ČÁST MATEMATICKÁ

O spojitých funkcích, nabývajících každé své hodnoty konečněkrát.

Miloš Neubauer.

(Došlo dne 22. VI. 1933.)

1. Nechť P je neprázdné množství přirozených čísel. Nechť $f(x)$ je funkce[1]) definovaná a spojitá v uzavřeném intervalu, která každé *své* hodnoty nabývá konečněkrát; pro každou její hodnotu y nechť $p(y)$ značí počet všech řešení v x rovnice $y = f(x)$. Pak pravím, že funkce $f(x)$ je *P-funkce*, když P je množství všech $p(y)$. Obsahem tohoto článku je důkaz této věty:

K tomu, aby existovala P-funkce, je nutné a stačí, aby bylo

$$\sup P \geqq 2 \,.\, \inf P - 1 \tag{1}$$

($\sup P$ resp. $\inf P$ značí horní resp. dolní hranici množství P).

2. V článku „O spojitých funkcích, nabývajících každé své hodnoty k-krát nebo l-krát“ (Čas. mat. fys., roč. 62, str. 8) jsem dokázal, že nerovnost (1), která je triviální pro $\sup P = +\infty$, je podmínkou nutnou pro existenci P-funkce (věta 1 l. c.), a dále, že je postačující v tom případě, když P obsahuje dvě[2]) čísla $k < l$ (v tomto případě praví (1) totéž co $l \geqq 2k - 1$ a P-funkce znamená totéž co *(k, l)-funkce*). Když P obsahuje jedno číslo h, je postačitelnost podmínky (1) triviální, neboť v tomto případě praví (1) totéž, co $h = 1$. Zbývá tedy sestrojit P-funkci ke každému P, které obsahuje aspoň tři čísla a splňuje podmínku (1).

3. Nechť tedy P značí až do konce pevné takové množství. Položím $p = \inf P$. Podle (1) jsou v P čísla $\geqq 2p - 1$. Nazvu q nejmenší z nich; v P není tedy čísel, která jsou jak $\geqq 2p - 1$, tak $< q$. Rozdělím množství všech čísel z P, která jsou *větší než p*, na tři disjunktní části T, L, S takto: do T patří čísla t, pro něž $p < t < 2p - 1$; do L resp. S lichá resp. sudá čísla $\geqq q$. Množství T, L, S napíši, pokud nejsou prázdná, ve tvaru posloupností: $t_1 < t_2 < \ldots$, $l_1 < l_2 < \ldots$, $s_1 < s_2 < \ldots$ Posloupnost pro T obsahuje nejvýš $p - 2$ členů; končí-li členem t_N, $N < p - 2$, položím $t_n = t_N$ pro $n = N + 1, N + 2, \ldots, p - 2$. Posloupnost pro L resp. S je konečná nebo nekonečná; je-li konečná, končíc členem l_N resp. s_N, položím $l_n = l_N$ resp. $s_n = s_N$ pro $n = N + 1, N + 2, \ldots$

[1]) Jednám o funkcích reálných jedné reálné proměnné.
[2]) T. j. přesně dvě; jinak užívám slova „aspoň“.

P-funkci sestrojím podle tohoto plánu:

$$p\begin{cases} = 1 & \begin{cases} S = 0\text{[3])} \\ S \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} L = 0 \\ L \neq 0 \end{cases} \\ > 1 & \begin{cases} q \text{ liché} & \begin{cases} T = 0 = S \\ T = 0 \neq S \\ T \neq 0 = S \\ T \neq 0 \neq S \end{cases} \\ q \text{ sudé} \end{cases} \end{cases} \tag{2}$$

Že tento plán zahrnuje všechny možnosti, je vidět takto: Když $p = 1$, je $2p - 1 = 1$, tedy $q = 1$, $T = 0$; je-li mimo to též $S = 0$, je $L \neq 0$, protože P obsahuje aspoň tři čísla. Když $p > 1$, je $q \geqq 2p - 1 > p$; je-li mimo to q liché, je tedy q v L, takže $L \neq 0$.

Sestrojovanou P-funkci nazvu $\mathrm{f}(x)$. Výsledná konstrukce je dána vzorci (14) — (16), (25) — (28) a (31). Důkaz, že funkce $\mathrm{f}(x)$ je P-funkce, vynechám, protože nečiní zásadních potíží.

4. Pro užívání funkčních znaků zavedu toto pravidlo: Nechť $\Phi(x)$ značí konečnou funkci definovanou v intervalu $[0, 1]$[4]) a nechť a, b, m, M jsou reálná čísla ($a < b$). Pak znamenají znaky $\Phi^{\bullet}(x)$, $\Phi(a, b; m, M; x)$ a $\Phi^{*}(a, b; m, M; x)$ takto definované funkce proměnné x:

$$\Phi^{\bullet}(x) = 1 - \Phi(1 - x) \text{ pro } 0 \leqq x \leqq 1. \tag{3}$$

$$\Phi(a, b; m, M; x) = m + (M - m)\, \Phi\left(\frac{x - a}{b - a}\right) \text{ pro } a \leqq x \leqq b, \tag{4}$$

$$\Phi^{*}(a, b; m, M; x) = \Phi(a, b; m, M; a + b - x) \text{ pro } a \leqq x \leqq b. \tag{5}$$

5. Zavedu osm *pomocných funkcí* proměnné x v intervalu $[0, 1]$ [takže lze na ně použít operací (3) — (5)] vzorci (6) — (13); v nich značí h kladné liché číslo, k celé číslo $[1 \leqq k \leqq \frac{1}{2}(h + 1)]$ a $\{h_n\}$ nekonečnou posloupnost $h_1, h_2, \ldots$ kladných lichých čísel.

$$\mathrm{F}_h(x) = \begin{cases} 0 \text{ pro } \dfrac{n}{h} \ (n = 0, 2, \ldots, h - 1), \\[2ex] 1 \text{ pro } \dfrac{n}{h} \ (n = 1, 3, \ldots, h), \\[2ex] \text{lineární v } \left[\dfrac{n}{h}, \dfrac{n + 1}{h}\right] \ (n = 0, 1, \ldots, h - 1). \end{cases} \tag{6}$$

$$\varphi_h(x) = \begin{cases} \mathrm{F}_h\left(\dfrac{1}{n + 1}, \dfrac{1}{n}; \dfrac{1}{n + 1}, \dfrac{1}{n}; x\right) \text{ v } \left[\dfrac{1}{n + 1}, \dfrac{1}{n}\right] \ (n = 1, 2, \ldots), \\ 0 \text{ pro } x = 0. \end{cases} \tag{7}$$

---

[3]) $S = 0$ resp. $S \neq 0$ znamená, že množství S je resp. není prázdné.

[4]) T. j. množství všech x, pro něž $0 \leqq x \leqq 1$.

$$\mathrm{F}_{h,k}(x) = \begin{cases} \mathrm{F}_h \ \ x \ \text{v} \left[0, \dfrac{2(k-1)}{h}\right]^{5)}, \\ \varphi_{h-2(k-1)}\left(\dfrac{2(k-1)}{h}, 1; 0, 1; x\right) \ \text{v} \left[\dfrac{2(k-1)}{h}, 1\right]. \end{cases} \tag{8}$$

$$\psi_h(x) = \varphi^{\bullet}{}_h(x). \tag{9}$$

$$\psi_{h,k}(x) = \begin{cases} \mathrm{F}_{h,k}(0, \tfrac{1}{2}; 0, \tfrac{1}{2}; x) \ \text{v} \ [0, \tfrac{1}{2}], \\ \psi_h(\tfrac{1}{2}, 1; \tfrac{1}{2}, 1; x) \ \text{v} \ [\tfrac{1}{2}, 1]. \end{cases} \tag{10}$$

$$\varphi_{h,k}(x) = \psi^{\bullet}{}_{h,k}(x). \tag{11}$$

$$\chi_h(x) = \begin{cases} \varphi_h(0, \tfrac{1}{2}; 0, \tfrac{1}{2}; x) \ \text{v} \ [0, \tfrac{1}{2}], \\ \psi_h(\tfrac{1}{2}, 1; \tfrac{1}{2}, 1; x) \ \text{v} \ [\tfrac{1}{2}, 1]. \end{cases} \tag{12}$$

$$\chi_{\{h_n\}}(x) = \begin{cases} \chi_{h_n}\left(\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}; \dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}; x\right) \ \text{v} \left[\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right] (n = 1, 2, \ldots), \\ 0 \ \text{pro} \ x = 0. \end{cases} \tag{13}$$

6. Sestrojím P-funkci f(x) v případě $p = 1$ vzorci (14) — (16). V nich užiji označení z odst. 3, plánu (2), operace (5) a pomocných funkcí (7), (9) — (13).

$$p = 1, \ S = 0:$$

$$\mathrm{f}(x) = \chi_{\{l_n\}}(x). \tag{14}$$

$$p = 1, \ S \neq 0, \ L = 0^{6)}:$$

$$\mathrm{f}(x) = \begin{cases} \psi_{s_2-s_1+1}(x) \ \text{v} \ [0, 1], \\ \chi^*{}_{s_1-1}(1, 2; -1, 1; x) \ \text{v} \ [1, 2], \\ \chi_{\{s_n-s_1+1\}}(2, 3; -1, -\tfrac{1}{2}; x) \ \text{v} \ [2, 3], \\ \varphi_{s_2-s_1+1, \frac{1}{2}(s_2-s_1)}(3, 4; -\tfrac{1}{2}, 0; x) \ \text{v} \ [3, 4]. \end{cases} \tag{15}$$

$$p = 1, \ S \neq 0, \ L \neq 0, \ s_1 < \text{resp.} > l_1:$$

$$\mathrm{f}(x) = \begin{cases} \chi_{\{l_n\}}(x) \ \text{v} \ [0, 1], \\ \varphi_{l_1, \frac{1}{2}s_1} \ \text{resp.} \ \varphi_{l_1}(1, 2; 1, 2; x) \ \text{v} \ [1, 2], \\ \psi_{s_1-1} \ \text{resp.} \ \psi_{s_1-1, \frac{1}{2}(l_1-1)}(2, 3; 2, 3; x) \ \text{v} \ [2, 3], \\ \chi^*{}_{\{s_n-s_1+1\}}(3, 4; 2, 3; x) \ \text{v} \ [3, 4]. \end{cases} \tag{16}$$

7. Nechť je $p > 2$, q liché a t číslo z T (viz odst. 3). Zavedu poslední *pomocnou funkci* proměnné x v intervalu [0, 1] [takže lze na ni použít operace (4)] vzorcem (17). V něm užiji označení z odst. 3 a pomocných funkcí (8) a (12).

---

[5]) Odpadá pro $k = 1$.
[6]) V tomto případě je $s_2 > s_1$, protože P obsahuje aspoň tři čísla.

$$\mathbf{H}_t(x) = \begin{cases} \chi_{q-2p+2}\left(0, \dfrac{1}{2p-1}; 0, 1; x\right) \text{ v } \left[0, \dfrac{1}{2p-1}\right]. \\ \mathbf{F}_{2p-1,\, t-p+1}(x) \text{ v } \left[\dfrac{1}{2p-1}, 1\right]. \end{cases} \tag{17}$$

8. Nechť je $p > 1$, q liché. Zavedu osm *základních funkcí* proměnné x v intervalu $[0, 1]$ [takže lze na ně použít operace (4)] vzorci (18) — (24). V nich užiji označení z odst. 3. operace (5) a pomocných funkcí (6) — (13) a (17).

$$\mathrm{G}^{I}_{L}(x) \text{ resp. } \mathrm{G}^{II}_{L}(x) =$$

$$= \begin{cases} \chi_{\{l_n-q+1\}}\left(0, \dfrac{1}{2p-1}; 0, 1; x\right) \text{ v } \left[0, \dfrac{1}{2p-1}\right], \\ \mathbf{F}_{2p-1}(x) \text{ v } \left[\dfrac{1}{2p-1}, \dfrac{2p-2}{2p-1}\right], \\ \chi_{q-2p+2} \text{ resp. } \varphi_{q-2p+2}\left(\dfrac{2p-2}{2p-1}, 1; 0, 1; x\right) \text{ v } \left[\dfrac{2p-2}{2p-1}, 1\right]. \end{cases} \tag{18}$$

$$q > 2p - 1:$$

$${}^{III}_{L}(x) = \begin{cases} \chi_{\{l_n-q+1\}}\left(0, \dfrac{1}{2p-1}; 0, 1; x\right) \text{ v } \left[0, \dfrac{1}{2p-1}\right]. \\ \mathbf{F}_{2p-1}(x) \text{ v } \left[\dfrac{1}{2p-1}, \dfrac{2p-3}{2p-1}\right]^{7)}, \\ \psi^*{}_3\left(\dfrac{2p-3}{2p-1}, \dfrac{2p-2}{2p-1}; 0, 1; x\right) \text{ v } \left[\dfrac{2p-3}{2p-1}, \dfrac{2p-2}{2p-1}\right]. \\ \chi_{q-2p}\left(\dfrac{2p-2}{2p-1}, 1; 0, 1; x\right) \text{ v } \left[\dfrac{2p-2}{2p-1}, 1\right]. \end{cases} \tag{19}$$

$$q > 2p - 1:$$

$$\mathrm{G}^{IV}_{L}(x) = \begin{cases} \chi_{\{l_n-q+1\}}\left(0, \dfrac{1}{2p+1}; 0, 1; x\right) \text{ v } \left[0, \dfrac{1}{2p+1}\right]. \\ \mathbf{F}_{2p+1}(x) \text{ v } \left[\dfrac{1}{2p+1}, \dfrac{2p}{2p+1}\right], \\ \varphi_{q-2p}\left(\dfrac{2p}{2p+1}, 1; 0, 1; x\right) \text{ v } \left[\dfrac{2p}{2p+1}, 1\right]. \end{cases} \tag{20}$$

$$S \neq 0,\ s_2 = s_1{}^{8)}:$$

---

[7]) Odpadá pro $p = 2$.

[8]) T. j. S obsahuje jedno číslo.

$$
\mathrm{G}_S^I(x) = \begin{cases} \psi_{s_1-2p+1,\,\frac{1}{2}(q-2p+3)}\left(0, \dfrac{1}{2p-1}; 0, 1; x\right) \text{ v } \left[0, \dfrac{1}{2p-1}\right], \\ \mathrm{F}_{2p-1}(x) \text{ v } \left[\dfrac{1}{2p-1}, \dfrac{2p-3}{2p-1}\right]^{7)}, \\ \varphi^*{}_3\left(\dfrac{2p-3}{2p-1}, 1; 0, 1; x\right) \text{ v } \left[\dfrac{2p-3}{2p-1}, 1\right]. \end{cases} \tag{21}
$$

$$S \neq 0,\ s_2 > s_1:$$

$$
\mathrm{G}_S^{II}(x) = \begin{cases} \psi_{s_1-2p+3,\,\frac{1}{2}(q-2p+3)}\left(0, \dfrac{1}{2p-1}; 0, 1; x\right) \text{ v } \left[0, \dfrac{1}{2p-1}\right], \\ \mathrm{F}_{2p-1}(x) \text{ v } \left[\dfrac{1}{2p-1}, \dfrac{2p-3}{2p-1}\right], \\ \varphi^*{}_{s_2-s_1+1,2}\left(\dfrac{2p-3}{2p-1}, \dfrac{2p-2}{2p-1}; \frac{1}{2}, 1; x\right) \\ \qquad \text{ v } \left[\dfrac{2p-3}{2p-1}, \dfrac{2p-2}{2p-1}\right], \\ \chi^*{}_{\{s_n-s_1+1\}}\left(\dfrac{2p-2}{2p-1}, 1; 0, \frac{1}{2}; x\right) \text{ v } \left[\dfrac{2p-2}{2p-1}, 1\right]. \end{cases} \tag{22}
$$

$$T \neq 0^{9)}:$$

$$
\mathrm{G}_T^I(x) = \mathrm{H}_{t_n}\left(\frac{n-1}{p-2}, \frac{n}{p-2}; \frac{n-1}{p-2}, \frac{n}{p-2}; x\right) \text{ v } \left[\frac{n-1}{p-2}, \frac{n}{p-2}\right] \quad (n = 1, 2, \ldots, p-2). \tag{23}
$$

$$
\mathrm{G}_T^{II}(x) = \begin{cases} \mathrm{G}_T^I(x) \text{ v } \left[0, \dfrac{p-3}{p-2}\right]^{10)}, \\ \mathrm{F}_{q,\, t_{p-2}-p+1}\left(\dfrac{p-3}{p-2}, 1; \dfrac{p-3}{p-2}, 1; x\right) \text{ v } \left[\dfrac{p-3}{p-2}, 1\right]. \end{cases} \tag{24}
$$

9. Sestrojím P-funkci $\mathrm{f}(x)$, když je $p > 1$ a q liché, vzorci (25) — (28). V nich užiji plánu (2) a základních funkcí (18) a (21) až (24).

$$p > 1,\ q \text{ liché},\ T = 0 = S:$$

$$\mathrm{f}(x) = \mathrm{G}_L^I(x). \tag{25}$$

$$p > 1,\ q \text{ liché},\ T = 0 \neq S,\ s_2 = \text{resp.} > s_1:$$

[9]) Tedy $p > 2$, neboť pro $p = 2$ je $2p - 1 = 3$, $T = 0$.
[10]) Odpadá pro $p = 3$.

$$f(x) = \begin{cases} G_L^{II}(x) \text{ v } [0, 1], \\ G_S^I \text{ resp. } G_S^{II}\ (1, 2; 1, 2; x) \text{ v } [1, 2]. \end{cases} \tag{26}$$

$p > 1$, q liché, $T \neq 0 = S$:

$$f(x) = \begin{cases} G_L^{I}(x) \text{ v } [0, 1], \\ G_T^I\ (1, 2; 1, 2; x) \text{ v } [1, 2]. \end{cases} \tag{27}$$

$p > 1$, q liché, $T \neq 0 \neq S$, $s_2 =$ resp. $> s_1$:

$$f(x) = \begin{cases} G_L^{I}(x) \text{ v } [0, 1], \\ G_T^{II}(1, 2; 1, 2; x) \text{ v } [1, 2], \\ G_S^I \text{ resp. } G_S^{II}(2, 3; 2, 3; x) \text{ v } [2, 3]. \end{cases} \tag{28}$$

10. Pro liché q zavedu modifikaci $f_P(x)$ P-funkce $f(x)$ v následujících případech.

Případ prvý. Nechť $p = 1$, $L \neq 0$. Pak[11])

$$f_P(x) = \begin{cases} \psi_{l_1,2}(0, \frac{1}{2}; 0, \frac{1}{2}; x) \text{ v } [0, \frac{1}{2}], \\ \chi_{\{l_n\}}(\frac{1}{2}, 1; \frac{1}{2}, 1; x) \text{ v } [\frac{1}{2}, 1], \\ f(x) \text{ pro } x > 1.^{12)} \end{cases}$$

Případ druhý. Nechť $p > 1$, $l_2 > l_1$. Pak[11])

$$f_P(x) = \begin{cases} \psi_{l_2-q+1,2}\left(0, \dfrac{1}{2(2p-1)}; 0, \frac{1}{2}; x\right) \text{ v } \left[0, \dfrac{1}{2(2p-1)}\right], \\ \chi_{\{l_n-q+1\}}\left(\dfrac{1}{2(2p-1)}, \dfrac{1}{2p-1}; \frac{1}{2}, 1; x\right) \\ \qquad\qquad \text{ v } \left[\dfrac{1}{2(2p-1)}, \dfrac{1}{2p-1}\right], \\ f(x) \text{ pro } x > \dfrac{1}{2p-1}.^{13)} \end{cases}$$

Případ třetí. Nechť $p > 1$, $q > 2p - 1$. Pak $f_P(x)$ vzniká z příslušné z funkcí (25) — (28) (podle předpokladů o T a S), když místo základní funkce $G_L^I(x)$ resp. $G_L^{II}(x)$ se užije základní funkce $G_L^{III}(x)$ resp. $G_L^{IV}(x)$ [vzorce (19) a (20)].

11. Sestrojím P-funkci $f(x)$, když q je sudé číslo (viz plán (2)).[14]) Za tím účelem nazvu P' množství všech čísel z P zmenšených o 1.

[11]) Užiji pomocných funkcí (10) a (13).
[12]) Odpadá pro $S = 0$; pro $S \neq 0$ značí $f(x)$ funkci (16).
[13]) $f(x)$ značí příslušnou z funkcí (25)—(28) podle předpokladů o T a S.
[14]) Eo ipso je $p > 1$.