Poznámky k relativitě.

Em. Klier.

(Došlo 28. prosince 1933.)

Klasický hyperbolický pohyb se světelnou rychlostí. Hyperbolický pohyb v problému dvou těles je charakterisován rovnicemi[1]):

$$h_1 = \frac{hM}{2a}, \qquad h_2 = \sqrt{hMa(\varepsilon^2 - 1)}, \tag{1}$$

h_1 je konstanta plynoucí z rovnice pro energii

$$\tfrac{1}{2}v^2 + \Phi = \tfrac{1}{2}v_1^{\,2} + \Phi_1 = h_1, \qquad \Phi = -hM/r, \tag{2}$$

h_2 je dvojnásobná plocha proběhnutá průvodičem za jednotku času

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = h_2, \tag{3}$$

Pohybuje-li se bod z nekonečna, přísluním a dále do nekonečna, uchýlí se z původního směru v úhel ϑ daný vztahem

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\vartheta = \frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \tag{4}$$

čili pomocí (1)

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\vartheta = \frac{hM}{h_2}\sqrt{\frac{1}{2h_1}}. \tag{5}$$

Je-li v nekonečnu ($\Phi_1 = 0$) počáteční rychlost $v_1 = c$, dostáváme ze (2)

$$h_1 = \tfrac{1}{2}c^2 \tag{6}$$

a tedy

$$v^2 = c^2 - 2\Phi = c^2\left(1 - 2\frac{\Phi}{c^2}\right)$$

a velmi přibližně

$$v = c - \frac{\Phi}{c} = c + \frac{hM}{rc}. \tag{7}$$

S dostatečnou přesností bude i v perihelu ($r = \Delta$) rychlost $\Delta\, d\varphi/dt$

---

[1]) Charlier: Die Mechanik des Himmels.

jen málo rozdílná od c, takže podle (3) bude

$$\Delta^2 \frac{d\varphi}{dt} = \Delta c = h_2. \tag{8}$$

Úhel ϑ bude malý a tudíž podle (5), (6), (8)

$$\vartheta = \frac{2hM}{\Delta c^2}. \tag{9}$$

O tolik měl by se odchýliti i světelný paprsek následkem své energie v gravitačním poli, což je důsledkem jednak věty o setrvačnosti energie a jednak o totožnosti setrvačné a těžké hmoty (Einstein 1911).

Takto vypočítaná hodnota ϑ nevyhovuje však ani pozorování ani principu relativity, neboť byla naměřena dvojnásobná, a podle (7) roste rychlost čím blíže k přísluní, což odporuje principu relativity, podle něhož c je maximální možná rychlost vůbec. Obecná teorie relativity odstraňuje obojí nesouhlas.

Heuristické odvození výrazu ds^2 pro kulově symetrická pole gravitační. Ve speciální relativitě je invariantní výraz

$$(s - s_0)^2 = c^2 (t - t_0)^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 - (z - z_0)^2.$$

V obecné relativitě bude tento výraz platný pouze pro nekonečně malé okolí bodu (x_0, y_0, z_0, t_0), takže bude nutno položiti

$$ds^2 = c^2 dt_0^2 - dx_0^2 - dy_0^2 - dz_0^2. \tag{10}$$

Vzorce pro smršťování délek a dilataci času při pohybu podél osy X jsou:

$$dx_0 = \beta\, dx,\ dt_0 = \frac{dt}{\beta},\ \beta = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},\ dy_0 = dy,\ dz_0 = dz. \tag{11}$$

Proveďme nyní transformaci danou rovnicemi[2]):

$$x = r,\quad dy = r\, d\varphi,\quad dz = r \sin\varphi\, d\psi, \tag{12}$$

rychlost v^2 nahraďme potenciálem podle rovnice platné pro volně padající bod

$$\tfrac{1}{2}v^2 = -\Phi = \frac{hM}{r} \tag{13}$$

a zaveďme obvyklé označení „gravitačního poloměru"

$$m = hM/c^2. \tag{14}$$

Dosadíme-li do (10) hodnoty (11) a dále (12), (13), (14), dosta-

[2]) Je to prostorové zobecnění příbuznosti, o níž pojednává p. dr. Ant. Pleskot v článku: Jistá příbuznost související s teorií křivek valících se. Časopis pro pěst. mat. a fys., r. 61, seš. 4 (1932).

neme známý vztah

$$ds^2 = \left(1 - 2\frac{m}{r}\right) c^2\, dt^2 - \frac{dr^2}{1 - 2m/r} - r^2\, d\varphi^2 - r^2 \sin^2\varphi\, d\psi^2. \quad (15)$$

Podotýkám výslovně, že uvedený způsob odvození má pouze ilustrovati, nikoliv nahrazovati exaktní způsob odvození.

Poznámka. Podle Keplerova zákona je $av^2 = hM$, tedy $m = hM/c^2$ je ona vzdálenost, ve které je kruhová rychlost rovna světelné rychlosti.

Transformace průvodiče. K zajímavým důsledkům a pohodlnou cestou dospějeme, jestliže v rovnici (15) převedeme výraz pro prostorový oblouk

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1 - 2m/r} + r^2\, d\varphi^2 + r^2 \sin^2\varphi\, d\psi^2 \quad (16)$$

na druhý tvar platný v prostoru s kulovou symetrií. Stane se to transformací r při nezměněných úhlech φ a ψ[3])

$$r = (1 + m/2r')^2\, r'. \quad (17)$$

Tím dostáváme jednak

$$dr = \left(1 - \frac{m^2}{4r'^2}\right) dr', \quad 1 - 2\frac{m}{r} = \left[\frac{1 - m/2r'}{1 + m/2r'}\right]^2 \quad (17')$$

a jednak

$$ds^2 = \left[\frac{1 - m/2r'}{1 + m/2r'}\right]^2 c^2\, dt^2 -$$
$$- (1 + m/2r')^4\, (dr'^2 + r'^2\, d\varphi^2 + r'^2 \sin^2\varphi\, d\psi^2). \quad (18)$$

Podle původního vzorce (15) nastává pro $r = 2m$ výminečný případ, t. zv. Hadamardova katastrofa. Podle (17) nastane v transformovaných souřadnicích pro $r' = \frac{1}{2}m$. V tomto místě muselo by podle (15) nebo (18) být dt nekonečně velké, t. j. čas by plynul nekonečně zvolna. Gravitační radius $m = hM/c^2$ pro Slunce je asi 3 km. Tedy katastrofa nastala by uvnitř sluneční hmoty. Tam však platí jiné zákony.[4]) Měla-li by katastrofa nastati aspoň na povrchu ústřední hmoty, musela by hmota M být tak velká, aby m se rovnalo poloměru tělesa. Tak velké hmoty však vůbec neexistují, neboť příliš velkým světelným tlakem by se rozprchly (Eddington). Tím je zabráněno Hadamardově katastrofě přírodou samou. Abstrahujeme-li od představ Eddingtonových a připustíme možnost libovolně velké hmoty, pak podle teorie relativity nastane — za předpokladu tekutého ústředního tělesa — již při menším poloměru ústředního tělesa, než žádá Hadamardova katastrofa, ten případ,

[3]) Pauli: Relativitätstheorie 1921.
[4]) Viz na př. Weyl: Raum, Zeit, Materie.

že tlak je uvnitř nekonečně velký, čas plyne nekonečně zvolna, t. j. neděje se nic a tudíž nemůže ani žádná změna nastat, která by katastrofu vyvolala.

V dalším budeme se zabývati problémem rovinným, t. j. položíme $d\psi = 0$. V obecném případě dozvěděli bychom se o stáčení roviny dráhy, takto dozvíme se pouze o postupu perihelu.

Transformace (17) značí pro $m/2r'$ $\begin{matrix}\text{velké}\\ \text{malé}\end{matrix}$ proti 1 $\begin{matrix}\text{inversi.}\\ \text{posunutí.}\end{matrix}$ V našem případě bude vždy $m/2r'$ velmi malé, takže čtverec této veličiny proti 1 vynecháme, budeme s ní počítati jako s nekonečně malou veličinou, takže na př. vždy položíme

$$(1 + km/r')^n = 1 + knm/r'.$$

Následkem toho vyjdeme z rovnice (18) takto upravené:

$$ds^2 = (1 - m/r')^2 c^2 dt^2 - (1 + m/r')^2 (dr'^2 + r'^2 d\varphi^2). \quad (19)$$

V tomto zobrazení je původní neeuklidovský element $d\sigma$ zobrazen euklidovským elementem $d\sigma_E$, neboť je

$$d\sigma^2 = (1 + m/r')^2 d\sigma_E^2. \quad (20)$$

Lokální křivost. Neeuklidovská geometrie roviny $r\varphi$ je shodná s rovinou na rotačním paraboloidu

$$r^2 = 8m (r - 2m).^{5)} \quad (21)$$

Uvedenou transformací zobrazujeme konformně tuto plochu do roviny $r'\varphi$ a za předpokladu malého $m/2r'$ lze (20) psáti

$$d\sigma^2 = \frac{d\sigma_E^2}{(1 - m/r')^2}, \quad (22)$$

Lobačevského hyperbolická geometrie je shodná s geometrií na kouli o imaginárním poloměru. Stereografickým promítnutím do roviny dostáváme pro oblouk Lobačevského a oblouk obrazu $d\sigma_E$ vztah

$$d\sigma_L^2 = \frac{d\sigma_E^2}{(1 - r'^2/\alpha^2)^2}, \quad (23)$$

kde α je parametr Lobačevského prostoru a rovná se dvojnásobné absolutní hodnotě poloměru koule výše zmíněné. Srovnáním (22), (23) shledáváme, že lze položiti

$$\frac{r'^2}{\alpha^2} = \frac{m}{r'},$$

[5]) Flamm: Beiträge zur Einsteinschen Gravitationstheorie. Phys. Zeitschr. Bd. 17 (1916).

tedy

$$\alpha = \sqrt{\frac{r'^3}{m}} = c\sqrt{\frac{r'^3}{hM}}. \tag{24}$$

Z rovnice paraboloidu (21) počítejme Gaussovu míru křivosti (vynechávajíce ve výsledku čtverce veličiny m)

$$k^2 = \frac{1}{R^2} = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2},$$

kde p, q, r, s, t jsou známé veličiny z teorie ploch. Výsledek počtu je

$$R = i\sqrt{\frac{r^3}{m}} = ci\sqrt{\frac{r^3}{hM}}$$

nebo též dosti přesně

$$R = ci\sqrt{\frac{r'^3}{hM}} = i\alpha. \tag{25}$$

Tedy absolutní hodnota poloměru křivosti rovná se parametru Lobačevského prostoru, který lokálně může nahraditi paraboloid.

Poněvadž pak dále podle Keplerova zákona je

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{hM}{4\pi^2}, \tag{26}$$

bude podle (25)

$$2\pi\,|\,R\,| = cT. \tag{27}$$

To znamená: Vzdálenosti r odpovídá podle (26) kruhová dráha o době oběhu T. Téže vzdálenosti odpovídá podle (25) poloměr křivosti R a ten je tak velký, že by bod proběhl světelnou rychlostí za dobu T kruh, jehož poloměr je právě poloměr křivosti.

Zavedením úhlové vychlosti ω dostáváme z (27) zajímavý vztah

$$\omega\,|\,R\,| = c. \tag{27'}$$

Dospěli jsme tedy k důležitému poznatku. V gravitačním poli s kulovou symetrií je křivost negativní a ubývá s třetí mocninou vzdálenosti. Považovala-li se až do nedávna křivost prostoru jako celku za kladnou, nebylo možno přejíti od negativní křivosti lokální k positivní celkové. Z posledních úvah de Sitterových a Heckmannových však vyplývá, že nemůžeme rozhodnouti dosud, je-li skutečná křivost kladná či záporná. Předchozí řádky snad jsou příspěvkem k tomu, že, je-li lokální křivost negativní, je i průměrná křivost negativní.

Poznamenejme ještě, přijmeme-li Eddingtonovu hodnotu pro poloměr křivosti $R = 10^9$ světelných roků, že podle (25) pro Slunce nabude stejnou absolutní hodnotu poloměr křivosti ve vzdálenosti asi 55 světelných roků.

Rozpínání vesmíru. Poněvadž křivost je funkcí vzdálenosti, lze říci, že, vzdaluje-li se zdroj gravitačního pole od pozorovatele, bude se křivost pro něho měniti s časem a sice bude (vynecháváme čárky při r)

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} \cdot \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}. \tag{28}$$

Podle (25) je

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} = \frac{ci}{\sqrt{hm}} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{r} = \frac{3}{2}\frac{R}{r}, \tag{29}$$

takže

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \frac{3}{2} \cdot \frac{R}{r} \cdot \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

čili

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}. \tag{30}$$

Považujeme-li levou stranu za konstantu a sice $1/R \,.\, \mathrm{d}R/\mathrm{d}t = 5{,}7 \,.\, 10^{-10}$ roku^{-1},[6]) vyplývá z (30), že rychlost vzdalování $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$ je úměrná vzdálenosti r, což souhlasí s pozorováním mimogalaktických mlhovin. Ptejme se nyní, jaká bude rychlost ve vzdálenosti 1 megaparsecu $= 10^6$ parsec $\doteq 3{,}08 \,.\, 10^{19}$ km. Tu bude podle (30)

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{5{,}7 \,.\, 10^{-10}}{365 \,.\, 24 \,.\, 3600} \cdot 3{,}08 \,.\, 10^{19} \,.\, \frac{2}{3} = 372 \text{ km/sec},$$

což zhruba se shoduje s hodnotou 465 km/sec. odvozenou z Hubbelových pozorování na Mount Wilsonu,[7]) která mohou míti chybu $\pm$ 20%.

Pro sférický prostor se klade $r = R\chi$, takže $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t = \mathrm{d}R/\mathrm{d}t\chi$, čili $1/R \,.\, \mathrm{d}R/\mathrm{d}t = 1/r \,.\, \mathrm{d}r/\mathrm{d}t$, takže na 1 megaparsec vyjde rychlost $\frac{3}{2}$ krát větší než výše vypočtená, t. j. 557 km/sec. Zdá se, že ve skutečnosti platí $1/R \,.\, \mathrm{d}R/\mathrm{d}t = \frac{5}{4} \,.\, 1/r \,.\, \mathrm{d}r/\mathrm{d}t$, čemuž by odpovídalo $R \sim r^{5/4}$ a tím docílil by se úplný souhlas s pozorováním.

Základní případy. Pro statické kulově symetrické pole gravitační platí rovnice[8]):

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - 2\frac{m}{r}\right) c^2\, \mathrm{d}t^2 - \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - 2m/r} - r^2\, \mathrm{d}\varphi^2,$$

$$\left(1 - 2\frac{m}{r}\right) c\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \text{konst.} = A, \quad r^2 c\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = \text{konst.} = B.$$

---

[6]) H. Mineur: L'Univers en expansion 1933, str. 31.

[7]) H. Slouka: O rozměrech vesmíru a jeho instabilitě. Časopis pro pěst. mat. a fys., roč. 61, čís. 8 (1932).

[8]) Weyl: Raum, Zeit, Materie.

Mysleme si na tyto rovnice provedenu naši transformaci (17). Ve výsledcích vynechme čárku při r, považujme opět m/r za velmi malé a dostaneme:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{m}{r}\right)^2 c^2\, dt^2 - \left(1 + \frac{m}{r}\right)^2 (dr^2 + r^2\, d\varphi^2),$$

$$\left(1 - \frac{m}{r}\right)^2 c\,\frac{dt}{ds} = A,\; r^2\left(1 + \frac{m}{r}\right)^2 c\,\frac{d\varphi}{ds} = B.$$

Pro stručnost označme $f = 1 - m/r$, $g = 1 + m/r$, takže bude:

$$ds^2 = f^2c^2\, dt^2 - g^2\, d\sigma^2,\quad f^2c\,\frac{dt}{ds} = A,\quad g^2cr^2\,\frac{d\varphi}{ds} = B. \tag{33}$$

Veličinu r', kterou nyní označujeme r, považujme jaksi za „tu pravou" velikost průvodiče, kterou opravdu měříme. Opravňují nás k tomu úspěchy, které již při vyšetřování křivosti jsme poznali a které ještě z dalšího budou patrny.

Poznámka. Myslíme-li si v rovnicích (33) r nahrazeno poloměrem R podle (25), pak budou ostatní veličiny vyjádřeny pomocí R. Toť ilustrace relativistické myšlenky. Ústřední hmota vtiskne prostoru geometrii, určitou křivost a jde jen o volbu souřadného systému vhodného k řešení.

Vyjádřeme z rovnic (33) dr/ds, položme

$$\mu = \pm\frac{1}{g}\sqrt{\frac{A^2}{f^2} - \frac{B^2}{r^2g^2c^2} - 1},\quad \frac{d\sigma}{dt} = v \tag{34}$$

a dostaneme z (33) tento kanonický tvar[9])

$$ds = \frac{dr}{\pm\mu} = \frac{d\varphi}{\dfrac{B}{r^2g^2c}} = \frac{dt}{\dfrac{A}{f^2c}} = \sqrt{f^2c^2 - g^2v^2}\, dt. \tag{35}$$

Na základě tohoto systému dosáhneme jednotného, přehledného řešení a roztřídění základních případů. Všechny případy rozdělíme na I. mechanické, pro něž $ds \neq 0$, II. optické, pro něž $ds = 0$. Podle toho, kterou z proměnných volíme za stálou a tím čitatele i příslušného jmenovatele v (35) nulou (v optických případech jsou jmenovatele nekonečně velké a je nutno stanoviti příslušné limity poměrů), přicházíme k tomuto přehledu:

I. $ds \neq 0$.	II. $ds = 0$.
1. Žádná z veličin není konst. Pohyb hmotného bodu.	Pouze $ds = 0$. Šíření světla.

[9]) Srovnej: Dr. A. Dittrich: Methoda Hamilton-Jacobiho v mechanice Einsteinově. Časopis pro pěst. mat. a fys., roč. LIII, č. 1, 2 (1923).

2.	$dr = 0$. Kruhový pohyb.	Kruhový pohyb se světelnou rychlostí.
3.	$d\varphi = 0$. Radiální pohyb.	Radiální pohyb se světelnou rychlostí.
4.	$dt = 0$. Současnost. Měření délek.	Pevný bod v prostoru jakožto místo, jímž prochází světelný paprsek, definován je průsečíkem kruhu $r =$ konst. a přímkou $\varphi =$ konst., neboť ve všech těchto případech je současně $dr = 0$, $d\varphi = 0$.
5.	$dr = 0$, $d\varphi = 0$. Průběh času v daném bodě.	
6.	$dr = 0$, $dt = 0$. Měření délek na kruhu.	
7.	$d\varphi = 0$, $dt = 0$. Měření délek radiálně.	

Vztah energetický a pohyb perihelia. Ze systému (35) zvolme kombinaci

$$\frac{dt}{A/f^2c} = \sqrt{f^2c^2 - g^2v^2}\, dt,$$

z níž úpravou získáme ($m = hM/c^2$, $\Phi_0 = -hM/r = -mc^2/r$)

$$(1 + 6m/r)\, \tfrac{1}{2}v^2 + \Phi_0 = \tfrac{1}{2}c^2\,(1 - 1/A^2) = \text{konst.} \tag{36}$$

V klasické mechanice platí rovnice (2), v níž píšeme v_0 místo v a Φ_0 místo Φ, abychom rozlišili relativistický případ,

$$\tfrac{1}{2}v_0^2 + \Phi_0 = h_1. \tag{2}$$

Položme tedy

$$v^2\,(1 + 6m/r) = v_0^2, \quad h_1 = \tfrac{1}{2}c^2\,(1 - 1/A^2). \tag{37}$$

Konstanta h_1 klasifikuje dráhy a sice při $h_1 \lesseqgtr 0$ jde o dráhy eliptické, parabolické či hyperbolické. V našem případě tedy rozhoduje o tom veličina A a sice pro tytéž dráhy je $A \lesseqgtr 1$.

Uvažujme nyní pro jednoduchost kruhový pohyb, pro nějž klaďme

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \omega r, \quad v_0 = \frac{2\pi r}{T_0} = \omega_0 r.$$

Poněvadž podle (37)

$$v = v_0\,(1 - 3m/r), \tag{38}$$

bude

$$\omega = \omega_0 - 3m/r\omega_0. \tag{39}$$

T. j.: Skutečná (relativistická) úhlová rychlost ω jeví se složena ze 2 složek a sice: z klasické ω_0 a z rychlosti $\omega_0 \,.\, 3m/r$, jíž otáčí se nulová (počáteční) poloha pro měření úhlu φ ve směru pohybu uvažovaného bodu. Opíše-li bod úhel φ, postoupí počáteční poloha,

t. j. perihel, o $\varphi \,.\, 3m/r$, tedy za jeden oběh posune se perihel o

$$\Delta\pi = 6\pi m/r.$$

Pro eliptické dráhy s malou výstředností lze za r zavést harmonický střed

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{a\,(1-\varepsilon)} + \frac{1}{a\,(1+\varepsilon)}\right] = \frac{1}{a\,(1-\varepsilon^2)}, \tag{40}$$

takže

$$\Delta\pi = \frac{6\pi hM}{ac^2\,(1-\varepsilon^2)}. \tag{41}$$

Doba oběhu T_0 zvětšuje se podle (39), (40) na

$$T = T_0 + T_0\,\frac{3m}{a\,(1-\varepsilon^2)}$$

a z 3. Keplerova zákona v klasickém tvaru $a^3/T_0{}^2 = hM/4\pi^2$ dostaneme

$$\frac{a^3}{T^2}\left(1 + \frac{6m}{a\,(1-\varepsilon^2)}\right) = \frac{hM}{4\pi^2}. \tag{42}$$

Poznámka. Prodloužení doby oběhu o $T_0 \,.\, 3m/a$ pro pohyby kruhové nastane podle 3. Keplerova, zákona prodlouží-li se poloosa a o $2m$, jak se snadno přesvědčíme.

Klasifikace otevřených drah. Pro otevřené dráhy je výhodno zavést rychlost v nekonečnu V a vzdálenost Δ v perihelu. Z (36) plyne

$$\tfrac{1}{2}V^2 = \tfrac{1}{2}c^2\,(1 - 1/A^2) = h_1 \tag{43}$$

čili

$$A^2 = \frac{c^2}{c^2 - V^2}. \tag{44}$$

Z podmínky $dr = 0$ pro přísluní $r = \Delta$ musí být (pokud není $ds = 0$, o čemž později) podle (34) $\mu = 0$ a z toho

$$B^2 = \left\{\left[\frac{c^2}{(c^2 - V^2)\,f^2} - 1\right] \Delta^2 g^2 c^2\right\}_{r=\Delta}. \tag{45}$$

Rovnici (36) lze dáti podle (43) tvar

$$v^2\,(1 + 6m/r) = 2mc^2/r + V^2.$$

Odečteme-li po každé straně výraz $V^2\,(1 + 6m/r)$, dostaneme

$$v^2 - V^2 = \frac{2m}{r}\,\frac{c^2 - 3V^2}{1 + 6m/r}.$$

Z této rovnice usuzujeme: Pohybuje-li se bod z nekonečna, jeho rychlost v bude proti počáteční V vzrůstat, stejná či klesat, bude-li $c/\sqrt{3} \gtreqless V$.

Klasická mechanika znala pouze případ, že rychlost směrem k perihelu vzrůstala [rovn. (7)]. Měla-li ubývati, pak šlo o síly odpudivé, pak však těleso opisovalo onu větev hyperboly, v jejímž ohnisku není ústřední hmota.[10]) Mimo to dospíváme k možnosti rovnoměrného pohybu s rychlostí $c_1 = c/\sqrt{3}$. Snad je tato rychlost i jinak důležitá, snad šíří se jí gravitace. Poukazovala by k tomu tato okolnost. V rovnici (41) pro postup perihelu zaveďme rychlost c_1, takže:

$$\Delta\pi = \frac{2\pi hM}{ac_1^2}(1 + \varepsilon^2 + \ldots)$$

a tento vzorec je shodný se vzorcem

$$\Delta\pi = \frac{2\pi hM}{au^2}(1 + \varepsilon^2 + \ldots),$$

který koncem minulého století odvodil Tisserand a v němž u byla rychlost šíření gravitačních rozruchů.[11])

Dále je pozoruhodno, že z rovnice (36) lze dospěti k starému zákonu Weberovu, jak ukážeme dále, v němž však opět vyskytne se rychlost c_1, a konečně v rovnici $1/r \,.\, \mathrm{d}r/\mathrm{d}t = 1/R \,.\, c/\sqrt{3}$ pro rozpínání vesmíru objevuje se rychlost c_1.

Všimněme si ještě této okolnosti: Podle rovnice (38) odpovídá relativistické rychlosti c_1 klasická rychlost

$$v_0 = c_1\left(1 + \frac{hM}{rc_1^2}\right).$$

Je tedy hyperbolický pohyb klasický s počáteční rychlostí c_1 shodný s rovnoměrným pohybem relativistickým s rychlostí c_1.

Křivení světelného paprsku. V tomto případě je předně $\mathrm{d}s = 0$. Pak z rovnice (33) plyne pro světelnou rychlost

$$v = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = \frac{f}{g}\,c = c\left(1 - 2\,\frac{m}{r}\right) = c\left(1 - 2\,\frac{hM}{rc^2}\right) =$$
$$= c\left(1 + 2\,\frac{\Phi}{c^2}\right) = c + 2\,\frac{\Phi}{c}. \qquad (47)$$

Stejný výsledek dává (38), uvážíme-li, že klasická rychlost světelná by měla být podle (7) $v_0 = c\,(1 + m/r)$, takže podle (38) opět

$$v = c\,(1 - 2\,m/r).$$

[10]) Charlier: Die Mechanik des Himmels.

[11]) K. V. Zenger: Světová soustava elektrodynamická (1901).

Patří tedy podle naší klasifikace postup světelného paprsku do oné skupiny otevřených drah, pro něž rychlosti ubývá čím blíže k perihelu.

Poněvadž $ds = 0$, musí v systému (35) být jmenovatele nekonečně velké, takže bude nutno vyšetřiti některé limity. Dosadíme-li ze (44) $A^2 = c^2/(c^2 - V^2)$ do (34), bude

$$\frac{\mu}{B} = \pm \lim_{V=c} \frac{1}{rg^2cf} \sqrt{\frac{r^2g^2c^4}{B^2(c^2 - V^2)} - f^2} =$$

$$= \pm \lim \frac{1}{rg^2cf} \sqrt{r^2g^2c^2 \frac{A^2}{B^2} - f^2}. \tag{48}$$

Podle (35) je však

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{B}{A} \cdot \frac{f^2}{r^2g^2} = \frac{B}{A} \cdot \frac{1 - 4m/r}{r^2}. \tag{48'}$$

Poněvadž v přísluní je $\left(r \dfrac{d\varphi}{dt}\right)_{r=\Delta} = c\left(1 - 2\dfrac{m}{\Delta}\right)$ a dále podle (48′) pro přísluní

$$\left(r \frac{d\varphi}{dt}\right)_{r=\Delta} = \frac{B}{A} \cdot \frac{1 - 4m/\Delta}{\Delta^2},$$

je konečně

$$\frac{B}{A} = \left(1 + 2\frac{m}{\Delta}\right) \Delta c$$

a tudíž

$$\frac{\mu}{B} = \pm \frac{1}{rg^2cf} \sqrt{\frac{r^2g^2}{\Delta^2}\left(1 - 4\frac{m}{\Delta}\right) - f^2}.$$

Z (35) máme

$$\frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{B}{\mu} \cdot \frac{1}{r^2g^2c}$$

a podle předešlého po dosazení za B/μ po několikeré úpravě

$$d\varphi = \mp \Delta \frac{d\dfrac{1}{r}}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{4m}{\Delta}\right) + \dfrac{4m}{r} - \dfrac{\Delta^2}{r^2}}}. \tag{49}$$

Volme souřadný systém tak (obr. 1), aby při $r = \Delta$ bylo $\varphi = \frac{1}{2}\pi$. Integrace (49) v mezích $r = \infty$, Δ dává

$$\varphi_\Delta - \varphi_\infty = \tfrac{1}{2}\pi - \varphi_\infty =$$

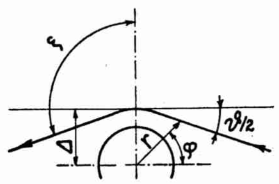
$$= \pm \left[\arcsin \frac{\Delta/r - 2m/\Delta}{\sqrt{1 - 4m/\Delta}}\right]_\infty^\Delta = \pm \left[\arcsin \left(\frac{\Delta}{r} - \frac{2m}{\Delta}\right)\left(1 + 2\frac{m}{\Delta}\right)\right]_\infty^\Delta =$$

$$= \pm \left[\arc \sin \left(\frac{\Delta}{r} - \frac{2m}{\Delta} + \frac{2m}{r} \right) \right]_{\infty}^{\Delta} = \pm \left[\tfrac{1}{2}\pi + 2 \frac{m}{\Delta} \right]. \tag{50}$$

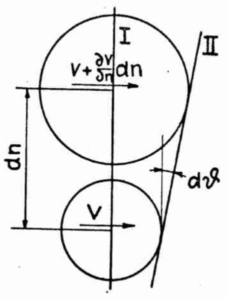
S ohledem na volbu souřadného systému nutno voliti znamení horní. Pak je patrno, že paprsek odchýlí se oproti přímočarému pohybu v nekonečnu o úhel $\frac{1}{2}\vartheta = -2m/\Delta$, takže celková odchylka v průběhu z nekonečna do nekonečna je

$$\vartheta = \frac{4m}{\Delta} \tag{51}$$

a sice ve směru k ústřednímu tělesu. Tedy přichází v úvahu taková čára, v jejíž konkávní části je ústřední těleso.



Obr. 1.



Obr. 2.

Úloha z optiky. Je zajímavo, že výraz pro světelnou rychlost stačí na vyšetření křivení paprsku na půdě klasické optiky.

a) Šíří-li se rovinná vlna rychlostí v závislou na místě, tu podle principu Huyghensova je zdrojem elementárních vln, takže za čas $\mathrm{d}t$ odkloní se o úhel $\mathrm{d}\vartheta$ podle obr. 2, daný rovnicí

$$\mathrm{d}\vartheta = \frac{\left(v + \frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}n\right)\mathrm{d}t - v\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}n} = \frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}t.$$

Poněvadž proběhnutá dráha je $\mathrm{d}\sigma = v\,\mathrm{d}t$, je

$$\mathrm{d}\vartheta = \frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}\sigma.^{12)} \tag{52}$$

[12]) Jinak řečeno: Pro křivočarý pohyb je rychlost rovna obvodové rychlosti kolem středu křivosti $v = n \cdot \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t}$ a tedy derivováním

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\sigma}\cdot\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = \mathrm{d}\vartheta \cdot \frac{v}{\mathrm{d}\sigma}, \text{ takže } \mathrm{d}\vartheta = \frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}\sigma.$$

V našem případě $v = c - 2m/r\, c$ a zavedeme-li podle obrazce

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial\sqrt{x^2+y^2}}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin\varphi,$$

takže

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{2mc}{r^2}\sin\varphi.$$

Velmi přibližně platí klasické relace:

$$\Delta c = r^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}, \quad \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = c, \quad v \doteq c$$

a tedy

$$\mathrm{d}\vartheta = \frac{2m}{\Delta}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

integrováno v mezích $-\frac{1}{2}\vartheta$ a $\pi + \frac{1}{2}\vartheta$ pro φ dává

$$\vartheta = 4\frac{m}{\Delta}.$$

b) Úlohu lze považovati za řešení refrakce, kde index lomu i je dán vztahem

$$i = \frac{c - 2m/rc}{c} = 1 - 2m/r, \tag{53}$$

Pak zenitová vzdálenost (obr. 1) ζ je dána rovnicí[13])

$$\zeta = z + \int\frac{\sin z}{(ir/i_0r_0)^2 - \sin^2 z}\cdot\frac{\mathrm{d}i}{i}, \tag{54}$$

kde z je zenitová vzdálenost bez refrakce, i_0, r_0 veličiny v místě pozorovatele, tedy v našem případě

$$i_0 = 1 - 2m/\Delta, \qquad r_0 = \Delta$$

a přibližně:

$$\frac{ir}{i_0r_0} = \frac{r}{\Delta}, \quad z = \frac{1}{2}\pi, \quad \sin\varphi = \frac{\Delta}{r},$$

takže

$$\zeta = \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\vartheta = \frac{1}{2}\pi + \frac{2m}{\Delta}\int_{\vartheta/2}^{\pi/2}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\pi + \frac{2m}{\Delta}.$$

V případech *a*) i *b*) odchylka nastává v tom směru, ve kterém rychlost světla klesá, tedy opět ústřední hmota je uvnitř křivky.

Rudý posuv. Nechť přichází světelný paprsek ze zdroje světla, na němž je gravitační potenciál Φ_e, do místa tak vzdáleného, že

[13]) Ball: Lehrbuch der sphärischen Astronomie.

gravitační potenciál je téměř nula. Pak bude se rychlost světla měniti od $c + 2\Phi_c/c$ do c. Střední rychlost bude

$$\bar{c} = \frac{\int\limits_{\Phi_c}^{0} (c + 2\Phi/c)\,\mathrm{d}\Phi}{\int\limits_{\Phi_c}^{0} \mathrm{d}\Phi} = c + \frac{\Phi_c}{c} = c - \frac{hM}{\Delta c}. \tag{55}$$

Je to tedy tak, jakoby se zdroj světelný vzdaloval od pozorovatele (pro nějž je rychlost světla c) rychlostí $c_2 = -hM/\Delta c$. Musí se tedy objevit Dopplerův efekt a sice změní se frekvence ν_0 vysílaného světla na ν podle vzorce

$$\frac{\delta\nu}{\nu_0} = \frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} = \frac{c_2}{c - c_2} \doteq \frac{c_2}{c} = -\frac{hM}{\Delta c^2}.$$

Naměří tedy pozorovatel frekvenci $\nu < \nu_0$, takže nastává posuv spektrálních čar k červenému konci.

Weberův zákon. Nejprve několik historických poznámek.[14]) V roce 1846 uveřejnil Heinrich Weber svůj zákon, podle něhož odpudivá síla dvou elektrických množství e, e' ve vzdálenosti r je dána výrazem

$$P = \frac{ee'}{r^2}\left\{1 - \frac{1}{2c^2}\left[\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 - 2r\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}\right]\right\}, \tag{57}$$

a upozornil, užije-li se obdobného zákona pro zjevy gravitační, že budou rozdíly mezi výpočtem a pozorováním nepostřehnutelné. Hodnoty pro postup perihelu Merkura počítané podle této rovnice vycházely příliš malé. Přenesení svého zákona na zjevy gravitační odůvodnil Weber (1877) takto: Náboj $+e$ nechť je vážán na množství hmoty ε, $-e$ na $\alpha\varepsilon$. Jednotku hmoty volíme tak, že číselně bude e a ε stejné. Pak neutrální částice o celkové hmotě $m = (1 + \alpha)\,\varepsilon$ působí na jinou o hmotě $m' = n\,(1 + \alpha)\,\varepsilon$ odpudivými silami elektrickými

$$f = \frac{ee}{r^2}\left\{1 - \frac{1}{2c^2}\left[\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 - 2r\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}\right]\right\} = \frac{\varepsilon\,.\,n\varepsilon}{r^2}\left[\ldots\right],$$

$$f' = \frac{-e\,.\,-e}{r^2}\left[\ldots\right] = \frac{\varepsilon\,.\,n\varepsilon}{r^2}\left[\ldots\right] = f$$

---

[14]) H. Weber: Elektrodynamische Maassbestimmung. Abhandlungen d. k. sächsischen Gesellschaft d. Wissensch. zu Leipzig 1846.

Friedrich Zöllner: Erklärung d. universellen Gravitation aus den statischen Wirkungen d. Elektrizität und d. allgemeine Bedeutung des Weberschen Gesetzes. Leipzig 1882.

Hattendorf: Schwere, Elektrizität u. Magnetismus 1876.

Poincaré: Elektrizität u. Optik 1892.

Dr. A. Seydler: Základové theoretické fysiky 1880.

a přitažlivými, jež pro obecnost položíme rovné μf. Předpokládáme-li $\alpha = 1$, bude výsledná síla $= -\frac{\mu - 1}{2}\frac{mm'}{r^2}$ [. . .]. Je-li hmota v obvyklé míře M gramů $= N \,.\, m$, bude konečně síla

$$P = -\frac{\mu - 1}{2N^2} \cdot \frac{MM'}{r^2}\left\{\ldots\right\},$$

kde výraz $(\mu - 1)/2N^2$ je gravitační konstanta.

Zákon Weberův vyhovuje principu o zachování energie, neboť perpetuum mobile je znemožněno tím, že síla P má potenciál $=$

$$\Phi_0\left[1 - \frac{1}{2c^2}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2\right], \tag{59}$$

kde Φ_0 je klasický potenciál.

Vraťme se nyní k rovnici (36), přepišme ji do tvaru

$$v^2 + 2\Phi_0\,(1 - v^2/c_1^{\,2}) = 2h_1$$

a zaveďme „relativistický potenciál"

$$\Phi = \Phi_0\,(1 - v^2/c_1^{\,2}). \tag{60}$$

Tím ocítáme se ihned ve styku s Weberovým zákonem, jak patrno ze srovnání (59) se (60). Potenciál Φ skládá se podle (60) jednak z klasického a jednak z potenciálu příslušejícího odpudivé síle. S ohledem na to, že může být $v \gtreqless c_1$ a nemá-li gravitační účinek stát se odpudivým, musíme definovati sílu (působící na jednotku hmoty)

$$P = \mp\frac{\delta\Phi}{\delta r} \text{ pro } v \lessgtr c_1.$$

Pro $v = c_1$ je $\Phi = 0$, $P = 0$ a máme dříve uvažovaný případ rovnoměrného pohybu.

Pro kruhové pohyby položme v korekčním členu za v^2 hodnotu známou z klasické mechaniky, totiž $v^2 = -\Phi_0 = \frac{hM}{r}$, takže dostředivá síla bude

$$P = -\frac{\partial\Phi}{\partial r} = -\frac{hM}{r^2}\left(1 - \frac{2hM}{rc_1^{\,2}}\right), \tag{61}$$

která co do absolutní hodnoty je rovna odstředivé $r\omega^2$, takže srovnáním se (60) a po úpravě dostaneme třetí Keplerův zákon

$$r^3\omega^2\left(1 + \frac{2hM}{rc_1^{\,2}}\right) = hM.$$

z něhož jako dříve je patrno, že klasická úhlová rychlost