ČÁST MATEMATICKÁ

O minimálních grafech, obsahujících n daných bodů.

Vojtěch Jarník a *Miloš Kössler*.

(Došlo 10. února 1934.)

V tomto článku zabýváme se touto úlohou: je dáno n bodů $C_1, C_2, \ldots, C_n$; hledáme souvislé množství, složené z konečného počtu úseček a obsahující body $C_1, C_2, \ldots, C_n$ tak, aby „celková délka" tohoto množství byla co nejmenší (pro $n = 2$ jest ovšem touto „nejkratší spojnicí" úsečka, spojující body C_1, C_2). V § 2 dokazujeme existenci takového „minimálního grafu", v § 3 zabýváme se případem, kdy body $C_1, C_2, \ldots, C_n$ tvoří vrcholy pravidelného n-úhelníka.

Charakter tohoto článku je zcela elementární; mimo to některé body důkazu jsou zcela běžné úvahy a proto je provádíme stručně.

§ 1.

Budiž R_k ($k \geq 1$) k-rozměrný euklidovský prostor. Neprázdné bodové množství $G \subset R_k$ nazveme grafem v R_k, má-li tyto vlastnosti:

1. G je souvislé; 2. buď se G skládá z jediného bodu nebo je G součtem konečného počtu uzavřených úseček.[1]) Je-li $P \in G$ a existuje-li právě n (nikoliv však $n + 1$) úseček, ležících v grafu G, majících P za bod koncový, z nichž žádné dvě nemají kromě bodu P společných bodů, budeme říkati, že P je bodem n-tého řádu grafu G.[2])

[1]) Označení: $A \subset B$ značí: A je částí množství B; $A \in B$ značí: A je prvkem množství B; $A \,.\, B$ je průnik množství A, B. Znakem $\overline{MN}$ značíme uzavřenou úsečku (t. j. včetně koncových bodů) o koncových bodech M, N; $\overrightarrow{MN}$ značí polopaprsek o koncovém bodě M, jenž obsahuje bod N (včetně bodu M). Znaky ${}_0(\overline{MN})$, $(\overline{MN})_0$, ${}_0(\overline{MN})_0$ značí množství všech bodů úsečky $\overline{MN}$ s vyloučením bodu M, resp. bodu N, resp. obou bodů M, N a pod. Úhel α dvou úseček $\overline{PM}$, $\overline{PN}$, majících jediný společný bod P, béřeme vždy v intervalu $0 < \alpha \leqq \pi$. Znak $\overline{MN}$ bude někdy značiti též orientovanou úsečku (začáteční bod M, koncový N); někdy bude $\overline{MN}$ značiti též délku této úsečky; nedorozumění není třeba se obávati.

[2]) V grafu G existuje bod nultého řádu tehdy a jen tehdy, je-li G jednobodový graf.

Body prvního řádu nazývají se koncovými body, body vyššího než druhého řádu nazývají se rozvětvovacími body grafu (obojích je v každém grafu nejvýše konečný počet). Je-li P bodem n-tého řádu grafu G, položme $V(P) = n - 2$ a klaďme dále $V(G) = \Sigma V(P)$, kdež vpravo se sčítá přes všechny body grafu, jejichž řád není roven 2 (můžeme ovšem do součtu pojmouti i sčítance, příslušné k některým bodům druhého řádu). $V(P)$ budeme nazývati vahou bodu P.

Graf, jenž je současně uzavřenou, jednoduchou spojitou křivkou, nazýváme cyklem. Graf, jehož žádná část není cyklem, nazveme stromem. Platí pak známá

věta 1. *Je-li G stromem, jest $V(G) = -2$.*[3])

D ů k a z. Ony body grafu G, jež nejsou druhého řádu a dále ony body druhého řádu, v nichž se stýkají dvě úsečky grafu, neležící v jedné přímce, nazveme vrcholy grafu G. Úsečku $\overline{MN} \subset G$ nazveme stranou grafu, není-li žádný bod úsečky $_0(\overline{MN})_0$ vrcholem a jsou-li oba body M, N vrcholy grafu.[4]) Každý vícebodový graf je potom součtem svých stran.[5]) Ukážeme napřed: budiž G vícebodový strom; potom má G aspoň jeden koncový bod. Neboť: budiž $\overline{M_1M_2}$ strana grafu G; není-li M_2 koncovým bodem, existuje strana $\overline{M_2M_3}$ (různá od $\overline{M_1M_2}$); není-li M_3 koncovým bodem, existuje další strana $\overline{M_3M_4}$ atd.; body $M_1, M_2, M_3, M_4, \ldots$ jsou navzájem různé (jinak bychom dostali cyklus) a proto se tento postup nutně zarazí u nějakého bodu M_n, jenž je nutně koncovým bodem. Důkaz věty 1 je již snadný: Budiž G vícebodový strom; tedy má G stranu $\overline{M_1M_2}$ takovou, že M_1 je koncovým bodem. Strom $G_1 = G - (\overline{M_1M_2})_0$ má méně stran než G a zřejmě jest $V(G_1) = V(G)$. Opakováním tohoto postupu dospějeme k jednobodovému grafu G_l takovému, že $V(G_l) = V(G)$. Ale pro jednobodový graf je $V(G_l) = -2$, tedy $V(G) = -2$.

§ 2.

Budiž dáno n ($n \geq 2$) bodů $C_1, C_2, \ldots, C_n$ prostoru R_k ($k \geq 1$); body ty budeme nazývati základními body. Budiž G nějaký graf v R_k, obsahující body $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Slovy „vrcholy grafu G" budeme označovati předně všechny body základní, za druhé všechny body grafu G, jejichž řád není roven 2, za třetí ony body druhého řádu grafu G, v nichž se stýkají dvě úsečky grafu, neležící

[3]) Z toho je patrno: vícebodový strom má aspoň dva koncové body.

[4]) Toto pojmenování je jen provisorní a podržíme je pouze v důkazu věty 1; v příštím paragrafu budeme pojmenování poněkud modifikovati.

[5]) Mají-li dvě různé strany grafu společný bod, je tento bod nutně koncovým bodem obou těchto stran; stran je ovšem jen konečný počet.

v jedné přímce.[6]) Úsečku $\overline{MN} \subset G$ budeme nazývati „stranou grafu G“, jestliže žádný bod úsečky $_0(\overline{MN})_0$ není vrcholem a jsou-li oba body M, N vrcholy grafu G. Graf G jest pak součtem svých stran. Vrcholů i stran je zřejmě jen konečný počet; mají-li dvě různé strany grafu G společný bod, je tento bod nutně koncovým bodem obou těchto stran. Součet délek všech stran grafu G nazveme délkou grafu G, značka $l(G)$.

Budiž $\mathfrak{M}$ množství všech grafů v R_k, jež obsahují body $C_1, C_2, \ldots$ $\ldots, C_n$; budiž v dalším d dolní hranice délek všech grafů $G \varepsilon \mathfrak{M}$; existuje-li $G \varepsilon \mathfrak{M}$ tak, že $l(G) = d$, budeme graf G nazývati „minimálním grafem v R_k vzhledem k bodům $C_1, C_2, \ldots, C_n$“. Dokážeme pak především tuto větu:

Věta 2. *Buďtež $C_1, C_2, \ldots, C_n$ body prostoru R_k ($k \geqq 1, n \geqq 2$); potom existuje aspoň jeden minimální graf v R_k vzhledem k bodům $C_1, C_2, \ldots, C_n$.*

Zavedeme napřed některá označení. Budiž $G \varepsilon \mathfrak{M}$; volným koncem grafu G nazveme každý koncový bod grafu G, jenž není základním bodem; volným rohem grafu G nazveme každý vrchol druhého řádu, který není základním bodem.[7]) Budiž $\mathfrak{N}$ množství oněch grafů $G \varepsilon \mathfrak{M}$, jež jsou stromy a nemají volných konců; budiž $\mathfrak{P}$ množství oněch grafů $G \varepsilon \mathfrak{N}$, jež nemají volných rohů. Dokážeme napřed tato tvrzení:

Tvrzení 1. *Budiž $G \varepsilon \mathfrak{M} - \mathfrak{N}$; potom existuje $G_1 \varepsilon \mathfrak{N}$ tak, že $l(G_1) < l(G)$.*

Tvrzení 2. *Budiž $k \geqq 3$, $G \varepsilon \mathfrak{N} - \mathfrak{P}$; potom existuje $G_1 \varepsilon \mathfrak{P}$ tak, že $l(G_1) < l(G)$.*

Tvrzení 3. *Budiž d_1 dolní hranice délek všech grafů $G \varepsilon \mathfrak{P}$; potom existuje aspoň jeden graf $G_0 \varepsilon \mathfrak{M}$ takový, že $l(G_0) \leqq d_1$.*

Tvrzení 4. *Je-li G minimální graf v R_k vzhledem k bodům $C_1, C_2, \ldots, C_n$ a je-li K nejmenší konvexní bodové množství v R_k, obsahující body $C_1, C_2, \ldots, C_n$, platí $G \subset K$.*

Z tvrzení 1—4 plyne věta 2. Neboť:

A) Je-li $k \geqq 3$, je podle tvrzení 1 a 2 platna rovnice $d_1 = d$ a věta 2. plyne z tvrzení 3.

B) Je-li $k \leqq 2$, vnořme R_k do prostoru R_3; podle případu *A*) existuje minimální graf G v R_3 vzhledem k bodům $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Podle tvrzení 4 jest však $G \subset R_k$.

---

[6]) Zde se uchylujeme od pojmenování z § 1; měli bychom vlastně říkati „vrcholy grafu G vzhledem k bodům $C_1, C_2, \ldots, C_n$“; ježto však není třeba se obávati nedorozumění, budeme dodatek „vzhledem k bodům $C_1, C_2, \ldots, C_n$“ vynechávati; totéž platí v následujícím pro pojem „strana grafu G“.

[7]) Ve volném rohu stýkají se tedy dvě strany grafu, jež neleží v jedné přímce.

Stačí tedy dokázati tvrzení 1—4.

Důkaz tvrzení 1. Budiž $G \varepsilon \mathfrak{M} - \mathfrak{N}$. Má-li G volný konec M_1, jenž je koncovým bodem strany $\overline{M_1M_2}$, potom graf $G' = G - (\overline{M_1M_2})_0$ má méně stran než G a jest $G' \varepsilon \mathfrak{M}$, $l(G') < l(G)$. Tvoří-li strany $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_2M_3}, \dots$ grafu G cyklus, má graf $G' = G - {}_0(\overline{M_1M_2})_0$ méně stran než G a jest $G' \varepsilon \mathfrak{M}$, $l(G') < l(G)$.

Opětným použitím těchto konstrukcí na graf G' atd. musíme přijíti konečně ke grafu G_1, na nějž tyto konstrukce se již nedají aplikovati; tedy jest nutně $G_1 \varepsilon \mathfrak{N}$ a ovšem $l(G_1) < l(G)$.

Důkaz tvrzení 2. Budiž $k \geq 3$, $G \varepsilon \mathfrak{N} - \mathfrak{P}$; t. j. graf $G \varepsilon \mathfrak{M}$ je strom, nemá volných konců, má však aspoň jeden volný roh M_1, v němž se tedy stýkají dvě strany $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$, neležící v jedné přímce; M_1 není bodem základním. Dokážeme: existuje graf $G' \varepsilon \mathfrak{N}$, jenž má méně volných rohů než G a pro nějž $l(G') < l(G)$. (Tím bude tvrzení 2 dokázáno, neboť opakováním tohoto postupu dojdeme nutně ke grafu $G_1 \varepsilon \mathfrak{N}$ bez volných rohů, t. j. $G_1 \varepsilon \mathfrak{P}$ a ovšem $l(G_1) < l(G)$.) Při důkazu rozeznávejme dva případy. 1. případ: body M_2, M_3 jsou body základními. Množství $G - [{}_0(\overline{M_2M_1}) + (\overline{M_1M_3})_0]$ je součtem dvou stromů G_2, G_3, pro něž platí $G_2 \,.\, G_3 = 0$, $M_2 \varepsilon G_2$, $M_3 \varepsilon G_3$. Úsečka $\overline{M_2M_3}$ obsahuje aspoň jeden bod grafu G_2 (na př. M_2) a aspoň jeden bod grafu G_3 (na př. M_3). Zřejmě existují tedy dva body P_2, P_3 na úsečce $\overline{M_2M_3}$ takové, že $P_2 \varepsilon G_2$, $P_3 \varepsilon G_3$ a že žádný bod úsečky ${}_0(\overline{P_2P_3})_0$ nepatří ani ke G_2 ani ke G_3. Graf $G' = \{G - [{}_0(\overline{M_2M_1}) + (\overline{M_1M_3})_0]\} + \overline{P_2P_3}$ patří zřejmě k $\mathfrak{N}$ a má aspoň o jeden volný roh méně než G (neboť M_2, M_3 jsou základní body, nejsou tedy ani volnými konci ani volnými rohy; v bodech P_2, P_3 pak graf G neměl volných konců a tedy graf G' nemá v bodech P_2, P_3 ani volných konců ani volných rohů). Zřejmě jest $l(G') < l(G)$, jak bylo dokázati. 2. případ: aspoň jeden z bodů M_2, M_3 — třeba bod M_2 — není bodem základním. Proložme bodem M_2 nadrovinu S [$(k - 1)$-rozměrnou], jež neobsahuje bod M_3. Je-li M'_2 libovolný bod nadroviny S, označme znakem $G(M'_2)$ graf, který vznikne z grafu G tím, že všechny strany $\overline{M_iM_2}$ grafu G, vycházející z bodu M_2, nahradíme úsečkami $\overline{M_iM'_2}$. Položme $\overline{M_2M_1} + \overline{M_1M_3} - \overline{M_2M_3} = a > 0$. Je jasno, že existuje číslo $\delta > 0$ tak, že každý graf $G(M'_2)$, pro nějž platí $\overline{M_2M'_2} < \delta$, má tyto vlastnosti:

1. $l(G(M'_2)) < l(G) + \frac{1}{2}a$, $\overline{M'_2M_1} + \overline{M_1M_3} - \overline{M'_2M_3} > \frac{1}{2}a$.

2. Graf $G(M'_2)$ má tytéž vrcholy (a téhož řádu) a tytéž strany jako G, až na to, že místo vrcholu M_2 a stran $\overline{M_2M_i}$ nastupuje všude vrchol M'_2 a strany $\overline{M'_2M_i}$.

Sestrojme všechny přímky, jež procházejí bodem M_3 a mimo to ještě aspoň jedním bodem grafu G. Tyto přímky protínají nadrovinu S v bodovém množství Σ, jež se skládá nejvýše z konečného počtu bodů, úseček a polopaprsků. Existuje tedy (ježto je $k \geqq 3$, je nadrovina S alespoň dvojrozměrná) aspoň jeden bod $M'_2 \varepsilon S - \Sigma$ takový, že $\overline{M_2 M'_2} < \delta$; pro graf $G(M'_2)$ platí pak vlastnosti 1., 2. Nadto má graf $G(M'_2)$ ještě tuto vlastnost: žádný bod grafu $G(M'_2)$ neleží na úsečce ${}_0(\overline{M'_2 M_3})_0$.[8] Sestrojme nyní graf $G' = \{G(M'_2) - [\overline{M'_2 M_1} + \overline{M_1 M_3}]\} + \overline{M'_2 M_3}$; je zřejmě $G' \varepsilon \mathfrak{N}$, dále má graf G' aspoň o jeden volný roh méně než graf G a konečně z vlastnosti 1. plyne $l(G') < l(G)$, jak bylo dokázati.

Důkaz tvrzení 3 je běžná limitní úvaha. Budiž $G_1, G_2, \ldots$ posloupnost grafů z $\mathfrak{P}$ a budiž $\lim\limits_{r=\infty} l(G_r) = d_1$. Ježto $C_1 \varepsilon G_r$, leží všechny grafy G_r v uzavřené kouli o středu C_1, jejíž poloměr je roven horní hranici čísel $l(G_r)$ $(r = 1, 2, \ldots)$. Jediné vrcholy grafu G_r jsou body základní a rozvětvovací. Podle věty 1 je $V(G_r) = -2$; ježto body koncové (o váze -1) leží vesměs v bodech základních, je jich nejvýše n; bodů rozvětvovacích (jejichž váha je tedy nejméně rovna 1) je tedy nejvýše $n - 2$; tedy graf G_r má nejvýše $2n - 2$ vrcholů. Existuje tedy v posloupnosti $G_1, G_2, \ldots$ částečná posloupnost $G'_1, G'_2, \ldots$ taková, že všechny grafy G'_r mají stejný počet vrcholů. Vrcholy grafu G'_r označme v určitém pořádku $X_1^r, X_2^r, \ldots, X_z^r$, při čemž budiž $X_i^r = C_i$ pro $1 \leqq i \leqq n$. Přiřaďme grafu G'_r matici

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12}^r & a_{13}^r & \ldots & a_{1z}^r \\ a_{21}^r & 0 & a_{23}^r & \ldots & a_{2z}^r \\ a_{31}^r & a_{32}^r & 0 & \ldots & a_{3z}^r \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{z1}^r & a_{z2}^r & a_{z3}^r & \ldots & 0 \end{pmatrix};$$

kde a_{il}^r se rovná 1 nebo 0, podle toho, je-li $\overline{X_i^r X_l^r}$ stranou grafu G'_r nebo ne. Ježto takových matic je jen konečný počet, existuje částečná posloupnost $G'_{s_1}, G'_{s_2}, \ldots$ taková, že všem jejím grafům jest přiřazena táž matice

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1z} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \ldots & a_{2z} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{z1} & a_{z2} & a_{z3} & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

---

[8]) Neboť ze vztahu $M'_2 \varepsilon S - \Sigma$ plyne: předně nemůže žádný bod strany $\overline{M_i M_l}$ $(i, l \neq 2)$ — kromě snad bodu M_3 — ležeti na úsečce $\overline{M'_2 M_3}$; za druhé nemůže žádný bod strany $\overline{M_i M'_2}$ $(i \neq 3)$ — kromě bodu M'_2 — ležeti na úsečce $\overline{M'_2 M_3}$, neboť jinak by body M_3, M_i, M'_2 ležely v jedné přímce. Konečně úsečka $\overline{M_3 M'_2}$ není vůbec stranou grafu $G(M'_2)$, ježto jinak by strany $\overline{M'_2 M_3}$, $\overline{M_3 M_1}$, $\overline{M_1 M'_2}$ tvořily cyklus v $G(M'_2)$, což je vyloučeno vzhledem k vlastnosti 2. a vzhledem k tomu, že $G \varepsilon \mathfrak{N}$.

V této posloupnosti lze konečně — ježto posloupnosti $X_i^1, X_i^2, X_i^3, \ldots$ $(i = 1, 2, \ldots, z)$ jsou ohraničené — nalézti částečnou posloupnost $G'_{t_1}, G'_{t_2}, \ldots$ tak, že existují limity $\lim\limits_{p=\infty} X_i^{t_p} = X_i$ $(i = 1, 2, \ldots, z)$. Označme znakem G_0 součet oněch úseček $\overline{X_iX_l}$ $(1 \leqq i < l \leqq z)$, pro něž $a_{il} = 1$.[9]) Zřejmě jest $G_0 \,\varepsilon\, \mathfrak{M}$ a platí

$$l(G'_{t_p}) = \sum_{1 \leqq i < l \leqq z} a_{il} \overline{X_i^{t_p} X_l^{t_p}},$$

$$l(G_0) \leqq \sum_{1 \leqq i < l \leqq z} a_{il} \overline{X_i X_l} = \lim_{p=\infty} l(G'_{t_p}) = d_1,$$

jak bylo dokázati.

Důkaz tvrzení 4. Budiž $G \,\varepsilon\, \mathfrak{M}$ graf takový, že neplatí $G \subset K$. Potom existuje nadrovina S $[(k - 1)$-rozměrná] taková, že všechny body základní leží po jedné straně nadroviny S a po druhé straně této nadroviny leží jistá neprázdná část G' grafu G. Sestrojme graf G_1 tím, že v grafu G nahradíme část G' pravoúhlou projekcí množství G' na nadrovinu S; zřejmě je $G_1 \,\varepsilon\, \mathfrak{M}$ a $l(G_1) < l(G)$, jak bylo dokázati.

Nyní snadno dokážeme následující větu 3, která podrobněji popisuje strukturu minimálních grafů.

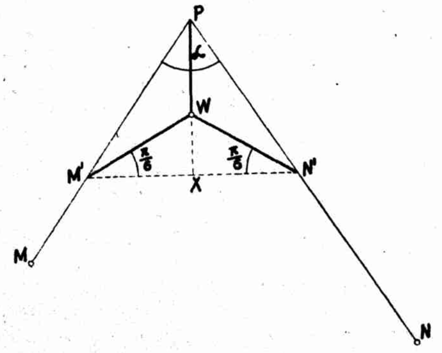
Věta 3. *Budiž G minimální graf v R_k $(k \geqq 1)$ vzhledem k bodům $C_1, C_2, \ldots, C_n$ $(n \geqq 2)$. Potom má G tyto vlastnosti:*

a) G je částí nejmenšího konvexního množství, obsahujícího body $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

b) G je strom, nemající ani volných konců ani volných rohů.

c) Mají-li dvě strany grafu G společný bod, jest úhel těchto stran nejméně roven $\frac{2}{3}\pi$.

d) Každý rozvětvovací bod grafu G je třetího řádu. Tři strany grafu, vycházející z tohoto bodu, leží v jedné rovině (dvojrozměrné) *a každé dvě z nich svírají úhel $\frac{2}{3}\pi$.*



Obr. 1.

Důkaz věty 3: Vlastnost $a)$ plyne z tvrzení 4. K důkazu vlastnosti $b)$ můžeme předpokládati (následkem vlastnosti $a)$), že $k \geqq 3$ (kdyby bylo $k < 3$, vnořili bychom R_k do prostoru R_3); potom však vlastnost $b)$ plyne z tvrzení 1 a 2. Vlastnost $c)$ dokážeme takto: budiž $G \,\varepsilon\, \mathfrak{M}$ a buďte $\overline{PM}$, $\overline{PN}$ dvě strany

[9]) Některé z těchto „úseček" ovšem mohou degenerovati v body.

grafu G, jež svírají úhel $\alpha < \frac{2}{3}\pi$. Sestrojme bod M' uvnitř strany $\overline{PM}$ a bod N' uvnitř strany $\overline{PN}$ tak, že $\overline{PM'} = \overline{PN'} = h$. Potom jest (viz obr. 1)

$$\overline{M'W} = \overline{N'W} = \overline{M'X} \,.\, \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} h \sin \tfrac{1}{2}\alpha,$$

$$\overline{PW} = \overline{PX} - \overline{WX} = h \cos \tfrac{1}{2}\alpha - \frac{1}{\sqrt{3}} h \sin \tfrac{1}{2}\alpha;$$

tedy

$$\overline{M'W} + \overline{N'W} + \overline{PW} = h\,(\sqrt{3} \sin \tfrac{1}{2}\alpha + \cos \tfrac{1}{2}\alpha) < \\ < 2h = \overline{PM'} + \overline{PN'}.$$ [10]

Pro graf

$$G_1 = [G - (\overline{M'P} + \overline{N'P})] + \overline{M'W} + \overline{N'W} + \overline{PW}$$

platí tedy zřejmě $G_1 \,\varepsilon\, \mathfrak{M}$, $l(G_1) < l(G)$, takže graf G není minimální, jak bylo dokázati. Vlastnost *d*) plyne okamžitě z vlastnosti *c*), uvážíme-li, že tři úsečky, vycházející z jednoho bodu a neležící v jedné rovině, svírají úhly, jejichž součet je menší než 2π.

Poznámka. Z věty 3 plyne pro minimální graf G toto: je-li P bod rozvětvovací, je $V(P) = 1$, kdežto pro bod koncový je $V(P) = -1$. Z rovnice $V(G) = -2$ plyne tedy, že počet bodů rozvětvovacích je o dvě menší než počet bodů koncových.

§ 3.

Vezměme jako první příklad graf G, který je minimální vzhledem k bodům C_1, C_2, C_3. Zde jsou tedy buď dva body koncové — třeba C_1, C_2 — a žádný bod rozvětvovací nebo tři body koncové C_1, C_2, C_3 a jeden bod rozvětvovací D. V prvním případě je $G = \overline{C_1C_3} + \overline{C_2C_3}$, v druhém případě je $G = \overline{DC_1} + \overline{DC_2} + \overline{DC_3}$. Jsou-li všechny úhly trojúhelníka $C_1C_2C_3$ menší než $\frac{2}{3}\pi$, musí podle vlastnosti *c*) nastati druhý případ; je-li jeden z úhlů trojúhelníka $C_1C_2C_3$ aspoň roven $\frac{2}{3}\pi$, nastane případ první (neboť v tomto případě zřejmě neexistuje žádný bod D, z něhož by všechny tři strany trojúhelníka bylo viděti pod úhlem $\frac{2}{3}\pi$); při našem očíslování ($G = \overline{C_1C_3} + \overline{C_2C_3}$) je ovšem C_3 onen vrchol trojúhelníka, při němž leží úhel $\geqq \frac{2}{3}\pi$. Je viděti, že pro $n = 3$ existuje jediný minimální graf vzhledem k bodům C_1, C_2, C_3.

---

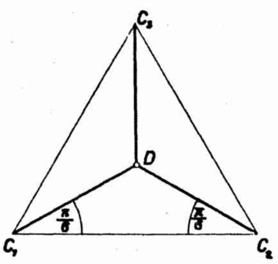
[10] Jest totiž

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sqrt{3} \sin x + \cos x) = \sqrt{3} \cos x - \sin x = \cos x\,(\sqrt{3} - \operatorname{tg} x) > 0$$

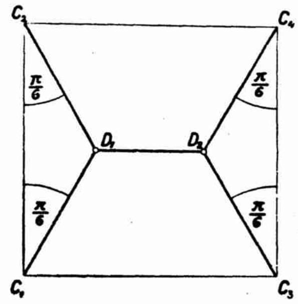
pro $0 < x < \frac{1}{3}\pi$; tedy jest $\sqrt{3} \sin x + \cos x$ rostoucí funkcí pro $0 \leqq x \leqq \frac{1}{3}\pi$ a tedy platí pro $0 < x < \frac{1}{3}\pi$:

$$\sqrt{3} \sin x + \cos x < \sqrt{3} \sin \tfrac{1}{3}\pi + \cos \tfrac{1}{3}\pi = 2.$$

Pro $n > 3$ jsou poměry příliš složité; omezíme se proto na obecnou diskusi případu, kdy základní body tvoří vrcholy pravidelného n-úhelníka. Buďtež tedy v dalším body $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ($n \geqq 3$) vrcholy pravidelného n-úhelníka P_n o straně a. Znakem P_n budeme značiti nikoliv obvod, nýbrž množství všech bodů uvnitř a na obvodě n-úhelníka. Případ $n = 3$ jsme již vyřešili; příslušný minimální graf (zobrazený na obr. 2) má délku $a \,.\, \sqrt{3} = a \,.\, 1{,}732\ldots.$ Uvažujme nyní případy $n = 4$ a $n = 5$. Budiž G minimální graf vzhledem k bodům $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Ježto všechny vnitřní úhly P_n



Obr. 2.



Obr. 3.

jsou menší než $\frac{2}{3}\pi$, jsou všechny body základní body koncovými [(podle vlastností a) c)]. Máme tedy pro $n = 4$ dva body rozvětvovací D_1, D_2, pro $n = 5$ tři body rozvětvovací D_1, D_2, D_3. Ježto zřejmě každá strana grafu G, jež vychází z některého základního bodu, má za druhý koncový bod bod rozvětvovací a ježto body rozvětvovací jsou vesměs třetího řádu, je patrno, že (při vhodném očíslování bodů C_i, D_i) pro $n = 4$ jest

$$G = \overline{C_1D_1} + \overline{C_2D_1} + \overline{D_1D_2} + \overline{D_2C_3} + \overline{D_2C_4},$$

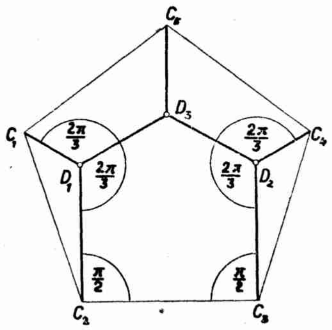
kdežto pro $n = 5$ jest

$$G = \overline{C_1D_1} + \overline{C_2D_1} + \overline{C_3D_2} + \overline{C_4D_2} + \overline{C_5D_3} + \overline{D_1D_3} + \overline{D_2D_3}.$$

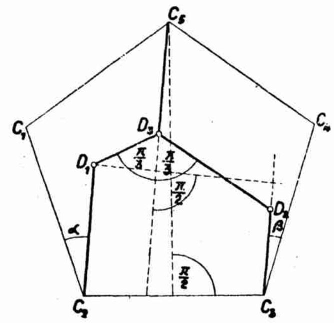
Ježto $G \subset P_n$ (podle vlastnosti a), je patrno, že v obou případech musí C_1, C_2 a rovněž C_3, C_4 býti dva *sousední* vrcholy P_n. V případě $n = 4$ se snadno dokáže, že $\overline{D_1D_2}$ leží na symetrále úsečky $\overline{C_1C_2}$, čímž je graf G dvojznačně určen (jeden minim. graf vznikne z druhého otočením okolo středu P_n o úhel $\frac{1}{2}\pi$); graf G je zakreslen na obr. 3, jeho délka jest $a\,(1 + \sqrt{3}) = a \,.\, 2{,}732\ldots.$ V případě $n = 5$ leží (viz obr. 4) strana $\overline{C_5D_3}$ na symetrále úsečky

$\overline{C_2C_3}$ (při vhodném očíslování bodů C_i), jak snadno nahlédneme[11]); tím je již graf G pětiznačně určen (neboť kterýkoliv základní bod můžeme vzíti za C_5), jak patrno z obr. 4, kde jsou vyznačeny všechny úhly, nutné k jeho konstrukci. Délka grafu G jest zde rovna $(\sqrt{3}\,.\cos\frac{1}{5}\pi + 2\sin\frac{2}{5}\pi + \sin\frac{1}{5}\pi)\,a = a\,.\,3{,}891\ldots$ (činitel u a jest ovšem algebraické číslo).

Případy $n = 3, 4, 5$ jsou tedy rozřešeny. Pro $n = 6$ vypadá však minimální graf již docela jinak: dá se dokázati, že pro $n = 6$ dostaneme kterýkoliv minimální graf tak, že vezmeme obvod daného pravidelného šestiúhelníka a vynecháme všechny vnitřní body jedné (kterékoliv) strany. Podobně se dostane minimální



Obr. 4.



Obr. 5.

graf pro každý pravidelný n-úhelník, kde $n \geqq 13$, jak ukážeme v následující větě 4. Zbývají tedy nerozřešeny případy $7 \leqq n \leqq 12$, které se vymykají metodě důkazu věty 4; zbývá tedy jen konečný počet případů, jež by se s jakousi námahou daly rozřešit přímým výpočtem.

Věta 4. *Budiž celé, $n \geqq 13$. Buďte $C_1, C_2, \ldots, C_n$ vrcholy pravidelného n-úhelníka o straně a.*[12]) *Budiž G mininmální graf vzhledem k bodům $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Potom je G rovno součtu $n - 1$ stran daného n-úhelníka* (tedy $l(G) = (n - 1)\,a$; existuje právě

---

[11]) Kdyby tomu tak nebylo, byl by buď úhel úseček $\overline{C_2C_3}$, $\overline{C_2D_1}$ nebo úhel úseček $\overline{C_3C_2}$, $\overline{C_3D_2}$ ostrý; budiž třeba první z nich ostrý. Potom by, jak je patrno z obr. 5, bylo $\overline{C_3D_2} < \overline{C_2D_1}$; ale z trojúhelníků $C_1C_2D_1$, $C_3D_2C_4$ by plynulo

$$\overline{C_2D_1} = \frac{a}{\sin\frac{2}{3}\pi}\sin(\tfrac{1}{3}\pi - \alpha), \qquad \overline{C_3D_2} = \frac{a}{\sin\frac{2}{3}\pi}\sin(\tfrac{1}{3}\pi - \beta),$$

z čehož vzhledem k $0 < \beta < \alpha < \frac{1}{3}\pi$ by plynulo $\overline{C_2D_1} < \overline{C_3D_2}$ — spor.

[12]) Body $C_1, C_2, \ldots, C_n$ buďtež očíslovány tak, že body C_i, C_{i+1} (kdež klademe $C_{n+1} = C_1$) jsou dva sousední vrcholy n-úhelníka, takže $\overline{C_iC_{i+1}} = a$.

n minimálních grafů navzájem shodných — podle toho, kterou stranu n-úhelníka vynechám).

Důkaz věty 4. Bez újmy obecnosti budiž poloměr kružnice opsané danému n-úhelníku roven 1. Potom je $a = 2 \sin \pi/n < 2\pi/n < \frac{2}{13} \times 3{,}2 < \frac{1}{2}$. Označme znakem P_n množství všech bodů uvnitř a na obvodě daného n-úhelníka; budiž S střed P_n. Graf G má ovšem vlastnosti a), b), c), d) vyslovené ve větě 3.[13]) Dokážeme napřed:

Tvrzení 5. *Budiž $\overline{M_1M_2}$ strana grafu G; potom je $\overline{M_1M_2} \leqq a$.* Důkaz: kdyby bylo $\overline{M_1M_2} > a$, sestrojme množství $G' = G - {}_0(\overline{M_1M_2})_0$; toto množství je součtem dvou stromů G_1, G_2 tak, že $M_1 \varepsilon G_1$, $M_2 \varepsilon G_2$, $G_1 . G_2 = 0$. Každý z obou stromů G_1, G_2 obsahuje aspoň jeden bod základní — neboť jinak by jeden z nich musil obsahovati všechny body základní, což nelze, neboť $l(G_1) < l(G)$, $l(G_2) < l(G)$. Existují tedy dva sousední vrcholy n-úhelníka C_i, C_{i+1} tak, že jeden z nich patří k G_1, druhý k G_2. Potom však graf $G'' = [G - {}_0(\overline{M_1M_2})_0] + \overline{C_iC_{i+1}}$ obsahuje všechny body základní a jest $l(G'') < l(G)$, což dává spor.

Tvrzení 6. *Graf G nemá rozvětvovacího bodu.* Dokážeme-li tvrzení 6, bude tím věta 4 již dokázána. Neboť předpokládejme, že tvrzení 6 je dokázáno; potom graf G nemá jiných vrcholů než body základní. Každá strana grafu G je tedy spojnicí dvou bodů základních; žádná strana grafu G nemůže však býti úhlopříčkou n-úhelníka P_n, ježto by pak byla delší než a (viz tvrzení 5). Tedy G je součtem h stran n-úhelníka P_n; nemůže býti $h = n$, ježto pak by se jedna strana mohla vynechati; nemůže také býti $h < n - 1$, neboť souvislý součet h stran by potom nemohl obsahovati všechny vrcholy $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Je tedy nutně $h = n - 1$, jako bylo dokázati.

Tvrzení 6 dokážeme nepřímo. Napřed dokážeme:

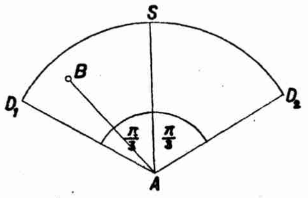
Tvrzení 7. *Předpokládejme, že graf G má aspoň jeden rozvětvovací bod; potom existuje aspoň jeden rozvětvovací bod A grafu G, pro který platí $\overline{AS} \leqq a$.*

Důkaz: Budiž A onen rozvětvovací bod grafu G, jenž má nejmenší vzdálenost od středu S (takových rozvětvovacích bodů může býti několik). Předpokládejme, že $\overline{AS} > a$; z toho odvodíme spor. Sestrojme (viz obr. 6) úsečku $\overline{AS}$ a úsečky $\overline{AD_1}$, $\overline{AD_2}$, jež svírají s $\overline{AS}$ úhly $\frac{1}{3}\pi$ tak, že $\overline{AD_1} = \overline{AD_2} = \overline{AS}$. Sestrojme kruhovou výseč AD_1SD_2 (střed kružnice je v A). Z bodu A vycházejí tři strany grafu G, svírající úhly $\frac{2}{3}\pi$; aspoň jedna z nich — označme ji $\overline{AB}$ — padne buď dovnitř nebo na hranici úhlu $\frac{2}{3}\pi$, sevřeného polopaprsky

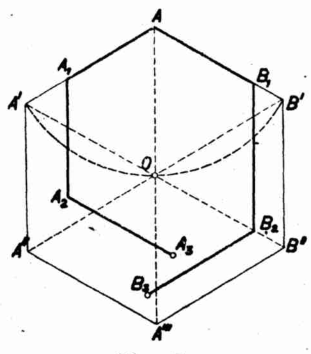
[13]) Podle vlastnosti a) leží G v rovině, určené body $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

$\overrightarrow{AD_1}$, $\overrightarrow{AD_2}$. Ježto $0 < \overline{AB} \leqq a < \overline{AS}$, padne bod B dovnitř nebo na obvod výseče AD_1SD_2, nesplyne však se žádným z bodů A, D_1, D_2. Je tedy zřejmě $\overline{BS} < \overline{AS}$ a tedy nemůže býti B bodem rozvětvovacím, musí tedy B býti bodem základním a tedy $\overline{BS} = 1$. Ale podle věty 3, vlastnosti a) jest $\overline{AS} \leqq 1$ a tedy $\overline{BS} < 1$ — spor.

D ů k a z t v r z e n í 6 provedeme nyní nepřímo. Budeme předpokládati, že graf G má aspoň jeden rozvětvovací bod; pak má G také rozvětvovací bod A takový, že $\overline{AS} \leqq a$. Z toho odvodíme spor. Z bodu A vycházejí tři strany grafu G; můžeme si zvoliti mezi nimi dvě — označme je $\overline{AA_1}$, $\overline{AB_1}$ — tak, že bod S leží buď na ně-



Obr. 6.



Obr. 7.

kterém z polopaprsků $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{AB_1}$ nebo uvnitř úhlu $\frac{2}{3}\pi$ jimi sevřeného. Sestrojme pravidelný šestiúhelník o straně a a o vrcholech A, A', A'', A''', B'', B', jehož strany $\overline{AA'}$, $\overline{AB'}$ leží resp. v polopaprscích $\overline{AA_1}$, $\overline{AB_1}$ (viz obr. 7). Budiž H množství všech bodů uvnitř a na obvodě tohoto šestiúhelníka, budiž O jeho střed. Ježto $\overline{AS} \leqq a = \overline{AA'}$, leží S ve výseči $AA'OB'$ a tedy $S \varepsilon H$. Dva libovolné body z H mají zřejmě vzdálenost rovnou nejvýše $2a < 1$ a tedy všechny body z H mají od S vzdálenost menší než 1; tedy žádný základní bod C_i neleží v H. Ježto $\overline{AA_1} \leqq a = \overline{AA'}$, leží bod A_1 v H a tedy není bodem základním, je tedy A_1 rozvětvovacím bodem grafu G. Obdobně bod $B_1 \varepsilon H$ je rozvětvovacím bodem. Vycházejí tedy z bodů A_1, B_1 dvě strany grafu G: $\overline{A_1A_2} \leqq a$, $\overline{B_1B_2} \leqq a$, rovnoběžné s úsečkou $\overline{A'A''}$ a mající s ní týž smysl. Bod A_2 padne do čtyřúhelníku $AA'A''O$, bod B_2 do čtyřúh. $AB'B''O$; jsou tedy body A_2, B_2 opět body rozvětvovací. Z bodu A_2 vychází tedy strana $\overline{A_2A_3} \leqq a$ grafu G, rovnoběžná i co do smyslu s $\overline{A''A'''}$, jejíž koncový bod A_3

leží v H a je tedy bodem rozvětvovacím. Rovněž z bodu B_2 vychází strana $\overline{B_2B_3} \leqq a$ grafu G, jejíž koncový bod B_3 leží v H a je tedy bodem rozvětvovacím. Graf

$$\Gamma_1 = \overline{A_3A_2} + \overline{A_2A_1} + \overline{A_1A} + \overline{AB_1} + \overline{B_1B_2} + \overline{B_2B_3}$$

jest ovšem stromem (ježto $\Gamma_1 \subset G$) a platí $\Gamma_1 \subset H$.

Zaveďme nyní tento pojem: graf Γ nazveme **typickým grafem**, má-li tyto vlastnosti:

1. $\Gamma = \overline{M_1M_2} + \overline{M_2M_3} + \overline{M_3M_4} + \overline{M_4M_5} + \overline{M_5M_6} + \overline{M_6M_7}$.
2. Existuje pravidelný šestiúhelník

$$\overline{N_1N_2} + \overline{N_2N_3} + \overline{N_3N_4} + \overline{N_4N_5} + \overline{N_5N_6} + \overline{N_6N_1}$$

takový, že úsečka $\overline{M_iM_{i+1}}$ je rovnoběžná a téhož smyslu s úsečkou $\overline{N_iN_{i+1}}$ ($i = 1, 2, \ldots, 6$; klademe $N_7 = N_1$).

3. Úsečky $\overline{M_iM_{i+1}}$ jsou stranami grafu G a leží v H (pro $i = 1, 2, \ldots, 6$).[14])

Na př. Γ_1 je typický graf, takže existuje (za našich předpokladů) aspoň jeden typický graf. Zřejmě existuje jen konečný počet typických grafů, takže dojdeme k hledanému sporu, dokážeme-li:

Tvrzení 8. *Existuje-li aspoň jeden typický graf, existuje posloupnost typických grafů navzájem různých.*

Důkaz: je-li Γ typický graf, budiž $\Lambda(\Gamma)$ nejmenší konvexní bodové množství, obsahující množství Γ. Dokáži napřed:

Tvrzení 9. *Je-li Γ typický graf, potom existuje typický graf Γ' takový, že bodové množství $\Lambda(\Gamma')$ je pravou částí bodového množství $\Lambda(\Gamma)$.*

Důkaz: Budiž $\Gamma = \overline{M_1M_2} + \overline{M_2M_3} + \ldots + \overline{M_6M_7}$ typický graf. Jsou možné tři případy:

A) Polopaprsek $\overrightarrow{M_2M_1}$ má společný bod s grafem $\overline{M_4M_5} + \overline{M_5M_6} + \overline{M_6M_7}$.

B) Nenastává případ A), ale polopaprsek $\overrightarrow{M_6M_7}$ má společný bod s grafem $\overline{M_4M_3} + \overline{M_3M_2} + \overline{M_2M_1}$.

C) Nenastává ani případ A) ani případ B). V případě A) (viz obr. 8) a C) (viz obr. 9) vychází z bodu M_1 strana $\overline{M_1M_0}$ stromu G, rovnoběžná a téhož smyslu se stranou $\overline{M_7M_6}$. Zřejmě jest $\overline{M_1M_0} \subset \Lambda(\Gamma) \subset H$; tedy jest M_0 rozvětvovacím bodem grafu G a graf

$$\Gamma' = \overline{M_0M_1} + \overline{M_1M_2} + \overline{M_2M_3} + \overline{M_3M_4} + \overline{M_4M_5} + \overline{M_5M_6}$$

jest typickým grafem. Ježto $\overline{M_1M_0} \subset \Lambda(\Gamma)$, jest $\Lambda(\Gamma') \subset \Lambda(\Gamma)$; ježto

[14]) Tedy Γ je strom (tedy $M_7 \neq M_1$) a body M_i jsou rozvětvovacími body grafu G.