K Brownovu pohybu torsního zrcátka.

Jan Potoček.

(Došlo 27. července 1933.)

Nechť vykonává nějaká částice Brownův pohyb, při čemž nechť její poloha závisí na jediné souřadnici (pohyb lineární). Pozorujme pohyb částice a označme souřadnici její počáteční polohy resp. její souřadnice v okamžicích $\vartheta, 2\vartheta, \ldots, n\vartheta, \ldots$ (ϑ je libovolně zvolené kladné číslo) písmeny x_0, resp. $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$. Utvořme střední hodnotu (s. h.) aritmetického průměru prvních n členů. Roste-li n přes všechny meze, má tato střední hodnota limitu, kterou označíme $\bar{x}$. Tedy

$$\bar{x} = \lim_{n \to \infty} \text{s. h.} \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}. \tag{1}$$

Abychom mohli posouditi, jak se blíží aritmetický střed hodnot x_k číslu $\bar{x}$, roste-li n přes každou mez, násobme čtverec rozdílu obou číslem n a utvořme střední hodnotu výrazu takto získaného. Má-li tato střední hodnota limitu pro n rostoucí přes každou mez, nazýváme tu limitu dispersí a označujeme ji $\frac{1}{2}C$:

$$\tfrac{1}{2}C = \lim \text{s. h.} \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n - n\bar{x})^2}{n}. \tag{2}$$

Hodnota disperse závisí na délce časového intervalu ϑ.

V tomto článku je vypočten vzorec pro dispersi u Brownova pohybu zrcátka, zavěšeného na torsním vlákně. Vzorec ten je velmi jednoduchý, takže se po této stránce hodí mnohem lépe k experimentálnímu zkoumání než obdobné vzorce pro dispersi, odvozené pro Brownův pohyb částice, na niž nepůsobí vnější síla a pro pohyb částice, podléhající tíži.[1])

Výpočet disperse zakládá se na některých větách z teorie Markovových řetězů, odvozených v obecnějším tvaru B. Hostinským[2]):

---

[1]) Viz J. Potoček: Příspěvek k theorii Brownova pohybu (Contribution à la théorie du mouvement Brownien), Spisy vyd. přírodovědeckou fakultou Masarykovy university, č. 171 (avec un résumé français).

[2]) B. Hostinský: Application du Calcul des Probabilités à la théorie du mouvement Brownien. (Annales de l'Institut H. Poincaré, T. III, fasc. 1), kap. IV.

O Markovových řetězech viz od téhož autora: Méthodes générales du Calcul des Probabilités, Mémorial des sc. math., fasc. LII.

Nechť se pohybuje bod spojitě po přímce (ose x) v konečném intervalu $(0, h)$. Nechť hustota pravděpodobnosti $\mathrm{u}(x_0, x, t)$, že bod přejde za dobu t z bodu x_0 do bodu x, je kladná, spojitá funkce proměnných x_0, x, t, nechť vyhovuje Smoluchowského funkční rovnici

$$\mathrm{u}(x_0, x, t_1 + t_2) = \int_0^h \mathrm{u}(x_0, \xi, t_1)\, \mathrm{u}(\xi, x, t_2)\, \mathrm{d}\xi$$

a nechť jest

$$\int_0^h \mathrm{u}(x_0, x, t)\, \mathrm{d}x = 1.$$

Pak platí, užijeme-li zavedeného označení, tato tvrzení:

1. Roste-li n přes všechny meze, má funkce $\mathrm{u}(x_0, x, n\vartheta)$ limitu nezávislou na x_0:

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{u}(x_0, x, n\vartheta) = \mathrm{u}(x). \tag{3}$$

2. Střední hodnota veličiny x_n definovaná vztahem

$$\text{s. h. } x_n = \int_0^h \mathrm{u}(x_0, x, n\vartheta)\, x\, \mathrm{d}x$$

má limitu

$$\lim_{n\to\infty} \text{s. h. } x_n = \bar{x} = \int_0^h \mathrm{u}(x)\, x\, \mathrm{d}x. \tag{4}$$

3. Existuje limita $\frac{1}{2}C$ definovaná vzorcem (2).

Připomeňme, že disperse je konečné číslo pro konečný interval; roste-li délka intervalu přes každou mez, může se stát, že i disperse roste nad každou mez [n. p. první příklad z práce citované v pozn.[1])].

Známe-li hustotu pravděpodobnosti u jako funkci veličin x_0, x, t, lze počítati dispersi podle vzorce[3]):

$$\tfrac{1}{2}C = \int_0^h \mathrm{u}(x)\,(x - \bar{x})^2\, \mathrm{d}x +$$

$$+ 2\int_0^h\int_0^h \sum_{n=1}^{\infty} [\mathrm{u}(x_0, x, n\vartheta) - \mathrm{u}(x)]\,\mathrm{u}(x_0)\,(x_0 - \bar{x})\,(x - \bar{x})\, \mathrm{d}x_0\, \mathrm{d}x, \tag{5}$$

kde $\mathrm{u}(x)$ a $\bar{x}$ jsou dány vzorci (3), (4).

Nechť působí na částici vykonávající Brownův pohyb v intervalu $(-h, h)$ vnější síla $\mathrm{f}(x)$, jež buď konečnou a i se svou první

[3]) J. Potoček: O dispersi v theorii Markovových řetězů (Sur la dispersion dans la théorie des chaînes de Markoff), Spisy vyd. přírodověd. fak. Masarykovy university, č. 154.

M. Fréchet: Complèments à la théorie des probabilités discontinues „en chaîne“. Ann. scuola norm. sup. Pisa II, s. 2, p. 131.

derivací spojitou funkcí x. Hustota pravděpodobnosti $u(x_0, x, t)$ je dána diferenciální rovnicí

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial}{\partial x} [u f(x)]$$

s podmínkami na kraji

$$D \frac{\partial u}{\partial x} - \beta\, u f(x) = 0, \quad x = -h, \quad x = h,$$

a s podmínkou počáteční

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ x \neq x_0}} u(x_0, x, t) = 0.$$

Při tom znamená D koeficient difuse, β je t. zv. pohyblivost částice. Řešení je dáno vzorcem (l. c.[1]), str. 7):

$$u(x_0, x, t) = \frac{y(x; 0)}{I_0} + \sum_{\varrho_\nu} e^{-D\varrho_\nu^2} \frac{y^{-1}(x_0; 0)\, y(x_0; \varrho_\nu)\, y(x; \varrho_\nu)}{I_{\varrho_\nu}} \tag{6}$$

kde je položeno

$$I_{\varrho_\nu} = \int_{-h}^{h} y^{-1}(x; \varrho_\nu)\, y^2(x; \varrho_\nu)\, dx$$

a kde

$$\begin{aligned} y(x; \varrho_\nu) = {} & [w'(h; \varrho_\nu) - \alpha f(h)\, w(h; \varrho_\nu)]\, v(x; \varrho_\nu) - \\ & - [v'(h; \varrho_\nu) - \alpha f(h)\, v(h; \varrho_\nu)]\, w(x; \varrho_\nu) \end{aligned} \tag{7}$$

je řešení rovnice

$$y'' - \alpha f(x)\, y' + [\varrho^2 - \alpha f'(x)]\, y = 0, \tag{8}$$

s podmínkou

$$y' - \alpha f(x)\, y = 0, \qquad x = -h, \qquad x = h, \tag{9}$$

$$\left(\alpha = \frac{\beta}{D}\right),$$

která přísluší charakteristické hodnotě ϱ_ν; při tom je fundamentální systém $v(x, \varrho_\nu)$, $w(x, \varrho_\nu)$ volen tak, aby bylo

$$y(x; 0) = v(x; 0) = e^{\alpha \int_0^x f(\xi)\, d\xi} \tag{10}$$

Charakteristické hodnoty ϱ_ν jsou kořeny rovnice:

$$\begin{aligned} & [w'(-h; \varrho) - \alpha f(-h)\, w(-h; \varrho)]\, [v'(h; \varrho) - \alpha f(h)\, v(h; \varrho)] - \\ & - [v'(-h; \varrho) - \alpha f(-h)\, v(-h; \varrho)]\, [w'(h; \varrho) - \alpha f(h)\, w(h; \varrho)] = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Disperse je pak dána vzorcem:

$$\frac{C}{2} = \frac{1}{I_0} \int_{-h}^{h} \mathrm{y}(x;\, 0)\, (x - \bar{x})^2 \, \mathrm{d}x +$$

$$+ \frac{2}{I_0} \sum_{\varrho_\nu} \frac{1}{I_{\varrho_\nu}} \frac{1}{e^{D\varrho_\nu^2 \vartheta} - 1} \left(\int_{-h}^{h} \mathrm{y}(x;\, \varrho_\nu)\, (x - \bar{x})\, \mathrm{d}x \right)^2. \tag{12}$$

Řady na pravých stranách vzorců (6) a (12) konvergují absolutně a stejnoměrně.

Užijme nyní těchto obecných vzorců k výpočtu hustoty pravděpodobnosti u a k výpočtu disperse, běží-li o Brownův pohyb zrcátka, zavěšeného na torsním vlákně.

Označíme-li písmenem x úhlovou odchylku zrcátka od nulové polohy, písmenem a koeficient torse, jest

$$\mathrm{f}(x) = -ax.$$

Rovnice (8) s podmínkou (9) přejde v tuto:

$$y'' + \varepsilon x y' + (\varrho^2 + \varepsilon)\, y = 0,$$

$$y' + \varepsilon x y = 0, \qquad x = -h, \qquad x = h,$$

kde je položeno

$$\varepsilon = a\alpha = \frac{a\beta}{D}.$$

Substitucí $y = v e^{-\frac{1}{4}\varepsilon x^2}$ a zavedením nové proměnné vztahem $x = \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \xi$ obdržíme z první rovnice známou diferenciální rovnici pro funkce parabolického válce[4]):

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}\xi^2} + \left(\frac{\varrho^2}{\varepsilon} + \frac{1}{2} - \frac{\xi^2}{4} \right) v = 0.$$

Můžeme tedy vzíti za fundamentální systém funkce

$$\mathrm{v}(x;\, \varrho) = e^{-\frac{1}{4}\varepsilon x^2}\, \mathrm{D}_{\varrho^2/\varepsilon}(x\sqrt{\varepsilon})$$

$$\mathrm{w}(x;\, \varrho) = e^{-\frac{1}{4}\varepsilon x^2}\, \mathrm{D}_{-\varrho^2/\varepsilon - 1}(ix\sqrt{\varepsilon}).$$

Podmínce (10) je vskutku vyhověno, neboť

$$\mathrm{D}_0(x\sqrt{\varepsilon}) = e^{-\frac{1}{4}\varepsilon x^2}.$$

Charakteristickou rovnici (11) lze upraviti užitím známých rovností

$$\mathrm{D}'_n(z) + \tfrac{1}{2} z \mathrm{D}_n(z) - n \mathrm{D}_{n-1}(z) = 0, \tag{13}$$

$$\mathrm{D}_{n+1}(z) - z \mathrm{D}_n(z) + n \mathrm{D}_{n-1}(z) = 0 \tag{14}$$

na tvar

[4]) Whittaker, A course of modern analysis, 3. ed., p. 347.

$$\varrho^2 e^{-\frac{1}{2}h^2\varepsilon}\,[D_{\varrho^2/\varepsilon-1}(h\sqrt{\varepsilon})\,D_{-\varrho^2/\varepsilon}(-ih\sqrt{\varepsilon}) -$$
$$- D_{\varrho^2/\varepsilon-1}(-h\sqrt{\varepsilon})\,D_{-\varrho^2/\varepsilon}(ih\sqrt{\varepsilon})] = 0.$$

Charakteristické hodnoty ϱ_ν, jež tvoří nekonečnou posloupnost, stále stoupající, jsou jednoduchými kořeny této rovnice. Čtverec žádného z jejích kladných kořenů ϱ_ν není celistvým násobkem čísla ε, ať je h jakékoli. Roste-li však h přes každou mez, blíží se posloupnost $\{\varrho_\nu^2/\varepsilon\}$ posloupnosti 0, 1, 2, 3, ...

Lze to nahlédnouti, uvede-li se výraz v hranaté závorce pomocí asymptotických rozvojů

$$D_n(z) = e^{-\frac{1}{4}z^2} z^n\, P_1(n, z), \quad |\arg z| < \tfrac{3}{4}\pi,$$

$$D_n(z) = e^{-\frac{1}{4}z^2} z^n\, P_1(n, z) - \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-n)}\, e^{n\pi i}\, e^{\frac{1}{4}z^2} z^{-n-1}\, P_2(n, z),$$
$$\tfrac{5}{4}\pi > \arg z > \tfrac{1}{4}\pi,$$

v nichž je

$$P_1(n, z) = 1 - \frac{n(n-1)}{2z^2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\,.\,4z^4} - \dots$$

$$P_2(n, z) = 1 + \frac{(n+1)(n+2)}{2z^2} + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2\,.\,4z^4} + \dots$$

na tvar

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{P_1(\nu, \xi)}{P_2(\nu, \xi)}\,\frac{\xi^{2\nu-1}}{e^{\frac{1}{2}\xi^2}}\,\Gamma(-\nu)\cos\nu\pi = 1,$$

kde je položeno

$$\nu = \varrho^2/\varepsilon, \qquad \xi = h\sqrt{\varepsilon}.$$

Vypočtěme limitu funkce $y(x; \varrho_\nu)$, roste-li h přes každou mez. Limita koeficientu při $w(x; \varrho_\nu)$ ve vzorci (7) je v našem případě — jak se lze přesvědčiti dosazením zvláštních hodnot a užitím vztahů (13), (14) — rovna nule, lze tedy vzíti

$$\lim_{h\to\infty} y(x; \varrho_\nu) = I(x; \varrho_\nu) = e^{-\frac{1}{4}\varepsilon x^2}\, D_\nu(x\sqrt{\varepsilon}), \quad \nu = 0, 1, 2, \dots$$

Označíme-li $U(x_0, x, t)$ hustotu pravděpodobnosti, odpovídající případu, že úhlový pohyb zrcátka není žádnou pevnou hranicí omezen, obdržíme ze vzorce (6) se zřetelem na známý vztah

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [D_n(x\sqrt{\varepsilon})]^2\, dx = \sqrt{\frac{2\pi}{\varepsilon}}\, n!, \quad n = 1, 2, \dots$$

výsledek:

$$U(x_0, x, t) = \lim_{h\to\infty} u(x_0, x, t) = \tag{15}$$
$$= \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\varepsilon x^2} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\pi}} \sum_{\nu=1} e^{-D_\nu t}\, \frac{D_\nu(x_0\sqrt{\varepsilon})\, D_\nu(x\sqrt{\varepsilon})}{\nu!}\, e^{\frac{1}{4}\varepsilon(x_0^2 - x^2)};$$

tento vzorec, který odvodili přímo G. E. Uhlenbeck a L. S. Ornstein[5]), lze převésti podle tamtéž uvedeného výpočtu H. A. Kramerse na známější a starší tvar Smoluchowského[6]):

$$\mathrm{U}(x_0, x, t) = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2\pi\,(1 - e^{-2D\varepsilon t})}}\, e^{-\frac{\varepsilon(x - x_0 e^{-D\varepsilon t})^2}{2(1 - e^{-2D\varepsilon t})}}. \tag{16}$$

Dispersi $\frac{1}{2} C$ pro tentýž případ vypočteme ze vzorce (12), přejdeme-li v něm po dosazení našich zvláštních hodnot k limitě pro $h \to \infty$.

Jest

$$\bar{x} = 0,$$

$$\lim_{h \to \infty} I_{\varrho_\nu} = \sqrt{\frac{2\pi}{\varepsilon}}\, \nu! \qquad \nu = 0,\ 1,\ 2, \ldots ;\ 0! = 1,$$

takže

$$\lim_{h \to \infty} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon x^2}\, x^2 dx +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\, \frac{1}{e^{nD\vartheta} - 1} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{1}{2}\varepsilon x^2}\, \mathrm{D}_n(x\sqrt{\varepsilon})\, \mathrm{d}x\right]^2.$$

První člen na pravé straně je roven

$$1/\varepsilon.$$

Integrál v závorce můžeme, užijeme-li vzorce (14), napsati takto:

$$\frac{n}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{D}_0(x\sqrt{\varepsilon})\, \mathrm{D}_{n-1}(x\sqrt{\varepsilon})\, \mathrm{d}x + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{D}_0(x\sqrt{\varepsilon})\, \mathrm{D}_{n+1}(x\sqrt{\varepsilon})\, \mathrm{d}x.$$

Poněvadž je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{D}_m(z)\, \mathrm{D}_n(z)\, \mathrm{d}z = 0,\ m \neq n;\ m, n = 0, 1, 2, \ldots,$$

je tento výraz různý od nuly jen pro $n = 1$ a je roven

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{\frac{2\pi}{\varepsilon}}.$$

---

[5]) G. E. Uhlenbeck, L. S. Ornstein: On the theory of the Brownian motion, Phys. Rev. XXXVI, 1930, p. 839.

[6]) Smoluchowski, Einige Beispiele Brownscher Molekularbewegung unter Einfluss äusserer Kräfte. Bull. Internat. de l'ac. des sc. de Cracovie, Kl. A, 1913, p. 418—34, Ostw. Klassiker p. 25.