O funkcích prostých.

Oldřich Dvořák.

(Došlo dne 22. VI. 1933.)

Hlavní problém z teorie prostých funkcí je následující:

Jaké jsou nutné a postačující podmínky, kterým musí vyhovovati koeficienty potenční řady

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots + a_n z^n + \ldots,$$

aby tato byla prostá v kruhu $|z| < 1$? Analytickou funkci nazýváme prostou, je-li vždy pro $z_1 \neq z_2$ také $f(z_1) \neq f(z_2)$.

Dosud je známo, že je $|a_2| \leqq 2$.[1]) Pro a_3 dokázal ještě Löwner $|a_3| \leqq 3$.[2]) Obě hranice jsou přesné.

Obecně dokázal Littlewood

$$|a_n| \leqq n\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < en.^{3})$$

Odhad tento zostřil ještě Landau na

$$|a_n| \leqq \left(\tfrac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\right) en.^{4})$$

Bieberbach vyslovil domněnku, že platí

$$|a_n| \leqq n, \qquad n \geqq 2.$$

Tato domněnka byla skutečně dokázána, pokud koeficienty a_n jsou čísla reálná.[5])

Tato domněnka platí přesně pro prosté funkce hvězdovité. To jsou takové prosté funkce, které zobrazují kruh $|z| = r < 1$ na hvězdu, t. j. křivku, která každým polopaprskem vycházejícím z počátku je proťata právě v jednom bodě.

Analyticky je tato vlastnost vyjádřena podmínkou

$$\Re\left(\frac{z\, f'(z)}{f(z)}\right) > 0.$$

---

[1]) Bieberbach: Lehrbuch der Funktionentheorie, II. díl, s. 80.

[2]) Löwner: Mathematische Annalen, 89, 1923, s. 103.

[3]) Littlewood: Proc. of the London math. Soc. (2), 23, 1925, s. 498.

[4]) Landau: Mathematische Zeitschrift, 30, 1929, s. 635.

[5]) Dieudonnè: Comptes Rendus, 192, 1931, s. 1148—1150. Rogosinski: Mathematische Zeitschrift, 35, 1932, s. 93—121.

Všechny prosté funkce jsou hvězdovité v kruhu o poloměru $r < 0{,}65$.

Zde ukážeme, že pro prosté funkce, splňující v kruhu $|z| < 1$ podmínku

$$\Re\left(\sqrt{\frac{f(z)}{z}}\right) > \tfrac{1}{2},$$

platí také domněnka Bieberbachova a že tuto vlastnost mají všechny prosté funkce v kruhu o poloměru $r < 0{,}84$.

Dále dokážeme ještě některé věty o prostých funkcích lichých. Použijeme zde jedné věty, která je speciálním případem vět, které odvodil Carathéodory. Věty tyto týkají se funkcí regulárních v kruhu $|z| < 1$ a nabývajících tam hodnot s positivní reálnou částí.[6])

§ 1.

Věta 1. *Budiž funkce*

$$f(z) = \tfrac{1}{2} + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$$

regulární v kruhu $|z| < 1$ *a nechť nabývá v něm jen hodnot s positivní reálnou částí*

$$\Re\, f(z) > 0.$$

Potom platí

$$|c_n| \leq 1, \quad n \geq 1.$$

Hranice je přesná. Číslo 1 *nemůžeme nahradit číslem menším.*

Důkaz. Vyjádříme koeficienty $c_1, c_2, \ldots$ pomocí reálné a imaginární části funkce $f(z)$ na kružnici $|z| = \varrho < 1$.

Položme nejprve

$$f(\varrho e^{i\vartheta}) = U(\varrho, \vartheta) + iV(\varrho, \vartheta),$$

$U(\varrho, \vartheta)$ a $V(\varrho, \vartheta)$ jsou reálné funkce a dále

$$c_n = c'_n + ic''_n.$$

Po úpravě dostaneme

$$U(\varrho, \vartheta) = c'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \varrho^n (c'_n \cos n\vartheta - c''_n \sin n\vartheta),$$

$$V(\varrho, \vartheta) = c''_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \varrho^n (c''_n \cos n\vartheta + c'_n \sin n\vartheta).$$

Pokud je ϑ v intervalu $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, konvergují oba rozvoje stejnoměrně, tedy můžeme integrovat a máme

---

[6]) Pólya-Szegö: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, díl I, str. 129, př. 235.

$$c_n = c'_n + ic''_n = \frac{1}{\pi\varrho^n}\int_0^{2\pi} \mathrm{U}(\varrho, \vartheta)\, e^{-in\vartheta}\, \mathrm{d}\vartheta$$

$$= \frac{i}{\pi\varrho^n}\int_0^{2\pi} \mathrm{V}(\varrho, \vartheta)\, e^{-in\vartheta}\, \mathrm{d}\vartheta.$$

Dále platí

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c^{in\vartheta}\, \mathrm{d}\vartheta = \begin{matrix} 0 & n \neq 0 \\ 1 & n = 0 \end{matrix}$$

Bude tedy

$$|\, c_n \,| \leqq \frac{1}{\pi\varrho^n}\int_0^{2\pi} \mathrm{U}(\varrho, \vartheta)\, \mathrm{d}\vartheta = \frac{1}{\varrho^n};$$

když $\varrho \to 1$, máme

$$|\, c_n \,| \leqq 1.$$

Hranice je přesná, je dosažena na př. funkcí

$$\mathrm{f}(z) = \tfrac{1}{2}\,\frac{1+z}{1-z} = \tfrac{1}{2} + z + z^2 + \ldots$$

Poznámka. Uvedená věta platí zřejmě, je-li uvažovaná funkce třebas sudá. Na př.

$$\mathrm{f}(z) = \tfrac{1}{2}\,\frac{1+z^2}{1-z^2} = \tfrac{1}{2} + z^2 + z^4 + \ldots$$

§ 2.

Budiž

$$\mathrm{f}(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$$

regulární a prostá funkce v kruhu $|\, z \,| < 1$. Uvažujme nyní podtřídu těchto funkcí, pro něž platí

$$\Re \sqrt{\frac{\mathrm{f}(z)}{z}} > \tfrac{1}{2}, \qquad |\, z \,| < 1. \tag{1}$$

Takové prosté funkce skutečně existují, na př.

$$\mathrm{f}(z) = \frac{z}{(1-z)^2},$$

$$\Re\, \frac{1}{1-z} > \tfrac{1}{2}, \qquad |\, z \,| < 1.$$

Nyní dokážeme dvě věty o prostých funkcích, splňujících podmínku (1).

Věta 2. *Vztah* (1) *platí pro všechny prosté funkce, pokud* z *leží v kruhu* $|z| \leqq r < 0{,}84$.

Důkaz. (1) je zřejmě ekvivalentní s výrazem

$$\left|\sqrt{\frac{f(z)}{z}} - 1\right| < \left|\sqrt{\frac{f(z)}{z}}\right|$$

nebo jinak psáno

$$\left|1 - \sqrt{\frac{z}{f(z)}}\right| < 1. \tag{1'}$$

Výraz $\sqrt{\dfrac{z}{f(z)}}$ můžeme však upraviti následovně. Je-li funkce $f(z)$ prostá, je, jak známo, prostá i funkce

$$\frac{1}{\sqrt{f(z^2)}} = \frac{1}{z} + b_1 z + b_3 z^3 + \ldots + b_{2n-1} z^{2n-1} + \ldots \tag{2}$$

Podle Bieberbachovy věty o ploše zde platí

$$|b_1|^2 + 3|b_3|^2 + \ldots + (2n-1)|b_{2n-1}|^2 + \ldots \leqq 1. \tag{3}$$

Upravujme (2) dále

$$\sqrt{\frac{z^2}{f(z^2)}} = 1 + b_1 z^2 + b_3 z^4 + \ldots + b_{2n-1} z^{2n} + \ldots$$

Nyní vyměníme z^2 za z a máme

$$\sqrt{\frac{z}{f(z)}} = 1 + b_1 z + b_3 z^2 + \ldots + b_{2n-1} z^n + \ldots$$

Po dosazení do (1') dostaneme

$$|b_1 z + b_2 z^2 + \ldots + b_{2n-1} z^n + \ldots| < 1. \tag{1''}$$

Dále použijeme Schwarzovy nerovnosti

$$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 + \ldots \leqq \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots}\,\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \ldots}$$
$$\alpha_n \geqq 0, \quad \beta_n \geqq 0.$$

Z výrazu (1'') obdržíme

$$|b_1 z + b_3 z^2 + \ldots + b_{2n-1} z^n + \ldots| \leqq |b_1 z| + |b_3 z^2| + \ldots$$
$$\ldots + |b_{2n-1} z^n| + \ldots$$
$$\leqq \sqrt{|b_1|^2 + 3|b_3|^2 + \ldots + (2n-1)|b_{2n-1}|^2 + \ldots} \times$$
$$\times \sqrt{r^2 + \frac{r^4}{3} + \ldots + \frac{r^{2n}}{2n-1} + \ldots},$$

kde jsme položili

$$\alpha_n = \sqrt{2n-1}\,|b_{2n-1}|, \quad \beta_n = \frac{r^n}{\sqrt{2n-1}}.$$

Pravá strana se však vzhledem k (3) a k tomu, že pro $r < 1$ platí

$$r \log \frac{1+r}{1-r} = 2\left(r^2 + \frac{r^4}{3} + \ldots + \frac{r^{2n}}{2n-1} + \ldots\right).$$

redukuje na výraz

$$\sqrt{\frac{r}{2} \log \frac{1+r}{1-r}}. \tag{4}$$

Je-li nyní

$$r \log \frac{1+r}{1-r} < 2,$$

je tím spíše potom splněn vztah (1''). Hledané r je však v mezích

$$0{,}83 < r < 0{,}84.$$

Věta 3. *Pro funkce prosté splňující v kruhu* $|z| < 1$ *podmínku* (1) *platí*

$$|a_n| \leqq n, \qquad n \geqq 2.$$

Důkaz. Funkce $\sqrt{\frac{f(z)}{z}}$ je zřejmě regulární v kruhu $|z| < 1$ a její rozvoj je následující

$$\sqrt{\frac{f(z)}{z}} = 1 + \tfrac{1}{2}a_2 z - \tfrac{1}{8}(a_2^2 - 4a_3) z^2 + \ldots \tag{5}$$

nebo jinak psáno

$$\sqrt{\frac{f(z)}{z}} - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}a_2 z - \tfrac{1}{8}(a_2^2 - 4a_3) z^2 + \ldots$$

Platí tedy za předpokladu (1)

$$\Re\left(\sqrt{\frac{f(z)}{z}} - \tfrac{1}{2}\right) > 0,$$

a s použitím věty (1)

$$|\tfrac{1}{2}a_2| \leqq 1, \qquad |a_2| \leqq 2,$$

$$|a_2^2 - 4a_3| \leqq 8, \quad 4|a_3| \leqq 8 + |a_2|^2 \leqq 12, \qquad |a_3| \leqq 3.$$

Obecně:

$$\sqrt{1 + a_2 z + a_3 z^2 + \ldots + a_{n+1} z^n + \ldots} =$$
$$= 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots,$$
$$1 + a_2 z + a_3 z^2 + \ldots + a_{n+1} z^n + \ldots =$$
$$= (1 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots)^2.$$

Srovnáním členů při z^n obdržíme

n sudé $a_{n+1} = 2c_n + 2c_1c_{n-1} + \ldots + c_{\frac{n}{2}}^2$,

n liché $a_{n+1} = 2c_n + 2c_1c_{n-1} + \ldots + 2c_{\frac{n-1}{2}}\, c_{\frac{n+1}{2}}$. (6)

Podle věty (1) platí pro každé n, že $|\, c_n \,| \leqq 1$. Bude tedy: n sudé, členů je $\frac{n}{2} + 1$, poslední $\leqq 1$, kdežto předcházející $\leqq 2$, co do absolutní hodnoty. Z toho plyne

$$|\, a_{n+1} \,| \leqq 2\frac{n}{2} + 1 = n + 1,$$

n liché, členů je $\frac{n+1}{2}$ a každý $\leqq 2$, co do absolutní hodnoty

$$|\, a_{n+1} \,| \leqq 2\frac{n+1}{2} = n + 1.$$

Tedy obecně

$$|\, a_n \,| \leqq n, \quad n \geqq 2. \tag{7}$$

Věty (2) a (3) podávají nám vlastně jakýsi příspěvek k domněnce Bieberbachově, (7) platí přesně, jak bylo již uvedeno, pro funkce hvězdovité.

Každá funkce prostá je však hvězdovitá v jistém kruhu o poloměru

$$r \leqq 0{,}65.$$

Pro funkce prosté splňující (1) platí přesně (7).

Hranice je dosažena uvedenou již funkcí

$$\mathrm{f}(z) = \frac{z}{(1 - z)^2}$$

a každá funkce prostá splňuje (1) v kruhu o poloměru

$$r < 0{,}84.$$

§ 3.

Věta 4. *Jestliže pro lichou prostou funkci*

$$\mathrm{f}_1(z) = z + c_3z^3 + c_5z^5 + \ldots$$

platí

$$|\, c_n \,| \leqq 1,$$

potom pro prostou funkci

$$[\mathrm{f}_1(z^{\frac{1}{2}})]^2 = \mathrm{f}(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \ldots$$

platí

$$|\, a_n \,| \leqq n.$$

Důkaz. Funkce $\sqrt{f(z^2)}$ je, jak známo, prostá a lichá

$$f_1(z) = \sqrt{f(z^2)} = z + c_3z^3 + c_5z^5 + \dots$$

Uvažujme nyní funkci

$$\sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}} = 1 + c_3z^2 + c_5z^4 + \dots + c_{2n+1}z^{2n} + \dots$$

Z toho plyne

$$1 + a_2z^2 + a_3z^4 + \dots + a_{n+1}z^{2n} + \dots = (1 + c_3z^2 + \dots$$
$$\dots + c_{2n+1}\,z^{2n} + \dots)^2.$$

Obdržíme zde úplně analogické formule jak ve výrazech (6) a z nich plyne

$$|\,a_n\,| \leqq n.$$

Věta 5. *Platí-li pro lichou funkci prostou v kruhu jednotkovém*

$$\Re\left(\frac{f(z)}{z}\right) > \tfrac{1}{2}, \qquad |\,z\,| < 1, \tag{8}$$

potom pro její koeficienty platí

$$|\,c_n\,| \leqq 1.$$

Důkaz. Důkaz plyne ihned z věty (1), aplikujeme-li ji na sudou funkci tvaru

$$\frac{f(z)}{z} - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} + c_3z^2 + c_5z^4 + \dots,$$

Věta 6. *Všechny prosté funkce liché splňují požadavek* (8) *v kruhu o poloměru*

$$r < 0{,}92.$$

Důkaz. Postupujeme úplně stejně jako ve větě (2). (8) je vyjádřeno vztahem

$$\left|\,1 - \frac{z}{f(z)}\,\right| < 1. \tag{9}$$

Dále je

$$\frac{z}{f(z)} = z\left(\frac{1}{z} + b_1z + b_3z^3 + \dots\right),$$

kde

$$|\,b_1\,|^2 + 3\,|\,b_3\,|^2 + \dots + (2n - 1)\,|\,b_{2n-1}\,|^2 + \dots \leqq 1.$$

Po dosazení do (9) vidíme, že musí býti splněna nerovnost

$$|\,b_1z^2 + b_3z^4 + \dots + b_{2n-1}z^{2n} + \dots\,| < 1. \tag{9'}$$

Tento výraz liší se však od vztahu (1″) jen tím, že místo z^n je zde všude z^{2n}.