_1P_3, A_2P_1, A_3P_2; A_1C_3, A_2C_1, A_3C_2; B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3; B_1A_3, B_2A_1, B_3A_2; C_1A_3, C_2A_1, C_3A_2; P_1A_3, P_2A_1, P_3A_2; P_1P_2, P_2P_3, P_3P_1 jako kladné, souhlasí-li — při tomto sledu písmen při jejich koncových bodech — jejich směr se smyslem oběhu na obvodě trojúhelníku $A_1A_2A_3$, případně $P_1P_2P_3$ proti pohybu hodinových ručiček; souhlasí-li za týchž podmínek s oběhem ručiček, jsou jmenované úsečky záporné.

Jest tedy na základě této úmluvy na př. úsečka B_1C_1 kladná v trojúhelníku ostroúhlém, záporná v tupoúhlém a má délku nula v pravoúhlém.

Třetí význam vrcholových transversál A_nB_n a A_nC_n záleží v tom, že skýtají velmi plodnou příležitost k nacvičení vět o úměrnosti úseček v podobných trojúhelnících. Avšak všimněme si napřed ortického trojúhelníku výškových pat $P_1P_2P_3$. Obdržíme jej nejkratší konstruktivní cestou, opíšeme-li nad stranami (průměry) A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 kružnice; jejich průsečíky na stranách trojúhelníku jsou paty výšek, body P_1, P_2, P_3. Nyní jest $\sphericalangle A_1P_1P_2 = \sphericalangle A_1A_2P_2 = 90^0 - \alpha_1 = \sphericalangle P_3A_3A_1 = \sphericalangle P_3P_1A_1$ (úhly obvodové), z čehož plyne

$$\sphericalangle P_2P_1A_3 = \sphericalangle A_2P_1P_3 = \alpha_1$$

a podobně

$$\sphericalangle P_3P_2A_1 = \sphericalangle A_3P_2P_1 = \alpha_2$$
$$\sphericalangle P_1P_3A_2 = \sphericalangle A_1P_3P_2 = \alpha_3;$$

jsou tudíž strany ortického trojúhelníku rovnoběžné k odpovídajícím transversálám A_nB_n a A_nC_n:

$$A_1B_1 \parallel A_2C_2 \parallel P_1P_2,\ A_1C_1 \parallel A_3B_3 \parallel P_1P_3,$$
$$A_3C_3 \parallel A_2B_2 \parallel P_2P_3.$$

Proto uvedené transversály nazývám *p-transversály*.

Máme tedy v celku 10 podobných trojúhelníků:

$$A_1A_2A_3,\ B_1A_1A_3,\ A_1B_2A_2,\ A_3A_2B_3,\ C_1A_2A_1,\ A_2C_2A_3,\ A_1A_3C_3,\ A_1P_2P_3,$$
$$P_1A_2P_3,\ P_1P_2A_3;$$

poskytnou $2 \cdot \binom{10}{2} = 90$ na sobě nezávislých úměr a tudíž 90 relací mezi prvky:

$$A_1A_2 \equiv a_3,\ P_1P_2 \equiv p_3,\ A_1B_1 = A_1C_1 \equiv g_1,\ B_1A_3 \equiv b_1,\ A_2C_1 \equiv c_1,$$
$$A_2A_3 \equiv a_1,\ P_2P_3 \equiv p_1,\ A_2B_2 = A_2C_2 \equiv g_2,\ B_2A_1 \equiv b_2,\ A_3C_2 \equiv c_2,$$
$$A_3A_1 \equiv a_2,\ P_3P_1 \equiv p_2,\ A_3B_3 = A_3C_3 \equiv g_3,\ B_3A_2 \equiv b_3,\ A_1C_3 \equiv c_3,$$

průmět strany a_1 na stranu a_2 : $A_3P_2 \equiv \mathfrak{a}_{1\cdot 2}$
a_2 a_3 : $A_1P_3 \equiv \mathfrak{a}_{2\cdot 3}$
a_3 a_1 : $A_2P_1 \equiv \mathfrak{a}_{3\cdot 1}$;

průmět strany a_1 na stranu a_3 : $P_3A_2 \equiv \mathfrak{a}_{1\cdot 3}$
a_2 a_1 : $P_1A_3 \equiv \mathfrak{a}_{2\cdot 1}$
a_3 a_2 : $P_2A_1 \equiv \mathfrak{a}_{3\cdot 2}$.

K rychlému odvození úměr použijeme tabulky, v níž jsou napsány pod sebou stejnolehlé strany podobných trojúhelníků:

Proti úhlu

	v △	α_1	α_2	α_3
I.	$A_1A_2A_3$	a_1	a_2	a_3
II.	$B_1A_1A_3$	a_2	b_1	g_1
III.	$A_1B_2A_2$	g_2	a_3	b_2
IV.	$A_3A_2B_3$	b_3	g_3	a_1
V.	$C_1A_2A_1$	a_3	g_1	c_1
VI.	$A_2C_2A_3$	c_2	a_1	g_2
VII.	$A_1A_3C_3$	g_3	c_3	a_2
VIII.	$A_1P_2P_3$	p_1	$\mathfrak{a}_{2\cdot 3}$	$\mathfrak{a}_{3\cdot 2}$
IX.	$P_1A_2P_3$	$\mathfrak{a}_{1\cdot 3}$	p_2	$\mathfrak{a}_{3\cdot 1}$
X.	$P_1P_2A_3$	$\mathfrak{a}_{1\cdot 2}$	$\mathfrak{a}_{2\cdot 1}$	p_3
sloupec		1	2	3

Tak poskytne na př. součin III. 1 krát VII. 3 a III. 3 krát VII. 1 rovnici $g_2a_2 = b_2g_3$ atd. Obdržíme pak 90 párů rovnoplochých obdélníků nebo čtverců. Pro další rozbor jsou tyto nejdůležitější:

1. I. 1, II. 3 = II. 1, I. 3:

$$a_1g_1 = a_2a_3,$$
a podobně
$$a_2g_2 = a_3a_1,$$
$$a_3g_3 = a_1a_2,$$

t. j. *obdélník z kterékoliv strany a k ní příslušné p-transversály má stejný obsah jako obdélník z druhých dvou stran trojúhelníku.*

Jest tedy rovnicí

$$g_n = \frac{a_{n+1}a_{n-1}}{a_n} \tag{I}$$

vyjádřena délka p-transversály jako funkce stran trojúhelníku původního.

2. IV. 3, VI. 2 = IV. 2, VI. 3:

$$a_1^2 = g_2g_3,$$

a podobně

$$a_2^2 = g_3g_1,$$
$$a_3^2 = g_1g_2,$$

t. j. *čtverec z kterékoliv strany trojúhelníku má stejný obsah jako obdélník z obou p-transversál, které příslušejí k druhým dvěma stranám.*

Obecně platí

$$a_n^2 = g_{n+1}g_{n-1} \tag{II}$$

3. II. 2, V. 3 = II. 3, V. 2:

$$g_1^2 = b_1c_1,$$

a podobně

$$g_2^2 = b_2c_2,$$
$$g_3^2 = b_3c_3,$$

t. j. *čtverec z kterékoliv p-transversály má stejný obsah jako obdélník z obou úseků b, c, které vytvoří ona p-transversála na příslušné straně trojúhelníku.*

Obecně platí

$$g_n^2 = b_nc_n \tag{III}$$

4. I. 1, II. 2 = I. 2, II. 1:

$$a_2^2 = a_1b_1,$$

a podobně

$$a_3^2 = a_2b_2,$$
$$a_1^2 = a_3b_3;$$

I. 3, V. 1 = I. 1, V. 3:

$$a_3^2 = a_1c_1,$$

a podobně

$$a_1^2 = a_2c_2,$$
$$a_2^2 = a_3c_3,$$

t. j. *čtverec z kterékoliv strany trojúhelníku má stejný obsah jako obdélník z kterékoliv ze zbývajících stran a z přilehlého b- nebo c-úseku na této straně.*

Obecně napíšeme

$$a_{n+1}^2 = a_nb_n, \quad a_{n-1}^2 = a_nc_n,$$

a vyjádříme úseky jako funkce stran relacemi

$$b_n = \frac{a_{n+1}^2}{a_n}, \quad c_n = \frac{a_{n-1}^2}{a_n}. \tag{IV}$$

5. I. 2, VIII. 3 = I. 3, VIII. 2:

$$a_2\mathfrak{a}_{3,2} = a_3\mathfrak{a}_{2,3},$$

a podobně

$$a_3\mathfrak{a}_{1,3} = a_1\mathfrak{a}_{3,1},$$

$$a_1\mathfrak{a}_{2,1} = a_2\mathfrak{a}_{1,2};$$

obecně jest

$$a_{n+1}\mathfrak{a}_{n-1,n+1} = a_{n-1}\mathfrak{a}_{n+1,n-1}. \tag{V}$$

Oba součiny vyjadřují zřejmě *mocnost vrcholu A_n vzhledem ke kružnici nad stranou $A_{n+1}A_{n-1}$*, která poskytuje na zbývajících stranách trojúhelníku paty výšek P_{n+1} a P_{n-1}.

6. Utvoříme-li součiny rovnic každého z triplů I. a IV., obdržíme zajímavý vztah

$$g_1g_2g_3 = b_1b_2b_3 = c_1c_2c_3 = a_1a_2a_3, \tag{VI}$$

který lze interpretovati jako čtyři kvádry stejného objemu, jenž má, užijeme-li známé relace $\nabla = a_1a_2a_3/4R$, kde ∇ značí plošný obsah trojúhelníku $A_1A_2A_3$ a R poloměr kružnice jemu opsané, hodnotu $4R\nabla$, t. j. týž objem jako přímý hranol o základně $\triangle A_1A_2A_3$ a o výšce dvojnásobného průměru opsané kružnice.

III.

Zkoumejme nyní jednak, co poskytnou relace (III) a (IV), je-li $\triangle A_n$ při vrcholu A_1 pravoúhlý, jednak rozšiřme úvahu obdobně i na trojúhelník kosoúhlý.

Poněvadž v uvedeném trojúhelníku pravoúhlém je g_1 výška na přeponu a_1, $B_1 \equiv C_1 \equiv P_1$ jest její pata na přeponě, b_1 a c_1 jsou úseky patou výšky na přeponě vytvořené, a a_2, a_3 jsou obě odvěsny, praví relace $g_1^2 = b_1c_1$, že výška na přeponě jest střední měřická úměrná k úsekům na přeponě; relace $a_2^2 = a_1b_1$, $a_3^2 = a_1c_1$ praví, že jest každá z odvěsen střední měřická úměrná k přeponě a k přilehlému úseku na této. To jsou však zřejmě *známé Euklidovy věty, které jsou tudíž pouze zvláštní případy pro trojúhelník pravoúhlý, zvláštní případy vět* (III) a (IV), *platných v libovolném trojúhelníku.* Avšak právě z Euklidových relací lze pouhým počtem odvoditi větu Pythagorovu; sečteme-li $a_2^2 = a_1b_1$ a $a_3^2 = a_1c_1$, obdržíme $a_2^2 + a_3^2 = a_1(b_1 + c_1)$, a jelikož jest v pravoúhlém trojúhelníku $b_1 + c_1 = a_1$, vyjde *Pythagorova* poučka

$$a_1^2 = a_2^2 + a_3^2.$$

Přirozeně vybaví se nyní otázka, jaký vztah obdržíme z relací obecných, sečteme-li $a_2^2 = a_1 b_1$ a $a_3^2 = a_1 c_1$ v trojúhelníku kosoúhlém?

Dostaneme:

$$a_2^2 + a_3^2 = a_1 (b_1 + c_1) = a_1 (\underbrace{B_1C_1 + C_1A_3 + A_2B_1}_{a_1} + B_1C_1),$$

a označíme-li v rovnoramenném trojúhelníku $A_1B_1C_1$ základnu $B_1C_1 \equiv z_1$:

$$a_2^2 + a_3^2 = a_1 (a_1 + z_1), \quad a_2^2 + a_3^2 = a_1^2 + a_1 z_1,$$

a konečně

$$a_1^2 = a_2^2 + a_3^2 - a_1 z_1.$$

Kvadratické členy jsou zřejmě totožné s kvadratickými členy věty *Carnotovy* a věty *kosinusové*; musí tudíž býti

$$a_1 z_1 = 2a_2 a_3 \cos \alpha_1 = 2a_2 \mathfrak{a}_{3,2} = 2a_3 \mathfrak{a}_{2,3}.$$

Že jest $\mathfrak{a}_{3,2} = a_3 \cos \alpha_1$, $\mathfrak{a}_{2,3} = a_2 \cos \alpha_1$, plyne bezprostředně z pravoúhlých trojúhelníků $A_1A_2P_2$ a $A_1P_3A_3$. Ostatní plyne z podobných trojúhelníků

$$A_1A_2P_2 \sim B_1A_1P_1 \sim A_1A_3P_3,$$

z nichž obdržíme úměry $\frac{1}{2}z_1 : g_1 = \mathfrak{a}_{3,2} : a_3 = \mathfrak{a}_{2,3} : a_2$,

$$\tfrac{1}{2}z_1 : a_2 a_3 / a_1 = \mathfrak{a}_{3,2} : a_3 = \mathfrak{a}_{2,3} : a_2$$

a po úpravě

$$a_1 z_1 = 2a_2 \mathfrak{a}_{3,2} = 2a_3 \mathfrak{a}_{2,3},$$

anebo bezprostředně z $\triangle\, A_1B_1P_1$, kde je

$$\tfrac{1}{2}z_1 = g_1 \cos \alpha_1 = (a_2 a_3 / a_1) \cos \alpha_1,$$

čili

$$a_1 z_1 = 2a_2 a_3 \cos \alpha_1.$$

Obdržíme tudíž uvažovaný vztah ve třech tvarech:

Carnotův vztah:

$$a_1^2 = a_2^2 + a_3^2 - 2a_2 \mathfrak{a}_{3,2} = a_2^2 + a_3^2 - 2a_3 \mathfrak{a}_{2,3},$$

kosinusová věta

$$a_1^2 = a_2^2 + a_3^2 - 2a_2 a_3 \cos \alpha_1$$

a

$$a_1^2 = a_2^2 + a_3^2 - a_1 z_1.$$

Všechny přejdou v trojúhelníku pravoúhlém při A_1 v *Pythagorovu* větu

$$a_1^2 = a_2^2 + a_3^2,$$

neboť jest pak

$$\mathfrak{a}_{3,2} = \mathfrak{a}_{2,3} = 0, \quad \cos \alpha_1 = 0, \quad z_1 = 0.$$

Označíme-li výraz

$$a_2^2 + a_3^2 - a_1^2 \equiv Z_1^2,$$

obecně
$$a_{n+1}^2 + a_{n-1}^2 - a_n^2 = Z_n^2,$$
jest
$$\mathfrak{a}_{n+1,n-1} = \frac{Z_n^2}{2a_{n-1}}, \quad \mathfrak{a}_{n-1,n+1} = \frac{Z_n^2}{2a_{n+1}}. \tag{VII}$$
$$\cos\alpha_n = \frac{Z_n^2}{2a_{n+1}a_{n-1}}, \tag{VIII}$$
$$z_n = \frac{Z_n^2}{a_n}. \tag{IX}$$

Nyní můžeme vyjádřiti i strany *ortického* trojúhelníku pomocí úměry (viz tabulka) I. 1, VIII. 2 — I. 2, VIII. 1:
$$p_1 a_2 = a_1 \mathfrak{a}_{2\cdot 3};$$
dosadíme-li (VII), obdržíme
$$p_1 = \frac{a_1 Z_1^2}{2a_2a_3} = a_1 \cos\alpha_1$$
a obecně
$$p_n = \frac{a_n Z_n^2}{2a_{n+1}a_{n-1}} = a_n \cos\alpha_n. \tag{X}$$

Násobením všech rovnic každého z triplů VII., VIII., IX. a X. obdržíme druhou součinovou poučku (viz VI.):
$$\Pi\mathfrak{a}_{n+1,n-1} = \Pi\mathfrak{a}_{n-1,n+1} = \Pi p_n = \Pi\tfrac{1}{2}z_n = \Pi a_n \cos\alpha_n, \tag{XI}$$
jejíž první část vyplývá již z věty Cevovy.

Výšku $A_1P_1 \equiv v_1$ v $\triangle A_n$ dostaneme z $\triangle A_1B_1P_1$:
$$v_1^2 = g_1^2 - \tfrac{1}{4}z_1^2 = a_2^2a_3^2/a_1^2 - (a_2^2 + a_3^2 - a_1^2)^2/4a_1^2,$$
což provedeno a upraveno dá obecně
$$v_n = \frac{1}{2a_n}\sqrt{2\Sigma a_{n+1}^2a_{n-1}^2 - \Sigma a_n^4}. \tag{XII}$$

Výraz pod odmocninou jest pro všechny hodnoty ukazovatele n invariantní, a jeho odmocnina jest zřejmě čtyrnásobek plošného obsahu trojúhelníka A_n:
$$\nabla = \tfrac{1}{4}\sqrt{2\Sigma a_{n+1}^2a_{n-1}^2 - \Sigma a_n^4}. \tag{XIIa}$$
V $\triangle A_1B_1P_1$ jest
$$\sin\alpha_1 = \frac{v_1}{g_1} = \frac{1}{2a_2a_3}\sqrt{2\Sigma a_{n+1}^2a_{n-1}^2 - \Sigma a_n^4},$$
obecně
$$\sin\alpha_n = \frac{2\nabla}{a_{n+1}a_{n-1}}, \tag{XIII}$$

z čehož plyne $\quad \nabla = \frac{1}{2} a_{n+1} a_{n-1} \sin \alpha_n.$ (XIIIa)

Poměr rovnic triplu (XIII) dá

$$\sin \alpha_1 : \sin \alpha_2 : \sin \alpha_3 = 2\nabla / a_2 a_3 : 2\nabla / a_3 a_1 : 2\nabla / a_1 a_2,$$

a po úpravě větu *sinusovou*

$$\sin \alpha_1 : \sin \alpha_2 : \sin \alpha_3 = a_1 : a_2 : a_3. \tag{XIV}$$

Sestrojíme-li střed S_1 strany $A_2 A_3$ a střed V' kružnice opsané poloměrem R, jest v $\triangle A_2 S_1 V'$ při V' úhel α_1 a platí vztahy $\frac{1}{2} a_1 = R \sin \alpha_1$, $R = a_n / 2 \sin \alpha_n$, $\sin \alpha_n = a_n / 2R$, což dosazeno do (XIIIa) dá

$$\nabla = \frac{\Pi a_n}{4R}. \tag{XV}$$

Násobíme-li ještě všechny rovnice triplu (XIIIa), obdržíme

$$\nabla^3 = \tfrac{1}{8} \Pi a_n{}^2 \, \Pi \sin \alpha_n,$$

a s ohledem na (XV), kde je $\Pi a_n{}^2 = 16 \nabla^2 R^2$, známý vzorec

$$\nabla = 2R^2 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3. \tag{XVa}$$

Délku těžnic $A_n S_n \equiv t_n$ lze určiti dvojím způsobem; buďto z trojúhelníku $A_n S_n P_n$ větou Pythagorovou: $t_1{}^2 = v_1{}^2 + (\frac{1}{2} a_1 - \mathfrak{a}_{2\cdot 1})^2$, anebo rychleji z uvážení, že výraz $t_1{}^2 - (\frac{1}{2} a_1)^2$ udává *mocnost* vrcholu A_1 vzhledem ke kružnici nad stranou $A_2 A_3$ o středu S_1 a poloměru $\frac{1}{2} a_1$. Táž mocnost má však podle V. hodnotu $a_2 \mathfrak{a}_{3\cdot 2}$, a podle (VII) hodnotu $\frac{1}{2} Z_1{}^2$. Jest tedy $t_1{}^2 - (\frac{1}{2} a_1)^2 = \frac{1}{2}(a_2{}^2 + a_3{}^2 - a_1{}^2)$, z čehož obdržíme obecně

$$t_n = \tfrac{1}{2} \sqrt{2 \, (a_{n+1}{}^2 + a_{n-1}{}^2) - a_n{}^2}. \tag{XVI}$$

I úseky na výškách $A_n P_n$, dolní $P_n V \equiv d_n$, horní $V A_n \equiv h_n$, lze snadno určiti; z podobných trojúhelníků $V P_1 A_3$ a $A_2 P_1 A_1$ dostaneme jednak $d_1 : \mathfrak{a}_{2\cdot 1} = \mathfrak{a}_{3\cdot 1} : v_1$, jednak $h_3 : \mathfrak{a}_{2\cdot 1} = a_3 : v_1$, a po dosazení ze (VII), (XII) a úpravě obecně

$$d_n = \frac{Z_{n+1}{}^2 \, Z_{n-1}{}^2}{8 a_n \nabla}, \tag{XVIIa}$$

$$h_n = \frac{a_n \, Z_n{}^2}{4\nabla}. \tag{XVIIb}$$

Týž výsledek obdržíme trigonometricky z pravoúhlých trojúhelníků $V P_1 A_3$ a $V P_3 A_1$, kde je při vrcholu V úhel α_2:

$$d_1 = \mathfrak{a}_{2\cdot 1} \cot g \, \alpha_2 \text{ (VII, VIII, XIII)}, \quad h_1 = \frac{\mathfrak{a}_{2\cdot 3}}{\cos \alpha_2} \text{ (VII, VIII)}.$$

Všechny úsečky, jejichž délka jest určena výrazem obsahujícím tvar $Z_n{}^2$, mohou nabýti hodnoty 0, je-li $a_2{}^2 + a_3{}^2 = a_1{}^2$, tedy v trojúhelníku pravoúhlém při vrcholu A_1. Jsou to úsečky $a_{2 \cdot 3}$, $a_{3 \cdot 2}$, z_1, p_1, h_1, d_2 a d_3. To souvisí, jak bylo ukázáno, s polohou bodů B_1, C_1, P_2, P_3 a V. Poněvadž jest v ostroúhlém trojúhelníku, v němž jest splněna podmínka $a_1 > a_3 > a_2$, výraz $a_2^2 + a_3^2 > a_1^2$, jsou jmenované úseky vesměs kladné. V trojúhelníku tupoúhlém jest však $a_2^2 + a_3^2 < a_1^2$, a jmenované úsečky jsou vesměs záporné.

K prvkům kružnice vepsané a kružnic připsaných můžeme přejíti dvojím způsobem:

a) Určíme $\sin \alpha_1$ z $\cos \alpha_1$ známým způsobem:

$$\sin^2 \alpha_1 = 1 - \cos^2 \alpha_1 = 1 - \frac{(a_2^2 + a_3^2 - a_1^2)^2}{4a_2^2 a_3^2} =$$

$$= \frac{(4a_2^2 a_3^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_1^2)(4a_2^2 a_3^2 - a_2^2 - a_3^2 + a_1^2)}{4a_2^2 a_3^2},$$

což dá obecně

$$\sin \alpha_n = \frac{2}{a_{n+1}\, a_{n-1}} \sqrt{s\,(s - a_1)\,(s - a_2)\,(s - a_3)},$$

a ve spojení s (XIII) *Heronův* vzorec

$$\bigtriangledown = \sqrt{s\, \Pi\, (s - a_n)}.$$

Narýsujeme-li jmenované kružnice o poloměrech r, r_1, r_2, r_3, obdržíme obvyklým způsobem všechny užívané vztahy.

b) Nemusíme však provésti žádnou novou konstrukci, uvážíme-li, že výšky $A_n P_n$ jsou *osy vnitřních úhlů* $180^0 - 2\alpha_n$ v ortickém trojúhelníku $P_1 P_2 P_3$, strany $A_{n+1} A_{n-1}$ pak *osy jeho vnějších úhlů* $2\alpha_n$, neboť jsme dokázali, že $\sphericalangle A_n P_n P_{n+1} = \sphericalangle P_{n-1} P_n A_n = 90^0 - \alpha_n$, a poněvadž jest $A_n P_n \perp A_{n+1} A_{n-1}$. Jest tudíž ortocentr V středem kružnice vepsané (ϱ její poloměr), vrcholy A_n středy kružnic připsaných (ϱ_n jejich poloměry) v ortickém trojúhelníku $P_1 P_2 P_3$. Stačí tedy považovati tento trojúhelník za základní a trojúhelník daný $A_1 A_2 A_3$ za trojúhelník středů S_n^p kružnic připsaných.

*Tím jsem ukázal, že jest možno odvoditi všechny relace středoškolské geometrie trojúhelníku i na půdě geometrie přirozené z téhož základu — z konstrukce p-transversál.**)

---

*) Předneseno ve schůzi odboru JČMF v Brně 4. V. 1933. O námětech bude diskutováno tamtéž v zimním období. Proto prosím středoškolské kolegy, aby laskavě zaujali stanovisko a sdělili je stručně písemně Jednotě čsl. matematiků a fysiků v Praze II., Vodičkova 20, nejpozději do jednoho měsíce.