ČÁST FYSIKÁLNÍ

Matematické prostředky babylonských astronomů.

Dr. *Arnošt Dittrich*, Stará Ďala.

(Došlo 28. června 1933.)

Studium babylonské astronomie není hračkou, jak by se na první pohled zdálo. Kdo má smysl pro dokument a zájem o minulost, arci v takový omyl vůbec neupadne. Ale i lidé, kteří vnímají jen časový element právě prožívaný, závisí na minulosti, třebaže si toho nejsou vědomi. Astronomie přítomnosti užívá na př. všelijakých konstant. Zpravidla stanoví se na základě pozorování z naší doby, tím, že je kombinujeme s pozorováním téhož charakteru, co jen možno starým. Zejména astronomie je si své závislosti na minulosti odedávna dobře vědoma. Odtud velká pozornost věnována starým řeckým pozorováním, která známe hlavně prostřednictvím Ptolemaiova Almagestu. Nuže, není přímo sensační,[1]) když se ukázalo, že Řekové přejali svůj číselný materiál částečně od Babyloňanů? — Zájem, který každý astronom má pro řeckou astronomii, náleží tedy samozřejmě ještě zvýšenou měrou astronomii babylonské, protože nám otevírá výhled na pozorování o několik set let starší než jsou pozorování řecká.

Jiným omylem velmi rozšířeným jest, že k vzniku astronomie třeba mnoho matematiky. Nikoliv. Absolvent našich měšťanek umí až nadměrně matematiky na babylonskou astronomii. Nikdo netušil před rozluštěním příslušných klínopisů, jak skromnými prostředky lze předpovídati zatmění slunce a měsíce, pohyby planet a pod. Metody ty měly by se vzkřísiti z důvodů pedagogických. Tisíce lidí mohli bychom od pouhého obdivování převésti k opravdovému porozumění.

Toto pojednání má býti jakýmsi matematickým úvodem do studia babylonské astronomie. Vzniklo r. 1932 na základě zkušeností v semináři pro metodologii a historii věd exaktních na universitě Karlově.

Podnes nazýváme knihy jako logaritmy, naplněné kolonami čísel, tabulkami, protože první a původní takové pomůcky matematické, byly hliněné tabulky babylonské, popsané kolonami astronomických čísel. Číselné sloupce, jeden vedle druhého, to byl normální prostředek, jímž babylonský astronom řešil své problémy.

[1]) Kugler, „Sternkunde und Sterndienst in Babel" II., 585, 620, 1924. — Schnabel, „Berossos", 239, 1923.

Hlavním nástrojem babylonských astronomů je prostá aritmetická řada se stálou diferencí d. Proto nalezneme leckdy v babylonských tabulkách sloupce, jejichž části tvoří řadu aritmetickou. Vizme na př. tabulku 1. Je vzata z velké tabulky měsíční, jež čítala 18 sloupců. Pochází z konce 2. století př. Kr. Cílem jejím jest především stanovení nového světla, tedy problém i pro dnešní astronomii nikterak snadný. V zájmu toho potřebuje se tabulka rychlostí měsíce, kterou přináší naše tab. 1, sloupec F. Tabulka je psána v šedesátinné soustavě. Můžeme tedy v prvním dvouciferném čísle viděti stupně, v druhém minuty, v třetím sekundy. Prozatím je označení „stupeň" jen symbolické a minuta značí jen jeho šedesátinu, sekunda šedesátinu předchozí minuty. — Sloupec f jest F rovnocenný, ale nahrazuje min. a sec. dekadickým zlomkem stupně.

Prohlížíme-li tabulku, vidíme, že začíná jako aritmetická řada rostoucí od člena 2. o $d = 36'$. Arci první člen musíme vynechat. Druhý člen učiníme východiskem a_2, další členy dostaneme postupným přičítáním $36'$. Je tedy obecně n-tý člen

$$a_n = a_2 + (n - 2) \,.\, d.$$

Vzorec platí však jen do $n = 8$. Pak se kontinuita trhá, jak naznačeno v tabulce dvojitou čarou. Vezmeme-li však hodnotu a_9 zase z tabulky, lze další členy opět počítati, ale nyní odčítáním diference $d = 36'$. — Bude tedy

$$a_n = a_9 - (n - 9) \,.\, d.$$

Také platnost tohoto vzorce je omezena. Smí se užíti jen od $n = 9$ do $n = 15$.

Pak se objeví zase řada stoupající

$$a_n = a_{16} + (n - 16) \,.\, d, \text{ kde } n = 16, \ldots, 22.$$

Pak přijde řada klesající

$$a_n = a_{23} - (n - 23) \,.\, d, \text{ kde } n = 23, \ldots, 29.$$

Potom stoupající

$$a_n = a_{30} + (n - 30) \,.\, d, \text{ kde } n = 30, \ldots, 36.$$

A zase klesající

$$a_n = a_{37} - (n - 37) \,.\, d, \text{ kde } n = 37, \ldots, 39.$$

Tabulky lze tedy nahraditi sledem aritmetických řad

11^0	$30'$	$00''$		
11	16	10	$+ (n - 2) \,.\, 36'$,	$n = 2, \ldots, 8$,
15	4	00	$- (n - 9) \,.\, 36$,	$n = 9, \ldots, 15$,
11	18	10	$+ (n - 16) \,.\, 36$,	$n = 16, \ldots, 22$,
15	2	00	$- (n - 23) \,.\, 36$,	$n = 23, \ldots, 29$,
11	20	10	$+ (n - 30) \,.\, 36$,	$n = 30, \ldots, 36$,
15	00	00	$- (n - 37) \,.\, 36$,	$n = 37, \ldots, 39$.

Tabulka 1.

Z tab. pro nové světlo Luny*) č. 272, 81—7—6.

No	F	f	f*	f—f*
0.				
1.	11 30	11°,5	11°,1856	0°,3144
2.	11 16 10	11,269$\dot{4}$	11,1048	0,1646
3.	11 52 10	11,869$\dot{4}$	11,4375	0,4319
4.	12 28 10	12,469$\dot{4}$	12,1173	0,3521
5.	13 4 10	13,069$\dot{4}$	13,0085	0,0609
6.	13 40 10	13,669$\dot{4}$	13,9332	— 0,2638
7.	14 16 10	14,269$\dot{4}$	14,7067	— 0,4373
8.	14 52 10	14,869$\dot{4}$	15,1750	— 0,3056
9.	15 4	15,0$\dot{6}$	15,2443	— 0,1776
10.	14 28	14,4$\dot{6}$	14,9006	— 0,4339
11.	13 52	13,8$\dot{6}$	14,2128	— 0,3461
12.	13 16	13,2$\dot{6}$	13,3181	— 0,0514
13.	12 40	12,6$\dot{6}$	12,3951	0,2716
14.	12 4	12,0$\dot{6}$	11,6282	0,4385
15.	11 28	11,4$\dot{6}$	11,1703	0,2964
16.	11 18 10	11,302$\dot{7}$	11,1128	0,1900
17.	11 54 10	11,902$\dot{7}$	11,4672	0,4356
18.	12 30 10	12,502$\dot{7}$	12,1628	0,3400
19.	13 6 10	13,102$\dot{7}$	13,0608	0,0420
20.	13 42 10	13,702$\dot{7}$	13,9818	— 0,2790
21.	14 18 10	14,302$\dot{7}$	14,7421	— 0,4393
22.	14 54 10	14,902$\dot{7}$	15,1899	— 0,2871
23.	15 2	15,0$\dot{3}$	15,2356	— 0,2023
24.	14 26	14,4$\dot{3}$	14,8703	— 0,4370
25.	13 50	13,8$\dot{3}$	14,1669	— 0,3336
26.	13 14	13,2$\dot{3}$	13,2657	— 0,0324
27.	12 38	12,6$\dot{3}$	12,3468	0,2865
28.	12 2	12,0$\dot{3}$	11,5934	0,4399
29.	11 26	11,4$\dot{3}$	11,1560	0,2773
30.	11 20 10	11,336$\dot{1}$	11,1219	0,2142
31.	11 56 10	11,936$\dot{1}$	11,4979	0,4382
32.	12 32 10	12,536$\dot{1}$	12,2089	0,3272
33.	13 8 10	13,136$\dot{1}$	13,1131	0,0230
34.	13 44 10	13,736$\dot{1}$	14,0299	— 0,2938
35.	14 20 10	14,336$\dot{1}$	14,7763	— 0,4402
36.	14 56 10	14,936$\dot{1}$	15,2034	— 0,2673
37.	15	15	15,2258	— 0,2258
38.	14 24	14,4	14,8391	— 0,4391
39.	13 48	13,8	14,1205	— 0,3205

[1]) Kugler, Mondrechnung. 12, 13. První dva sloupce. — Další jsou počítány od nás.

Toto vědění o tabulce stačí k doplnění scházejících, vylomených či porušených údajů. Tyto naznačeny drobným tiskem. Co na tabulce 1 vysázeno velkými literami, lze na originálu přečísti, je spolehlivé.

Tabulka čítala 39 čísel, řady obsahují již jen 7 čísel. Patrně se má vyjádřiti veličina, jež kolísá mezi maximem M a minimem m. Babylonští astronomové nemohli použíti trigonometrického vzorce, jímž my v tom případě aproximujeme Fourierův rozvoj, na př.

$$\frac{M+m}{2} + \frac{M-m}{2} \cos \frac{2\pi}{T} (t-a).$$

Neznali trigonometrie. Pokládali prostě stoupání od minima m do maxima M za rovnoměrné. Podobně zacházeli s klesáním. Pak mohli „po žebříčku" lézti kroky 36′ od m k M a stejně velikými kroky od M zase dolů k m.

Jak si vedli, když by další postoupení o 36′ bylo maximum M překročilo? Co nejjednodušeji a nejlogičtěji. Postoupili o zlomek k z 36′ až k maximu M a spustili se od M dolů o nespotřebovaný zbytek z 36′, tedy o $(1-k) . 36'$.

Překročení maxima naznačeno v tabulce dvojitou čarou. Číslo před čarou značme u, číslo za čarou značme a. Pak jest v duchu horní úvahy

$$u + k . 36 = M,$$
$$a + (1-k) . 36 = M.$$

Sečtením vypadne neznámé k a zůstane

$$u + a + 36 = 2M. \qquad (1)$$

Hodnoty u, a obstupují zdvojenou čáru v naší tabulce. Jsou tři místa, kde můžeme vypočítati M. Vyjde skutečně vždy totéž číslo? Vizme:

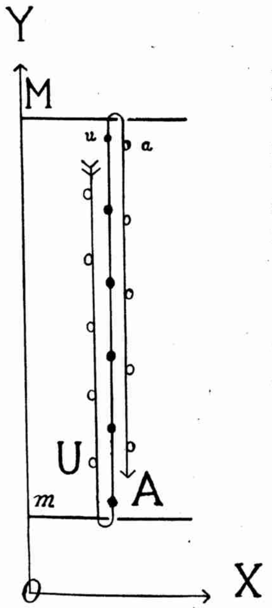
14° 52′ 10″	14° 54′ 10″	14° 56′ 10″
15 04 00	15 02 00	15 00 00
36 00	36 00	36 00
30° 32′ 10″	30° 32′ 10″	30° 32′ 10″

takže ideální maximum

$$M = 15^0\, 16'\, 05''.$$

Přesvědčme se trochu jinou cestou o existenci ideálního minima. Sáhněme ke geometrickému znázornění. Uděláme dvě rovnoběžky vodorovné ve výši m a M nad osou X. Nyní si opatříme šňůru, jež je opatřena uzly tak, že vzdálenost dvou sousedních uzlů rovná se d. Tuto šňůru posázenou ekvidistantními uzly navineme nyní kolem obou latí, m a M, čím dostaneme mechanickou analogii normální babylonské tabulky. Sestupné uzly nechávám bílé, vzestupné černím. Z obr. 1 čteme pak přímo, že výšky uzlů nad osou X, totiž $u + a$ nedosahují $2M$. Musíme ještě trochu přidat. Kolik? — Právě délku niti mezi sousedními kuličkami u, jež je černá, a bílou kuličkou a. Nit mezi těmi měří však d. Ideální maximum určeno tedy rovnicí

$$u + a + d = 2M. \qquad (2)$$



Obr. 1.

Značme obdobně výšku uzlu nad osou X před ideálním minimem m písmenou U, následující hodnotu v tabulce A. Pak součet $U + A$ bude příliš veliký vůči $2m$. Kolik musíme ubrat? — Poví nám to obrazec 1. Vizme, že kuličky U, A jsou sousedé. Ubrati se musí délka niti mezi nimi, totiž d. Ideální minimum stanoví se z relace

$$U + A - d = 2m. \qquad (3)$$

Zase můžeme se na třech místech přesvědčiti, zda babylonská tabulka tam, kde jsou jednoduché čáry, vzorci (3) vyhovuje:

11° 30′ 00″	11° 28′ 00″	11° 26′ 00″
11 16 10	11 18 10	11 20 10
— 36 00	— 36 00	— 36 00
22° 10′ 10″	22° 10′ 10″	22° 10′ 10″

takže ideální minimum činí

$$m = 11^0\,05'\,05''.$$

Nyní ovládáme tabulku tak, že třeba z ní vzíti jen jediné číslo: třeba první. Ostatní vypočítáme pomocí ideálního maxima M, minima m a diference d. Než půjdeme dále na této cestě, ohlédněme se po původu tohoto poznání.

Za vzkříšení babylonské astronomie děkujeme učencům z řádu jesuitského. Páter J. N. Strassmaier, assyriolog,[2]) opisoval na začátku osmdesátých let minulého století v Londýně několik tisíc klínopisů. V některých rozpoznal astronomický význam. Na štěstí působil tehdá v Holandsku jiný jesuita páter J. Epping, jenž býval kdysi profesorem astronomie na nově založeném polytechniku v Quito. Strassmaier posílal Eppingovi pérem malované kopie klínopisů s překladem, Epping snažil se pak o propočítání astronomických textů. Asi ob měsíc vyměňovali přes Canal la Manche obsažné listy. Po osmi letech trpělivé a houževnaté práce uveřejnili

[2]) Zkratka J. N. značí Joh. Nep. — Jesuité podnes užívají jméno svého svatého: Jana Nepomuckého.

základní spis: „Astronomisches aus Babylon oder das Wissen der Chaldäer über den gestirnten Himmel", unter Mitwirkung von P. J. N. Strassmaier S. J. von J. Epping S. J. 1889. — Následovala ještě řada pojednání v „Zeitschrift für Assyriologie".

Ale jen pět let bylo ještě dopřáno Eppingovi a v čase tom nikterak nemohl propočítati četné kopie klínopisů, jež Strassmaier stále z Londýna z British Musea posílal. Na štěstí našla se v řádě jesuitském mladá síla, jež převzala obojí práci současně. Byl to páter F. X. Kugler 1862—1929,[3]) zároveň orientalista i přírodopisec, původně chemik.

Kugler vystoupil již r. 1900 větším spisem o babylonské teorii pohybů slunečních a měsíčních, v jehož úvodě vyložil, ale jen velmi stručně, matematické prostředky babylonských astronomů.[4]) — Nenalezl skoro žádných následovníků. Vím o jediném, jenž dovedl Kuglerovou technikou zpracovati klínopisy. Je to P. Schnabel.[5]) Vysvětluji si to zvláštní nepřístupností Kuglerova díla, jenž leckdy se spokojí s naznačujícím — jak snadno nalezneme. Nahrazoval jsem si Kuglerova „snadno" okrajovými doplňky. Nutnost jejich pocítil jsem znova, když jsem se snažil svým posluchačům vyložiti tyto zvláštní myšlenky v semináři. Ohlasem těchto snah jest tato publikace.

Co jsem dosud uvedl jako příklad, objasnil Epping. Rozpoznal také, že střední hodnota ideálního maxima a minima

$$\tfrac{1}{2}(M + m) = \bar{\mu} = 13^0\, 10'\, 35''$$

je střední denní pohyb měsíce, udaný Babyloňany v takových stupních, minutách a sekundách, jaké po jejich příkladě podnes užíváme. — Pravděpodobnost, že Epping byl oklamán náhodnou shodou cifer, jest $1 : 60^3 = 1 : 216.000$, tedy velmi skrovná!

Další analysa Kuglerova objasnila, že tabulka udává pro novy za sebou následující rychlost měsíce. Nejsou to však skutečné novy, ale schematické. Nov se určuje, jako by roční pohyb slunce na nebi dál se rovnoměrně. Jde o aproximační, interpolační matematiku. Počítá se také se středním anomalistickým a synodickým měsícem.

Jde nyní o to, abychom skrze tyto komplikace vycítili jednoduché představy Babyloňanů o běhu Luny. V duchu jejich matematických prostředků jest, že pokládali pohyb měsíce za rovnoměrně urychlený od apogea do perigea a za rovnoměrně zpožděný (se stejným zpožděním jako dřívější urychlení) od perigea do

[3]) Životopis napsal M. Esch. S. J. Vierteljahrschr. d. Astron. Gesellsch. 64, 1929, str. 294—301.

[4]) Kugler, „Die babylonische Mondrechnung", str. 14 a 15.

[5]) P. Schnabel, „Berossos und die babylonisch-hellenistische Literatur", 1923.

apogea. Vyjádřeme si pohyb ten vzorci a hledejme pak cestu k tabulce 1 stran numerických hodnot Babyloňanů.

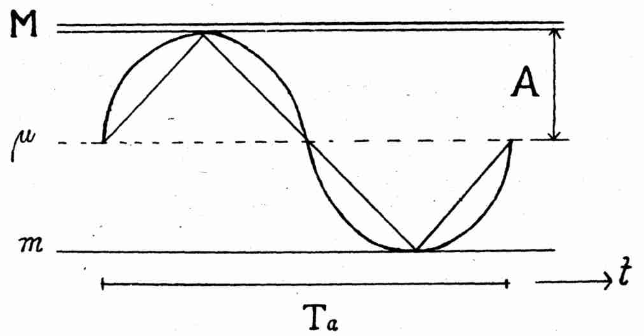
Průměrný synodický měsíc je asi o dva dny kratší než anomalistický. Chceme-li změnu rychlosti za synodický měsíc, necháme nejprve uplynouti měsíc anomalistický, čím rychlost, od níž jsme vyšli, se navrátí. Pak necháme uplynouti asi dvoudenní rozdíl mezi oběma oběhy a zjistíme babylonskou změnu rychlosti o 36′.

Značíme-li průměrný synodický oběh ve dnech T_S, anomalistický T_a, je změna rychlosti za 1 den, retardace či akcelerace,

$$a = \frac{36'}{T_S - T_a}. \qquad (4)$$

Změna rychlosti od apogea do perigea jest

$$a \,.\, \tfrac{1}{2} T_a = M - m.$$



Obr. 2.

Dosadíme za a, dosadíme $M - m = 4^0\,11' = 251'$ a dostaneme

$$\frac{18}{T_S - T_a} \,.\, T_a = 251,$$

z čeho

$$251\, T_S = 269\, T_a.$$

Nyní známe periodu T_a, ob kterou se rychlost vrací, známe střední hodnotu

$$\mu = 13^0\,10'\,35'' = 13{,}1764^0,$$

kolem níž kolísá i rozkmit tohoto kolísání, amplitudu

$$A = 2^0\,05'\,30'' = 2{,}091\dot{6}^0.$$

Můžeme si tedy k babylonské tabulce vykresliti graf, viz obr. 2. — Graf ten skládá se z úseček, jež se na dvojité linii maxima M i na jednoduché linii minima m jako na zrcadle reflektují.

Paprsek mezi dvěma rovnoběžnými zrcadly sem tam bloudící jest arci velmi nedokonalý prostředek k vyjádření periodického dění. My — samozřejmě — jej nahradíme vlnou kosinovou, viz obr. 2, a vyjádříme úhlovou rychlost měsíce Ω relací

$$\Omega = 13{,}1764^0 + 2{,}0916^0 \cos \frac{360^0}{T_a} (t - \beta).$$

Tak zní náhrada sloupce F z tab. 1 pomocí interpolačního vzorce

$$\Omega = \mu + A \cos \frac{2\pi}{T_a} (t - \beta)$$

zjednaná.

K úplnému numerickému ovládnutí vzorce potřebujeme ještě vyčíslení konstanty β. Znamená čas, pro který rychlost Luny byla maximem, tedy čas, kdy Luna prochází perigeem. Kdy to bylo, určíme porovnáním našeho vzorce s tabulkou. Graficky je toto porovnání provedeno na obr. 2. Vidíme, že vlna se shodne s reflektovanými paprsky jen v minimu, maximu a střední hodnotě. Maximu a minimu se vyhneme, protože tam — nedokonalostí babylonské aproximace — spojitost zrychlení se porušuje. Držme se středních hodnot, kde vlna pro inflexi je úsečce nejblíže. Čas t, kdy rychlost dosáhne přesně střední hodnoty μ, padne obecně za k-tý řádek tabulky. Pro tento vyznamenaný čas je

$$t = kT_S + \vartheta,$$

a β se počítá z podmínky

$$\cos \frac{360^0}{T_a} (kT_S + \vartheta - \beta) = 0.$$

Další postup objasníme hned na numerickém příkladě. První vhodné místo je mezi řádkem 5 a 6. Mezi ně padne střední hodnota μ. Až do ní vzroste hodnota 5. řádku o rozdíl

$$\begin{array}{r} 13^0\,10'\,35'' \\ -\,13^0\;\;4'\,10'' \\ \hline 6'\,25'' \end{array}$$

Čas ϑ, za který tento vzrůst nastane, počítá se z rovnice

$$6'\,25'' = a\vartheta.$$

Zrychlení a určili jsme již dříve vzorcem (4). Dosadíme a dostaneme

$$6{,}416' = \frac{36'}{T_S - T_a}\,\vartheta,$$

$$\vartheta = 0{,}1783\,(T_S - T_a),$$

$$\cos \frac{360}{T_a} (5{,}1783\,T_S - 0{,}1783\,T_a - \beta) = 0.$$

Cos rovná se nule při 90^0 a 270^0. V našem případě prochází cos nulou stoupaje. Proto vezmeme 270^0. Rovnost kosinů poukazuje na rozdíl úhlů o $360\,n$, kde n je celé číslo. Je tedy

$$360\left(5{,}1783\,\frac{T_S}{T_a} - 0{,}1783 - \frac{\beta}{T_a}\right) = 270 + 360\,n.$$

Krátíme 360, dosadíme

$$T_S/T_a = \tfrac{269}{251} = 1{,}07171,$$

řešíme a dostaneme

$$4{,}6213 - n = \beta/T_a.$$

Celé číslo n zvolíme tak, aby zlomek byl co nejmenší a kladný. Pak jest

$$\beta/T_a = 0{,}6213.$$

Sestupně prochází rychlost střední hodnotou μ mezi řádkem 12 a 13. Proto se v rovnici objeví číslo 90, takže

$$360\,(12{,}1505\,T_S - 0{,}1505\,T_a - \beta) = 90 + 360\,n.$$

Je tedy

$$12{,}6213 - \beta/T_a = n$$

a nejmenší kladný zlomek

$$\beta/T_a = 0{,}6213.$$

Obdobně dostaneme ještě tři další taková čísla. Přísluší tedy

času	$\beta : T_a$
5,1783	0,6213
12,1505	0,6213
19,1223	0,6213
26,0948	0,6213
33,0672	0,6213

Do vzorce pro Ω dosadíme střední hodnotu a dostaneme

$$\Omega = 13{,}1764^0 + 2{,}0916^0 \cos 360\,(t/T_a - 0{,}6213).$$

Vyšetřme si nyní nedokonalost babylonské tabulky kvantitativně, pokud je způsobena nedokonalostí jejich matematických prostředků. Dosaďme za čas

$$t = nT_S$$

a shledáme, že úhel kosinu zní

$$360\,(nT_S/T_a - 0{,}6213) = 360\,(\tfrac{269}{251}\,n - 0{,}6213)$$

a vzorec přemění se na

$$\Omega = 13{,}1764^0 + 2{,}0916^0 \cos\,(385{,}8167^0\,n - 223{,}6680^0). \qquad (5)$$

Počítati budeme arci s úhlem zjednodušeným o

$$360\, n - 360,$$

jenž zní:

$$25{,}81673^0\, n + 136{,}3320^0.$$

Hodnoty ze vzorce (5) pro $n = 1, \ldots, 39$ plynoucí náleží do tab. I v koloně f^*. Za ní následuje sloupec rozdílů $f - f^*$, jenž nás informuje o rozdílu mezi výkonem naší interpolace pomocí kosinu a interpolací Babyloňanů pomocí aritmetických řad. Vidíme, že chyba Babyloňanů následkem nedokonalé interpolace činí obecně zlomek z 0,43, je tedy pod půl stupněm.

Sloupec f^* lze přímo počítati ze sloupce f následující cestou. Odečtěme od každého f střední hodnotu $= 13{,}1764^0$. Nazveme tuto hodnotu y. Je pak

$$f - \mu = y,$$
$$f^* - \mu = y^*.$$

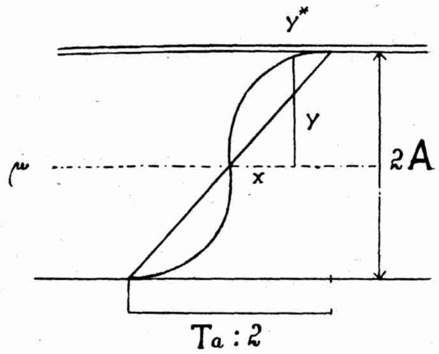
Pokud y stoupá — viz obr. 3 —, jest

$$y = \frac{4A}{T_a}\, x,$$

kdežto

$$y^* = A \sin \frac{2\pi}{T_a}\, x,$$

kde x je čas uplynulý od dosažení střední hodnoty μ směrem vzestupným. Z posledních dvou rovnic lze x eliminovat a dostaneme



Obr. 3.

$$y^* = A \sin \frac{\pi}{2A}\, y. \tag{6}$$

Tímto vzorcem lze vzestupné serie y korigovati na y^*. Sestupné serie se korigují zrovna tak, jenže místo A ve jmenovateli dosadíme $-A$. Před sinem A zůstane, za x dosadíme $x - \frac{1}{2}T_a$, ale jen v lineárné rovnici. Nyní se x eliminuje z relací

$$y = -\frac{4A}{T_a}\,(x - \tfrac{1}{2}T_a), \qquad y^* = A \sin \frac{2\pi}{T_a}\, x,$$

z čeho zase

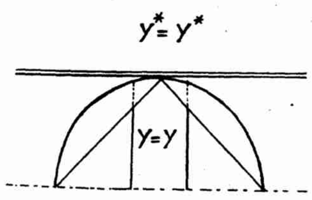
$$y^* = A \sin \frac{\pi}{2A}\, y,$$

jako dříve. Bez počtu lze to vyčísti z obr. 2. Zvolíme-li totéž y

v sestupné či vzestupné části, dostaví se v obou případech i totéž y^*. Vlna je tak souměrná jako lomená linie Babyloňanů. Viz obr. 4.

Vzorec (6) bude velmi užitečný, kdykoliv budeme chtít babylonskou tabulku zbavit chyb, jež jsou od nedokonalosti jejich interpolace.

Také nám poslouží při přesnějším počítání fázové konstanty β. Čtyři decimálky totiž nestačí, protože je musíme před použitím násobit 360, takže pak jen dvě za desetinnou čárkou jsou spolehlivé. Všimněme si, že pro n-tý řádek je



Obr. 4.

$$y^*_n = A \cos \frac{2\pi}{T_a} (nT_S - \beta),$$

$$y^*_n = A \sin \frac{\pi}{2A} y_n.$$

Nahraďme dolní sinus také kosinem, pak jest

$$\cos \frac{2\pi}{T_a} (nT_S - \beta) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2A} y_n\right).$$

Shoda kosinů nastane, když

$$\frac{2\pi}{T_a} (nT_S - \beta) = 2\pi k \pm \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2A} y_n\right).$$

Je tedy

$$\frac{nT_S}{T_a} - \frac{\beta}{T_a} = k \pm \left(\frac{1}{4} - \frac{y_n}{4A}\right), \tag{7}$$

kde k je libovolné celistvé číslo, $n = 1, \ldots, 39$.

Vraťme se ke vzorci (4). Tam nalezneme, že

$$\frac{d}{T_S - T_a} \cdot \tfrac{1}{2} T_a = 2A,$$

z čeho

$$\frac{d}{4A} = \left(\frac{T_S}{T_a} - 1\right),$$

takže

$$\frac{T_S}{T_a} = 1 + \frac{d}{4A}.$$

Dosaďme vyjádření zlomky $T_S : T_a$ diferencí d do relace (7) a obdržíme

$$n + \frac{nd}{4A} - \frac{\beta}{T_a} = k \pm \left(\frac{1}{4} - \frac{y_n}{4A}\right).$$

Celé číslo n na začátku kontrahujeme s neurčitým celým číslem k, takže

$$\frac{\beta}{T_a} + k = \pm \left(\frac{y_n \pm nd}{4A} - \frac{1}{4}\right).$$

Z dvojitých znamének platí společně horní + a společně dolní —!

Serie hodnot y_n tvoří však střídavě stoupající a klesající aritmetickou řadu právě s diferencí d. V klesající řadě musíme nd přičítat, abychom závorku udrželi na stálé hodnotě. Tím rozhodnuto i o znaménku před závorkou. Bude kladné. Ve stoupající serii y_n musíme nd odečítat; před závorku přijde minus. Je tedy pro stoupavou serii

$$\frac{\beta}{T_a} + k = -\frac{y_n - nd}{4A} + \frac{1}{4},$$

v klesající

$$\frac{\beta}{T_a} + k = +\frac{y_n + nd}{4A} - \frac{1}{4}.$$

Propočítáním obdržíme tabulku, která pro jakékoliv z 39 n dá přesně totéž

$$\beta = 0{,}6213479 \,.\, T_a.$$

V tabulce 1 ve sloupci 4 tabulováno

$$f - f^* = y - y^*,$$

kde y^* počítáno pomocí vzorce (6). Pro srovnání s původními babylonskými hodnotami vypočteno pomocí μ také f^* samo, jež tabulováno ve sloupci 3.

Z úhlové rychlosti Luny

$$\Omega = \mu + A \cos \frac{2\pi}{T_a} (t - \beta)$$

lze integrací obdržeti délku Luny Φ, ježto $\Omega = \mathrm{d}\Phi : \mathrm{d}t$. Je pak

$$\Phi - \Phi_p = \mu (t - \beta) + A \frac{T_a}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{T_a} (t - \beta),$$

kde integrační konstanta Φ_p značí délku Luny v perigeu pro čas $t = \beta$.

Numericky jest

$$\begin{aligned} \mu &= 13^0\, 10'\, 35'' = 13{,}17638^0, \\ A &= 2^0\, 05'\, 30'' = 2{,}0916^0, \\ \beta &= 0{,}6213479\; T_a. \end{aligned}$$

Konstantu Φ_p lze určiti pomocí následující kolony G, jež na babylonské tabulce s kolonou F sousedí, a pomocí průměrné rychlosti slunce.