

Werk

Label: Periodical issue

Jahr: 1934

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311028X_0063|log127

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

ROČNÍK 63.

SEŠIT 8.

ČASOPIS

PRO PĚSTOVÁNÍ

MATEMATIKY A FYSIKY

Část matematickou řídí BOHUMIL BYDŽOVSKÝ s redakční radou:
EDUARDEM ČEHEM, KARLEM PETREM a KARLEM RYCHLÍKEM.

Část fyzikální řídí AUGUST ŽÁČEK s redakční radou:
VÁCLAVEM DOLEJŠKEM, BOHUSLAVEM HOŠTINSKÝM
a FRANTIŠKEM ZÁVIŠKOU.

Část didakticko-metodickou řídí JAROSLAV FRIEDRICH.

Část středoškolskou řídí FRANTIŠEK VYČICHLO
A ALOIS WANGLER.

Část bibliografickou a Věstník řídí MILOSLAV VALOUCH.

VYDÁVÁ VLASTNÍM NÁKLADEM

JEDNOTA ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

ZA PODPORY MINISTERSTVA ŠKOLSTVÍ A NÁRODNÍ OSVĚTY.



V P R A Z E 1934.

Ročně 8 sešitů.

Předplatné (pro nečleny) 120 Kč.

Journal Tchecoslovaque de Mathématique et Physique.

Éditeur: Jednota čsl. matematiků a fysiků, Praha II-681, Tchecoslovaquie.

Obsah seš. 8. — Sommaire du fasc. 8.

Část matematická — Travaux mathématiques

- Jarník Vojtěch - Kössler Miloš: O minimálních grafech, obsahujících n daných bodů. (Sur les graphes minima, contenant n points donnés.) 223
- Klíma Josef: O křivkách a plochách, jež vytvářejí spojnice sdružených bodů dvou kolineárních, zvláště pak shodných křivých řad. (Sur les courbes et les surfaces engendrées par les droites joignant les couples de points correspondants sur deux courbes en homographie.) 236
- Seifert Ladislav: Několik poznámek o pectenoidu. (Quelques remarques sur le pectenoid.) 247
- Vondráček Augustin: Zobecnění věty Feuerbachovy. (Généralisation du théorème de Feuerbach.) 254

Část fyzikální — Travaux de physique

- Dolejšek Václav: O modifikaci Moseleyho zákona pro prvky stabilní konfigurace. (Sur la modification de la loi de Moseley.) 260
- Dolejšek Václav: O rozdílu mezi vývěvami kondenzačními a difusními. (Sur la difference entre les pompes à vide à condensation et à diffusion.) 267
- Mikulíček Jan: Longitudinální termomagnetický efekt potenciální u oceli. (L'effet thermomagnétique longitudinal en acier.) 273
- Zahradníček Josef: Měření doby kyvu pomocí dvou stopek. (La mesure de la durée d'oscillation à l'aide de deux chronographes compteurs.) 277
- Klier Emanuel: Poznámky k relativitě. (Quelques remarques sur la théorie de la relativité.) 284
- Teige Karel: Výpočet živé síly, se kterou elektron dopadá na anodu, a časového kolísání počtu elektronů dopadajících na anodu při ultrakrátkých kmitech. (Le calcul de l'énergie avec laquelle l'électron choque l'anode, et l'oscillation temporelle de nombre des électrons tombants sur l'anode dans le cas des oscillations ultracourtes) 300

Literatura, Zprávy — Analyses, Communications

Část bibliografická — Bibliographie

Věstník — Bulletin

P. T. pp. členy a přispěvatele upozorňujeme, že od příštího ročníku platí NOVÝ ŘÁD k vydávání „Časopisu pro pěstování matematiky a fyziky“, otištěný v tomto sešitu ve Věstníku na str. V 72.

RUKOPISY pro redakci „Časopisu“ (všech jeho částí) i pro „Rozhledy“ jest zasílati do kanceláře Jednoty v Praze II, Vodičkova 20.

Písmo pro popis rysů.

Předloha normalisovaného písma (latinské a řecké abecedy a číslic) se vzorem obrazu na rysu s popisem provedeným písmem 3,5 mm velikým a slabším než tak zv. silné čáry rysu. — Cena 1 výt. 70 hal. a porto, od 10 výt. franko, od 50 výt. po 65 hal. franko. — Objednejte bianco-složenkou na účet poštovní spořitelny v Praze, číslo 13103.

Tento sešit vyšel 18. června 1984.

ČÁST MATEMATICKÁ

O minimálních grafech, obsahujících n daných bodů.

Vojtěch Jarník a Miloš Kössler.

(Došlo 10. února 1934.)

V tomto článku zabýváme se touto úlohou: je dáno n bodů $C_1, C_2, \dots, C_n$; hledáme souvislé množství, složené z konečného počtu úseček a obsahující body $C_1, C_2, \dots, C_n$ tak, aby „celková délka“ tohoto množství byla co nejmenší (pro $n = 2$ jest ovšem touto „nejkratší spojnici“ úsečka, spojující body C_1, C_2). V § 2 dokazujeme existenci takového „minimálního grafu“, v § 3 zabýváme se případem, kdy body $C_1, C_2, \dots, C_n$ tvoří vrcholy pravidelného n -úhelníka.

Charakter tohoto článku je zcela elementární; mimo to některé body důkazu jsou zcela běžné úvahy a proto je provádíme stručně.

§ 1.

Budiž R_k ($k \geq 1$) k -rozměrný euklidovský prostor. Neprázdné bodové množství $G \subset R_k$ nazveme grafem v R_k , má-li tyto vlastnosti:

1. G je souvislé; 2. buď se G skládá z jediného bodu nebo je G součtem konečného počtu uzavřených úseček.¹⁾ Je-li $P \in G$ a existuje-li právě n (nikoliv však $n + 1$) úseček, ležících v grafu G , majících P za bod koncový, z nichž žádné dvě nemají kromě bodu P společných bodů, budeme říkati, že P je bodem n -tého řádu grafu G .²⁾

¹⁾ Označení: $A \subset B$ značí: A je částí množství B ; $A \in B$ značí: A je prvkem množství B ; $A \cdot B$ je průnik množství A, B . Znakem $\overline{MN}$ značíme uzavřenou úsečku (t. j. včetně koncových bodů) o koncových bodech M, N ; $\overrightarrow{MN}$ značí polopaprsek o koncovém bodě M , jenž obsahuje bod N (včetně bodu M). Znaky ${}_0\overline{MN}$, $(\overline{MN})_0$, ${}_0(\overline{MN})_0$ značí množství všech bodů úsečky $\overline{MN}$ s vyloučením bodu M , resp. bodu N , resp. obou bodů M, N a pod. Úhel α dvou úseček $\overline{PM}, \overline{PN}$, majících jediný společný bod P , běřeme vždy v intervalu $0 < \alpha \leq \pi$. Znak $\overline{MN}$ bude někdy značiti též orientovanou úsečku (začáteční bod M , koncový N); někdy bude $\overline{MN}$ značiti též délku této úsečky; nedorozumění není třeba se obávati.

²⁾ V grafu G existuje bod nultého řádu tehdy a jen tehdy, je-li G jednobodový graf.

Body prvního řádu nazývají se koncovými body, body vyššího než druhého řádu nazývají se rozvětvovacími body grafu (obojích je v každém grafu nejvýše konečný počet). Je-li P bodem n -tého řádu grafu G , položme $V(P) = n - 2$ a kladme dále $V(G) = \sum V(P)$, kdež vpravo se sčítá přes všechny body grafu, jejichž řád není roven 2 (můžeme ovšem do součtu pojmouti i sčítance, příslušné k některým bodům druhého řádu). $V(P)$ budeme nazývati vahou bodu P .

Graf, jenž je současně uzavřenou, jednoduchou spojitou křivkou, nazýváme cyklem. Graf, jehož žádná část není cyklem, nazveme stromem. Platí pak známá

věta 1. Je-li G stromem, jest $V(G) = -2$.³⁾

Důkaz. Ony body grafu G , jež nejsou druhého řádu a dále ony body druhého řádu, v nichž se stýkají dvě úsečky grafu, neležící v jedné přímce, nazveme vrcholy grafu G . Úsečku $\overline{MN} \subset G$ nazveme stranou grafu, není-li žádný bod úsečky $o(\overline{MN})_0$ vrcholem a jsou-li oba body M, N vrcholy grafu.⁴⁾ Každý vícebodový graf je potom součtem svých stran.⁵⁾ Ukážeme napřed: budiž G vícebodový strom; potom má G aspoň jeden koncový bod. Neboť: budiž $\overline{M_1 M_2}$ strana grafu G ; není-li M_2 koncovým bodem, existuje strana $\overline{M_2 M_3}$ (různá od $\overline{M_1 M_2}$); není-li M_3 koncovým bodem, existuje další strana $\overline{M_3 M_4}$ atd.; body $M_1, M_2, M_3, M_4, \dots$ jsou navzájem různé (jinak bychom dostali cyklus) a proto se tento postup nutně zarazí u nějakého bodu M_n , jenž je nutně koncovým bodem. Důkaz věty 1 je již snadný: Budiž G vícebodový strom; tedy má G stranu $\overline{M_1 M_2}$ takovou, že M_1 je koncovým bodem. Strom $G_1 = G - (\overline{M_1 M_2})_0$ má méně stran než G a zřejmě jest $V(G_1) = V(G)$. Opakováním tohoto postupu dospějeme k jednobodovému grafu G_l takovému, že $V(G_l) = V(G)$. Ale pro jednobodový graf je $V(G_l) = -2$, tedy $V(G) = -2$.

§ 2.

Budiž dáno n ($n \geq 2$) bodů $C_1, C_2, \dots, C_n$ prostoru R_k ($k \geq 1$); body ty budeme nazývati základními body. Budiž G nějaký graf v R_k , obsahující body $C_1, C_2, \dots, C_n$. Slovy „vrcholy grafu G “ budeme označovati předně všechny body základní, za druhé všechny body grafu G , jejichž řád není roven 2, za třetí ony body druhého řádu grafu G , v nichž se stýkají dvě úsečky grafu, neležící

³⁾ Z toho je patrné: vícebodový strom má aspoň dva koncové body.

⁴⁾ Toto pojmenování je jen provisorní a podržíme je pouze v důkazu věty 1; v příštím paragrafu budeme pojmenování poněkud modifikovati.

⁵⁾ Mají-li dvě různé strany grafu společný bod, je tento bod nutně koncovým bodem obou těchto stran; stran je ovšem jen konečný počet.

v jedné přímce.⁶⁾ Úsečku $\overline{MN} \subset G$ budeme nazývat „stranou grafu G “, jestliže žádný bod úsečky ${}_0(\overline{MN})_0$ není vrcholem a jsou-li oba body M, N vrcholy grafu G . Graf G jest pak součtem svých stran. Vrcholů i stran je zřejmě jen konečný počet; mají-li dvě různé strany grafu G společný bod, je tento bod nutně koncovým bodem obou těchto stran. Součet délek všech stran grafu G nazveme délkou grafu G , značka $l(G)$.

Budiž $\mathfrak{M}$ množství všech grafů v R_k , jež obsahují body $C_1, C_2, \dots, C_n$; budiž v dalším d dolní hranice délek všech grafů $G \in \mathfrak{M}$; existuje-li $G \in \mathfrak{M}$ tak, že $l(G) = d$, budeme graf G nazývat „minimálním grafem v R_k vzhledem k bodům $C_1, C_2, \dots, C_n$ “. Dokážeme pak především tuto větu:

Věta 2. *Budtež $C_1, C_2, \dots, C_n$ body prostoru R_k ($k \geq 1, n \geq 2$); potom existuje aspoň jeden minimální graf v R_k vzhledem k bodům $C_1, C_2, \dots, C_n$.*

Zavedeme napřed některá označení. Budiž $G \in \mathfrak{M}$; volným koncem grafu G nazveme každý koncový bod grafu G , jenž není základním bodem; volným rohem grafu G nazveme každý vrchol druhého řádu, který není základním bodem.⁷⁾ Budiž $\mathfrak{N}$ množství oněch grafů $G \in \mathfrak{M}$, jež jsou stromy a nemají volných konců; budiž $\mathfrak{P}$ množství oněch grafů $G \in \mathfrak{M}$, jež nemají volných rohů. Dokážeme napřed tato tvrzení:

Tvrzení 1. *Budiž $G \in \mathfrak{M} - \mathfrak{N}$; potom existuje $G_1 \in \mathfrak{N}$ tak, že $l(G_1) < l(G)$.*

Tvrzení 2. *Budiž $k \geq 3, G \in \mathfrak{N} - \mathfrak{P}$; potom existuje $G_1 \in \mathfrak{P}$ tak, že $l(G_1) < l(G)$.*

Tvrzení 3. *Budiž d_1 dolní hranice délek všech grafů $G \in \mathfrak{P}$; potom existuje aspoň jeden graf $G_0 \in \mathfrak{M}$ takový, že $l(G_0) \leq d_1$.*

Tvrzení 4. *Je-li G minimální graf v R_k vzhledem k bodům $C_1, C_2, \dots, C_n$ a je-li K nejmenší konvexní bodové množství v R_k , obsahující body $C_1, C_2, \dots, C_n$, platí $G \subset K$.*

Z tvrzení 1–4 plyne věta 2. Neboť:

A) Je-li $k \geq 3$, je podle tvrzení 1 a 2 platna rovnice $d_1 = d$ a věta 2. plyne z tvrzení 3.

B) Je-li $k \leq 2$, vnořme R_k do prostoru R_3 ; podle případu A) existuje minimální graf G v R_3 vzhledem k bodům $C_1, C_2, \dots, C_n$. Podle tvrzení 4 jest však $G \subset R_k$.

⁶⁾ Zde se uchylujeme od pojmenování z § 1; měli bychom vlastně říkati „vrcholy grafu G vzhledem k bodům $C_1, C_2, \dots, C_n$ “; ježto však není třeba se obávat nedorozumění, budeme dodatek „vzhledem k bodům $C_1, C_2, \dots, C_n$ “ vynechávat; totéž platí v následujícím pro pojem „strana grafu G “.

⁷⁾ Ve volném rohu stýkají se tedy dvě strany grafu, jež neleží v jedné přímce.

Stačí tedy dokázat tvrzení 1—4.

Důkaz tvrzení 1. Budiž $G \in \mathfrak{M} - \mathfrak{N}$. Má-li G volný konec M_1 , jenž je koncovým bodem strany $\overline{M_1 M_2}$, potom graf $G' = G - (\overline{M_1 M_2})_0$ má méně stran než G a jest $G' \in \mathfrak{M}$, $l(G') < l(G)$. Tvoří-li strany $\overline{M_1 M_2}$, $\overline{M_2 M_3}, \dots$ grafu G cyklus, má graf $G' = G - {}_0(\overline{M_1 M_2})_0$ méně stran než G a jest $G' \in \mathfrak{M}$, $l(G') < l(G)$.

Opětným použitím těchto konstrukcí na graf G' atd. musíme přijít konečně ke grafu G_1 , na něž tyto konstrukce se již nedají aplikovati; tedy jest nutně $G_1 \in \mathfrak{N}$ a ovšem $l(G_1) < l(G)$.

Důkaz tvrzení 2. Budiž $k \geq 3$, $G \in \mathfrak{N} - \mathfrak{P}$; t. j. graf $G \in \mathfrak{M}$ je strom, nemá volných konců, má však aspoň jeden volný roh M_1 , v němž se tedy stýkají dvě strany $\overline{M_1 M_2}$, $\overline{M_1 M_3}$, neležící v jedné přímce; M_1 není bodem základním. Dokážeme: existuje graf $G' \in \mathfrak{N}$, jenž má méně volných rohů než G a pro něž $l(G') < l(G)$. (Tím bude tvrzení 2 dokázáno, neboť opakováním tohoto postupu dojdeme nutně ke grafu $G_1 \in \mathfrak{N}$ bez volných rohů, t. j. $G_1 \in \mathfrak{P}$ a ovšem $l(G_1) < l(G)$.) Při důkazu rozeznávejme dva případy. 1. případ: body M_2 , M_3 jsou body základními. Množství $G - [{}_0(\overline{M_2 M_1}) + (\overline{M_1 M_3})_0]$ je součtem dvou stromů G_2 , G_3 , pro něž platí $G_2 \cdot G_3 = 0$, $M_2 \in G_2$, $M_3 \in G_3$. Úsečka $\overline{M_2 M_3}$ obsahuje aspoň jeden bod grafu G_2 (na př. M_2) a aspoň jeden bod grafu G_3 (na př. M_3). Zřejmě existují tedy dva body P_2 , P_3 na úsečce $\overline{M_2 M_3}$ takové, že $P_2 \in G_2$, $P_3 \in G_3$ a že žádný bod úsečky ${}_0(\overline{P_2 P_3})_0$ nepatří ani ke G_2 ani ke G_3 . Graf $G' = \{G - [{}_0(\overline{M_2 M_1}) + (\overline{M_1 M_3})_0]\} + \overline{P_2 P_3}$ patří zřejmě k $\mathfrak{N}$ a má aspoň o jeden volný roh méně než G (neboť M_2 , M_3 jsou základní body, nejsou tedy ani volnými konci ani volnými rohy; v bodech P_2 , P_3 pak graf G neměl volných konců a tedy graf G' nemá v bodech P_2 , P_3 ani volných konců ani volných rohů). Zřejmě jest $l(G') < l(G)$, jak bylo dokázati. 2. případ: aspoň jeden z bodů M_2 , M_3 — třeba bod M_2 — není bodem základním. Proložme bodem M_2 nadrovinu S $[(k-1)$ -rozměrnou], jež neobsahuje bod M_3 . Je-li M'_2 libovolný bod nadroviny S , označme znakem $G(M'_2)$ graf, který vznikne z grafu G tím, že všechny strany $\overline{M_i M_2}$ grafu G , vycházející z bodu M_2 , nahradíme úsečkami $\overline{M_i M'_2}$. Položme $\overline{M_2 M_1} + \overline{M_1 M_3} - \overline{M_2 M_3} = a > 0$. Je jasno, že existuje číslo $\delta > 0$ tak, že každý graf $G(M'_2)$, pro něž platí $\overline{M_2 M'_2} < \delta$, má tyto vlastnosti:

1. $l(G(M'_2)) < l(G) + \frac{1}{2}a$, $\overline{M'_2 M_1} + \overline{M_1 M_3} - \overline{M'_2 M_3} > \frac{1}{2}a$.
2. Graf $G(M'_2)$ má tytéž vrcholy (a téhož řádu) a tytéž strany jako G , až na to, že místo vrcholu M_2 a stran $\overline{M_2 M_i}$ nastupuje všude vrchol M'_2 a strany $\overline{M'_2 M_i}$.

Sestrojíme všechny přímky, jež procházejí bodem M_3 a mimo to ještě aspoň jedním bodem grafu G . Tyto přímky protínají nadrovinu S v bodovém množství Σ , jež se skládá nejvýše z konečného počtu bodů, úseček a polopaprsků. Existuje tedy (ježto je $k \geq 3$, je nadrovina S alespoň dvojrozměrná) aspoň jeden bod $M'_2 \in S - \Sigma$ takový, že $\overline{M_2 M'_2} < \delta$; pro graf $G(M'_2)$ platí pak vlastnosti 1., 2. Nadto má graf $G(M'_2)$ ještě tuto vlastnost: žádný bod grafu $G(M'_2)$ neleží na úsečce ${}_0(\overline{M'_2 M_3})_0$.⁸⁾ Sestrojíme nyní graf $G' = \{G(M'_2) - [\overline{M'_2 M_1} + \overline{M_1 M_3}]\} + \overline{M'_2 M_3}$; je zřejmě $G' \in \mathfrak{N}$, dále má graf G' aspoň o jeden volný roh méně než graf G a konečně z vlastnosti 1. plyne $l(G') < l(G)$, jak bylo dokázati.

Důkaz tvrzení 3 je běžná limitní úvaha. Budiž $G_1, G_2, \dots$ posloupnost grafů z $\mathfrak{P}$ a budiž $\lim_{r \rightarrow \infty} l(G_r) = d_1$. Ježto $C_1 \in G_r$, leží všechny grafy G_r v uzavřené kouli o středu C_1 , jejíž poloměr je roven horní hranici čísel $l(G_r)$ ($r = 1, 2, \dots$). Jediné vrcholy grafu G_r jsou body základní a rozvětvovací. Podle věty 1 je $V(G_r) = -2$; ježto body koncové (o váze -1) leží vesměs v bodech základních, je jich nejvýše n ; bodů rozvětvovacích (jejichž váha je tedy nejmeně rovna 1) je tedy nejvýše $n - 2$; tedy graf G_r má nejvýše $2n - 2$ vrcholů. Existuje tedy v posloupnosti $G_1, G_2, \dots$ částečná posloupnost $G'_1, G'_2, \dots$ taková, že všechny grafy G'_r mají stejný počet vrcholů. Vrcholy grafu G'_r označme v určitém pořádku $X_1^r, X_2^r, \dots, X_n^r$, při čemž budiž $X_i^r = C_i$ pro $1 \leq i \leq n$. Přiřaďme grafu G'_r matici

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12}^r & a_{13}^r & \dots & a_{1n}^r \\ a_{21}^r & 0 & a_{23}^r & \dots & a_{2n}^r \\ a_{31}^r & a_{32}^r & 0 & \dots & a_{3n}^r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}^r & a_{n2}^r & a_{n3}^r & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

kde a_{ij}^r se rovná 1 nebo 0, podle toho, je-li $\overline{X_i^r X_j^r}$ stranou grafu G'_r nebo ne. Ježto takových matic je jen konečný počet, existuje částečná posloupnost $G'_{s_1}, G'_{s_2}, \dots$ taková, že všem jejím grafům jest přiřazena táž matice

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

⁸⁾ Neboť ze vztahu $M'_2 \in S - \Sigma$ plyne: předně nemůže žádný bod strany $\overline{M_i M_1}$ ($i, l \neq 2$) — kromě snad bodu M_3 — ležeti na úsečce $\overline{M'_2 M_3}$; za druhé nemůže žádný bod strany $\overline{M_i M'_2}$ ($i \neq 3$) — kromě bodu M'_2 — ležeti na úsečce $\overline{M'_2 M_3}$, neboť jinak by body M_3, M_i, M'_2 ležely v jedné přímce. Konečně úsečka $\overline{M_3 M'_2}$ není vůbec stranou grafu $G(M'_2)$, ježto jinak by strany $\overline{M'_2 M_3}, \overline{M_3 M_1}, \overline{M_1 M'_2}$ tvořily cyklus v $G(M'_2)$, což je vyloučeno vzhledem k vlastnosti 2. a vzhledem k tomu, že $G \in \mathfrak{N}$.

V této posloupnosti lze konečně — ježto posloupnosti $X_i^1, X_i^2, X_i^3, \dots$ ($i = 1, 2, \dots, z$) jsou ohraničené — nalézt částečnou posloupnost $G'_1, G'_2, \dots$ tak, že existují limity $\lim_{p \rightarrow \infty} X_i^{t_p} = X_i$ ($i = 1, 2, \dots, z$).

Označme znakem G_0 součet oněch úseček $\overline{X_i X_l}$ ($1 \leq i < l \leq z$), pro něž $a_{il} = 1$.⁹⁾ Zřejmě jest $G_0 \in \mathfrak{M}$ a platí

$$l(G'_p) = \sum_{1 \leq i < l \leq z} a_{il} \overline{X_i^{t_p} X_l^{t_p}},$$

$$l(G_0) \leq \sum_{1 \leq i < l \leq z} a_{il} \overline{X_i X_l} = \lim_{p \rightarrow \infty} l(G'_p) = d_1,$$

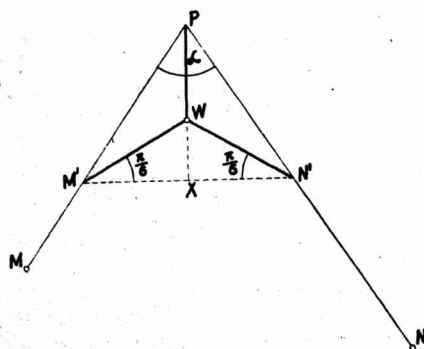
jak bylo dokázati.

Důkaz tvrzení 4. Budiž $G \in \mathfrak{M}$ graf takový, že neplatí $G \subset K$. Potom existuje nadrovina S [$(k-1)$ -rozměrná] taková, že všechny body základní leží po jedné straně nadroviny S a po druhé straně této nadroviny leží jistá neprázdná část G' grafu G . Sestrojíme graf G_1 tím, že v grafu G nahradíme část G' pravoúhlou projekcí množství G' na nadrovinu S ; zřejmě je $G_1 \in \mathfrak{M}$ a $l(G_1) < l(G)$, jak bylo dokázati.

Nyní snadno dokážeme následující větu 3, která podrobněji popisuje strukturu minimálních grafů.

Věta 3. Budiž G minimální graf v R_k ($k \geq 1$) vzhledem k bodům $C_1, C_2, \dots, C_n$ ($n \geq 2$). Potom má G tyto vlastnosti:

- G je částí nejmenšího konvexního množství, obsahujícího body $C_1, C_2, \dots, C_n$.
- G je strom, nemající ani volných konců ani volných rohů.
- Mají-li dvě strany grafu G společný bod, jest úhel těchto stran nejmeně roven $\frac{2}{3}\pi$.



Obr. 1.

d) Každý rozvětovací bod grafu G je třetího řádu. Tři strany grafu, vycházející z tohoto bodu, leží v jedné rovině (dvojrůznměrné) a každé dvě z nich svírají úhel $\frac{2}{3}\pi$.

Důkaz věty 3: Vlastnost a) plyne z tvrzení 4. K důkazu vlastnosti b) můžeme předpokládati (následkem vlastnosti a), že $k \geq 3$. (kdyby bylo $k < 3$, vnořili bychom R_k do prostoru R_3); potom však vlastnost b) plyne z tvrzení 1 a 2. Vlastnost c) dokážeme takto: budiž $G \in \mathfrak{M}$ a buďte $\overline{PM}, \overline{PN}$ dvě strany

⁹⁾ Některé z těchto „úseček“ ovšem mohou degenerovati v body.

grafu G , jež svírají úhel $\alpha < \frac{2}{3}\pi$. Sestrojíme bod M' uvnitř strany $\overline{PM}$ a bod N' uvnitř strany $\overline{PN}$ tak, že $\overline{PM'} = \overline{PN'} = h$. Potom jest (viz obr. 1)

$$\overline{M'W} = \overline{N'W} = \overline{M'X} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} h \sin \frac{1}{2}\alpha,$$

$$\overline{PW} = \overline{PX} - \overline{WX} = h \cos \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{\sqrt{3}} h \sin \frac{1}{2}\alpha;$$

tedy

$$\overline{M'W} + \overline{N'W} + \overline{PW} = h (\sqrt{3} \sin \frac{1}{2}\alpha + \cos \frac{1}{2}\alpha) < < 2h = \overline{PM'} + \overline{PN'}.^{10)}$$

Pro graf

$$G_1 = [G - (\overline{M'P} + \overline{N'P})] + \overline{M'W} + \overline{N'W} + \overline{PW}$$

platí tedy zřejmě $G_1 \in \mathfrak{M}$, $l(G_1) < l(G)$, takže graf G není minimální, jak bylo dokázáno. Vlastnost d) plyne okamžitě z vlastnosti c), uvážíme-li, že tři úsečky, vycházející z jednoho bodu a neležící v jedné rovině, svírají úhly, jejichž součet je menší než 2π .

Poznámka. Z věty 3 plyne pro minimální graf G toto: je-li P bod rozvětvovací, je $V(P) = 1$, kdežto pro bod koncový je $V(P) = -1$. Z rovnice $V(G) = -2$ plyne tedy, že počet bodů rozvětvovacích je o dvě menší než počet bodů koncových.

§ 3.

Vezměme jako první příklad graf G , který je minimální vzhledem k bodům C_1, C_2, C_3 . Zde jsou tedy buď dva body koncové — třeba C_1, C_2 — a žádný bod rozvětvovací nebo tři body koncové C_1, C_2, C_3 a jeden bod rozvětvovací D . V prvním případě je $G = \overline{C_1C_3} + \overline{C_2C_3}$, v druhém případě je $G = \overline{DC_1} + \overline{DC_2} + \overline{DC_3}$. Jsou-li všechny úhly trojúhelníka $C_1C_2C_3$ menší než $\frac{2}{3}\pi$, musí podle vlastnosti c) nastat druhý případ; je-li jeden z úhlů trojúhelníka $C_1C_2C_3$ aspoň roven $\frac{2}{3}\pi$, nastane případ první (neboť v tomto případě zřejmě neexistuje žádný bod D , z něhož by všechny tři strany trojúhelníka bylo viděti pod úhlem $\frac{2}{3}\pi$); při našem očíslování ($G = \overline{C_1C_3} + \overline{C_2C_3}$) je ovšem C_3 onen vrchol trojúhelníka, při němž leží úhel $\geq \frac{2}{3}\pi$. Je viděti, že pro $n = 3$ existuje jediný minimální graf vzhledem k bodům C_1, C_2, C_3 .

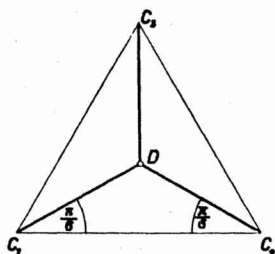
¹⁰⁾ Jest totiž

$$\frac{d}{dx} (\sqrt{3} \sin x + \cos x) = \sqrt{3} \cos x - \sin x = \cos x (\sqrt{3} - \operatorname{tg} x) > 0$$

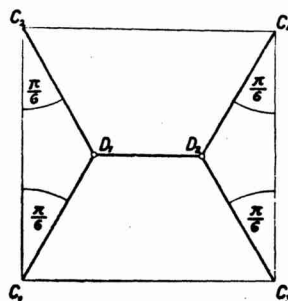
pro $0 < x < \frac{1}{2}\pi$; tedy jest $\sqrt{3} \sin x + \cos x$ rostoucí funkcí pro $0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$ a tedy platí pro $0 < x < \frac{1}{2}\pi$:

$$\sqrt{3} \sin x + \cos x < \sqrt{3} \sin \frac{1}{2}\pi + \cos \frac{1}{2}\pi = 2.$$

Pro $n > 3$ jsou poměry příliš složité; omezíme se proto na obecnou diskusi případu, kdy základní body tvoří vrcholy pravidelného n -úhelníka. Budťtež tedy v dalším body $C_1, C_2, \dots, C_n$ ($n \geq 3$) vrcholy pravidelného n -úhelníka P_n o straně a . Znakem P_n budeme značiti nikoliv obvod, nýbrž množství všech bodů uvnitř a na obvodě n -úhelníka. Příklad $n = 3$ jsme již vyřešili; příslušný minimální graf (zobrazený na obr. 2) má délku $a \cdot \sqrt{3} = a \cdot 1,732 \dots$. Uvažujme nyní případy $n = 4$ a $n = 5$. Budiž G minimální graf vzhledem k bodům $C_1, C_2, \dots, C_n$. Ježto všechny vnitřní úhly P_n



Obr. 2.



Obr. 3.

jsou menší než $\frac{2}{3}\pi$, jsou všechny body základní body koncovými [(podle vlastností a) c)]. Máme tedy pro $n = 4$ dva body rozvětvovací D_1, D_2 , pro $n = 5$ tři body rozvětvovací D_1, D_2, D_3 . Ježto zřejmě každá strana grafu G , jež vychází z některého základního bodu, má za druhý koncový bod bod rozvětvovací a ježto body rozvětvovací jsou vesměs třetího řádu, je patrné, že (při vhodném očíslování bodů C_i, D_i) pro $n = 4$ jest

$$G = \overline{C_1 D_1} + \overline{C_2 D_1} + \overline{D_1 D_2} + \overline{D_2 C_3} + \overline{D_2 C_4},$$

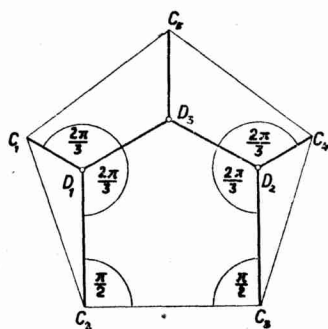
kdežto pro $n = 5$ jest

$$G = \overline{C_1 D_1} + \overline{C_2 D_1} + \overline{C_3 D_2} + \overline{C_4 D_2} + \overline{C_5 D_3} + \overline{D_1 D_3} + \overline{D_2 D_3}.$$

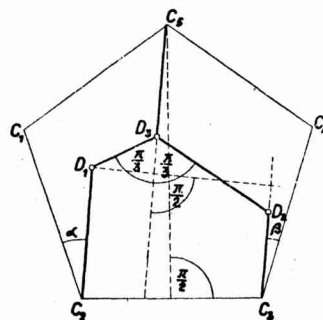
Ježto $G \subset P_n$ (podle vlastností a), je patrné, že v obou případech musí C_1, C_2 a rovněž C_3, C_4 býti dva sousední vrcholy P_n . V případě $n = 4$ se snadno dokáže, že $\overline{D_1 D_2}$ leží na symetrále úsečky $\overline{C_1 C_2}$, čímž je graf G dvojznačně určen (jeden minim. graf vznikne z druhého otočením okolo středu P_n o úhel $\frac{1}{2}\pi$); graf G je zakreslen na obr. 3, jeho délka jest $a(1 + \sqrt{3}) = a \cdot 2,732 \dots$. V případě $n = 5$ leží (viz obr. 4) strana $\overline{C_5 D_3}$ na symetrále úsečky

$\overline{C_2 C_3}$ (při vhodném očíslování bodů C_i), jak snadno nahlédneme¹¹⁾; tím je již graf G pětiznačně určen (neboť kterýkoliv základní bod můžeme vzít za C_5), jak patrně z obr. 4, kde jsou vyznačeny všechny úhly, nutné k jeho konstrukci. Délka grafu G jest zde rovna $(\sqrt{3} \cdot \cos \frac{1}{5}\pi + 2 \sin \frac{2}{5}\pi + \sin \frac{1}{5}\pi) a = a \cdot 3,891 \dots$ (činitel $u a$ jest ovšem algebraické číslo).

Případy $n = 3, 4, 5$ jsou tedy rozřešeny. Pro $n = 6$ vypadá však minimální graf již docela jinak: dá se dokázat, že pro $n = 6$ dostaneme kterýkoliv minimální graf tak, že vezmeme obvod daného pravidelného šestiúhelníka a vynecháme všechny vnitřní body jedné (kterékoliv) strany. Podobně se dostane minimální



Obr. 4.



Obr. 5.

graf pro každý pravidelný n -úhelník, kde $n \geq 13$, jak ukážeme v následující větě 4. Zbývají tedy nerozřešeny případy $7 \leq n \leq 12$, které se vymykají metodě důkazu věty 4; zbývá tedy jen konečný počet případů, jež by se s jakousi námahou daly rozřešit přímým výpočtem.

Věta 4. *Budiž celé, $n \geq 13$. Budiž $C_1, C_2, \dots, C_n$ vrcholy pravidelného n -úhelníka o straně a .¹²⁾ Budiž G minimální graf vzhledem k bodům $C_1, C_2, \dots, C_n$. Potom je G rovno součtu $n - 1$ stran daného n -úhelníka (tedy $l(G) = (n - 1)a$; existuje právě*

¹¹⁾ Kdyby tomu tak nebylo, byl by buď úhel úseček $\overline{C_2 C_3}, \overline{C_2 D_1}$ nebo úhel úseček $\overline{C_3 C_2}, \overline{C_3 D_2}$ ostrý; budiž třeba první z nich ostrý. Potom by, jak je patrné z obr. 5, bylo $\overline{C_3 D_2} < \overline{C_2 D_1}$; ale z trojúhelníků $C_1 C_2 D_1, C_3 D_2 C_4$ by plynulo

$$\overline{C_2 D_1} = \frac{a}{\sin \frac{1}{3}\pi} \sin(\frac{1}{3}\pi - \alpha), \quad \overline{C_3 D_2} = \frac{a}{\sin \frac{1}{3}\pi} \sin(\frac{1}{3}\pi - \beta),$$

z čehož vzhledem k $0 < \beta < \alpha < \frac{1}{3}\pi$ by plynulo $\overline{C_2 D_1} < \overline{C_3 D_2}$ — spor.

¹²⁾ Body $C_1, C_2, \dots, C_n$ budiž očíslovány tak, že body C_i, C_{i+1} (kdež klademe $C_{n+1} = C_1$) jsou dva sousední vrcholy n -úhelníka, takže $\overline{C_i C_{i+1}} = a$.

n minimálních grafů navzájem shodných — podle toho, kterou stranu n -úhelníka vynechám).

Důkaz věty 4. Bez újmy obecnosti budiž poloměr kružnice opsané danému n -úhelníku roven 1. Potom je $a = 2 \sin \pi/n < 2\pi/n < 1\frac{2}{3} \times 3,2 < \frac{1}{2}$. Označme znakem P_n množství všech bodů uvnitř a na obvodě daného n -úhelníka; budiž S střed P_n . Graf G má ovšem vlastnosti a), b), c), d) vyslovené ve větě 3.¹³⁾ Dokážeme napřed:

Tvrzení 5. *Budiž $\overline{M_1 M_2}$ strana grafu G ; potom je $\overline{M_1 M_2} \leq a$.*

Důkaz: kdyby bylo $\overline{M_1 M_2} > a$, sestrojme množství $G' = G - {}_0(\overline{M_1 M_2})_0$; toto množství je součtem dvou stromů G_1, G_2 tak, že $M_1 \in G_1, M_2 \in G_2, G_1 \cdot G_2 = 0$. Každý z obou stromů G_1, G_2 obsahuje aspoň jeden bod základní — neboť jinak by jeden z nich musil obsahovati všechny body základní, což nelze, neboť $l(G_1) < l(G), l(G_2) < l(G)$. Existují tedy dva sousední vrcholy n -úhelníka C_i, C_{i+1} tak, že jeden z nich patří k G_1 , druhý k G_2 . Potom však graf $G'' = [G - {}_0(\overline{M_1 M_2})_0] + \overline{C_i C_{i+1}}$ obsahuje všechny body základní a jest $l(G'') < l(G)$, což dává spor.

Tvrzení 6. *Graf G nemá rozvětvovacího bodu.* Dokážeme-li tvrzení 6, bude tím věta 4 již dokázána. Neboť předpokládejme, že tvrzení 6 je dokázáno; potom graf G nemá jiných vrcholů než body základní. Každá strana grafu G je tedy spojnici dvou bodů základních; žádná strana grafu G nemůže však býti úhlopříčkou n -úhelníka P_n , ježto by pak byla delší než a (viz tvrzení 5). Tedy G je součtem h stran n -úhelníka P_n ; nemůže býti $h = n$, ježto pak by se jedna strana mohla vynechati; nemůže také býti $h < n - 1$, neboť souvislý součet h stran by potom nemohl obsahovati všechny vrcholy $C_1, C_2, \dots, C_n$. Je tedy nutně $h = n - 1$, jako bylo dokázati.

Tvrzení 6 dokážeme nepřímou. Napřed dokážeme:

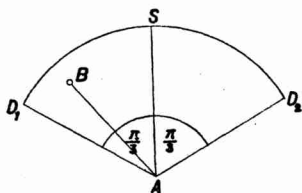
Tvrzení 7. *Předpokládejme, že graf G má aspoň jeden rozvětvovací bod; potom existuje aspoň jeden rozvětvovací bod A grafu G , pro který platí $\overline{AS} \leq a$.*

Důkaz: Budiž A onen rozvětvovací bod grafu G , jenž má nejmenší vzdálenost od středu S (takových rozvětvovacích bodů může býti několik). Předpokládejme, že $\overline{AS} > a$; z toho odvodíme spor. Sestrojme (viz obr. 6) úsečku $\overline{AS}$ a úsečky $\overline{AD_1}, \overline{AD_2}$, jež svírají s $\overline{AS}$ úhly $\frac{1}{2}\pi$ tak, že $\overline{AD_1} = \overline{AD_2} = \overline{AS}$. Sestrojme kruhovou výseč $\overline{AD_1 SD_2}$ (střed kružnice je v A). Z bodu A vycházejí tři strany grafu G , svírající úhly $\frac{3}{2}\pi$; aspoň jedna z nich — označme ji $\overline{AB}$ — padne buď dovnitř nebo na hranici úhlu $\frac{3}{2}\pi$, sevřeného polopaprsky

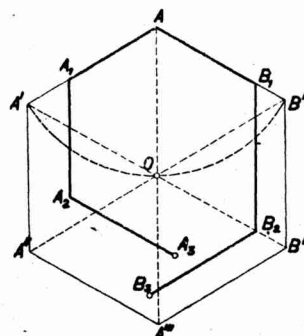
¹³⁾ Podle vlastnosti a) leží G v rovině, určené body $C_1, C_2, \dots, C_n$.

$\vec{AD}_1, \vec{AD}_2$. Ježto $0 < \overline{AB} \leq a < \overline{AS}$, padne bod B dovnitř nebo na obvod výseče AD_1SD_2 , nesplyne však se žádným z bodů A, D_1, D_2 . Je tedy zřejmě $\overline{BS} < \overline{AS}$ a tedy nemůže být B bodem rozvětvovacím, musí tedy B být bodem základním a tedy $\overline{BS} = 1$. Ale podle věty 3, vlastnosti a) jest $\overline{AS} \leq 1$ a tedy $\overline{BS} < 1$ — spor.

Důkaz tvrzení 6 provedeme nyní nepřímou. Budeme předpokládati, že graf G má aspoň jeden rozvětvovací bod; pak má G také rozvětvovací bod A takový, že $\overline{AS} \leq a$. Z toho odvodíme spor. Z bodu A vycházejí tři strany grafu G ; můžeme si zvoliti mezi nimi dvě — označme je $\vec{AA_1}, \vec{AB_1}$ — tak, že bod S leží buď na ně-



Obr. 6.



Obr. 7.

kterém z polopaprsků AA_1, AB_1 nebo uvnitř úhlu $\frac{2}{3}\pi$ jimi sevřeného. Sestrojíme pravidelný šestiúhelník o straně a a o vrcholech $A, A', A'', A''', B', B''$, jehož strany $\vec{AA'}, \vec{AB'}$ leží resp. v polopaprscích $\vec{AA_1}, \vec{AB_1}$ (viz obr. 7). Budiž H množství všech bodů uvnitř a na obvodu tohoto šestiúhelníka, budiž O jeho střed. Ježto $\overline{AS} \leq a = \overline{AA'}$, leží S ve výseči $AA'OB'$ a tedy $S \in H$. Dva libovolné body z H mají zřejmě vzdálenost rovnou nejvýše $2a < 1$ a tedy všechny body z H mají od S vzdálenost menší než 1; tedy žádný základní bod C_i neleží v H . Ježto $\overline{AA_1} \leq a = \overline{AA'}$, leží bod A_1 v H a tedy není bodem základním, je tedy A_1 rozvětvovacím bodem grafu G . Obdobně bod $B_1 \in H$ je rozvětvovacím bodem. Vycházejí tedy z bodů A_1, B_1 dvě strany grafu G : $\overline{A_1A_2} \leq a, \overline{B_1B_2} \leq a$, rovnoběžné s úsečkou $\vec{A'A''}$ a mající s ní též smysl. Bod A_2 padne do čtyřúhelníku $AA'A''O$, bod B_2 do čtyřúh. $AB'B''O$; jsou tedy body A_2, B_2 opět body rozvětvovací. Z bodu A_2 vychází tedy strana $\overline{A_2A_3} \leq a$ grafu G , rovnoběžná i co do smyslu s $\vec{A''A'''}$, jejíž koncový bod A_3

leží v H a je tedy bodem rozvětvovacím. Rovněž z bodu B_2 vychází strana $\overline{B_2B_3} \leq a$ grafu G , jejíž koncový bod B_3 leží v H a je tedy bodem rozvětvovacím. Graf

$$\Gamma_1 = \overline{A_3A_2} + \overline{A_2A_1} + \overline{A_1A} + \overline{AB_1} + \overline{B_1B_2} + \overline{B_2B_3}$$

jest ovšem stromem (ježto $\Gamma_1 \subset G$) a platí $\Gamma_1 \subset H$.

Zavedme nyní tento pojem: graf Γ nazveme typickým grafem, má-li tyto vlastnosti:

1. $\Gamma = \overline{M_1M_2} + \overline{M_2M_3} + \overline{M_3M_4} + \overline{M_4M_5} + \overline{M_5M_6} + \overline{M_6M_7}$.
2. Existuje pravidelný šestiúhelník

$$\overline{N_1N_2} + \overline{N_2N_3} + \overline{N_3N_4} + \overline{N_4N_5} + \overline{N_5N_6} + \overline{N_6N_1}$$

takový, že úsečka $\overline{M_iM_{i+1}}$ je rovnoběžná a téhož smyslu s úsečkou $\overline{N_iN_{i+1}}$ ($i = 1, 2, \dots, 6$; klademe $N_7 = N_1$).

3. Úsečky $\overline{M_iM_{i+1}}$ jsou stranami grafu G a leží v H (pro $i = 1, 2, \dots, 6$).¹⁴⁾

Na př. Γ_1 je typický graf, takže existuje (za našich předpokladů) aspoň jeden typický graf. Zřejmě existuje jen konečný počet typických grafů, takže dojdeme k hledanému sporu, dokážeme-li:

Tvrzení 8. *Existuje-li aspoň jeden typický graf, existuje posloupnost typických grafů navzájem různých.*

Důkaz: je-li Γ typický graf, budiž $\Lambda(\Gamma)$ nejmenší konvexní bodové množství, obsahující množství Γ . Dokáží napřed:

Tvrzení 9. *Je-li Γ typický graf, potom existuje typický graf Γ' takový, že bodové množství $\Lambda(\Gamma')$ je pravou částí bodového množství $\Lambda(\Gamma)$.*

Důkaz: Budiž $\Gamma = \overline{M_1M_2} + \overline{M_2M_3} + \dots + \overline{M_6M_7}$ typický graf. Jsou možné tři případy:

A) Polopaprsek $\overline{M_2M_1}$ má společný bod s grafem $\overline{M_4M_5} + \overline{M_5M_6} + \overline{M_6M_7}$.

B) Nenastává případ A), ale polopaprsek $\overline{M_6M_7}$ má společný bod s grafem $\overline{M_4M_3} + \overline{M_3M_2} + \overline{M_2M_1}$.

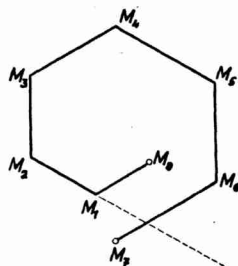
C) Nenastává ani případ A) ani případ B). V případě A) (viz obr. 8) a C) (viz obr. 9) vychází z bodu M_1 strana $\overline{M_1M_0}$ stromu G , rovnoběžná a téhož smyslu se stranou $\overline{M_7M_6}$. Zřejmě jest $\overline{M_1M_0} \subset \Lambda(\Gamma) \subset H$; tedy jest M_0 rozvětvovacím bodem grafu G a graf

$$\Gamma' = \overline{M_0M_1} + \overline{M_1M_2} + \overline{M_2M_3} + \overline{M_3M_4} + \overline{M_4M_5} + \overline{M_5M_6}$$

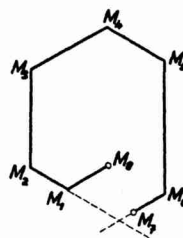
jest typickým grafem. Ježto $\overline{M_1M_0} \subset \Lambda(\Gamma)$, jest $\Lambda(\Gamma') \subset \Lambda(\Gamma)$; ježto

¹⁴⁾ Tedy Γ je strom (tedy $M_7 \neq M_1$) a body M_i jsou rozvětvovacími body grafu G .

však bod M_7 zřejmě neleží v $\Delta(I'')$, jest $\Delta(I'') \neq \Delta(I)$, jak bylo dokázati. Příklad *B*) je symetrický s případem *A*).



Obr. 8.



Obr. 9.

Z tvrzení 9 plyne ihned tvrzení 8: Existuje-li typický graf Γ_1 , plyne z tvrzení 9 existence posloupnosti typických grafů $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \dots$ takové, že pro $i < l$ jest $\Delta(\Gamma_i)$ pravou částí bodového množství $\Delta(\Gamma_l)$; tedy $\Gamma_i \neq \Gamma_l$ pro $i < l$, jak bylo dokázati.

*

Sur les graphes minima, contenant n points donnés.

(Extrait de l'article précédent.)

Soient $C_1, C_2, \dots, C_n$ n points d'un espace euclidien. Considérons tous les ensembles connexes G , satisfaisant aux conditions suivantes: 1. G contient les points $C_1, C_2, \dots, C_n$. 2. G est la somme d'un nombre fini de segments tels que deux quelconques entre eux n'aient qu'un point commun tout au plus. Soit $l(G)$ la somme des longueurs de ces segments. Dans cet article, on démontre l'existence d'un G_0 , pour lequel $l(G_0)$ atteint la valeur minimum; ensuite, on démontre quelques propriétés de l'ensemble G_0 et on détermine G_0 complètement dans le cas particulier où les points $C_1, C_2, \dots, C_n$ sont les sommets d'un polygone régulier ($n \geq 13$).

O křivkách a plochách, jež vytvářejí spojnice sdružených bodů dvou kolineárních, zvláště pak shodných křivých řad.

Dr. Josef Klíma.

(Došlo 28. ledna 1934.)

1. Mějme v rovině π soumístitnou kolineaci polí π_1, π_2 , jejímž samodružným trojúhelníkem buď abc ! Obecná družina x_1, x_2 odpovídajících si bodů měž spojnicí $X \equiv x_1x_2$, která protíná strany samodružného trojúhelníka v bodech a', b', c' , a to $a' \equiv (X, bc)$ atd.! Pro všechny družiny x_1, x_2 platí, že pětice $a'b'c'x_1x_2$ jsou vzájemně projektivní¹⁾ a jmenují se „vrhem“ (Wurf) pětiúhelníka $abcx_1x_2$ a lze tedy mluvit o „vrhu kolineace“. Budiž y_1, y_2 další družina odpovídajících si bodů! Podle obr. 1 vytvářejí sdružené svazky paprskové o středech x_1, x_2 a y_1, y_2 kuželosečky X^2 , příp. Y^2 , jež jdou vrcholy a, b, c samodružného trojúhelníka a průsečíkem x sdružených paprsků x_1y_1, x_2y_2 . Ježto pětice $abcx_1x_2, abcy_1y_2$ promítají se z x týmiž pěti paprsky, tvoří na X^2 a Y^2 projektivní vzájemné řady a proto, označíme-li průsečíky spojnice $Y \equiv y_1y_2$ se stranami bc, ca, ab body a'', b'', c'' , platí $a'b'c'x_1x_2 \wedge a''b''c''y_1y_2 \wedge \dots$. Též vyplývá stejnost dvojpoměru paprsků, jimiž z některého vrcholu samodružného trojúhelníku promítají se další dva vrcholy a libovolná družina odpovídajících si bodů, na př. $a(bc x_1x_2) = a(bc y_1y_2) = \dots$

Spojnice x_1x_2, y_1y_2 odpovídajících si bodů na sdružených spojnicích x_1y_1, x_2y_2 obalují kuželosečku, dotýkající se x_1y_1, x_2y_2 a stran samodružného trojúhelníka abc . Sestrojíme-li tudíž na $x_1x_2, y_1y_2, \dots$ body $x_3, y_3, \dots$ odpovídající si v řadách daných odpovídajícími si vrhy kolineace, budou body $x_3, y_3, \dots$ vyplňovati pole π_3 kolineárné jak s π_1 , tak s π_2 , při čemž trojúhelník samodružný abc je společný. Dostáváme tak jednoparametrovou subgroupu dvouparametrové grupy kolineací soumístitných o společném samodružném trojúhelníku abc .

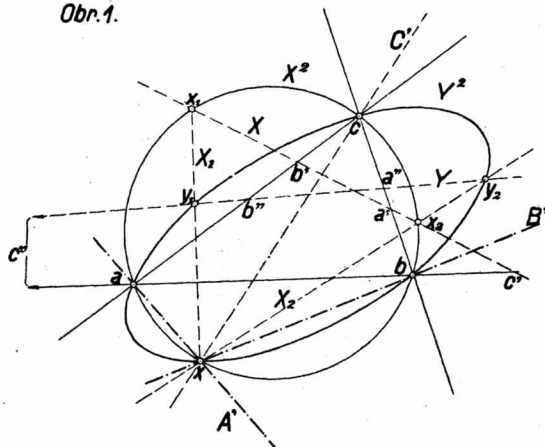
Duálně, jsou-li X_1, X_2 odpovídající si přímky a označíme-li A', B', C' spojnice průsečíku $x \equiv (X_1, X_2)$ s vrcholy a, b, c , jsou

¹⁾ Sturm: Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften, II. díl, odst. 290.

pětice $(A'B'C'X_1X_2)$ pro všechny družiny odpovídajících si přímek projektivní, a to projektivní s vrhem $(a'b'c'x_2x_1)$, jak patrně z obr. 1, kde $x_1y_1 \equiv X_1$, $x_2y_2 \equiv X_2$ a $(X_1X_2) \equiv x$. Je patrně $(A'B'X_1X_2) = (abx_1x_2) = (b'a'x_1x_2) = (a'b'x_2x_1)$ a podobně další tři rovnosti, z nichž plyne hořejší tvrzení. Počítáme-li spojnici $X \equiv x_1x_2$ k π_2 , bude jí v π_1 odpovídati přímka, jdoucí bodem x_1 , a proto platí též $x_1(abcx_2) = (a'b'c'x_1) = k_1 = \text{konst.}$ Stejně platí též konstantnost dvojpoměru $x_2(abcx_1) = (a'b'c'x_2) = k_2$ pro libovolný bod x_2 .

Mějmež nyní v poli π_1 křivku K_1 stupně n , jež má d dvojných bodů a v bodů vratu a která má vrcholy a, b, c samodružného

Obr. 1.



trojúhelníka za α -, β -, γ -násobné body! Křivka, odpovídající K_2 v poli π_2 , je téhož stupně a má body a, b, c za tolikéž násobné jako K_1 . Spojnice sdružených bodů na K_1, K_2 obalují křivku K , jejíž charakteristická čísla určíme. Nejprve určíme třídu křivky K . Má-li tečna křivky K procházeti bodem p , musí na K_1, K_2 býti sdružené body x_1, x_2 , jichž spojnice x_1x_2 jde bodem p . Ježto z x_1 promítají se a, b, c, x_2 paprsky o dvojpoměru k_1 , musí x_1 býti na kuželosečce X_1^2 , jdoucí body a, b, c, p , z jejichž bodů se tato čtveřina promítá, dvojpoměrem k_1 . Kuželosečka X_1^2 protíná K_1 ve $2n - (\alpha + \beta + \gamma)$ bodech, jimiž jdou tečny křivky K z bodu p , čímž jsme určili třídu této křivky. Strany bc, ca, ab jsou $n - (\beta + \gamma)$ -, $n - (\gamma + \alpha)$ -, $n - (\alpha + \beta)$ -násobnými tečnami křivky K . Spojnice d dvojných bodů křivky K_1 s odpovídajícími body křivky K_2 jsou dvojnými tečnami křivky K a v spojnic sdružených bodů vratu křivek K_1, K_2 jsou tečnami obratu křivky K . Je tudíž stupeň s křivky K :

$$\begin{aligned}
s &= (2n - \alpha - \beta - \gamma)(2n - \alpha - \beta - \gamma - 1) - \\
&- 2 \left[d + \binom{n - \beta - \gamma}{2} + \binom{n - \gamma - \alpha}{2} + \binom{n - \alpha - \beta}{2} \right] - 3v = \\
&= n(n + 1) - [\alpha(\alpha + 1) + \beta(\beta + 1) + \gamma(\gamma + 1) + 2d + 3v].
\end{aligned}$$

Aby bod p náležel křivce K , musí kuželosečka X_1^2 , z jejíchž bodů se body a, b, c, p promítají čtveřinou paprskovou o dvojnásobku k_1 , dotýkati se křivky K_1 . Abychom tudíž dostávali body křivky K , sestrojujeme v síti kuželoseček, jdoucích body a, b, c , ony, jež se dotýkají křivky K_1 , a na každé z nich určíme body p , aby $(abcp) = k_1$. Kuželosečky sítě (abc) , jež by se dotýkaly dvojnásobku křivky K_1 , určovaly by dvojnásobné body a ty, jež by oskulovaly K_1 , body vratu.

K stupni křivky K lze dospěti nyní též jinak. Probíhá-li bod p libovolnou přímkou P , budou příslušné kuželosečky X_1^2 tvořiti svazek, ježto mimo body a, b, c procházejí ještě bodem u přímky P , pro nějž $u(abcP) = k_1$. Kuželosečky svazku $(abcu)$ vytínají na K_1 bodovou involuci stupně $2n - (\alpha + \beta + \gamma)$. Jestliže je křivka K_1 racionální, lze Chaslesovým korespondenčním principem určit počet oněch skupin involuce, v nichž splývají dva body a jež určují průsečíky přímky P s K . Involuce ta obsahuje totiž $4n - 2(\alpha + \beta + \gamma) - 2$ takových skupin, od čehož nutno ubrati ty skupiny, jež obsahují body vratu křivky K_1 a jichž je v . Vzhledem k racionálnosti křivky K platí $(n - 1)(n - 2) - 2d + 2v + \alpha(\alpha + 1) + \beta(\beta + 1) + \gamma(\gamma + 1)$. Dostáváme tudíž pro s totéž číslo jako nahoře.

Není-li křivka K_1 racionální, lze užiti tu řešení, uvedeného v Sturmově „Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften“ IV. díl, str. 228, pro systém kuželoseček (μ, ν) . Na libovolné přímce L určíme tuto korespondenci mezi jejími body z, z' . Libovolnému bodu z odpovídá ježto dva průsečíky z' přímky L s kuželosečkou pólovou vzhledem k svazku $(abcu)$ přímé poláry bodu z ke K_1 ! Poláry bodu z' přímky L k svazku $(abcu)$ jdou sdruženým bodem z'_0 . Probíhá-li bod z přímkou L , obalují jeho přímé poláry ke K_1 křivku Z třídy $(n - 1)$. Z bodu z'_0 lze k Z vésti $(n - 1)$ tečen, jež jsou přímými polárami tolikéž bodů na L vzhledem ke K_1 . Mezi body z, z' na L je příbuznost $[n - 1, 2]$ -značná. Místem koincidencí $z \equiv z'$ je tudíž křivka Q stupně $n + 1$. Kuželosečka svazku $(abcu)$, jdoucí některým z průsečíků křivek Q a K_1 , dotýká se K_1 v tomto bodě, ježto zde poláry jak ke K_1 , tak ke kuželosečce splývají v jejich společné tečně. Pro přímkou L , jdoucí r -násobným bodem z křivky K_1 , odděluje se od křivky Z $(r - 1)$ -krát svazek paprskový o společném středu v tomto bodě, ježto tolikrát bodem tím jde prvá polára libovolného bodu. Má tudíž křivka koincidencí Q r -násobný bod křivky K_1 za $(r - 1)$ -násobný, ježto

korespondence (z, z') na přímce L , jím jdoucí, je $[n - r, 2]$ -značná. Jestliže křivka K_1 jde některým základním bodem svazku, na př. a , a má tam α -násobný bod, je bod a pro Q též α -násobným bodem a křivky K_1 , Q mají tam společné tečny. Existuje totiž ve svazku $(abcu)$ α kuželoseček, jež se v bodě a křivky K_1 dotýkají, a tu jejich přímé poláry splývají. Prvá polára bodu a ke K_1 je stupně $(n - 1)$, jež má v a bod α -násobný, v němž tečny splývají s tečnami ke K_1 a jsou tudíž tečny ty též tečnami křivky Q . V bodě vratu křivky K_1 má Q jednoduchý bod, ale tečny tam k oběma splývají a proto jsou tam tři z průsečíků (QK_1) . I je zbývajících průsečíků Q s K_1 $s = n(n + 1) - [\alpha(\alpha + 1) + \beta(\beta + 1) + \gamma(\gamma + 1) + 2d + 3v]$, stejné to číslo jako nahoře.

Máme-li speciálně dvě souhlasně shodné soustavy π_1, π_2 v rovině π , jsou samodružné body b, c v kruhových bodech roviny π a třetí samodružný bod a je středem otáčení, kolem něhož otočením jedna soustava splyne s druhou. Spojujeme-li odpovídající si body na shodných křivkách K_1, K_2 stupňů n , jež jdou α -krát bodem a a β -krát kruhovými body, obalují spojnice ty křivku stupně $s = n(n + 1) - [\alpha(\alpha + 1) + 2\beta(\beta + 1) + 2d + 3v]$. Křivka K je zde též první negativní úpatnicí²⁾ křivky, podobné s K_1 , jež je místem púlicích bodů vzdáleností odpovídajících si bodů na K_1, K_2 . Na př. souhlasně shodné řady na shodných kružnicích, jež nejdou bodem a , obalují svými spojnicemi křivku stupně $s = 2 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 2$, t. j. kuželosečku, jež má v a ohnisko. Jdou-li kružnice K_1, K_2 bodem a , pak $s = 2 \cdot 3 - 2 - 2 \cdot 2 = 0$, t. j. je to bod v druhém jejich průsečíku.

2. Uvažujme o dvou kolineárních prostorech Σ_1, Σ_2 ! Spojnice X odpovídajících si bodů x_1, x_2 tvoří tetraedrální komplex, jehož základním čtyřstěnem je samodružný čtyřstěn $abcd$ obou prostorů. Spojnice X je též průsečnicí odpovídajících si rovin ξ_1, ξ_2 , z nichž prvá obsahuje přímku Y_1 , jejíž odpovídající $Y_2 \equiv X$. Roviny $\alpha \equiv (bcd), \dots$ stěn čtyřstěnu samodružného protínají spojnicí $X \equiv x_1x_2$ v bodech a', b', c', d' a platí projektivnost řad $(a'b'c'd'x_1x_2)$ pro všechny spojnice x_1x_2 . Obdobně svazky rovin o osách $X \equiv (\xi_1, \xi_2)$, jejichž roviny jdou vrcholy čtyřstěnu samodružného a roviny ξ_1, ξ_2 , jsou projektivní, a to platí $X(abcd\xi_2\xi_1) = X(a'b'c'd'x_1x_2)$ a tuto projektivnost šesti prvků jmenujeme „vrhem kolineace“. Kolineární trsy kolem středů x_1, x_2 vytvářejí křivku třetího stupně X^3 , jdoucí body a, b, c, d, x_1, x_2 . Body tyto promítají se z bisekant křivky X^3 promětnými svazky. Promítáme-li na př. c, d, x_1, x_2 z bisekanty ab , bude $(cdx_1x_2) = (d'c'x_1x_2) = (c'd'x_2x_1)$ a podobně další vztahy, takže je $(abcdx_1x_2) \wedge \wedge (a'b'c'd'x_2x_1) \wedge X(abcd\xi_1\xi_2)$.

²⁾ Viz na př. G. Loria: Spezielle algebr. u. transz. ebene Kurven, II. díl, str. 321.

Komplexová kuželosečka v libovolné rovině ϱ je obalena spojniciemi odpovídajících si řad na (ξ_1, ξ_2) , (η_1, η_2) , kde $\xi_2 \equiv \eta_1 \equiv \varrho$. Kuželosečka ta dotýká se stěn samodružného čtyřstěnu. Otáčí-li se rovina ϱ kolem své průsečnice s některou stěnou samodružného čtyřstěnu, promítá se komplexová kuželosečka v této rovině z protějšího vrcholu čtyřstěnu na stěnu do téže kuželosečky. Na př., je-li průsečnice $A \equiv (\varrho\alpha)$, je průmět ten kuželosečka, obalená přímkami X^a , jež protínají přímky A, bc, cd, db ve čtveřinách daného dvojpoměru $k = (a'b'c'd')$. Prochází-li rovina ϱ některým vrcholem samodružného tetraedru, na př. a , rozpadá se kuželosečka komplexová ve svazek o středu a a svazek o středu m na průsečnici $A \equiv (\varrho\alpha)$ tak, že, označíme-li $(A, cd) \equiv b''$, $(A, db) \equiv c''$, $(A, bc) \equiv d''$, je $(mb''c''d'') = k$. Zvolme v prostoru libovolný bod p . Necháme-li rovinu ϱ otáčet kolem přímky pa , opíše bod m , dříve stanovený, v rovině α kuželosečku A_p^2 , jdoucí body b, c, d a bodem p^a , který je průmětem bodu p z vrcholu a na protější stěnu α . Kuželová komplexová plocha bodu p je (pA_p^2) . Body x_1 prostoru Σ_1 , jež spojují paprsky čtyřstěnového komplexu, jdoucí bodem p , s odpovídajícími body x_2 v Σ_2 , promítají se z vrcholu na př. a kuželovou plochou 2° , obsahující hrany ab, ac, ad, ap do kuželosečky X_1^a v α . Stejně odpovídající body x_2 promítají se z vrcholu a kuželovou plochou 2° , jež obsahuje též spojnice ab, ac, ad, ap , do kuželosečky X_2^a . X_1^a, X_2^a jdou body b, c, d, p^a . Jsou proto body x_1 na křivce třetího stupně X_1^3 , v níž se protínají kuželové plochy (aA_p^2) a (aX_1^a) , body x_2 pak na odpovídající křivce $3^\circ X_2^3$. Obě kubiky X_1^3, X_2^3 jdou vrcholy a, b, c, d samodružného čtyřstěnu a bodem p . Probíhá-li bod p libovolnou přímkou L , pak příslušné křivky X_2^3 vytvoří plochu λ_2 , která je druhého stupně. Libovolná přímka prostoru Σ_2 protíná totiž plochu λ_2 ve dvou bodech, ježto spojnice bodů řady R_2 prostoru Σ_2 s odpovídajícími body odpovídající řady bodové R_1 v Σ_1 vytvořují plochu 2° , již přímka L protíná ve dvou bodech. Plocha λ_2 obsahuje přímku L a přímku L_2 jí odpovídající v Σ_2 , počítáme-li ji k Σ_1 , a obsahuje vrcholy a, b, c, d , čímž je určena a vytvořena je průsečnicemi odpovídajících si rovin kolem odpovídajících přímek L, L_2 . Náleží-li přímka L čtyřstěnovému komplexu, je příslušná plocha λ_2 kuželovou plochou. Stejně k přímce L přináleží plocha λ_1 , obsahující body x_1 všech paprsků komplexu, jež sekou přímku L . λ_1 odpovídá v Σ_1 v kolineaci ploše λ_2 a obsahuje přímku L'_1 odpovídající přímce L , počítané k Σ_2 .

Mějme nyní v prostorech Σ_1, Σ_2 odpovídající si křivky K_1, K_2 stupňů n , jež mají vrcholy a, b, c, d za α -, β -, γ -, δ -násobné body! Spojnice odpovídajících si bodů obou křivek K_1, K_2 budou vytvářovat zborcenou plochu ζ , jež je stupně $2n - (\alpha + \beta + \gamma + \delta)$, ježto v tolika bodech protíná ji libovolná přímka L . Přímce L odpovídá podle hořejšího v prostoru Σ_2 plocha λ_2 , již vyplňují body x_2

paprsků komplexu, sekoucí L , která jde body a, b, c, d a protíná tudíž mimo tyto body křivku K_2 ve $2n - (\alpha + \beta + \gamma)$ bodech, jimiž jdoucí přímky plochy ζ protínají L . V tom obsažena též konstrukce průsečíků libovolné přímky L s plochou ζ . Prochází-li přímka L některým vrcholem samodružného čtyřstěnu, na př. a , je příslušná plocha λ_2 kuželovou plochou 2^0 o vrcholu v a , která jde body b, c, d . Tato kuželová plocha protíná K_2 mimo v a, b, c, d ještě ve $2n - (2\alpha + \beta + \gamma + \delta)$ bodech. Jsou proto body a, b, c, d pro plochu ζ body α -, β -, γ -, δ -násobnými a průmětem plochy ζ z některého tohoto vrcholu, na př. a , na protější stěnu α je křivka třídy $2(n - \alpha) - (\beta + \gamma + \delta)$, což odpovídá výsledku v části 1, ježto křivky K_1, K_2 promítají se z a na α do kolineárních křivek stupňů $(n - \alpha)$, jež jdou samodružnými body b, c, d, β -, γ -, δ -krát.

Zborcená plocha ζ protíná rovinu stěny samodružného čtyřstěnu, na př. α , v tvořících přímkách, jež spojují průsečíky křivky K_1 s α , jichž je $n - (\beta + \gamma + \delta)$, s odpovídajícími body na K_2 a v křivce stupně $n - \alpha$. To lze ukázati též takto: Všechny přímky tetraedr. komplexu, jež protínají libovolnou přímku L roviny α , mají své body $x_1(x_2)$ v rovině λ_1 , jdoucí vrcholem a samodr. tetraedru, ježto plocha $2^0 \lambda_1$ obecného případu rozpadá se tu v pár rovin, a to α a λ_1 . Ježto λ_1 protíná K_1 v $(n - \alpha)$ bodech, je stupeň křivky plochy ζ v α výše udaný. Jsou tudíž roviny $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ stěn čtyřstěnu základního $[n - (\beta + \gamma + \delta)]$ -, $[n - (\gamma + \delta + \alpha)]$ -, $[n - (\delta + \alpha + \beta)]$ -, $[n - (\alpha + \beta + \gamma)]$ -násobnými tečnými rovinami plochy ζ .

Sestrojíme-li ve „vrzích kolineace“ $(a'b'c'd'x_1x_2) \dots$ odpovídající si body $x_3, \dots$, budou vyplňovati prostor Σ_3 , kolineární s danými prostory, kde bodům a_1 odpovídá a_3 , případně bodu a_2 bod a_3 . Prostory $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \dots$ tvoří jednomocný svazek prostorů, jehož kterékoliv dva prostory určují též tetraedrální komplex jako Σ_1, Σ_2 . Křivkám K_1, K_2 prostorů Σ_1, Σ_2 odpovídají kolineární křivky $K_3, \dots$, jež jsou na ploše ζ . Dostáváme tak systém ∞^1 vzájemně projektivních křivek K_n na ploše ζ , jež mají v bodech a, b, c, d body α -, β -, γ -, δ -násobné a které na tvořících přímkách plochy vytínají řady projektivní.

Abyste dva paprsky X, Y tetraedrálního komplexu se protínaly v bodě p , je třeba, aby spojnice jejich bodů x_1, y_1 prostoru Σ_1 , jež spojují s jich odpovídajícími body x_2, y_2 , byla též paprskem komplexu. Body $x_1, \dots$ prostoru Σ_1 , jež jsou na komplexních paprscích, jdoucích bodem p , vyplňují kubiku X_1^3 , jež jde body $p, x_1, y_1, \dots, a, b, c, d$. Promítají se tudíž vrcholy samodružného čtyřstěnu a, b, c, d z dvojsečny x_1y_1 rovinami téhož dvojpoměru jako z bisekanty px_1 a proto x_1y_1 náleží čtyřstěnovému komplexu. Rovině (XY) , počítané k Σ_2 , odpovídá v Σ_1 rovina, jdoucí spojnicí x_1y_1 . Dvojnásob tečné roviny zborcené plochy ζ dostaneme tudíž, určíme-li paprsky komplexu, jež jsou současně dvojsečnami

křivky K_1 , a spojíme je rovinami s jejich odpovídajícími přímkami v Σ_2 . Průmek těch je ∞^1 a tvoří zborcenou plochu. Chceme-li určití torsální přímky plochy ζ , třeba sestrojiti paprsky komplexové, jež jsou současně tečnami křivky K_1 , kterých je obecně konečný počet, a tu roviny, spojující je s jejich odpovídajícími v prostoru Σ_2 , jsou torsálními rovinami. Jestliže všechny tečny křivky K_1 náležejí komplexu nebo, jak říkáme, je-li K_1 komplexovou křivkou, je vytvořená plocha přímková ζ rozvinutelnou.

Uvažujme nyní speciálně o případě, kdy kolíneace prostorů Σ_1 , Σ_2 přejde v souhlasnou shodnost! Dva vrcholy c , d samodružného čtyřstěnu splývají v úběžném bodě o_∞ osy O , kol níž lze prostor Σ_1 šroubovým pohybem ztotožniti se Σ_2 . Další dva vrcholy a , b jsou v kruhových bodech rovin, kolmých k ose O . Zavedme kolmé promítání ve směru osy O na rovinu π , kolmou k této ose, a označme průměty stejně, ale s '!. Prostor Σ_1 lze převést v Σ_2 též otočením kol O o úhel 2ω (ω má znaménko při šroubovém pohybu pravotočivém $+$ a levotočivém $-$) a posunutím o délku z , již uvažujeme vždy $+$, a směřuje zdola nahoru, je-li osa O , jak v dalším vždy předpokládáme, svislá a je-li tudíž obraz kolmého průmětu půdorysem. Ježto speciální tetraedrální tento komplex přechází v sebe libovolným posunutím podél O , nemění se též půdorys komplexových parabol v rovinách rovnoběžných, jak nám potvrdí též konstrukce jejího půdorysu, na př. v rovině ε v obr. 2. Rovina ε určena stopou P_ε v průmětně π , jež v obr. zvolena průsečíkem (πO) a hlavní přímkou $H^\bullet$ o kótě z . Přímkou E_1 roviny ε , jejíž odpovídající E_2 je též v rovině ε , dostaneme, sešroubujeme-li rovinu ε do roviny ε_1 v inverzním šroubovém pohybu (-2ω , $-z$). $H_\bullet$ přejde ve stopu P_{ε_1} a průsečnice $E_1 \equiv (\varepsilon \varepsilon_1)$ má půdorys v příslušné ose úhlu $\widehat{P_\bullet P_{\varepsilon_1}}$. Půdorys komplexové paraboly ε^2 roviny ε má patrně osu v $P_\bullet$, ohnisko v O' a vrcholová tečna A' je půdorysem paprsku komplexního, který je spádovou přímkou v rovině ε . Označíme-li i interval roviny ε pro ekvidistanci z , je parametr paraboly ε^2

$$p = 2 \cdot \frac{i}{\sin 2\omega} \cdot \cos \omega = i \cotg \omega,$$

a označíme-li ostrý úhel roviny ε s O písmenou $\varphi = \sphericalangle O\varepsilon$, t. j. $\tg \varphi = i/z$, pak

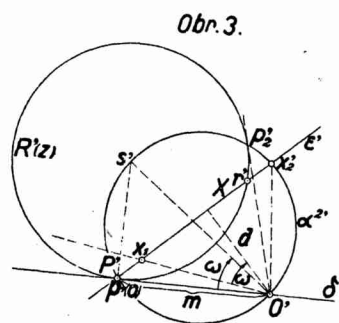
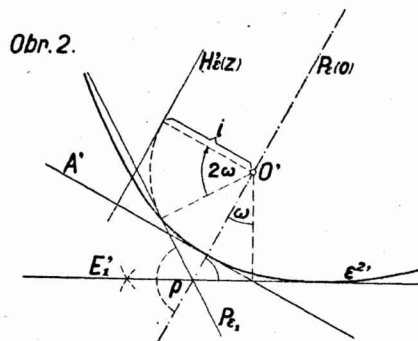
$$p = z \tg \varphi \cotg \omega.$$

Tím vyjádřena úměrnost parametru p na tangentě úhlu φ , jež svírá osa O s rovinou ε a naopak. Pro $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ je $p = \infty$ a parabola rozpadá se ve svazky minimálních přímek. Jestliže $\varphi = 0$, je $p = 0$, příslušná parabola roviny $\varepsilon \parallel O$ rozpadá se v pár bodový na její úběžné přímce a paprsky komplexu v rovině té tvoří jednak osnovu

přímek, rovnoběžných s O , a osnovu přímek, jichž úhel ψ s O dán, jestliže vzdálenost ε od O je d : $\operatorname{tg} \psi = \frac{2d \operatorname{tg} \omega}{z}$.

Z toho lze snadno učiniti si představu o tomto speciálním kvadratickém komplexu.

Přímky komplexu, jdoucí obecně položeným bodem p , dostaneme takto: Bodem tím myslíme si svazek rovin $\varepsilon \parallel O$ o ose $P \parallel O$! Pak v každé té rovině jde bodem p mimo přímku P , jež náleží komplexu, ještě jedna přímka tohoto komplexu, svírající s osou O úhel ψ . Svírá-li rovina ε s rovinou $\delta \equiv (PO)$ úhel β , je vzdálenost d osy O od ε pak $d = m \sin \beta$, je-li $m = p \rightarrow O$ (obr. 3). Tudíž $\operatorname{tg} \psi = \frac{2m}{z} \operatorname{tg} \omega \sin \beta$.



Stopníky r těchto přímek na rovině $\pi \perp O$, jež je nad p ve vzdálenosti z , vyplňují kružnici R , dotýkající se roviny δ v bodě na P , a jejíž střed s je na rotační válcové ploše α^2 , jež je místem bodů x_2 přímek $X \equiv x_1 x_2$ komplexu, jdoucích bodem p ($p's' \perp \delta'$).

Na kružnici $R' \cong R$ je též bod p'_2 , odpovídající bodu $p'_1 \equiv p'$ i spadá se R'_1 z bodu O' pod úhlem 2ω . Na základě toho lze snadno určití komplexový kužel libovolného bodu p , který je patrně orthogonálním. Body x_2 pro všechny paprsky komplexu, procházející bodem p , jsou na prostorové křivce kubické X_2^3 , v níž protínají se válcová plocha α^2 s komplexovou kuželovou plochou (pR) mimo společnou přímku P . Křivka X_2^3 obsahuje kruhové body roviny $\pi \perp O$ a jde úběžným bodem o_∞ přímky O a je tudíž kubickou prostorovou kružnicí. Libovolná tvořící přímka na α^2 protíná X_2^3 mimo o_∞ ještě v bodě v konečnu, jen druhý průsečík s O splývá též s o_∞ a tudíž O je asymptotou křivky X_2^3 . Křivka X_2^3 prochází též bodem p .

Mějme v prostoru Σ_1 křivku algebraickou K_1 stupně n a s ní v Σ_2 shodnou odpovídající křivku K_2 , z nichž K_1 a tudíž i K_2 jde

α -krát bodem o_∞ osy O a β -krát kruhovými body a_∞, b_∞ roviny π ! Spojnice odpovídajících bodů obou křivek vytvoří přímkovou plochu ζ stupně $2n - (\alpha + 2\beta)$. Jestliže některá z větví křivek K_1, K_2 , jdoucích bodem o_∞ , se dotýká tam osy O , třeba pro každou takovou větev snížit stupeň plochy ještě o 1, ježto v případě tom obsahuje příslušná větev křivek těch nejen vrchol c , ale i d samodružného čtyřstěnu případu obecného. Průsečíky libovolné přímky L s plochou dostaneme použitím plochy $2^\circ \lambda_2$, jež je tu pravoúhlým hyperboloidem, majícím kruhové řezy v rovinách, rovnoběžných s π , a obsahujícím dvě přímky různých soustav, rovnoběžných s O . Z těchto přímek jedna je v rovině, jdoucí L rovnoběžně s O , a druhá v rovině, rovnoběžná s L a O , v níž přímky komplexu jsou rovnoběžné s L . Obě pak jsou v rovině, jdoucí osou a svírající s L' úhel $90^\circ - \omega$, ovšem v příslušném smyslu. Z těchto dat lze určit snadno kruhové řezy plochy s rovinami, kolmými k O . Křivka K_2 protíná tuto plochu mimo body $o_\infty, a_\infty, b_\infty$ ve $2n - (\alpha + 2\beta)$ bodech x_2 , jež, spojeny s odpovídajícími body x_1 na K_1 , dají tvořící přímky zborcené plochy, jež protínají L . Jestliže je přímka $L \parallel O$, přejde λ_2 v rotační válcovou plochu, rovnoběžnou s O , z jejíchž bodů jeví se přímky O a L pod úhlem $90^\circ - \omega$, a tato protíná K_2 mimo $o_\infty, a_\infty, b_\infty$ ještě ve $2n - (2\alpha + 2\beta)$ bodech, takže bod o_∞ je pro plochu α -násobným a průmět hlavní plochy má za zdánlivý obrys křivku třídy $2(n - \alpha - \beta)$, ježto křivky K_2 a K_1 mají za půdorys shodné křivky stupňů $n - \alpha$, jež jdou β -krát kruhovými body. Bodem o_∞ prochází α tvořících přímek plochy, jež jsou vesměs v úběžné rovině. Tyto jsou úběžnými přímkami rovin, stanovených vždy odpovídajícími tečnami křivek K_1, K_2 v bodě o_∞ . Vedle těchto úběžných přímek má plocha ζ ještě $(n - \alpha - 2\beta)$ úběžných přímek, jež spojují odpovídající si úběžné body křivek K_1, K_2 mimo body $o_\infty, a_\infty, b_\infty$. Protíná tudíž úběžná rovina plochu ještě v křivce stupně $n - \alpha$. To lze ještě ukázat jinak. Všechny přímky komplexu, jež protínají obecnou úběžnou přímku L_∞ , mají své body x_2 v rovině, rovnoběžné s osou O , a ta protíná křivku K_2 v $(n - \alpha)$ bodech, jež, spojeny s odpovídajícími body, dají tolikéž přímek, jež protínají L_∞ . Lze též určit řídící kuželovou plochu zborcené plochy ζ . Dělíme-li stejně jako v odstavci 1 úsečky x_1x_2 v poměru λ , resp. $1/\lambda$, body x_3, x_4 , dostaneme z prostorů Σ_1, Σ_2 prostory Σ_3, Σ_4 , jež jsou vzájemně shodné a podobné s danými, jež lze opět ztotožnit šroubovým pohybem kol O , při čemž úhel otočení a délku posunutí lze snadno z ω a z určit. Prostory Σ_3, Σ_4 určují též tetraedrální komplex. Z křivek K_1 a K_2 dostaneme křivky K_3, K_4 , podobné daným, jež jsou též na ploše ζ . Měníme-li λ , dostaneme na ploše ζ ∞^1 párů shodných a mezi sebou podobných křivek. Speciálně pro $\lambda = -1$ splyne K_3 s K_4 v jedinou křivku K , body x_3 a x_4 přejdou v x , a přímka X

je též tečnou šroubovice bodu x_s pro šroubový pohyb o redukované výšce $v^0 = \frac{1}{2}z \cotg \omega$ a ose O . Dostáváme tudíž:

„Tečny všech šroubovic nějakého šroubového pohybu v bodech křivky K_s stupně n , jež jde α -krát úběžným bodem osy O šroubového pohybu a β -krát kruhovými body roviny, kolmé k ose, vyplňují zborcenou plochu ζ stupně $2n - \alpha - 2\beta$. Jestliže O je asymptotou křivky K_s , sniží se stupeň plochy o 1.“

Na př. při zborcené ploše šroubové je to dotýčný hyperbolický paraboloid ($n = 1, \alpha = \beta = 0$). Při vinutém sloupku tečny šroubovic v bodech normálního kruhového řezu vyplňují jednu soustavu přímek na hyperboloidu ($n = 2, \alpha = 0, \beta = 1$).

Otočíme-li průmět x'_s kol O' o 90° směrem šroubování dolů do bodu $\overline{x'_s}$, bude spojnice $x'_s v$, kde v je na O , a to nad průmětnou π ve vzdálenosti v^0 , rovnoběžná s X . Otočíme-li tedy K'_s o 90° ve směru šroubování dolů do křivky $\overline{K'_s}$, je $(v\overline{K'_s})$ řídicí kuželová plocha zborcené plochy ζ . Ježto K'_s je obecně stupně $n - \alpha$, je stejného stupně úběžná křivka plochy ζ . Jestliže průmět K'_s je křivkou stupně jen r , pak na každé tvořící přímce promítací válcové plochy křivky K_1 je $\frac{n-\alpha}{r}$ bodů křivky K_s , jimiž jdoucí vytvářející přímky plochy jsou spolu rovnoběžné. Plocha ζ má tudíž úběžnou křivku stupně r , která je však $\frac{n-\alpha}{r}$ -násobnou křivkou na ploše. Protíná-li křivka K_1 a tudíž také K_2 a K_s osu O q -krát, je osa O q -násobnou tvořící přímkou na ploše ζ . Jsou-li K_1, K_2 na rotačních válcových plochách, jež obsahují osu O , má plocha řídicí přímku, jež je v druhé společné tvořící přímce obou válcových ploch, jak vyplývá z části 1.

Jsou-li na př. K_1 a K_2 shodné kuželosečky, neobsahující o_∞ , je plocha ζ stupně 4 typu III s dvojnou kubikou, pro niž úběžná rovina je bitangenciální rovinou. Procházejí-li kuželosečky ty bodem o_∞ , je vytvořená plocha stupně 3 o řídicí rovině, tudíž konoid (K'_s je přímkou). Jsou-li K_1, K_2 kuželosečky v rovinách, jdoucích osou O , má vytvořená plocha 4^o O za dvojnou tvořící přímkou a její obě řídicí přímky splývají s přímkou úběžnou, jdoucí bodem o_∞ , tudíž je typu VIII, zvláštní to případ Frezierova cylindroidu. Torsální přímky těchto ploch jdou dotýcnými body kuželosečky s jejími tečnami, společnými s komplexovou parabolou v její rovině. Jsou-li kuželosečky ty kružnicemi, zůstává vše v platnosti jen v případě, že jsou kružnice v rovinách, kolmých k ose O , je $\beta = 1$ a dostáváme plochu stupně 2.

„Spojnice odpovídajících bodů dvou shodných řad na stejných kružnicích v rovinách rovnoběžných, vy-

tvářeji pro $2\omega \geq 180^\circ$ hyperboloid a pro $2\omega = 180^\circ$ kuželovou plochu 2^o."

*

Sur les courbes et les surfaces engendrées par les droites joignant les couples de points correspondants sur deux courbes en homographie.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur détermine les caractéristiques d'une courbe engendrée de la manière indiquée au titre, les deux courbes en homographie se trouvant dans le même plan. Cas particulier: l'homographie est une congruence. Étude analogue d'une surface gauche engendrée de la même manière, les deux courbes ne se trouvant pas dans le même plan. Cas particulier comme auparavant.

Několik poznámek o pectenoidu.

L. Seifert v Brně.

(Došlo 25. listopadu 1933.)

Pod jménem pectenoid nacházíme v literatuře plochu čtvrtého stupně, již zabýval se především Ball a pak A. Del Re.¹⁾ Poslední přichází k ní řešením jistého elementárního problému prostorového, odvozuje rovnici a parametrické vyjádření, podává dále zobrazení na rovinu a konstrukci kuželoseček na ploše, především reálných. V tomto článku chci ukázat, že na této metricky význačné ploše se nalézají soustava prostorových racionálních křivek čtvrtého stupně zvaných Eudoxovy hypopédy, jež vedou k některým zajímavým konstruktivním vztahům, jak podobně v jiném případě plochy čtvrtého stupně ukázal prof. M. Lerch.²⁾

I.

Rovnice uvažované plochy jest

$$(x^2 + y^2 + z^2)z^2 - h^2x^2 = 0 \quad (1)$$

a lze ji patrně dostati vyloučením parametru λ^2 z rovnic

$$\lambda^2(x^2 + y^2 + z^2) = h^2, \quad z^2 - \lambda^2x^2 = 0; \quad (2)$$

první z nich znamená svazek koncentrických koulí, druhá involuci rovin a oba útvary jsou vztaženy na sebe projektivně. Plocha má tři roviny souměrnosti a dvě dvojné přímky: osu OY ($x = z = 0$) a nevlastní přímku roviny $z = 0$. V rovinách $z = \lambda x$ jsou dle rovnic (2) kružnice, v rovinách $z = \pm k$ jsou hyperboly,

$$x^2(h^2 - k^2) - k^2y^2 = k^4, \quad (3)$$

pokud $|k| < h$. Tyto lze velmi snadno sestrojovati a lze jich použítí právě jako oněch kružnic ke konstrukcím obvyklým v deskr. geometrii, jak připomíná také A. Del Re ve vzpomenuté práci.

¹⁾ Ball: The Theory of Screws, Cambridge 1900; A. Del Re: Sopra una superficie del 4^o ordine, Rendiconti del circolo matematico di Palermo, t. XVII, 1903, p. 129.

²⁾ M. Lerch: O dvou plochách stupně čtvrtého, Rozpravy České akademie, tř. II, roč. XXII, č. 36, 1913.

Poznamenejme, že velmi pěkný obrázek dostaneme, omezíme-li část plochy koule o středu O a poloměru dostatečně velikém (asi $2h$).

Všimněme si vyjádření parametrického:

$$x = \frac{h \cos^2 \Theta \cdot \sin^2 \varphi}{\cos \varphi}, \quad y = \frac{h \sin \Theta \cdot \cos \Theta \cdot \sin^2 \varphi}{\cos \varphi},$$

$$z = h \cos \Theta \sin \varphi. \quad (4)$$

Křivky $\Theta = \text{konst.}$ jsou rovinné v rovinách $y/x = \tan \Theta$, křivky $\varphi = \text{konst.}$ jsou, jak snadno patrné, na plochách

$$z^2 = h \cos \varphi \cdot x, \quad (5)$$

$$x^2 + y^2 - z^2 \tan^2 \varphi = 0, \quad (6)$$

$$x^2 + y^2 - h \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi} x = 0, \quad (7)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{h}{\cos \varphi} x = 0. \quad (8)$$

Křivka $\varphi = \text{konst.}$, již budeme značiti H^φ , jest tedy průsek koule (8) s rotačním válcem (7), který se jí dotýká v bodě O . Tyto křivky slují *hypopédy*.

Rovnice tečny křivky H^φ v bodě (Θ, φ) zní:

$$X = \frac{h \sin^2 \varphi}{\cos \varphi} \cos^2 \Theta - \varrho \sin 2\Theta,$$

$$Y = \frac{h \sin^2 \varphi}{\cos \varphi} \sin \Theta \cos \Theta + \varrho \cos 2\Theta, \quad (9)$$

$$Z = h \sin \varphi \cos \Theta - \varrho \cotg \varphi \cdot \sin \Theta.$$

Snadno seznáme, že stopa tečny opisuje na $z = 0$ kisoidu

$$(X^2 + Y^2) X + \frac{h \sin^2 \varphi}{\cos \varphi} Y^2 = 0. \quad (10)$$

Jednoduché konstrukce v obou průmětech vyplývající z rovnic (5)–(9) ponecháváme čtenáři.

Hypopédou H^φ jde svazek ploch druhého stupně

$$\left(x^2 + y^2 + z^2 - \frac{h}{\cos \varphi} x \right) - \lambda (z^2 - h \cos \varphi x) = 0; \quad (11)$$

plochy jsou rotační, střed $\left[\frac{h}{2 \cos \varphi} (1 - \lambda \cos^2 \varphi), 0, 0 \right]$ se pohybuje po ose OX , osa zůstává rovnoběžna s OZ . Poloměr rovníku je $a = \frac{h}{2 \cos \varphi} (1 - \lambda \cos^2 \varphi)$, délka poloosy $b = \frac{1 - \lambda \cos^2 \varphi}{2 \cos \varphi (1 - \lambda)}$.

Plocha (11) seče pectenoid ještě v jiné křivce čtvrtého stupně. Vyloučením y z (1) a (11) dostáváme

$$z^2 + \frac{h}{\lambda \cos \varphi} x = 0.$$

Vidíme tedy, že křivka je opět hypopéda $H\varphi'$ a srovnáním s rovnicí (5) jde

$$\cos \varphi' = -\frac{1}{\lambda \cos \varphi} \text{ či } \cos \varphi' \cdot \cos \varphi = -\frac{1}{\lambda}, \quad (12)$$

Dospíváme tedy k výsledku, že plochy svazku (11) sekou pectenoid v ostatních hypopédách systému, čili že každé dvě hypopédy $H\varphi$, $H\varphi'$ jsou na ploše rotační.

Volíme-li $\lambda = -1/\cos^2 \varphi$, pak $\cos \varphi' = \cos \varphi$, obě křivky splynou a plocha se pectenoidu dotýká. Tedy tento se jeví jako obálka systému ploch rotačních druhého stupně

$$\cos^2 \varphi (x^2 + y^2 + z^2) - 2h \cos \varphi \cdot x + z^2 = 0. \quad (13)$$

Píšeme-li v rov. (11) $\lambda = -\frac{1}{\cos \varphi \cos \varphi'}$, dostaneme tvar symetrický

$$(x^2 + y^2 + z^2) \cos \varphi \cos \varphi' + z^2 - hx (\cos \varphi + \cos \varphi') = 0$$

či

$$A(x^2 + y^2 + z^2) + z^2 + Bhx = 0.$$

To je kongruence ploch, z nichž každá obsahuje dvě hypopédy.

Zajímavá je plocha normál pectenoidu podél hypopédy $H\varphi$, jež je zároveň plochou normál rotační plochy (13) podél této křivky. Parametrické vyjádření plochy (13) lze psáti

$$x = \frac{h}{\cos \varphi} (1 + \cos \alpha \cos \beta), \quad y = \frac{h}{\cos \varphi} \cos \alpha \sin \beta, \quad (14)$$

$$z = \frac{h}{\sqrt{1 + \cos^2 \varphi}} \sin \alpha.$$

Normála bodu $P(\alpha, \beta)$ seče osu plochy v bodě

$$N \left(\frac{h}{\cos \varphi}, 0, -\frac{h \sin \alpha}{\cos^2 \varphi \sqrt{1 + \cos^2 \varphi}} \right). \quad (15)$$

Srovnáním (14) a (15) jde $Z_N/z = -1/\cos^2 \varphi$ a tedy, je-li S střed plochy (13), M stopa normály na $z = 0$, pak $SM/P_1M = -1/\cos^2 \varphi$. Poněvadž P_1 opisuje kruh (7), opisuje M také kruh a tedy stopy normál pectenoidu podél hypopédy $H\varphi$ opisují kružnici. Jejich rovnici lze snadno nalézt:

$$X^2 + Y^2 - \frac{h}{\cos \varphi} X + \frac{h^2}{(1 + \cos^2 \varphi)^2} = 0, \quad (16)$$

Rovnice plochy tvořené normálami je poněkud složitá, ale lze ji napsati, uvážíme-li, že podle rovnice (5) podél H^φ platí

$$\sin^2 \alpha = (1 + \cos^2 \varphi) (1 + \cos \alpha \cos \beta).$$

Abychom zodpověděli různé otázky týkající se tečen hypopéd, použijme rovnic (9). Tažme se nejprve po geom. místě těchto tečen podél křivky $\Theta' = \text{konst.}$ čili podél průseku plochy s rovinou $y/x = \text{tg } \Theta$.

Z rovnic (9) je viděti okamžitě

$$X \cos 2\Theta + Y \sin 2\Theta - \frac{h \sin^2 \varphi}{\cos \varphi} \cos^2 \Theta = 0; \quad (17)$$

průmět tečny má tedy stálý směr a tečna sama je rovnoběžná s rovinou $X \cos 2\Theta + Y \sin 2\Theta = 0$. To ostatně je patrné i z toho, že průměty hypopéd jsou kružnice, jež se v O dotýkají osy OY .

Pro průsečík tečny s rovinou $Z = 0$ vychází

$$X = -\frac{h \sin^2 \varphi}{\cos \varphi} \cos^2 \Theta, \quad Y = \frac{h \sin^2 \varphi}{\cos \varphi} \cdot \frac{\cos^3 \Theta}{\sin \Theta}, \quad \bar{X} = -\frac{\cos \Theta}{\sin \Theta}, \quad (18)$$

tedy *tečny hypopéd podél křivky v rovině $y/x = \text{tg } \Theta$ protínají pevnou přímku v rovině $Z = 0$, přímku $y/x = -\text{cotg } \Theta$.*

K témuž výsledku přijdeme, utvoříme-li rovnici roviny, jež spojuje tečnu s počátkem O . Dostaneme

$$X \cos \Theta + Y \sin \Theta - 2Z \text{tg } \varphi = 0; \quad (19)$$

tyto roviny tvoří tedy svazek s osou $Z = 0$, $y/x = -\text{cotg } \Theta$.

Z rovnic (17) a (19) jde vyloučením φ rovnice plochy těchto tečen

$$4Z^2 (X \cos 2\Theta + Y \sin 2\Theta)^2 [4Z^2 + (X \cos \Theta + Y \sin \Theta)] = \\ = h^4 \cos^4 \Theta \cdot (X \cos \Theta + Y \sin \Theta)^4 \quad (20)$$

II.

Všimněme si přímkové plochy tvořené asymptotami hyperbol (3) v rovinách $z = \pm k$. Rovnici její dostaneme, píšeme-li v levé straně rovnice (3) z místo k :

$$z^2 (x^2 + y^2) - h^2 x^2 = 0; \quad (21)$$

má OZ a nevlastní přímku roviny $z = 0$ za dvojnásobné řídící, OY za dvojnou tvořící přímku. Mimo to má v nevlastní rovině dvě imaginární přímky tvořící $x^2 + y^2 = 0$. V rovinách $z = \text{konst.}$ jsou páry reálných přímek v mezích $z = \pm h$. Parametrické vyjádření jest

$$x = \varrho \cos^2 \varphi, \quad y = \varrho \cos \varphi \sin \varphi, \quad z = \pm h \cos \varphi. \quad (22)$$

Různé křivky na ploše lze dostati, klademe-li $\varrho = f(\varphi)$. Speciálně pro $\varrho = \text{konstante}$ dostaneme opět hypopédy, neb $x^2 + y^2 = \varrho^2 \cos^2 \varphi$ a vyloučíme-li φ z této a poslední z rovnic (22), dostaneme rotační kužel

$$x^2 + y^2 - \frac{\varrho^2}{h^2} z^2 = 0;$$

mimo to snadno vidíme, že

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{\varrho^2 + h^2}{\varrho} x,$$

což je rovnice koule. Z obou jde rovnice válce

$$x^2 + y^2 = \varrho x. \quad (23)$$

Půdorysy hypopéd jsou tedy kružnice, jež v O se dotýkají osy OY .

Pro $\varrho = \lambda / \cos \varphi$ dostáváme elipsy v rovinách přímkou OY ; jejich půdorysy jsou kruhy

$$x^2 + y^2 = \lambda^2. \quad (24)$$

Výjevy týkající se osvětlení jsou dosti složité vyjma zvláštní polohy bodu. Rovnice první poláry bodu $P(x_0, y_0, z_0)$ jest

$$x_0 x (z^2 - h^2) + y_0 y z^2 + z_0 z (x^2 + y^2) - h^2 x^2 = 0. \quad (25)$$

Zajímavý je případ, je-li P na OY ($x_0 = z_0 = 0$); pak poslední rovnice přejde v

$$y_0 y z^2 - h^2 x^2 = 0. \quad (26)$$

Vyloučíme-li z této a (21) veličinu z , dostaneme

$$x^2 + y^2 - y_0 y = 0 \quad (27)$$

jako půdorys meze vlastního stínu. Z (26) a (27) jde také

$$z^2 = \frac{h^2}{y_0} (y_0 - y). \quad (28)$$

Tato křivka je tedy průsek válce rotačního (27) a válce parabolického (28) a mimo to jí prochází koule

$$x^2 + \left(y - \frac{y_0^2 - h^2}{2y_0} \right)^2 + z^2 = \frac{(y_0^2 + h^2)^2}{4y_0^2}. \quad (29)$$

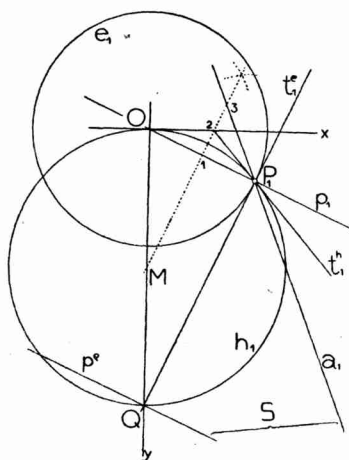
Půdorys meze je kruh dotýkající se osy OX , průmět do (yz) je parabola. Z rovnic (27) a (28) jde také

$$x^2 + (y - y_0)^2 = \frac{z^2}{h^2} y_0^2, \quad (30)$$

což je rovnice rotačního kuželu. Uvažovaná křivka je tedy opět

hypopéda. V parametrickém vyjádření (22) odpovídají tyto křivky hodnotě $\varrho = k \operatorname{tg} \varphi$.

Podle známého teoremu Koenigsova tvoří rovinné průseky osou OY a dotyčné křivky kuželů s vrcholy na této ose dva systémy sdružených čar na ploše. Průseky s rovinami $z/x = k$ promítnou se do (xy) jako soustředné kruhy $x^2 + y^2 - h^2/k^2 = 0$. Z toho vyplývají jednoduché a zajímavé konstrukce.



Buď P_1 půdorys bodu na ploše, e_1 půdorys elipsy v rovině (OPY) , h_1 půdorys hypopédy řady posledně uvažované. Pak t_1^o , t_1^h jsou půdorysy dvou sdružených tečen bodu P . p_1 je obraz přímky plochy, obraz a_1 druhé hlavní tečny bodu P odděluje s p_1 harmonicky t_1^o , t_1^h . Dostaneme ji tedy snadno, učiníme-li, jak z obrazu patrné, $\overline{23} = \overline{12}$. Tečná rovina bodu P je určena přímkou p a tečnou t^o , jejíž stopa Q je na OY . Bodem Q jde tedy stopa tečné roviny p^o rovnoběžně s p_1 . Na ní leží stopa S hlavní tečny a . Z obrázku je snadno patrné:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\overline{13}}{\overline{1P_1}} = 2 \cdot \frac{\overline{12}}{\overline{OP_1}} = 2 \operatorname{tg} \varphi,$$

a odtud souřadnice bodu S

$$x_s = \frac{\varrho}{2} \frac{\cos^3 \varphi}{\sin^2 \varphi}, \quad y_s = \frac{\varrho}{2} \cdot \frac{2 + \cos^2 \varphi}{\sin \varphi},$$

kde ϱ značí délku OP_1 . Odtud lze snadno napsati rovnice hlavní tečny.

Z uvedené konstrukce hlavní tečny lze také sledovati průběh asymptotických křivek v půdorysu, což ponecháváme čtenáři.

Příslušnou diferenciální rovnici těchto čar lze v uzavřeném tvaru integrovati. Půdorysy jsou čáry transcendentní a nemají asi další zajímavosti.

*

Quelques remarques sur le pectenoïde.

(Extrait de l'article précédent.)

On appelle pectenoïde la surface du quatrième degré dont l'équation peut s'écrire sous la forme (1). Elle a été étudiée par Ball et A. del Re (l. c.); celui-ci a trouvé surtout les droites et les coniques de la surface. Je montre, dans cet article, qu'il y a sur la surface une famille d'hippopèdes, données, dans l'expression paramétrique (4), par $\varphi = C^{te}$. Chacune d'elle est base d'un faisceau de quadriques (11) et en même temps elle est la caractéristique de la famille (13) de quadriques (φ étant variable). Le pectenoïde est donc l'enveloppe de la famille en question. Les traces des normales de la surface le long d'une telle hippopède remplissent un cercle; les tangentes des différentes hippopèdes le long de la courbe $y/x = \operatorname{tg} \Theta$ sont incidentes avec la droite $z = 0$, $y/x = -\operatorname{cotg} \Theta$.

Les asymptotes des hyperboles situées dans un plan $z = k$ engendrent une surface réglée (21) qui contient encore deux familles de hippopèdes dont les projections sur $z = 0$ sont données par les équations (23) et (27). La famille possédant la projection (27) et des courbes $z/x = k$ qui se projettent suivant les cercles concentriques, forment deux systèmes conjugués. Donc, on peut trouver une construction bien simple de la tangente asymptotique en un point général de la surface réglée en question.

Zobecnění věty Feuerbachovy.

Dr. Aug. Vondráček.

(Došlo 14. prosince 1933.)

1. Větu Feuerbachovu, vyslovující známou vlastnost, že kružnice devíti bodů (Eulerova) se dotýká čtyř kružnic trojúhelníku vnitř a vně vepsaných, řešil cyklograficky W. Fiedler.¹⁾ Na neúplnost, ba nedostatečnost postupu Fiedlerova poukázal r. 1911 E. Müller. Podrobně dokázal — rovněž úvahami cyklografickými — větu zvěčnilý profesor dr. Jan Sobotka r. 1922,²⁾ posléze je řešena též v nové knize Müllerově.³⁾

K zobecnění této věty vede úloha: sestrojiti kuželosečku, procházející danými dvěma (reálnými nebo sdruženě imaginárními) body M, N a daných tří přímk a, b, c se dotýkající. Už předem z analogie s kružnicemi trojúhelníku vepsanými soudíme, že úloha bude čtyřznačná, poněvadž v předložené úloze nahrazujeme jen absolutní body kruhové párem bodů M, N a musí tedy platiti i *zobecněná věta Feuerbachova*:

„Ke čtyřem kuželosečkám k_0, k_1, k_2, k_3 , procházejícím danými dvěma body M, N a majícím tři společné tečny v přímkách a, b, c , lze sestrojiti kuželosečku q , jež oněmi společnými body M, N prochází a všech čtyř kuželoseček se dotýká.“

Touto úplnou analogií s větou Feuerbachovou lze větu právě vyslovenou považovati za dokázanu. Nicméně uvedeme samostatný ryze syntetický důkaz této věty, čímž obráceně bude dokázána znovu i věta Feuerbachova o kružnici devíti bodů; výhodou tu bude, že se touto cestou oprostíme od rozebírání vztahů metrických, jež speciální větu Feuerbachovu nutně doprovázely. Celá úloha má dvě podstatné složky, jež v následujícím uvedeme: prokázání čtyřznačnosti řešení a důkaz existence páté dotyčné kuželosečky q .

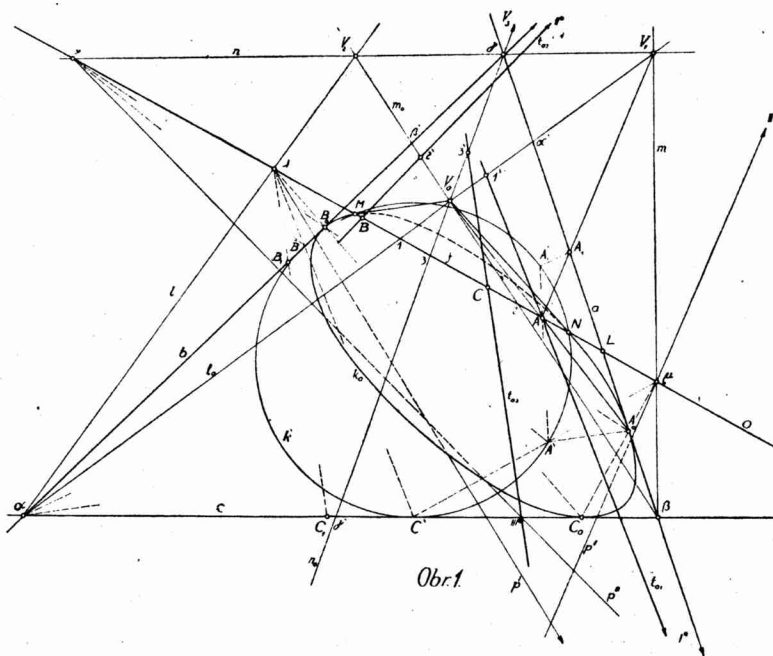
2. Buďte dány body M, N a tečny a, b, c jako určovací prvky kuželosečky (obr. 1). Tyto tečny tvoří trojúhelník o vrcholech

¹⁾ *Zyklographie oder Konstruktion der Aufgaben über Kreise und Kugeln*, Lipsko 1882.

²⁾ K dvěma důkazům věty Feuerbachovy, *Rozpravy Čes. akademie věd a um.*, II. tř., roč. XXXI.

³⁾ *Vorlesungen über darst. Geometrie*, II. sv., *Die Zyklographie*, 1929, odst. 35, kde uvedeny i bližší poznámky.

α, β, γ , kde $\alpha \equiv (b, c)$, $\beta \equiv (c, a)$, $\gamma \equiv (a, b)$. Zvolíme-li na tečně c bod C' , určí body M, N, C' s tečnou c v C' svazek kuželoseček, z něhož dvě kuželosečky k', k'' se, jak známo, přímky b dotýkají. Buď B' dotyčným bodem kuželosečky k' ; ta je s kuželosečkou hledanou ve vztahu centrické kolineace o středu kolineace ve



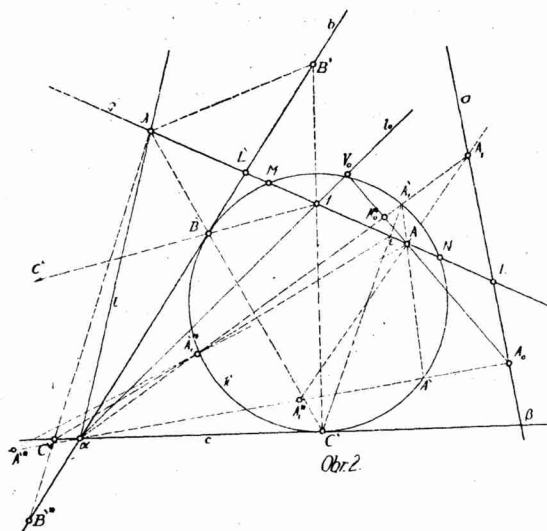
vrchole α a ose kolineační $o \equiv \overline{MN}$. Z průsečíku L třetí tečny a s o lze sestrojiti ke k' dvě tečny s dotyčnými body A', A_1 , což vede k dvěma kuželosečkám k_0, k_1 naší úlohy.

Prvá kuželosečka k_0 je s k' kolineární s párem korespondujících bodů A', A_0 , kde A_0 je dotyčným bodem na a [$A_0 \equiv (\alpha A', a)$], druhá k_1 pak párem $A', A_1 \equiv (\alpha A_1, a)$ při společném kolineačním středu α a ose o . Užitím těchto kolineací snadno vyšetříme dotyčné body B_0, C_0 kuželosečky k_0, B_1, C_1 kuželosečky k_1 na tečnách b, c : $\overline{A'C'}$ protne o v bodě μ , načež μA_0 dá na c dotyčný bod C_0 , $\overline{C'B'}$ protne osu o v bodě λ , λC_0 určí na b dotyčný bod B_0 ; rovněž spojnice $\overline{A'B'}, \overline{A_0 B_0}$ se protínají v bodě ν na o . Právě tak stanovíme dotyčné body B_1, C_1 kuželosečky k_1 ; $\overline{B_1 C_1}$ prochází též bodem λ . Patrně všechny tři kuželosečky k', k_0, k_1 , dotýkající se přímek b, c a procházející body M, N , mají společnou poláru $l_0 \equiv \alpha V_0$ bodu λ ,

tvořící s $l \equiv \overline{\alpha\lambda}$ vzhledem k b, c paprskovou čtveřici harmonickou; na l_0 jsou tudíž i póly V_0, V_1 spojnice $o \equiv \overline{MN}$ vzhledem ke k_0, k_1 .

Druhá pomocná kuželosečka k'' užitého pomocného svazku M, N, C' s tečnou c v C' , dotýkající se tečny b v B'' , vede analogicky k dvěma dalším kuželosečkám k_2, k_3 naší úlohy, takže docházíme skutečně k řešení celkem čtyřznačnému.

Snadno seznáme, že uvedené odvození kuželoseček k_0, k_1, k_2, k_3 je na volbě bodu C' na c nezávislé. Řadě bodů $C', C'', \dots$ na c přísluší řada involucí na b , vyřazených obdobnými svazky pomocných kuželoseček; všechny tyto involuce mají patrně společný pár



α, L' ($L' \equiv b, o$) a proto ony dvojné body $B', B''; B'', B'''; \dots$ těchto involucí tvoří samy involuci o dvojných bodech α, L' , takže $(B'B''\alpha L') = -1$. Prochází tedy spojnice bodu C' s příslušným párem B', B'' na b jednak bodem λ , jednak průsečíkem I poláry l_0 s o a právě tak pro páry $C', C''; C'', C'''; \dots$ na c . Tím se všechny pomocné kuželosečky rozdělují na dvě skupiny. Bodu na příkl. C'' (obr. 2) na c přísluší v první skupině dotyčný bod $B'' \equiv (b, C''\lambda)$ a tedy kuželosečka k'' , jež však vede k týmž dvěma kuželosečkám k_0, k_1 naší úlohy jako výše užitá kuželosečka k' . Neboť obě pomocné kuželosečky k', k'' jsou ve vztahu centrické kolineace pro α jako střed a o jako osu kolineační, takže $C'A_1, C''A_1'$ se protnou v bodě ϵ na o , $\alpha A_1'$ dá na $C''A_1'$ bod A_1'' . Bodu A' přísluší A'' . Lze tedy bodu A'' přiřaditi na a kolineaci týž dotyčný bod A_0 , takže kolineace s A'' vede k téže kuželosečce k_0 .

a právě tak bod A_1^* vede k témuž bodu A_1 na a a tedy k téže kuželosečce k_1 . Tím jediná čtyřznačná skupina řešení úlohy kuželosečkami k_0, k_1, k_2, k_3 prokázána.

Příslušné sobě poláry bodu L : dříve sestrojená $\overline{A'A_1}$ ke k^* a $A^*A_1^*$ ke k^* se protnou v bodě A na o , takže $(LAMN) = -1$. Týmž bodem A procházejí i poláry $\overline{A_0A_0^*}$ a $\overline{A_1A_1^*}$ bodu L vůči k_0, k_1 , obsahující ovšem i pól V_0 resp. V_1 osy $o \equiv \overline{MN}$ vzhledem k těmto kuželosečkám.

Polára l_0 bodu λ vůči kuželosečkám k_0, k_1 prochází, jak výše již uvedeno, póly V_0, V_1 spojnice o , takže $(l_0bc) = -1$. Právě tak polára m_0 bodu μ vůči k_0 prochází body β, V_0 , takže $(mm_0ca) = -1$, $m \equiv \overline{\beta\mu}$, polára n_0 bodu ν vzhledem ke k_0 jde body γ, V_0 , $(nn_0ab) = -1$, $n \equiv \overline{\gamma\nu}$. Jako jsme shledali, že kuželosečky k_0, k_1 mají společnou poláru l_0 bodu λ tím, že jsme uvažovali pomocné kuželosečky $k', \dots$ dotýkající se společných tečen b, c , mohli jsme užítí centrické kolineace se středem β nebo γ . Z toho, jakož i z okolnosti, že žádná ze společných tečen a, b, c resp. vrcholů α, β, γ nemá při řešení nějakého zvláštního postavení, seznáváme, že lze ony čtyři kuželosečky seskupiti ve tři skupiny na př. $k_0, k_1; k_0, k_2; k_0, k_3$, mající v l_0, m_0, n_0 vždy společné poláry bodů λ, μ, ν na o .

Přímky l_0, m_0, n_0 se protínají v pólu V_0 kuželosečky $k_0; l_0, m, n$ v pólu V_1 kuželosečky k_1, l, m_0, n v pólu V_2 kuželosečky $k_2; l, m, n_0$ v pólu V_3 kuželosečky k_3 pro tutéž poláru o , při čemž vždy páry těchto přímek z jednoho vrcholu jsou stranami z téhož vrcholu vycházejícími harmonicky odděleny. (Analogon s osami vnitřních a vnějších úhlů trojúhelníka a se středy vepsaných kružnic věty Feuerbachovy.)

3. Považujme póly V_0, V_1, V_2, V_3 za ortogonální průměty vrcholů ${}^1V_0, {}^1V_1, {}^1V_2, {}^1V_3$ kuželů K_0, K_1, K_2, K_3 o stopních kuželosečkách k_0, k_1, k_2, k_3 .

Tečny a, b, c buďte stopami tečných rovin π, ϱ, σ kužele na př. K_0 , protínajících se tedy v bodě 1V_0 , jež si představme třeba nad nákresnou. Kužel K_1 má s K_0 společnou tečnou rovinu π a dotýká se rovin ${}^1V_1b, {}^1V_1c$, kužel K_2 má s K_0 společnou tečnou rovinu ϱ a dotýká se rovin ${}^1V_2a, {}^1V_2c$, K_3 s K_0 má tečnou rovinu σ a dotýká se rovin ${}^1V_3a, {}^1V_3b$. Spojnice vrcholů $\overline{{}^1V_0{}^1V_1}, \overline{{}^1V_0{}^1V_2}, \overline{{}^1V_0{}^1V_3}$ protnou a, b, c v stopnicích α', β', γ' .

Všechny čtyři kužele mají vedle těchto po dvou společných tečných rovin společnou kuželosečku $1f$ v rovině ${}^1\varphi$ kolmé k nákresně nad spojnicí $\overline{MN} \equiv o$, jejímž průmětem a zároveň osou je úsečka $\overline{MN}$ sama. Neboť obrysové roviny všech těchto kuželů, kolmé k nákresně, se protínají v přímkách ${}^1m, {}^1n$ k nákresně kolmých, kuželů se dotýkajících a promítajících se do M, N . Mimo to mají

průsečné kuželosečky ${}^1k_0, {}^1k_1$ kuželů K_0, K_1 s rovinou ${}^1\varphi$ společný bod 1A , jehož průmětem je výše stanovený bod A , konjugovaný s L vzhledem ke všem kuželosečkám k_0, k_1, k_2, k_3 . V bodě 1A se protínají povrchy ${}^1V_0A_0, {}^1V_1A_1$ obou kuželů, ležící v společné tečné rovině π .

Právě tak je ale bod 1B , jehož průmětem je bod B konjugovaný k bodu $L' \equiv (b, o)$, společným bodem průsečných kuželoseček ${}^1k_0, {}^1k_2$ kuželů K_0, K_2 s rovinou ${}^1\varphi$. Zřejmě tudíž ${}^1k_0 \equiv {}^1k_1 \equiv {}^1k_2 \equiv {}^1k_3 \equiv {}^1f$.

Kuželosečky k_0, k_1, k_2, k_3 jsou centrálními průměty této společné kuželosečky 1f z vrcholů 1V_i ($i = 0, 1, 2, 3$) do nákresny a lze je tudíž přiléhavě označiti jako *konografické průměty* oněch vrcholů vzhledem k dané kuželosečce 1f (případ B, δ , uvedený jako zobecnění zobrazování cyklografického v Müllerově *Zyklographie*, Anhang, str. 460).

Kužele K_i ($i = 0, 1, 2, 3$) o společné kuželosečce 1f se pronikají po páru ještě v kuželosečkách. Je-li ${}^1k_{01}$ proniková kuželosečka kuželů K_0, K_1 , prochází její rovina I , jak známo, bodem ${}^1I'$ na ${}^1V_0{}^1V_1$, harmonicky odděleným bodem 1I , průsečíkem roviny ${}^1\varphi$ s ${}^1V_0{}^1V_1$ vzhledem k vrcholům ${}^1V_0, {}^1V_1$ [průmět $I \equiv (MN, l_0)$, $(II'V_0V_1) = -1$]. Bod ${}^1I'$ je pólem kuželosečky ${}^1k_{01}$ vzhledem k průsečnici roviny I s rovinou ${}^1\varphi$. Poněvadž ale oba kužele K_0, K_1 se společné tečné roviny π ve výše zmíněném bodě 1A dotýkají (dvojný bod pronikové křivky), prochází ona průsečnice tímto bodem, takže přímka ${}^1t_{01} \equiv {}^1I'{}^1A$ je už jednou z tečen z bodu ${}^1I'$ ke ${}^1k_{01}$ (průmět $t_{01} \equiv I'A$) v rovině π .

Stejně dospějeme v společné tečné rovině ϱ kuželů K_0, K_2 k přímce ${}^1t_{02} \equiv {}^12'{}^1B$, v rovině σ pak k přímce ${}^1t_{03} \equiv {}^13'{}^1C$, dotýkající se kuželů K_0, K_3 [v průmětech $(22'V_0V_2) = -1$, $(33'V_0V_3) = -1$, $2 \equiv (o, m_0)$, $3 \equiv (o, n_0)$].

Roviny I, II, III kuželoseček ${}^1k_{01}, {}^1k_{02}, {}^1k_{03}$ se protnou v bodě 1Q , o němž seznáme, že patří všem čtyřem kuželům K_i ($i = 0, 1, 2, 3$).

Neboť přímku ${}^1t_{01}$ a kuželosečku 1f lze spojit hyperboloidem ${}^1H_{01}$ o stopní kuželosečce v nákresně, patřící svazku (k_0, k_1) ; plochy ${}^1H_{01}, K_0, K_1$, patřící témuž svazku, se protínají právě v kuželosečce ${}^1k_{01}$. Podobně jsme přímkami ${}^1t_{02}, {}^1t_{03}$ vedeni k plochám ${}^1H_{02}, {}^1H_{03}$.

Tyto tři plochy ${}^1H_{0i}$ ($i = 1, 2, 3$), nepatří zřejmě témuž svazku, protnou se mimo 1f ve dvou bodech, z nichž jeden 1Q musí být incidentní s kuželosečkami ${}^1k_{0i}$ ($i = 1, 2, 3$).

Konografickým průmětem q tohoto bodu vzhledem ke kuželosečce 1f je kuželosečka, a to jediná, jež se všech čtyř kuželoseček k_0, k_1, k_2, k_3 v nákresně dotýká. Tím zobecněná věta Feuerbachova dokázána.

Généralisation du théorème de Feuerbach.

(Extrait de l'article précédent.)

Étant donnés deux points M, N et trois droites a, b, c , on peut construire quatre coniques k_0, k_1, k_2, k_3 passant par M, N et ayant a, b, c pour tangentes. L'auteur démontre synthétiquement l'existence d'une cinquième conique q , passant par M, N et tangente aux quatre coniques k_0, k_1, k_2, k_3 .

ČÁST FYSIKÁLNÍ

O modifikaci Moseleyho zákona pro prvky stabilní konfigurace.

V. Dolejšek.

(Došlo 20. března 1934.)

V pracích publikovaných s mými spolupracovníky studovali jsme, jak přesně je platný zákon Moseleyho a je-li možno empiricky najít takovou modifikaci, která by vystihovala průběh celým periodickým systémem prvků. Chci uvést pouze původní tvar rovnice, který jsme dostali v práci s Dr. Pestrecovem.¹⁾ Je to tvar

$$\nu/R = a + bN + cN^2 + dN^3 + eN^4.$$

Počítali jsme průběh této rovnice (kde N je atom. číslo prvku, a, b, c, d, e empirické konstanty) tak, aby difference hodnot měřených a hodnot počítaných z této rovnice, t. j. $\Delta \frac{\nu}{R} = \frac{\nu}{R_{\text{poč.}}} - \frac{\nu}{R_{\text{měř.}}}$, jako funkce atomového čísla nejevila žádný systematický chod stoupající nebo klesající. Výhoda této modifikace Moseleyho zákona spočívá v tom, že je možno nanést graficky v libovolném měřítku difference mezi hodnotami počítanými a měřenými a ve sporných případech studovati tak nejen přesnost zákona Moseleyho, nýbrž i správnost hodnot měřených.²⁾

Pro srovnání se semiteoretickou rovnicí Sommerfeldovou a modifikací Bohr-Costerovou uvedli jsme tuto rovnici na tvar

$$\frac{\nu}{R} = e(N - \delta)^4 + f(N - \gamma)^2 + a^*,$$

a to pro K -niveau,³⁾ při čemž po dosazení numerických hodnot se ukázalo, že absolutní člen a^* lze zanedbat, takže formálně se tvar naší rovnice shoduje s rovnicí semiteoretickou fysikálně zdůvodněnou. Po zavedení příslušných fysikálních konstant ukázala se i číselná shoda s teoretickou částí rovnice.

¹⁾ V. Dolejšek - K. Pestrecov: Comptes Rendus, 188, 164, 1929; Zs. f. Phys., 53, 566, 1929.

²⁾ M. Siegbahn - V. Dolejšek: Zs. f. Phys., 10, 159, 1922.

V. Dolejšek - M. Valouch: Bulletin de l'Acad. des Sciences de Bohême, 1928, č. 47.

³⁾ V. Dolejšek - K. Pestrecov: Phys. Zsft., 30, 898, 1929.

Průběh hodnot K -niveau byl takovou rovnicí vystižen úplně v přesnosti pozorovacích chyb.⁴⁾ Pouze u nižších prvků se ukázaly některé nepravidelné difference. Proto jsme s Dr. Pestrecovem měřili znovu v těchto místech a vyloučením vlivu chemické vazby na hodnoty K -niveau tím, že jsme uvažovali pouze volné prvky ve stavu pevném nesloučené, snížili jsme nepřesnost hodnot u těchto nižších prvků, kde se jejich chemická vazba značně projevuje, jak ukázali Lind, Coster, Chamberlain a jiní autoři. Odchyly takového hodnota měřených prvků nulvalentních od hodnot počítaných jako funkce atomového čísla ukázaly určitou periodicitu a nepřesahovaly nikdy náhle čili „nespojité“ nad mez přesnosti tak, jak se původně zdálo (plynulý průběh Moseleyho zákona). Kdy taková náhlá „diskontinuita“ může nastati, ukázal V. Kunzl⁵⁾ tím, že studoval průběh takového prvků při nejvyšší možné jejich valenci u K -niveau a L -niveau.

O reálnosti těchto variací, které tímto způsobem byly pozorovány, nelze přirozeně předem nic říci, neboť mohly by býti zapříčiněny rozdílem mezi křivkou skutečnou zákona Moseleyho a empirickou křivkou námi udanou. Že tomu tak není, je viděti z toho, že se ukazuje více periodických variací mezi hodnotami měřenými a počítanými, než by bylo možno očekávati z rozdílu křivky čtvrtého stupně a křivky skutečné Moseleyho zákona. Kromě toho je viděti, že nulové body (t. j. prvky, pro něž difference mezi hodnotami počítanými a měřenými je nulová) se nalézají v okolí prvků význačných pro periodický systém. Takových nulových bodů je devět a to prvky nulté a osmé grupy, jejich konfigurace podle Bohrova schematu budování prvků periodického systému je stabilní. Jak ukázal Pestrecov⁶⁾ ve své disertační práci, je výhodnější pro určování koeficientů naší křivky voliti tyto prvky periodického systému jako východisko při stanovení koeficientu naší křivky přímo některé z uvedených devíti prvků. (Pozn.: Poněvadž prvky nulté grupy jsou plyny, je nutno bráti v úvahu hodnoty interpolované místo hodnot měřených, poněvadž hodnoty prvků ostatních jsou měřeny ve stavu pevném a ne ve stavu plynném.) To znamená, že naše křivka čtvrtého stupně platí (eventuálně ve tvaru bikvadratickém se čtyřmi koeficienty) pro devět prvků stabilních nulté a osmé grupy. Při stanovení průběhu pro K -niveau není možno říci, zda zbývající prvek stabilní osmé grupy (t. j. v okolí platinových kovů) se nachází na této křivce,

⁴⁾ V. Dolejšek - K. Pestrecov: Zs. f. Phys., I. c.

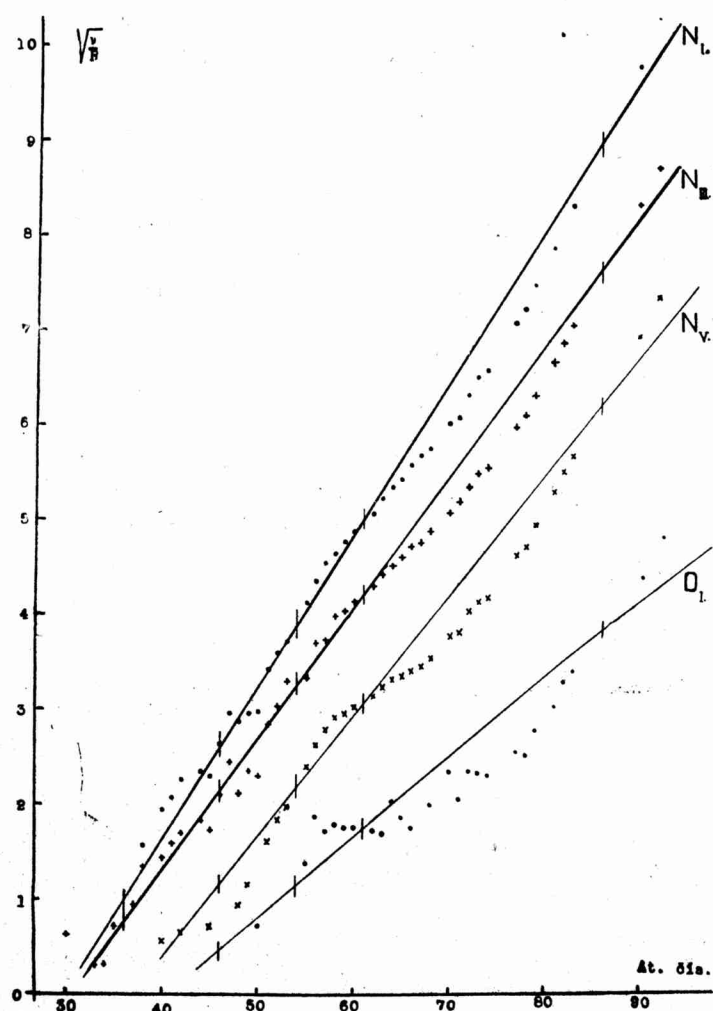
⁵⁾ V. Kunzl: Publications de la fac. des Sc. de l'Univ. Charles, č. 130, 1930.

V. Kunzl: Collection, 5, 214, 1932.

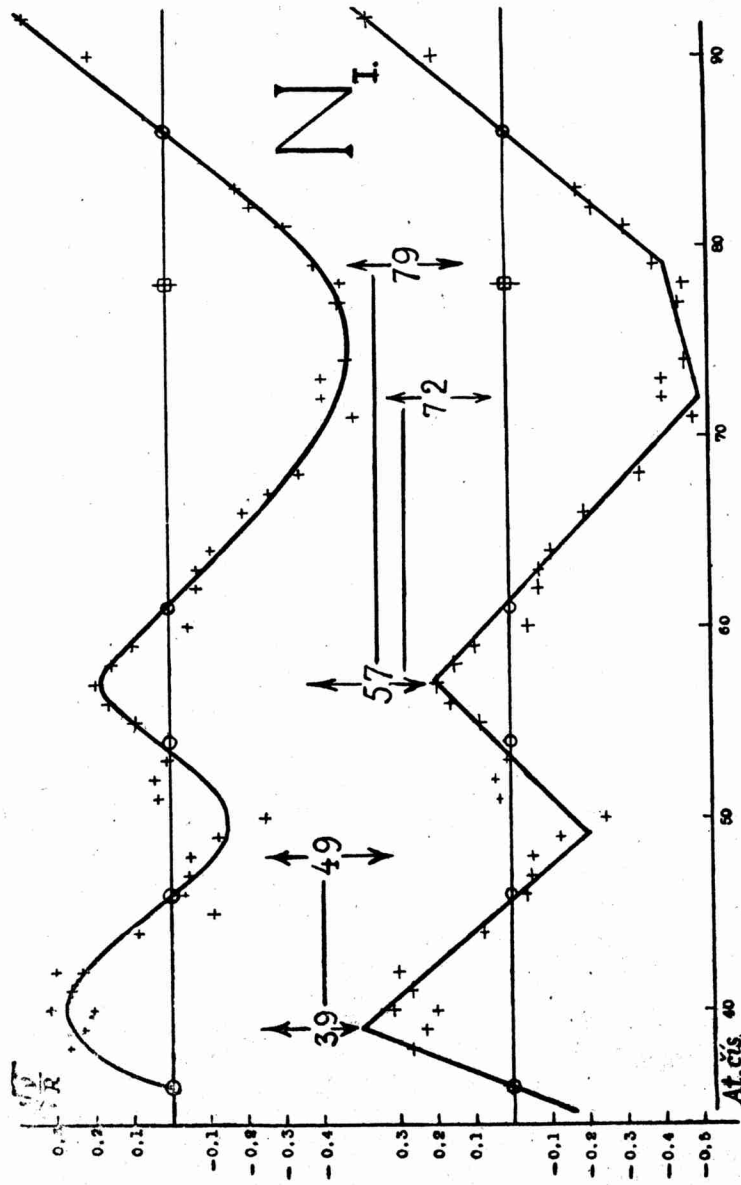
⁶⁾ K. Pestrecov: Publications de la fac. des Sc. de l'univ. Charles, čís. 90, 1929.

avšak Pestrecovovo studium u L -niveau a M -niveau ukázalo, že tento prvek tvoří u všech niveaux výjimku.

Z novějších výsledků měření je zřejmo, že naše modifikace Moseleyho zákona (daná s Dr. Pestrecovem) se ukazuje zvláště jednoduchou pro vyšší niveau, t. j. pro niveau M_V , a všechny N a O -niveau. Pro tato niveaux zmizí totiž v naší rovnici členy čtvrtého a třetího stupně. To znamená, pro stabilní prvky



Obr. I.



Qbr. 2,

(nulté a osmé grupy) Moseleyho zákon v původním tvaru bez jakékoliv korekce je přesně platný, čili pro stabilní prvky je $\sqrt{\nu/R}$ lineární funkcí atomového čísla.

Poněvadž celková energie N a O -niveau je menší než niveaux ostatních, je možno přímo nanést graficky její hodnoty a pozorovati skutečný jejich průběh bez našeho způsobu pozorování. Na grafu č. 1 je patrný takový průběh hodnot $\sqrt{\nu/R}$. Z grafu je viděti, že přímka vedená takovými stabilními prvky protíná pětkrát skutečný průběh Moseleyho zákona, to znamená při týchž prvcích, jako tomu bylo při stanovení průběhu K , L a M -niveau křivkou čtvrtého stupně. Stejně i v tomto případě u N -niveau je patrné, že prvky v okolí platinových kovů (78) jeví opět stejné výjimky jako v průběhu K nebo M -niveaux. Jako N_I -niveau se chová stejně N_{II} , N_{III} , N_{IV} , N_V -niveau a O_I -niveau. (Pro N_{VI} a N_{VII} -niveau není dostatek hodnot měřených, takže nelze dosud nic bezpečného o nich říci.) Aby graf byl přehlednější, nejsou tam nanášena niveaux N_{II} a N_{IV} , jichž průběh je velmi blízký N_{III} a N_V , a přehlednost grafu by se ztrácela. Odchylky od tohoto lineárního průběhu můžeme přirozeně i tentokrát u N -niveaux lépe pozorovati způsobem, jako jsme to činili dříve, t. j. nanášením graficky jako funkce atomového čísla rozdílů takového lineárního průběhu a hodnot měřených:

$$\Delta\sqrt{\nu/R} = \sqrt{\nu/R_{\text{cal}}} - \sqrt{\nu/R}.$$

Z grafu č. 2 vidíme, že odečtením takového lineárního průběhu $\sqrt{\nu/R}$ zůstaly nám periodické variace jako dříve u K , L , M -niveaux, při křivce čtvrtého stupně. V tomto případě, když jsme odečetli lineární průběh, můžeme blíže srovnati tyto odchylky s výsledky, které obdrželi Bohr a Coster ve svých pracích. Podobným způsobem postupoval Sakae-Idei⁷⁾ ve své práci.

Sakae-Idei podle jeho slov modifikoval naši metodu tím způsobem, že místo křivky vystihující průběh prvků pro celý periodický systém odečetl lineární průběh vystihující zhruba průběh prvků pouze pro dotýčný úsek. Rozdílly tyto nanášel graficky a tím způsobem sledoval detailně změny na význačných místech periodického systému, jak je předpověděli ve svých pracích Bohr, Coster a j. Poněvadž tento lineární průběh $\sqrt{\nu/R}$ byl ovšem libovolně určen, mohl sledovati blíže tyto změny na některých místech periodického systému, ne však celkový charakter průběhu, jak je tomu v našem případě. Z grafu č. 2, kde je odečten lineární průběh pro prvky stabilní, je patrné, že není žádný systematický chod odchylek ostatních prvků, nýbrž že tyto odchylky jako funkce atomového čísla ukazují pouze periodické variace, jak jsme již

⁷⁾ Sakae-Idei: Science Reports of the Tohoku Imperial University, 19, 641 a 651, 1930, 19, 560, 1930.

dříve ukázali, a které Sakae-Idei jeho metodou nemohl pozorovat. Při bližším rozboru těchto periodických variací je patrné, že energie prvků následujících grupy nulté (na př. at. č. 36, 54 a 86) mají větší energii než je taková, která by právě resultovala ze zákona Moseleyho, platného pro prvky stabilní. Tyto odchylky nejsou největší pro prvky osmé grupy (také stabilní), nýbrž právě pro tyto prvky jsou nulové, stejně jako pro prvky grupy nulté. Energie prvků následujících po osmé grupě je menší, než jak by plynulo ze zákona Moseleyho v naší modifikaci. V tomto směru konfigurace stabilní grupy nulové a grupy osmé ukazují tedy různý charakter, neboť jednou u prvků následujících po takové konfiguraci stabilní se ukazuje zvětšení přírůstku energie oproti normálnímu přírůstku plynoucímu z lineárního Moseleyho zákona, po druhé naopak se ukazuje zmenšení přírůstku energie, a to u prvků následujících grupu osmou. Největší přírůstek energie oproti přírůstku, jaký by plynul z Moseleyho zákona při postupném budování periodického systému, se ukazuje v sousedství prvku at. čís. 39 a největší zmenšení přírůstku se ukazuje v sousedství prvku at. čís. 49. Tyto dva prvky s maximální variací jsou kromě toho charakteristické prvky podle Bohr-Costera pro průběh Moseleyho zákona.

Stejně je tomu po prvku at. čís. 54 nulté grupy, kde se ukazuje opět přírůstek energie, který dostupuje maxima v sousedství charakteristického prvku podle Bohr-Costera (at. čís. 57), odtud se začne přírůstek zmenšovati, prochází nulovým bodem křivky v okolí prvku at. č. 61 (počátek vzácných zemin, kladený do osmé grupy) a dosahuje největšího zmenšení přírůstku energie v okolí charakteristického prvku at. č. 72, kde trvá tento přírůstek až k prvku at. č. 79 (rovněž charakteristický), odkud nastává zmenšení a podobně u dalšího prvku nulté grupy at. č. 86 stává se variace nulovou. Význačné prvky podle Bohr-Costera, v této práci uvedené, při nichž nastávalo maximum přírůstku a minimum, vyznačují se tím, že při nich začíná (maximum přírůstku), resp. končí (minimum přírůstku) budování některé vnitřní grupy elektronické. Podle Bohr-Costera průběh mezi těmito jednotlivými úseky je lineární. Poněvadž pro prvky stabilní odečtli jsme nyní rovněž lineární průběh a to v hodnotách $\sqrt{\nu/R}$, je možno v tomto případě pro N -niveaux srovnati tyto periodické variace plynoucí z naší práce s výsledky Bohr-Costerovými, neboť je-li podle Bohr-Costera průběh Moseleyho zákona lineární v $\sqrt{\nu/R}$ pro určitý úsek a jeví náhlé zlomy na právě uvedených místech, pak i v tomto případě odchylky na grafu 2 nanesené musí jako funkce atomového čísla jevití lineární průběh. Z tohoto grafu je však též patrné, jaká je souvislost mezi zlomy Bohr-Costerovými periodického systému a našimi periodickými variacemi. Zlomy, v nichž nastává budování

vnitřní dráhy elektronické, jeví se jako zmenšení energie proti energii, jaká by byla u stabilních prvků. Pro žádnou jinou grupu periodického systému není možné, co jak patrně platí současně pro dvě grupy, obě vyznačující stabilní konfiguraci. Z grafu č. 2 možno porovnat, do jaké míry jeví jednotlivé úseky našich periodických variací a náhlé zlomy na charakteristických místech periodického systému a jak souvisí s maximy našich variací. Zřejmé je, že v naší modifikaci charakteristická místa periodického systému nevystupují v průběhu samém, ale v periodických variacích. Možno tudíž označiti tyto periodické variace, stejně jako variace v našich předchozích pracích při studiu křivky vyššího stupně, jako odchylky průběhu, který platí pro prvky stabilní konfigurace. Detailnější studium takových míst vyplývajících z výše uvedeného vztahu bude podáno po získání potřebného experimentálního materiálu.

*

Sur la modification de la loi de Moseley.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur et M. Pestrecov ont donné une modification de la loi de Moseley pour les neuf éléments de la configuration stable (les éléments de la groupe huit à l'exception des éléments No. at. 78) à l'aide de la courbe du quatrième degré. Dans ces travaux ils ont montré quelques conséquences, résultantes de la modification citée. Dans ce travail l'auteur a démontré à l'aide de la modification citée que pour le niveau supérieur et c'est p. ex. pour tous les niveaux N , la loi de Moseley est valable pour tous les éléments cités avec la configuration stable dans un état simple linéaire, cela veut dire que la courbe du quatrième degré pour la valeur ν/R donnant l'allure pour les éléments stables pour les niveaux K , L et M se simplifie au cas de niveau N à la courbe du deuxième degré. Même dans ce cas l'élément du No. at. 78 fait l'exception, car il n'est pas placé sur l'allure valable pour les éléments stables. L'allure des valeurs $\sqrt{\nu/R}$ pour les éléments stables pour le niveau N est donc une fonction linéaire du numéro atomique.

Pour les autres éléments les différences des valeurs mesurées de valeurs calculées de l'allure linéaire montrent pour les autres éléments des variations périodiques, qui sont maximales justement aux lieux caractéristiques du système périodique d'après le travail MM. Bohr et Coster par ce fait que la formation d'une certaine groupe interne électronique commence (ce qui se manifeste dans notre cas comme maximum de la variation de l'accroissement) par rapport à l'allure linéaire, ou qu'un certain niveau électronique complète sa formation (ce qui se manifeste comme maximum de décroissement par rapport à l'allure linéaire citée). Le résultat cité pour le niveau N montre le rapport simple entre les éléments stables du système périodique et entre les éléments caractéristiques d'après MM. Bohr et Coster.

O rozdílu mezi vývěvami kondenzačními a difusními.

V. Dolejšek.

(Došlo 20. března 1934.)

Nejdůležitější skupinu vývěv v technice vysokého vakua tvoří vývěvy, v nichž se používá k docílení vakua par určitých látek. V názvech těchto vývěv jeví se však veliký zmatek. Bývají označovány jako vývěvy difusní, vývěvy kondenzační a vývěvy ejektorové neboli paprskové a protože se v označení vidí zároveň podstatná vlastnost čerpacího zařízení. Zmatek se jeví i v názorech na princip čerpání.¹⁾ Důležité jest uvědomiti si, co je skutečně podstatou čerpání nových velmi výkonných vývěv pro pochopení možnosti dalšího vývoje. Chci na základě výsledků získaných v pracích za jiným účelem se svými spolupracovníky²⁾ podati příspěvek k této otázce.

Základ této skupiny vývěv dali ve dvou různých směrech jednak Gaede r. 1915 a jednak Langmuir r. 1916. Gaede³⁾ nazval prvou vývěvu k docílení vakua jím konstruovanou vývěvou difusní, neboť byl veden k její konstrukci aplikací zákonů získaných jím a některými jinými autory z prací o difuzi při nízkých tlacích. Podle výsledků Gaedeho je možno za tohoto nízkého tlaku získati vysoké vakuum tím způsobem, že plyny vnikají difuzí do par rtuti. Nejsou-li v parách rtuti žádné cizí plyny, je v nich parciální tlak plynu nulový. Naproti tomu v recipientu, pokud není úplně vyčerpán, je parciální tlak plynu vždy vyšší. Proto difunduje plyn z recipientu do paprsku parního i když je v něm tlak páry vyšší, neboť difuze závisí na rozdílu parciálních tlaků.

U prvé vývěvy konstruované Gaedem se skutečně může jednati jen o difuzi, neboť páry rtuti proudí jen kolem místa styku par a plynu a nemůže nastati strhování plynu přenášením kinetické energie molekul par. Difusní princip prvé vývěvy Gaedeho je

¹⁾ Tak na př. kondenzační vývěvy olejové, vyrobené Metropolitan Wickers Comp., převzaté firmou Leybold, bývají nazývány vývěvami difusními.

²⁾ J. Bačkovský, V. Vand, A. Svoboda.

³⁾ W. Gaede: *Annalen d. Phys.* 46, 357, 1915. *Zeitschr. f. techn. Phys.* 4, 337, 1923. *Zeitschr. f. techn. Phys.* 15, 210, 1932.

patrný jedině z obrazu původní vývěvy Gaedeho, neboť novější schemata, která Gaede udává, neodpovídají výhradně principu difuze a skreslují rozdíl mezi výsledky Gaedeho a jiných autorů.^{3,4)}

Jako optimální se ukázala u vývěv Gaedeho teplota 100° C a při ní byla maximální čerpací rychlost 80 cm³/sec. Tato rychlost čerpací zůstává podle měření Gaedeho a Eberta konstantní v oboru 10⁻²—10⁻⁵ mm Hg. Podle Gaedeho nastane difuze jen tehdy, je-li tlak par takový, že střední volná dráha molekul v okolí štěrbin je dostatečně veliká, neboť je-li střední volná dráha molekul malá, je většina molekul plynu parami sražena zpět. Směrodatný je podle výsledků Gaedeho pro rychlost difuze poměr střední volné dráhy molekul k šířce difusní štěrbin. Maximální rychlosti čerpací se podle Gaedeho dosáhne, rovná-li se šířka štěrbin řádově střední volné dráze molekul plynu a liší-li se tlak par jen málo od vakua předčerpacího. Naproti tomu experimentálně nebyla již při této vývěvě potvrzena závislost rychlosti difuze na šířce štěrbin.

Další vývoj se neděl však a nemůže se díti na základě představ o difusi. Platí to i pro novější vývěvy typu Gaedeho, které jsou upraveny podle výsledků získaných na základě prací jiných autorů a neplynou nikterak ze zákonů o difusi. Zvláště to platí pro vývoj vývěv s jinými pohonnými látkami než se rtutí. V první vývěvě Gaedem konstruované lze proudění kolem štěrbin difusní považovati za skutečně velmi nepatrné, takže prouděním nemůže nastati strhování molekul. O tom, že proudění nespolutpůsobí kladně při čerpání, svědčí také to, že při teplotě o málo vyšší, než je teplota 100° C, čerpací efekt vývěvy naprosto přestává.

V r. 1916 konstruoval Langmuir⁴⁾ vývěvu, kterou nazval kondenzační, neboť byl veden k její konstrukci na základě výsledku svých prací o kondensaci, reflexi a reevaporaci molekul. Způsob čerpání vývěvy Langmuirovy je naprosto rozdílný od způsobu čerpání vývěvy Gaedeho a neplyne nijak z výsledků o difusi. Jediné aplikace způsobu čerpání Langmuirem udaného umožňují, že vývěvy parní jsou dnes nejdůležitější skupinou vývěv vysokovakuumových. Podle Langmuira se děje čerpání i při nízkých tlacích při vhodném uspořádání hlavně přenášením kinetické energie molekul par a jejich kondensací. Vliv difuze podle Langmuira při vnikání plynu do par je nepatrný a Langmuir se nijak nesnaží difusi zvýšiti. Vývěva Langmuirova (a všechny novější vývěvy) je konstruována tak, aby plyn byl proudícími parami stržen a dopraven do prostoru kondenzačního a to pokud možno za velké rychlosti molekul par. Molekuly plynu paprskem par stržené jsou vlivem značné kinetické energie molekul par stlačeny a dopraveny do prostoru kondenzačního, kde jsou páry kondensovány. Z úvah Langmuirových vysvítá.

⁴⁾ J. Langmuir: Phys. Rev. 8, 48, 1916; General Electric Rev., str. 1060 1916.

že v první řadě dbal na to, aby teplota stěn, na které dopadnou páry po stržení molekul plynu, a to páry značně teplé, byla dostatečně nízká, aby se na nich molekuly par skutečně kondensovaly a neodrážely se všemi směry, čímž by zabraňovaly dalším molekulám plynu vstup do paprsku. Hlavním znakem vývěvy podle Langmuira konstruované tudíž je, že páry mají pokud možno značnou rychlost, takže komprimují stržený plyn do prostoru kondenzačního, kde jsou rychle kondensovány. Z toho je pochopitelné, že vývěva Langmuirova, která není nikterak upravena podle názorů o difuzi, docílí velmi značné rychlosti čerpací (4000 cm³/sec). Ve srovnání s vývěvou Gaedeho, konstruovanou na základě názorů o difuzi, činil by tudíž ve vývěvě Langmuirově příspěvek difuze maximálně 2% celkové hodnoty. U této vývěvy není již též pro všechny obory tlaku čerpací rychlost stálá, jak tomu bylo u vývěvy Gaedeho, nýbrž při vyšších vakuích klesá asi na polovinu původní hodnoty.⁵⁾

Další vývoj vývěv navazuje výhradně na postup Langmuirův, t. j. na vývěvy kondenzační, a aplikuje na jeho výsledky poznatky získané z hubic ejektorových. Názory o difuzi nezpůsobily pokrok ani v jediném případě, novější práce Gaedeho nevyjímaje. Z těchto prací (Williams, Knip, Thomson a jiní) je to zvláště obsáhlá práce Crawfordova.⁶⁾ Vývěva jeho je u nás známa v úpravě Stintzingově (vyrábí firma Pfeiffer). Hubice této vývěvy ukazuje tvarem na první pohled, že byla získána, na základě jeho teorie „paralelních paprsků“, aplikací zákonů z parních strojů čili hubic ejektorových na obor vysokého vakua. Výkon vývěvy této není však větší než vývěvy Langmuirovy, ale rozdíl mezi vakuem předčerpacím a vysokým lze tímto způsobem poněkud zvýšiti. Další autoři pokračovali směrem Crawfordovým měníce empiricky rozměry hubic, jejichž tvar zůstával však podoben ejektorům. Tímto empirickým způsobem zvýšila se nejen možnost použití nižšího vakua předčerpacího, nýbrž zvýšila se též značně rychlost čerpací.

Na principu ejektorovém konstruoval dobrou vývěvu s parami rtuti Volmer⁷⁾ a nazval ji vývěvou rtuťového parního paprsku. Vývěva pracuje již za předčerpacího vakua daného vodní vývěvou (12 mm Hg) a bývá nazývána též krátce vývěvou ejektorovou. Takto modifikovaný typ vývěvy Langmuirovy je nejvýkonnější vývěvou vysokovakuovou vůbec a je zajímavé, že právě u novějších vývěv Gaedeho (nazývaných ovšem vývěvy difusní) byl velmi úspěšně použit. Gaede říká⁸⁾: „Různá pojmenování spočívají

⁵⁾ Vývěvy typu Langmuirova konstruované pro rtuť lze též beze změny použiti pro některé jiné kapaliny beztlakové, na př. oleje. Pro vývěvy jiných typů to neplatí.

⁶⁾ W. Crawford: Phys. Rev., 10, 557, 1917.

⁷⁾ E. Volmer: Zs. f. angew. Chemie, 34, 149, 1921.

⁸⁾ W. Gaede: Lehrb. d. Phys. Tech. Mech., VI, 102, 1928.

v podstatě jen na tom, že rozdíl mezi vývěvou s parním paprskem a vývěvou difusní nebyl jasně poznán.“ Dále praví: „... všechny tyto vývěvy mají stejný znak, který již Gaede ve své nejprvnější publikaci (D. R. P. 286.404) jako nejdůležitější a pro takové vývěvy nejcharakterističtější jmenoval, totiž: střední volná dráha molekul plynu v proudu par nesmí překročiti šířku otvoru šterbiny.“

K ozřejmění, jak pracuje ve vysokém vakuu vývěva s hubicí analogicky k vývěvě ejektorové konstruovanou, uvedu následující výsledky pokusů: Užijme vývěvy s dobrou hubicí asi tvaru Gaedeho čerpající z tlaku vodní vývěvy, t. j. asi z 12 mm Hg. Velikost a tvar této hubice a vzdálenost obou částí (hnací a ssací) jsou pro výkonnost takové ejektorové vývěvy velmi důležité. Konstrukce pro tento obor vakua je jediné možná na základě poznatků z vývěv ejektorových.⁹⁾ Užijeme-li v takové vývěvě ejektorové s dobrou hubicí tvaru Gaedeho předčerpacího vakua na př. 12 mm Hg, tu vývěva začne nám čerpati teprve při určité minimální teplotě, určující za daného uspořádání současně tlak par před a za dyksnou i jejich rychlost. Teplotu a hustotu par nelze dobře určit, poněvadž by se tím změnily skutečné pracovní podmínky, ale pro výsledek stačí usuzovati na změnu velikosti dodaného tepla. Za předvakua 12 mm Hg dá nám v tomto případě vývěva vakuum asi 10^{-1} mm Hg. Zvyšujeme-li při této minimální teplotě vakuum předčerpací, nezlepší se nám vakuum vývěvou docílené, ani když zvýšíme vakuum předčerpací až na 10^{-1} mm Hg. Ponecháme-li však nyní toto zvýšené vakuum předčerpací a snižujeme-li topení, tu při určité nižší teplotě (a hustotě par) dá nám vývěva náhle s touto hubicí vakuum řádu 10^{-3} mm Hg (t. j. vakuum tense par rtuti, které nebyly v tomto případě vymrznutím zkondenzovány).

Vakuum předčerpací	Vakuum vysoké
12 mm Hg	0,1 mm Hg
0,1 mm Hg	0,1 mm Hg
0,1 mm Hg	0,001 mm Hg

Tento pokus je stejně reprodukovatelný i při zvyšování topení, tedy při postupu opačném. Z tohoto výsledku je viděti, že vývěva ejektorová může sloužiti v naprosto stejném tvaru a velikosti jako vývěva vysokovakuová. Je to v souhlase s tím, co říká Gaede.⁹⁾ To, že nevzniká za všech předpokladů paprsek páry, je viděti

⁹⁾ Gaede praví: „Difusní vývěva může během čerpání nejdříve, pokud tlak vzduchu je ještě veliký, pracovati jako vývěva ejektorová za předpokladu, že hubice je takového tvaru, že paprsek páry se vůbec může vytvořiti, což však vždy nenastává.“ Z poznámky Gaedeho o tvaru hubice je zřejmo, že na základě názorů o difusi nemůže vzniknouti dobrá ejektorová vývěva.

z podobného pokusu s hubicí tvaru Crawfordova (resp. Stintzingova), neboť tato vývěva začne čerpati za předčerpacího vakua 0,1 mm Hg při určité teplotě a čerpá na vysoké vakuum v určitém rozmezí teploty (t. j. při dalším zvyšování topení přestane čerpati). Naproti tomu při větším předvakuu nečerpá tato vývěva vůbec. To znamená, že vývěvy s hubicí konstruovanou pro čerpání ve vysokém vakuu nelze s úspěchem použít jako vývěvy ejektorové, avšak vývěvy s hubicí ejektorovou lze za určitých podmínek (teploty a hustoty par) použít k čerpání ve vysokém vakuu.

Tento výsledek nejlépe pochopíme, uvážíme-li čerpání ve čtyřstupňové vývěvě Gaedeho. Vývěva sestává v prvních třech stupních ze tří stejných hubic umístěných nad sebou, s jakou byl uvedený pokus proveden. Je zřejmo, že v prvním nejnižším stupni vývěvy Gaedeho je tlak par větší než ve stupni druhém, kam proudí páry ještě další trubicí, která klade parám určitý odpor, čímž tlak par v této hubici je jistě snížen. To znamená ve srovnání s uvedeným pokusem, že vývěva v prvním stupni ejektorová má v druhém stupni takovou hustotu par, že je vhodná pro obor vysokého vakua. Výklad, jak se děje čerpání v jednotlivých dyksnách při různých stupních docíleného vakua, je podán v publikacích Gaedeho a v prospektech o jeho vývěvách. Čtvrtý stupeň této vývěvy Gaedeho (dovolující čerpati již z předčerpacího vakua 40 mm Hg) není již zcela shodný se třemi stupni ejektorovými dříve uvedenými, ale jeví konstruktivně rovněž zřejmé stopy principu ejektorového a liší se pouze nepodstatně tvarem a rozměry. Rozhodně ani tento čtvrtý stupeň není upraven, jak by snad plynulo na základě našich názorů o difusi. Že lze pouze na základě tohoto názoru docílit značných rychlostí čerpacích, je zřejmé též z novějších prací amerických autorů Langmuira, Clevelanda a Payneho,¹⁰⁾ v jejichž vývěvách jsou rozměry a tvar hubic upraveny pro obor vysokého vakua na základě analogie k principu ejektorovému empiricky s největším zřetelem na kondensaci. Jak velkou roli hraje kondensace v dalším vývoji vývěv, je zřejmé z vývěvy Gaede-Keessomovy.¹¹⁾ Gaede a Keessom zvýšili rychlost čerpací tím, že do vývěvy zavedli ještě přímé chlazení uvnitř difusní hubice, tedy zdokonalenou kondensací. Gaede ovšem podotýká, že zvláštní chlazení uvnitř vysokého vakua je proto nutné, aby střední volná dráha molekul plynů obsažených v parách paprsku rtuti byla přizpůsobena tak, aby byla dosti velká vzhledem k velikým dimensím vývěvy. Poněvadž již při prvé vývěvě Gaedem konstruované závislost rychlosti čerpací na otvoru difusní štěrby se nepotvrdila, je zřejmé, že zvýšení rychlosti čerpací je způsobeno pouze dokonalou kondensací proudících par a přenášením kinetické energie.

¹⁰⁾ Journal of Franklin Institute, 213, No 119, 1932.

¹¹⁾ Gaede-Keessom: Zs. f. Instrumentalkunde, 49, 298, 1929.

Podle některých našich předběžných výsledků ve vývěvách při použití jiných beztlakových vysokovroucích kapalin (nyní zvaných Američany flegmatických) jako látek pohonných místo rtuti se zdá, že v takových vývěvách nastává dvojí čerpání, při určité nižší teplotě (malé rozmezí teplot!), které přestane při zvyšování teploty a pak teprve při určité vyšší teplotě nastane čerpání o značnějším výkonu. Je nasnadě myšlenka, že by prvé čerpání při určité nižší teplotě mohlo býti způsobeno tím, že podmínky jsou právě vhodné pro difusi. Opakování těchto pokusů nebylo však dosud přesně reprodukovatelné, takže není jisto, zda nastává toto nepatrné čerpání při určité nižší teplotě vlivem difuse, či je snad způsobeno tím, že v látkách, při nichž toto čerpání nastalo (olej, dibutylftalát a glycerin), byla přítomna nějaká látka jiná, která tento efekt způsobila.

*

Sur la différence entre les pompes à vide à condensation et à diffusion.

(Extrait de l'article précédent.)

De l'expérience qu'a fait l'auteur à l'aide d'une pompe à vide avec un éjecteur en forme de Mr. Gaede et avec l'éjecteur de Mr. Crawford et en comparant ce résultat avec les conditions existants dans les différents pompes à vide, il s'est montré que les éjecteurs travaillent sur certaines conditions aussi dans la région du haut vide. Mais les conditions ne sont pas seulement données par le changement du vide préparatoires, comme Mr. Gaede le dit, mais aussi par le changement de température et de densité de vapeur. Dans la pompe de plusieurs degrés de Gaede, les conditions sont atteintes par la longueur et les dimensions différentes des tubes qui sont parcourus par les vapeurs de mercure. Au contraire, il n'est pas possible pour l'éjecteur de Crawford travaillant dans le haut vide d'atteindre par le changement de telles conditions pour qu'il travaille aussi dans le vide dans la domaine du vide ordinaire. En comparant ce résultat, l'auteur montre que le principe de ces pompes est comme il est dit par Langmuir et par le transport de l'énergie de molécules de vapeur et par leurs condensations pendant que la contribution de la diffusion est très petite. Cela est aussi prouvé par le résultat préliminaire de l'auteur et ses collaborateurs. Il a observé en employant les différents liquides (huile, dibutylthalate et glycérine) dans les pompes à vide que ces pompes fonctionnent aussi à une température plus basse qu'est la température ordinaire de fonctionnement. La vitesse de cette manière de pomper est très petite et il semble que cet effet peut être causé par la diffusion.

Longitudinální termomagnetický efekt potenciální u oceli.

Jan Mikulíček.

(Došlo 27. února 1934.)

K měření tohoto efektu bylo použito dvojího materiálu, jednak ocelové struny (průměru 0,5 mm, ocel *a*), jednak obyčejného ocelového drátu (průměru 1,5 mm, ocel *b*). U obojího materiálu jevil se efekt podstatně odlišně. Efekt spočívá, jak známo, v tom, že v ocelové tyčince, protékané tepelným proudem, nastává v příčném magnetickém poli změna spádu potenciálu ΔE . K měření této změny potenciálu magnetickým polem bylo použito jednoduché i násobné metody Zahradníčkovy.¹⁾ Při měřeních bylo použito magnetického pole velkého elektromagnetu, který mezi pólovými nástavky průměru 8 cm při vzdálenosti nástavků 1,6 cm dával magnetické pole intensity až 10.000 gaussů. Intensita magnetického pole H byla měřena balistickým galvanometrem (cívečkou o průměru 3 cm, o 11 závitěch a odporu 18 ohmů).

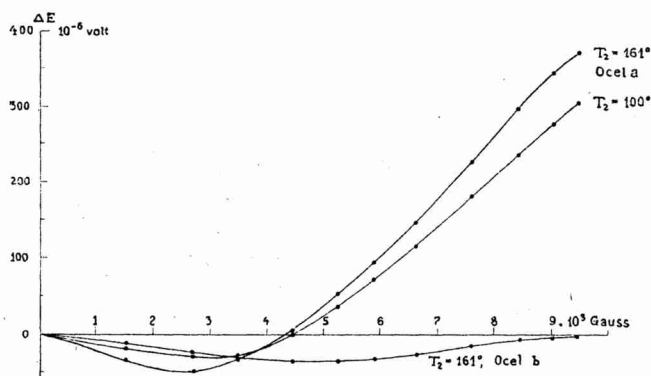
Galvanometr, jehož bylo použito k měření efektu ΔE , měl odpor 4,6 ohmů a citlivost $G = 7,35_3 \cdot 10^{-9}$ amp. na 1 mm při vzdálenosti škály 1 m.

Měření byla provedena na preparátech z obojího materiálu oběma metodami. Při jednoduché metodě byly ke krajům drátu, délky asi 50 cm, připájeny měděné přívodní dráty. Na zkoušený drát byla navlečena elektrická pícka. Spájená místa byla vložena do mosazných trubic, kterými protékala voda z vodovodu a udržovala je na stálé teplotě T_1 (asi 10° C). Elektrickou píckou udržovala se část zkoušeného drátu na teplotě T_2 a pícka byla posunuta tak, aby celá část drátu o tepelném spádu $T_2 - T_1$ se nalézala v magnetickém poli. Výsledky měření u obou preparátů oceli *a* a oceli *b* byly podstatně odlišné. Ocelová struna (ocel *a*) jevila velkou obdobu se železem, neboť směr ΔE byl pro hodnoty intensity pole $0 < H < 3500$ gaussů opačný než směr tepelného proudu, pro $H > 3500$ gaussů souhlasný. U preparátu oceli *b* nenastala v našem poli změna směru (znamení) ΔE . Směr ΔE byl v rozsahu celého našeho magnetického pole opačný než směr tepelného

¹⁾ ZS. f. Physik, 66, 425, 1930.

spádu. Absolutní hodnoty ΔE rostly s rostoucím rozdílem teplot $\Delta T = T_2 - T_1$.

Odlišnost obou ocelových preparátů pro tento efekt vynikla ještě zřetelněji při měření metodou multiplikační. K tomu bylo použito dvou cívek. Na jedné z nich bylo navinuto 2krát po 17 závitů téže ocelové struny, které bylo použito při měření metodou jednoduchou, dvakrát bavlnou izolované; na druhé cívice bylo navinuto dvakrát po 11 závitů obyčejného ocelového drátu (ocel b), průměru 1,5 mm, dvakrát bavlnou izolovaného.²⁾ Úprava preparátu je podrobně popsána v citované práci.³⁾ K získání různých



Obr. 1.

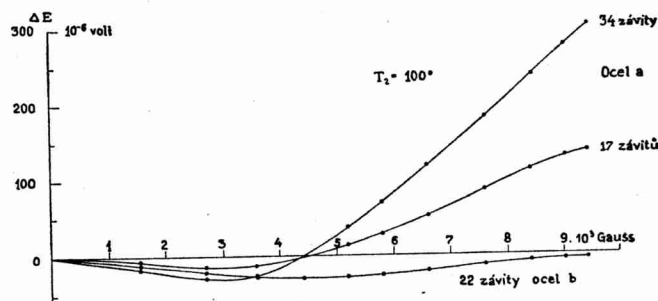
Tabulka 1.

H gauss	34 závitů, ocel a			22 závitů, ocel b	
	$\Delta E \cdot 10^6 \text{ V}$	$\Delta E \cdot 10^6 \text{ V}$	$\Delta E \cdot 10^6 \text{ V}$	$\Delta E \cdot 10^6 \text{ V}$	$\Delta E \cdot 10^6 \text{ V}$
1480	— 13,90	— 19,40	— 36,00	— 7,90	— 12,30
2650	26,80	29,40	49,60	20,00	24,00
3620	18,90	27,60	29,61	26,67	34,30
4400	2,83	+ 1,30	+ 6,78	27,70	36,00
5220	+ 21,60	32,00	56,42	27,10	34,90
5800	52,00	76,90	102,50	25,52	33,20
6540	86,17	118,00	151,30	20,32	28,90
7560	135,20	177,00	229,10	12,41	14,90
8360	172,00	236,00	297,00	6,36	8,73
9000	207,30	278,00	350,10	4,23	5,41
9400	214,00	302,00	372,00	3,52	4,82
$T_2 =$	78°	100°	161°	100°	161°

²⁾ Isolovaný drát železný a ocelový dodala bezplatně kabelovna v Bratislavě, začež jí na tomto místě vzdáváme dík.

³⁾ Spisy vydávané přírodovědeckou fakultou Masarykovy university č. 95. J. Zahradníček: Měření termomagnet. longitud. efektu potenciálního 1928.

ného spádu teplot bylo použito vody z vodovodu, která udržovala konstantní teplotu T_1 ; druhá strana preparátu byla udržována na teplotě T_2 tak, že krabicemi kolem závitů protékala pára vroucích kapalin ($T_2 = 78^\circ \text{C}$ pára alkoholu, $T_2 = 100^\circ \text{C}$ pára vody, $T_2 = 161^\circ \text{C}$ pára terpentýnového oleje). Výsledek našich měření podává tabulka a graf č. 1 a potvrzuje výsledky nalezené už metodou jednoduchou. Ocel *a* ukazuje velkou analogii s železem. ΔE je nejprve směru opačného než směr tepelného proudu, při intensitě $H_1 \doteq 4350$ gaussů je $\Delta E = 0$ a pro $H > H_1$ je směr ΔE soulasný se směrem tepelného proudu. Avšak ocel *b* ukazuje průběh



Obr. 2.

Tabulka 2.
 $T_2 = 100^\circ$.

H gaussů	ocel <i>a</i>		ocel <i>b</i>	
	$\Delta E \cdot 10^6 \text{ V}$	$\Delta E \cdot 10^6 \text{ V}$	$\Delta E \cdot 10^6 \text{ V}$	$\Delta E \cdot 10^6 \text{ V}$
1480	— 4,85	— 19,40	— 4,64	— 7,90
2650	13,50	29,40	9,26	20,00
3620	12,40	27,60	13,80	26,67
4400	0,03	+ 1,20	15,30	27,70
5220	+ 14,50	32,00	14,40	27,10
5800	30,50	76,90	11,90	25,50
6540	52,70	118,0	6,56	20,30
7560	86,80	177,0	4,68	12,40
8360	111,0	236,0	2,84	6,36
9000	131,0	278,0		4,23
9400	136,0	302,0	1,70	3,52
Počet závitů	17	34	11	22

podstatně odlišný. ΔE je směru opačného než směr tepelného proudu, jeho absolutní hodnota zprvu roste, dosahuje maxima v poli intensity $H = 5000$ gaussů a dále klesá a blíží se nule. Nabízí se tu domněnka, že změna směru (znamení) ΔE by nastala

u tohoto preparátu, kdyby vůbec nastala, pro nějakou hodnotu $H > 9400$ gaussů. Křivky grafu ukazují závislost ΔE na intensitě pole. Na grafu jsou pro ocel *a* naneseny jen hodnoty pro $T_2 = 100^\circ$ resp. 161° , pro ocel *b* naneseny jen hodnoty ΔE při $T_2 = 161^\circ$, aby graf č. 1 neztrácel na přehlednosti. Aby tato závislost byla blíže poznána, bylo měření metodou multiplikační provedeno také pro 17 závitů u oceli *a* a pro 11 závitů u oceli *b* a porovnáno s měřením předchozím. Výsledek obsahuje tabulka a graf č. 2. Tato měření potvrzují, že longitudinální termomagnetická difference potenciální ΔE je funkcí vnitřního magnetického pole B ve zkoušeném materiálu, a nikoliv vnějšího pole H . Měření totiž ukazují, že neplatí pro ocel *a* vztah $2 \Delta E_{17} = \Delta E_{34}$, resp. pro ocel *b* $2 \Delta E_{11} = \Delta E_{22}$, jak by žádala závislost na H .

Vedle toho nalézáme v těchto měřeních oprávněnost domněnky, kterou uvádí *W. Gerlach*,⁴⁾ a podle které galvano- a termomagnetické efekty vznikají překládáním vnějšího a vnitřního magnetického pole zkoušeného materiálu. Toto vnitřní magnetické pole se patrně znečištěním, změnou struktury a pod. zvláště u látek silně diamagnetických a feromagnetických silně, avšak dosud neznámým způsobem mění. A okolnost, že hodnoty longitudinálního termomagnetického efektu potenciálového u dvou druhů oceli jsou podstatně odlišné, jak ukazují hořejší měření, zdá se uvedenou domněnku potvrzovati.

Fysikální ústav Masarykovy university v Brně.

*

L'effet thermomagnétique longitudinal en acier.

(Extrait de l'article précédent.)

On a mesuré l'effet thermomagnétique de potentiel dans un champ magnétique transversal en deux sortes d'acier par la méthode³⁾ auparavant décrite. Les mesures ont été exécutées par la méthode simple et même par la méthode de multiplication aux différentes différences de température. Les résultats mis en tables et représentés par diagrammes différent chez l'une et l'autre sorte d'acier essentiellement. On peut expliquer cette différence de deux sortes d'acier d'après *W. Gerlach*⁴⁾ ainsi: La valeur de l'effet thermomagnétique de potentiel est en connexion avec la grandeur du champ extérieur d'une part et celle du champ magnétique intérieur dans les matériaux en epreuve d'autre part. Ce champ magnétique intérieur se change essentiellement sans doute par suite de la structure, cependant jusque là d'une manière inconnue; c'est qui cause les différentes valeurs de l'effet thermomagnétique de potentiel en différentes sortes d'acier, comme le montrent nos mesures.

⁴⁾ *Geiger-Scheel: Handbuch der Physik XIII, 185, Berlin 1928.*

Měření doby kyvu pomocí dvojích stopek.

Josef Zahradníček.

(Došlo 27. února 1934.)

Tvoří-li měřená veličina posloupnost at' prostorovou, nebo časovou, jako na př. půlvlny v *Kundtově* trubici, nebo kyvy oscilujícího systému, dá se při měření s výhodou použítí t. zv. metody postupné. Metoda ta spočívá, jak známo, v tom, že měříme $2n$ ekvidistantních bodů řady resp. $2n - 1$ hodnot po sobě následujících členů řady (na př. $n = 10$), sestavíme měření do dvou sloupců a utvoříme rozdíly souřadnic bodů $(n + k)$ -tého a k -tého, t. j. určíme hodnoty součtů o n členech řady a to postupně celkem n -krát. Přesnost výsledku měření takto získaného je taková, jakoby bylo vykonáno n^2 měření, ač ve skutečnosti jich bylo vykonáno jen $2n$.¹⁾

Nechť se jedná o měření doby kyvu na př. kyvadla reversního. Provádí-li se měření toto v té formě, že jeden pozorovatel čítá kyvy, druhý pak odčítá na stále jdoucích stopkách časy, v nichž kyvadlo prochází rovnovážnou polohou po nulté, po desáté, po dvacáté, ..., po stodevadesáté, pak vzniká v odečteních chyba, projeví se ve výsledku hodnotou asi $\frac{1}{10}\%$, jak na př. je patrné z citovaných „*Základů praktické fyziky*“, kde jest uvedena touto cestou naměřená hodnota doby kyvu

$$t = (0,9968 \pm 0,0009) \text{ sec,}$$

t. j. s chybou $0,1\%$.

Použijeme-li k měření předešlému dvojích stopek, můžeme přesnost měření až desetkrát zvýšiti. Postup měření je následující: Jeden pozorovatel sleduje stále jen chod kyvadla, čítá kyvy, druhý pozorovatel se stopkami sleduje kyvadlo jen ve význačných okamžicích, kdy kyvadlo prochází rovnovážnou polohou po nulté, po dvacáté, po čtyřicáté, ... V těch okamžicích stiskne oboje stopky, z nichž jedny jsou v chodu, druhé na nule, odečte čas na stopkách, které šly, zapíše jej, uvede stopky ony na nulu a při dalším význačném průchodu kyvadla nulovou polohou tuto práci znovu

¹⁾ Srovnej na př. F. Kohlrauch: *Lehrbuch der praktischen Physik*, 14, 112, Leipzig 1923; B. Macků, V. Novák, F. Nachtikal: *Základy praktické fyziky* 3, 16, Brno 1931.

opakuje, a to celkem $2n$ -krát ($n = 10$). Doba 20 sekund postačí druhému pozorovateli úplně k tomu, aby oboje stopky současně stiskl, čas na jedné odečetl, zapsal a stopky ty na nulu uvedl, dle údajů prvního pozorovatele čítajícího kyvy dal pozor na další význačný průchod kyvadla nulovou polohou a zachytil jej okem i stopkami. První pozorovatel má vlastně za úkol sledovat indexy jednotlivých členů časové řady, aby pozorovatel druhý, nestarající se o sled kyvů, mohl časově zachytit co nejpřesněji význačný kyv $20k$ -tý, kde $k = 0, 1, 2, \dots, 19$. Netřeba snad připomínati, že stopky musí býti před měřením srovnány se sekundovým kyvadlem na př. ve 20×20 kyvech i více, aby byla známa jejich korekce. Vhodným je tu rovněž měření metodou postupnou, jak byla svrchu popsána.

Jako příklad uvádím tu měření doby kyvu u jednoho z reversních kyvadel užívaných ve fyzikálních cvičeních. Kyvadlo toto je vytvořeno z tyče železné 133,2 cm délky a kruhového průřezu o průměru 1,00 cm. Dva trojboké břity ocelové o hraně 6 mm jsou upevněny kolmo k ose kyvadla ve vzdálenosti od konců 17,7 cm a 16,6 cm. Na tomto konci nese kyvadlo posuvný válec železný rozměrů $2r = 7,30$ cm, $v = 4,22$ cm a hmoty 1231 g. Je-li reversní kyvadlo justováno, je hmota vzdálena od bližšího konce o 12,41 cm. Doba kyvu je v tom případě

$$t = (0,9973 \pm 0,0001) \text{ sec.}$$

Při vzdálenosti obou břitů kyvadla

$$l = (98,843 \pm 0,0015) \text{ cm}$$

(z 10 měření) plyne pro gravitační zrychlení v Brně hodnota

$$g = 980,8 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$$

s chybou 0,02%, což v mezích přesnosti dosti dobře souhlasí s hodnotou, kterou z relativních měření v Brně vzhledem k Postupimi naměřil Kladivo²⁾

$$g = (980,962 \pm 0,001_4) \text{ cm/sec}^2.$$

Svrchu uvedená přesnost v laboratorním měření gravitační intensity g dá se ještě asi dvakrát zvýšiti, užijeme-li odčítání zrcadlového s dalekohledem a škálou. K tomu účelu jsou na kyvadle těsně u břitů připojena zrcátka v rovině svislé a kolmé k rovině kyvu. Škála jest upevněna svisle vedle dalekohledu. Ložisko pro závěs kyvadla je na nosníku formy U , zasazeném kolmo do zdi, ve

²⁾ B. Kladivo: Rozpravy čs. akademie XI, č. 10 a 11, 1930.

vhodné výšce nad podlahou (asi 120 cm) a ve vzdálenosti od zdi asi 25 cm. Amplitudy nutno voliti dostatečně malé, aby bylo možno správně zachytit průchod kyvadla nulovou polohou. Výhodno je též odčítati průchod světelného indexu na svislé škále po odrazu světelného paprsku na zrcátku. Hodnota pro intenzitu zemského pole takto získaná byla

$$g = (980,7_5 \pm 0,2) \text{ dyna/gram.}$$

Ještě větší přesnosti možno v měření doby kyvu docíliti, provedeme-li dvojími stopkami 20 odečtení po 100 kyvů, při čemž odčítáme dalekohledem.

Budiž ještě připomenuto, že při laboratorních měřeních doby kyvu dá se použiti také metody koincidenční tak upravené, že kyvadlo sekundární (na př. reversní) je zapjato do kruhu s kyvadlem primárním, na př. sekundovým. Signálem koincidenčí jsou záblesky neonové lampy zapjaté do vedení s oběma kyvadly; zdrojem proudu je střídavý proud 110 voltů, 50 period za sek. Koincidence trvají potud, pokud obě kyvadla procházejí současně rtuťovými kontakty. Je-li amplituda kyvadel A (vzdálenost mezi krajními polohami), průměr kontaktu rtuťového a , doba kyvu T , je doba, po kterou kyvadlo prochází kontaktem,*)

$$\tau = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{a}{A} T.$$

K vůli jednoduchosti volme a , A u obou kyvadel stejné. Je-li celkový počet koincidenčí bezprostředně po sobě následujících (záblesků) n , rozešla se kyvadla celkem o

$$(T - T_x) n = 2 (\tau + \tau_x), \quad \tau_x = \frac{2}{\pi} \frac{a}{A} T_x,$$

z toho plyne

$$T_x = \left(1 - \frac{4}{\pi} \frac{a}{A} \cdot \frac{1}{n} \right) T.$$

Obecně jest

$$T_x = \frac{\left(1 - \frac{2}{\pi} \frac{a}{A} \cdot \frac{1}{n} \right)}{\left(1 + \frac{2}{\pi} \frac{a_x}{A_x} \cdot \frac{1}{n} \right)} T.$$

*) Pro rychlost kyvadla v rovnovážné poloze platí

$$\varphi'_{\max} = \frac{2\pi}{T} \sin \frac{1}{2} \varphi_0,$$

kde φ_0 je maximální výchylka z nulové polohy. Dále jest

$$\sin \frac{1}{2} \varphi_0 = \frac{1}{2} \varphi_0 = \frac{1}{2} A/l, \quad a = l \varphi'_{\max} \tau.$$

V jednom našem případě bylo: $a = 0,76$ cm, $A = 9,20$ cm, $n = 83,3$ (střed z 10 měření); $T = 1,0000$ sec; v době $11^m 31,8^s$ (střed z 10 měření) různila se obě kyvadla o 1 kyv. S tímto výsledkem $T_x = 0,9986$ sec vychází shodně na $1/100\%$ pro dobu kyvu $T_x = (1 - 0,00126)$ sec.

Je-li doba kyvu oscilujícího systému dostatečně dlouhá $T \geq 20$ sec, stačí k celému měření dvojími stopkami jediný pozorovatel. V tom případě určíme každý průchod nulovou polohou (půlperioda), případně průchody stejným směrem (perioda). Jako příklad uvádíme tu měření doby kyvu u torsních vah a to ve dvou polohách vahadla vzájemně kolmých. Váhy jsou zavěšeny ve skleněném válci upevněném na třínožce se třemi stavěcími šrouby. Vahadlo je z aluminiového drátu 23,2 cm délky a 3 mm průměru, s olověnými kuličkami o hmotě 40,48 g na koncích. Závěsný drát je platinoiridiový délky 14 cm a průměru 0,05 mm. Mezi vahadlem a závěsným drátem je spojka z drátu mosazného 14 cm délky a 2 mm průměru, jež na horním konci nese zrcátko 1 cm průměru pro odčítání dalekohledem se škálou. Závěs se zrcátkem je v trubici mosazné 40 cm délky a 2,8 cm průměru, jež je svisle upevněna na kovovém kotouči příkrývajícím skleněný válec ($2R = 26$ cm, $h = 13$ cm). Hlava nesoucí závěs jest opatřena mikrometrickým šroubem na jemnou justaci vahadla v rovině vodorovné. Váhy i s obalem dají se kolem svislé osy otočiti do žádaných azimutů. Rovnovážná poloha vahadla je na škále vyznačena aspoň přibližně; případné nesrovnalosti v kyvech po obou stranách vyznačené polohy jsou vyrovnány při zpracování výsledků.

V následujícím jsou uvedeny doby kyvu a to jednak postupně odečtené na obojích stopkách, jednak sestavené v tabulce.

Měření torsními vázkami ve sklepe fyzikálního ústavu 13./8. 1933 při teplotě stálé $\vartheta = 18,5^\circ$ C.

a) *Vahadlo v poloze ekvatoreální.*

Doby kyvu:

2m 4,0s	2m 4,2s	2m 4,8s	2m 3,4s
4,6	4,6	4,6	5,0
4,4	4,0	4,6	4,0
4,2	4,6	4,0	5,0
4,8	4,2	4,8	

Odtud plyne pro dobu kyvu v azimutu ekvatoreálním

$$T = 2^m 4,42^s \pm 0,01^s.$$

b) *Vahadlo v poloze polární.*

Tabulka 1.

k	t_k	t_{k+10}	$\Delta t \equiv 10T$	Δ	Δ^2
1	0m 0,0s	20m 43,6s	20m 43,6s	0,6	0,36
2	2 4,0	22 48,4	44,4	2	04
3	4 8,6	24 53,0	44,4	2	04
4	6 13,0	26 57,6	44,6	4	16
5	8 17,2	28 61,6	44,4	2	04
6	10 22,0	30 66,4	44,4	2	04
7	12 26,2	32 69,8	43,6	6	36
8	14 30,8	34 74,8	48,0	2	04
9	16 34,8	36 78,8	44,0	2	04
10	18 39,4	38 83,8	44,4	2	04
			$10\overline{T} =$ 20m 44,1 ₈ s		$\Sigma\Delta^2 = 1,16$

Doby kyvu:

1m 59,8s	2m 9,2s	1m 59,8s	2m 9,2s
2 9,4	1 59,6	2 8,8	1 59,8
1 59,2	2 9,6	1 59,4	2 9,0
2 9,0	1 59,4	2 9,0	1 59,8
1 59,4	2 9,2	1 59,6	

Tabulka 2.

k	t_k	t_{k+10}	$\Delta t \equiv 10T$	Δ	Δ^2
1	0m 0,0s	20m 43,8s	20m 43,8s	0,3	0,09
2	1 59,8	22 43,6	8	0,3	0,09
3	4 9,2	24 52,4	2	0,3	0,09
4	6 8,4	26 51,8	4	0,1	0,01
5	8 17,4	28 60,8	4	0,1	0,01
6	10 16,8	30 60,4	6	0,1	0,01
7	12 26,0	32 69,6	6	0,1	0,01
8	14 25,6	34 69,4	8	0,3	0,09
9	16 35,2	36 78,4	2	0,3	0,09
10	18 34,6	38 78,2	6	0,1	0,01
			$10\overline{T} =$ = 20m 43,5 ₄ s		$\Sigma\Delta^2 = 0,50$

Odtud plyne pro dobu kyvu v azimutu polárním

$$T = 2^m 4,35^s \pm 0,01^s.$$

Dosažená přesnost 0,01 % dá se ještě zvýšiti prodloužením řady měření a to tak, že měříme k členů na začátku řady a k členů na konci řady, přeskočivše i členů mezi tím se nalézajících, na

př. $k = 10$, $i = 10$ resp. 40, resp. 90 atd. Utvoříme pak k skupin po $k + i$ členech.

Uvedený příklad má ještě jiný význam než ryze metodický. Má poukázati na to, že je možno vahami točivými s poměrně malou citlivostí o době kyvu asi 2 minut prokázati, že intensita gravitačního pole zemského v téže horizontální rovině je funkcí rozložení hmot. Popsané váhy kývaly v ústavním sklepě, v němž bylo jen několik metrických centů uhlí v azimutu polárním, jinak bylo rozdělení hmot vůči vahám celkem souměrné. A onen nepatrný rozdíl hmoty v azimutu polárním vůči ekvatoreálnímu prozradil se v době kyvu.

Je jisto, že torsními vázkami *Coulomb-Eötvösovými* dá se s úspěchem studovat nitro zemské po této stránce a že torsní kyvadlo je tím pravým kouzelným proutkem, jímž se má měřit nitro zemské dříve, než se přistoupí k nákladnému vrtání zemské kůry. Měření kyvadlová, vykonaná kdysi maďarským fysikem *Eötvösem*, vedla k objevům solných ložisek v *Sedmihradech*, naftových pramenů u *Gbel* a teplých zřídél u *Pešti*; kyvadlová měření mohou vésti geologa směrem, kterým je v nitru zemském nedostatek hmot — prostory jeskynní. Absorpce elektromagnetických vln ultrakrátkých může býti druhou fysikální metodou, jež podepře, nebo vyvrátí geologovy domněnky o skrytém dosud nitru zemském.³⁾

Fysikální ústav Masarykovy university.

*

La mesure de la durée d'oscillation à l'aide de deux chronographes compteurs.

(Extrait de l'article précédent.)

Dans l'article précédent on présente une méthode de mesure de la durée d'oscillation à l'aide de deux chronographes compteurs. Si la durée d'oscillation est à peu près 1 sec, on fait la mesure ainsi qu'il suit: d'une série continue de temps on détermine les coordonnées des points à une position, par exemple $t = 20k^{\text{sec}}$, où $k = 0, 1, 2, 3, \dots, 19$. L'un de deux observateurs compte les oscillations, tandis que l'autre saisit tour à tour par l'un et l'autre chronographe compteur les moments caractéristiques de telle façon qu'au moment du passage du pendule au travers du zéro, il arrête l'un des chronographes compteurs et met en même temps l'autre en marche; après avoir lu et inscrit l'état du chronographe compteur

³⁾ V. Fritsch pokusil se z měření absorpce elektromagnetických vln určití pravděpodobný tok *Punkvy* a polohu nových jeskyní (*Zeitschr. für Hochfr.* 39, 136, 1932 a 41, 218, 1933).

arrêté, on remet celui-ci à zéro. Au passage caractéristique suivant du pendule par zéro on répète toute cette opération etc.

Si la durée d'oscillation est suffisamment longue, environ 20^{sec} ou plus longue encore, un seul observateur suffit pour le procès entier. Tout passage du pendule par zéro est noté en même temps par l'un et l'autre chronographe compteur. Pour rendre la mesure plus fine, il est convenable à se servir de la méthode du miroir tournant soit subjective, soit objective.

Toute la série des mesures est répartie donc entre deux chronographes compteurs et on saisit les points entre les intervalles particuliers de temps avec le plus de précision possible.

Les mesures sont traitées par la méthode successive suivante: on les partage en deux séries de coordonnées dans lesquelles on soustrait les termes homologues. On obtient ainsi n ($= 10$) valeurs pour $200T$ resp. $10T$. La précision de la mesure atteint $1/100\%$, comme si l'on faisait 100×100 mesures resp. 10×10 mesures. On peut ainsi par un pendule de réversion évaluer l'accélération de la pesanteur par un nombre de 4 chiffres; par un pendule de torsion avec la durée d'oscillation d'à peu près 100^{sec} on peut démontrer que la durée d'oscillation aux différents azimuts du même plan horizontal est différente et qu'elle dépend de la répartition de la masse. L'excès ou le manque de la masse aux différents azimuts se manifestent par les différentes durées d'oscillation. C'est qui trouve une application avantageuse dans les mesures géophysiques à l'étude de l'intérieur de la terre.

Poznámky k relativitě.

Em. Klier.

(Došlo 28. prosince 1933.)

Klasický hyperbolický pohyb se světelnou rychlostí. Hyperbolický pohyb v problému dvou těles je charakterisován rovnicemi¹⁾:

$$h_1 = \frac{hM}{2a}, \quad h_2 = \sqrt{hMa(\varepsilon^2 - 1)}, \quad (1)$$

h_1 je konstanta plynoucí z rovnice pro energii

$$\frac{1}{2}v^2 + \Phi = \frac{1}{2}v_1^2 + \Phi_1 = h_1, \quad \Phi = -hM/r, \quad (2)$$

h_2 je dvojnásobná plocha proběhnutá průvodičem za jednotku času

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = h_2, \quad (3)$$

Pohybuje-li se bod z nekonečna, přisluním a dále do nekonečna, uchýlí se z původního směru v úhel ϑ daný vztahem

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}\vartheta = \frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \quad (4)$$

čili pomocí (1)

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}\vartheta = \frac{hM}{h_2} \sqrt{\frac{1}{2h_1}}. \quad (5)$$

Je-li v nekonečnu ($\Phi_1 = 0$) počáteční rychlost $v_1 = c$, dostáváme ze (2)

$$h_1 = \frac{1}{2}c^2 \quad (6)$$

a tedy

$$v^2 = c^2 - 2\Phi = c^2 \left(1 - 2 \frac{\Phi}{c^2}\right)$$

a velmi přibližně

$$v = c - \frac{\Phi}{c} = c + \frac{hM}{rc}. \quad (7)$$

S dostatečnou přesností bude i v perihelu ($r = \Delta$) rychlost $\Delta d\varphi/dt$

¹⁾ Charlier: Die Mechanik des Himmels.

jen málo rozdílná od c , takže podle (3) bude

$$\Delta^2 \frac{d\varphi}{dt} = \Delta c = h_2. \quad (8)$$

Úhel ϑ bude malý a tudíž podle (5), (6), (8)

$$\vartheta = \frac{2hM}{\Delta c^2}. \quad (9)$$

O tolik měl by se odchýliti i světelný paprsek následkem své energie v gravitačním poli, což je důsledkem jednak věty o setrvačnosti energie a jednak o totožnosti setrvačné a těžké hmoty (Einstein 1911).

Takto vypočítaná hodnota ϑ nevyhovuje však ani pozorování ani principu relativity, neboť byla naměřena dvojnásobná, a podle (7) roste rychlost čím blíže k přísluní, což odporuje principu relativity, podle něhož c je maximální možná rychlost vůbec. Obecná teorie relativity odstraňuje obojí nesouhlas.

Heuristické odvození výrazu ds^2 pro kulově symetrická pole gravitační. Ve speciální relativitě je invariantní výraz

$$(s - s_0)^2 = c^2 (t - t_0)^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 - (z - z_0)^2.$$

V obecné relativitě bude tento výraz platný pouze pro nekonečně malé okolí bodu (x_0, y_0, z_0, t_0) , takže bude nutno položit

$$ds^2 = c^2 dt_0^2 - dx_0^2 - dy_0^2 - dz_0^2. \quad (10)$$

Vzorce pro smršťování délek a dilataci času při pohybu podél osy X jsou:

$$dx_0 = \beta dx, \quad dt_0 = \frac{dt}{\beta}, \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad dy_0 = dy, \quad dz_0 = dz. \quad (11)$$

Proveďme nyní transformaci danou rovnicemi²⁾:

$$x = r, \quad dy = r d\varphi, \quad dz = r \sin \varphi d\psi, \quad (12)$$

rychlost v^2 nahradíme potenciálem podle rovnice platné pro volně padající bod

$$\frac{1}{2}v^2 = -\Phi = \frac{hM}{r} \quad (13)$$

a zavedme obvyklé označení „gravitačního poloměru“

$$m = hM/c^2. \quad (14)$$

Dosadíme-li do (10) hodnoty (11) a dále (12), (13), (14), dosta-

²⁾ Je to prostorové zobecnění příbuznosti, o níž pojednává p. dr. Ant. Pleskot v článku: Jistá příbuznost související s teorií křivek valicích se. Časopis pro pěst. mat. a fys., r. 61, seš. 4 (1932).

neme známý vztah

$$ds^2 = \left(1 - 2 \frac{m}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - 2m/r} - r^2 d\varphi^2 - r^2 \sin^2 \varphi d\psi^2. \quad (15)$$

Podotýkám výslovně, že uvedený způsob odvození má pouze ilustrovací, nikoliv nahrazovací exaktní způsob odvození.

Poznámka. Podle Keplerova zákona je $av^2 = hM$, tedy $m = hM/c^2$ je ona vzdálenost, ve které je kruhová rychlost rovna světelné rychlosti.

Transformace průvodiče. K zajímavým důsledkům a pohodlnou cestou dospějeme, jestliže v rovnici (15) převedeme výraz pro prostorový oblouk

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1 - 2m/r} + r^2 d\varphi^2 + r^2 \sin^2 \varphi d\psi^2 \quad (16)$$

na druhý tvar platný v prostoru s kulovou symetrií. Stane se to transformací r při nezměněných úhlech φ a ψ ³⁾

$$r = (1 + m/2r')^2 r'. \quad (17)$$

Tím dostáváme jednak

$$dr = \left(1 - \frac{m^2}{4r'^2}\right) dr', \quad 1 - 2 \frac{m}{r} = \left[\frac{1 - m/2r'}{1 + m/2r'}\right]^2 \quad (17')$$

a jednak

$$ds^2 = \left[\frac{1 - m/2r'}{1 + m/2r'}\right]^2 c^2 dt^2 - (1 + m/2r')^4 (dr'^2 + r'^2 d\varphi^2 + r'^2 \sin^2 \varphi d\psi^2). \quad (18)$$

Podle původního vzorce (15) nastává pro $r = 2m$ výminečný případ, t. zv. Hadamardova katastrofa. Podle (17) nastane v transformovaných souřadnicích pro $r' = \frac{1}{2}m$. V tomto místě muselo by podle (15) nebo (18) být dt nekonečně velké, t. j. čas by plynul nekonečně zvolna. Gravitační radius $m = hM/c^2$ pro Slunce je asi 3 km. Tedy katastrofa nastala by uvnitř sluneční hmoty. Tam však platí jiné zákony.⁴⁾ Měla-li by katastrofa nastati aspoň na povrchu ústřední hmoty, musela by hmota M být tak velká, aby m se rovnalo poloměru tělesa. Tak velké hmoty však vůbec neexistují, neboť příliš velkým světelným tlakem by se rozprchly (Eddington). Tím je zabráněno Hadamardově katastrofě přírodou samou. Abstrahujeme-li od představ Eddingtonových a připustíme možnost libovolně velké hmoty, pak podle teorie relativity nastane — za předpokladu tekutého ústředního tělesa — již při menším poloměru ústředního tělesa, než žádá Hadamardova katastrofa, ten případ,

³⁾ Pauli; Relativitätstheorie 1921.

⁴⁾ Viz na př. Weyl: Raum, Zeit, Materie.

že tlak je uvnitř nekonečně velký, čas plyne nekonečně zvolna, t. j. neděje se nic a tudíž nemůže ani žádná změna nastat, která by katastrofu vyvolala.

V dalším budeme se zabývatí problémem rovinným, t. j. položíme $d\varphi = 0$. V obecném případě dozvěděli bychom se o stáčení roviny dráhy, takto dozvíme se pouze o postupu perihelu.

Transformace (17) značí pro $m/2r'$ velké proti 1 inverzi. malé proti 1 posunutí. V našem případě bude vždy $m/2r'$ velmi malé, takže čtverec této veličiny proti 1 vynecháme, budeme s ní počítati jako s nekonečně malou veličinou, takže na př. vždy položíme

$$(1 + km/r')^n = 1 + knm/r'.$$

Následkem toho vyjdeme z rovnice (18) takto upravené:

$$ds^2 = (1 - m/r')^2 c^2 dt^2 - (1 + m/r')^2 (dr'^2 + r'^2 d\varphi^2). \quad (19)$$

V tomto zobrazení je původní neeuklidovský element $d\sigma$ zobrazen euklidovským elementem $d\sigma_E$, neboť je

$$d\sigma^2 = (1 + m/r')^2 d\sigma_E^2. \quad (20)$$

Lokální křivost. Neeuklidovská geometrie roviny $r\varphi$ je shodná s rovinou na rotačním paraboloidu

$$r^2 = 8m(r - 2m).^5 \quad (21)$$

Uvedenou transformací zobrazujeme konformně tuto plochu do roviny $r'\varphi$ a za předpokladu malého $m/2r'$ lze (20) psáti

$$d\sigma^2 = \frac{d\sigma_E^2}{(1 - m/r')^2}, \quad (22)$$

Lobačevského hyperbolická geometrie je shodná s geometrií na kouli o imaginárním poloměru. Stereografickým promítnutím do roviny dostáváme pro oblouk Lobačevského a oblouk obrazu $d\sigma_E$ vztah

$$d\sigma_L^2 = \frac{d\sigma_E^2}{(1 - r'^2/\alpha^2)^2}, \quad (23)$$

kde α je parametr Lobačevského prostoru a rovná se dvojnásobné absolutní hodnotě poloměru koule výše zmíněné. Srovnáním (22), (23) shledáváme, že lze položit

$$\frac{r'^2}{\alpha^2} = \frac{m}{r'},$$

⁵⁾ Flamm: Beiträge zur Einsteinschen Gravitationstheorie. Phys. Zeitschr. Bd. 17 (1916).

tedy

$$\alpha = \sqrt{\frac{r'^3}{m}} = c \sqrt{\frac{r'^3}{hM}}. \quad (24)$$

Z rovnice paraboloidu (21) počítejme Gaussovu míru křivosti (vynechávající ve výsledku čtverce veličiny m)

$$k^2 = \frac{1}{R^2} = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2},$$

kde p, q, r, s, t jsou známé veličiny z teorie ploch. Výsledek počtu je

$$R = i \sqrt{\frac{r^3}{m}} = ci \sqrt{\frac{r^3}{hM}}$$

nebo též dosti přesně

$$R = ci \sqrt{\frac{r'^3}{hM}} = i\alpha. \quad (25)$$

Tedy absolutní hodnota poloměru křivosti rovná se parametru Lobačevského prostoru, který lokálně může nahraditi paraboloid.

Poněvadž pak dále podle Keplerova zákona je

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{hM}{4\pi^2}, \quad (26)$$

bude podle (25)

$$2\pi |R| = cT. \quad (27)$$

To znamená: Vzdálenosti r odpovídá podle (26) kruhová dráha o době oběhu T . Téže vzdálenosti odpovídá podle (25) poloměr křivosti R a ten je tak velký, že by bod proběhl světelnou rychlostí za dobu T kruh, jehož poloměr je právě poloměr křivosti.

Zavedením úhlové vychlosti ω dostáváme z (27) zajímavý vztah

$$\omega |R| = c. \quad (27')$$

Dospěli jsme tedy k důležitému poznatku. V gravitačním poli s kulovou symetrií je křivost negativní a ubývá s třetí mocninou vzdálenosti. Považovala-li se až do nedávna křivost prostoru jako celku za kladnou, nebylo možno přejíti od negativní křivosti lokální k pozitivní celkové. Z posledních úvah de Sitterových a Heckmannových však vyplývá, že nemůžeme rozhodnouti dosud, je-li skutečná křivost kladná či záporná. Předchozí řádky snad jsou příspěvkem k tomu, že, je-li lokální křivost negativní, je i průměrná křivost negativní.

Poznamenejme ještě, přijmeme-li Eddingtonovu hodnotu pro poloměr křivosti $R = 10^9$ světelných roků, že podle (25) pro Slunce nabude stejnou absolutní hodnotu poloměr křivosti ve vzdálenosti asi 55 světelných roků.

Rozpínání vesmíru. Poněvadž křivost je funkcí vzdálenosti, lze říci, že, vzdaluje-li se zdroj gravitačního pole od pozorovatele, bude se křivost pro něho měnit s časem a sice bude (vynecháváme čárky při r)

$$\frac{dR}{dt} = \frac{dR}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}. \quad (28)$$

Podle (25) je

$$\frac{dR}{dr} = \frac{ci}{\sqrt{hm}} \cdot \frac{3}{2} \sqrt{r} = \frac{3}{2} \frac{R}{r}, \quad (29)$$

takže

$$\frac{dR}{dt} = \frac{3}{2} \cdot \frac{R}{r} \cdot \frac{dr}{dt}$$

čili

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{dR}{dt} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{r} \frac{dr}{dt}. \quad (30)$$

Považujeme-li levou stranu za konstantu a sice $1/R \cdot dR/dt = 5,7 \cdot 10^{-10} \text{ roku}^{-1}$,⁶⁾ vyplývá z (30), že rychlost vzdalování dr/dt je úměrná vzdálenosti r , což souhlasí s pozorováním mimogalaktických mlhovin. Ptejme se nyní, jaká bude rychlost ve vzdálenosti 1 megaparsec = 10^6 parsec $\doteq 3,08 \cdot 10^{19}$ km. Tu bude podle (30)

$$\frac{dr}{dt} = \frac{5,7 \cdot 10^{-10}}{365 \cdot 24 \cdot 3600} \cdot 3,08 \cdot 10^{19} \cdot \frac{2}{3} = 372 \text{ km/sec},$$

což zhruba se shoduje s hodnotou 465 km/sec. odvozenou z Hubbleových pozorování na Mount Wilsonu,⁷⁾ která mohou mít chybu $\pm 20\%$.

Pro sférický prostor se klade $r = R\chi$, takže $dr/dt = dR/dt\chi$, čili $1/R \cdot dR/dt = 1/r \cdot dr/dt$, takže na 1 megaparsec vyjde rychlost $\frac{3}{2}$ krát větší než výše vypočtená, t. j. 557 km/sec. Zdá se, že ve skutečnosti platí $1/R \cdot dR/dt = \frac{1}{2} \cdot 1/r \cdot dr/dt$, čemuž by odpovídalo $R \propto r^{5/4}$ a tím docílil by se úplný souhlas s pozorováním.

Základní případy. Pro statické kulově symetrické pole gravitační platí rovnice⁸⁾:

$$ds^2 = \left(1 - 2 \frac{m}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - 2m/r} - r^2 d\varphi^2,$$

$$\left(1 - 2 \frac{m}{r}\right) c \frac{dt}{ds} = \text{konst.} = A, \quad r^2 c \frac{d\varphi}{ds} = \text{konst.} = B.$$

⁶⁾ H. Mineur: L'Univers en expansion 1933, str. 31.

⁷⁾ H. Slouka: O rozměrech vesmíru a jeho instabilitě. Časopis pro přest. mat. a fys., roč. 61, čís. 8 (1932).

⁸⁾ Weyl: Raum, Zeit, Materie.

Mysleme si na tyto rovnice provedenu naši transformaci (17). Ve výsledcích vynechme čárku při r , považujeme opět m/r za velmi malé a dostaneme:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{m}{r}\right)^2 c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{m}{r}\right)^2 (dr^2 + r^2 d\varphi^2),$$

$$\left(1 - \frac{m}{r}\right)^2 c \frac{dt}{ds} = A, \quad r^2 \left(1 + \frac{m}{r}\right)^2 c \frac{d\varphi}{ds} = B.$$

Pro stručnost označme $f = 1 - m/r$, $g = 1 + m/r$, takže bude:

$$ds^2 = f^2 c^2 dt^2 - g^2 d\sigma^2, \quad f^2 c \frac{dt}{ds} = A, \quad g^2 c r^2 \frac{d\varphi}{ds} = B. \quad (33)$$

Veličinu r' , kterou nyní označujeme r , považujeme jaksi za „tu pravou“ velikost průvodiče, kterou opravdu měříme. Opravňují nás k tomu úspěchy, které již při vyšetřování křivosti jsme poznali a které ještě z dalšího budou patrný.

Poznámka. Myslíme-li si v rovnicích (33) r nahrazeno poloměrem R podle (25), pak budou ostatní veličiny vyjádřeny pomocí R . Toť ilustrace relativistické myšlenky. Ústřední hmota vtiskne prostoru geometrii, určitou křivost a jde jen o volbu souřadného systému vhodného k řešení.

Vyjádřeme z rovnic (33) dr/ds , položme

$$\mu = \pm \frac{1}{g} \sqrt{\frac{A^2}{f^2} - \frac{B^2}{r^2 g^2 c^2}} - 1, \quad \frac{d\sigma}{dt} = v \quad (34)$$

a dostaneme z (33) tento kanonický tvar⁹⁾

$$ds = \frac{dr}{\pm \mu} = \frac{d\varphi}{\frac{B}{r^2 g^2 c}} = \frac{dt}{\frac{A}{f^2 c}} = \sqrt{f^2 c^2 - g^2 v^2} dt. \quad (35)$$

Na základě tohoto systému dosáhneme jednotného, přehledného řešení a roztržení základních případů. Všechny případy rozdělíme na I. mechanické, pro něž $ds \neq 0$, II. optické, pro něž $ds = 0$. Podle toho, kterou z proměnných volíme za stálou a tím čitatele i příslušného jmenovatele v (35) nulou (v optických případech jsou jmenovatele nekonečně velké a je nutno stanovit příslušné limity poměrů), přicházíme k tomuto přehledu:

I. $ds \neq 0$.

II. $ds = 0$.

1. Žádná z veličin není konst. Pouze $ds = 0$. Šíření světla. Pohyb hmotného bodu.

⁹⁾ Srovnej: Dr. A. Dittrich: Methoda Hamilton-Jacobiho v mechanice Einsteinově. Časopis pro pěst. mat. a fys., roč. LIII, č. 1, 2 (1923).

- | | |
|--|---|
| 2. $dr = 0$. Kruhový pohyb. | Kruhový pohyb se světelnou rychlostí. |
| 3. $d\varphi = 0$. Radiální pohyb. | Radiální pohyb se světelnou rychlostí. |
| 4. $dt = 0$. Současnost. Měření délek. | $\left\{ \begin{array}{l} \text{Pevný bod v prostoru jakožto místo, jímž prochází světelný paprsek, definován je průsečíkem kruhu } r = \text{konst. a přímkou } \varphi = \text{konst., neboť ve všech těchto případech je současně } dr = 0, d\varphi = 0. \end{array} \right.$ |
| 5. $dr = 0$, Průběh času v daném bodě. | |
| 6. $dr = 0$, Měření délek na kruhu. | |
| 7. $d\varphi = 0$, Měření délek radiálně. | |

Vztah energetický a pohyb perihelia. Ze systému (35) zvolme kombinaci

$$\frac{dt}{A/f^2c} = \sqrt{f^2c^2 - g^2v^2} dt,$$

z níž úpravou získáme ($m = hM/c^2$, $\Phi_0 = -hM/r = -mc^2/r$)

$$(1 + 6m/r) \frac{1}{2}v^2 + \Phi_0 = \frac{1}{2}c^2 (1 - 1/A^2) = \text{konst.} \quad (36)$$

V klasické mechanice platí rovnice (2), v níž píšeme v_0 místo v a Φ_0 místo Φ , abychom rozlišili relativistický případ,

$$\frac{1}{2}v_0^2 + \Phi_0 = h_1. \quad (2)$$

Položme tedy

$$v^2 (1 + 6m/r) = v_0^2, \quad h_1 = \frac{1}{2}c^2 (1 - 1/A^2). \quad (37)$$

Konstanta h_1 klasifikuje dráhy a sice při $h_1 \leq 0$ jde o dráhy eliptické, parabolické či hyperbolické. V našem případě tedy rozhoduje o tom veličina A a sice pro tytéž dráhy je $A \leq 1$.

Uvažujme nyní pro jednoduchost kruhový pohyb, pro nějž kladme

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \omega r, \quad v_0 = \frac{2\pi r}{T_0} = \omega_0 r.$$

Poněvadž podle (37)

$$v = v_0 (1 - 3m/r), \quad (38)$$

bude

$$\omega = \omega_0 - 3m/r\omega_0. \quad (39)$$

T. j.: Skutečná (relativistická) úhlová rychlost ω jeví se složena ze 2 složek a sice: z klasické ω_0 a z rychlosti $\omega_0 \cdot 3m/r$, již otáčí se nulová (počáteční) poloha pro měření úhlu φ ve směru pohybu uvažovaného bodu. Opíše-li bod úhel φ , postoupí počáteční poloha,

t. j. perihel, o $\varphi \cdot 3m/r$, tedy za jeden oběh posune se perihel o

$$\Delta\pi = 6\pi m/r.$$

Pro eliptické dráhy s malou výstředností lze za r zavést harmonický střed

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{a(1-\varepsilon)} + \frac{1}{a(1+\varepsilon)} \right] = \frac{1}{a(1-\varepsilon^2)}, \quad (40)$$

takže

$$\Delta\pi = \frac{6\pi h M}{ac^2(1-\varepsilon^2)}. \quad (41)$$

Doba oběhu T_0 zvětšuje se podle (39), (40) na

$$T = T_0 + T_0 \frac{3m}{a(1-\varepsilon^2)}$$

a z 3. Keplerova zákona v klasickém tvaru $a^3/T_0^2 = hM/4\pi^2$ dostaneme

$$\frac{a^3}{T^2} \left(1 + \frac{6m}{a(1-\varepsilon^2)} \right) = \frac{hM}{4\pi^2}. \quad (42)$$

Poznámka. Prodloužení doby oběhu o $T_0 \cdot 3m/a$ pro pohyby kruhové nastane podle 3. Keplerova zákona prodlouží-li se poloosa a o $2m$, jak se snadno přesvědčíme.

Klasifikace otevřených drah. Pro otevřené dráhy je výhodno zavést rychlost v nekonečnu V a vzdálenost Δ v perihelu. Z (36) plyne

$$\frac{1}{2}V^2 = \frac{1}{2}c^2(1 - 1/A^2) = h_1 \quad (43)$$

čili

$$A^2 = \frac{c^2}{c^2 - V^2}. \quad (44)$$

Z podmínky $dr = 0$ pro přísluní $r = \Delta$ musí být (pokud není $ds = 0$, o čemž později) podle (34) $\mu = 0$ a z toho

$$B^2 = \left\{ \left[\frac{c^2}{(c^2 - V^2)f^2} - 1 \right] \Delta^2 g^2 c^2 \right\}_{r=\Delta}. \quad (45)$$

Rovnici (36) lze dáti podle (43) tvar

$$v^2(1 + 6m/r) = 2mc^2/r + V^2.$$

Odečteme-li po každé straně výraz $V^2(1 + 6m/r)$, dostaneme

$$v^2 - V^2 = \frac{2m}{r} \frac{c^2 - 3V^2}{1 + 6m/r}.$$

Z této rovnice usuzujeme: Pohybuje-li se bod z nekonečna, jeho

rychlost v bude proti počáteční V vzrůstat, stejná či klesat, bude-li $c/\sqrt{3} \gtrless V$.

Klasická mechanika znala pouze případ, že rychlost směrem k perihelu vzrůstala [rovn. (7)]. Měla-li ubývat, pak šlo o síly odpudivé, pak však těleso opisovalo onu větev hyperboly, v jejímž ohnisku není ústřední hmota.¹⁰⁾ Mimo to dospíváme k možnosti rovnoměrného pohybu s rychlostí $c_1 = c/\sqrt{3}$. Snad je tato rychlost i jinak důležitá, snad šíří se jí gravitace. Poukazovala by k tomu tato okolnost. V rovnici (41) pro postup perihelu zavedme rychlost c_1 , takže:

$$\Delta\pi = \frac{2\pi h M}{a c_1^2} (1 + \varepsilon^2 + \dots)$$

a tento vzorec je shodný se vzorcem

$$\Delta\pi = \frac{2\pi h M}{a u^2} (1 + \varepsilon^2 + \dots),$$

který koncem minulého století odvodil Tisserand a v němž u byla rychlost šíření gravitačních rozruchů.¹¹⁾

Dále je pozoruhodno, že z rovnice (36) lze dospět k starému zákonu Weberovu, jak ukážeme dále, v němž však opět vyskytne se rychlost c_1 , a konečně v rovnici $1/r \cdot dr/dt = 1/R \cdot c/\sqrt{3}$ pro rozpínání vesmíru objevuje se rychlost c_1 .

Všimněme si ještě této okolnosti: Podle rovnice (38) odpovídá relativistické rychlosti c_1 klasická rychlost

$$v_0 = c_1 \left(1 + \frac{hM}{rc_1^2} \right).$$

Je tedy hyperbolický pohyb klasický s počáteční rychlostí c_1 shodný s rovnoměrným pohybem relativistickým s rychlostí c_1 .

Křivení světelného paprsku. V tomto případě je předně $ds = 0$. Pak z rovnice (33) plyne pro světelnou rychlost

$$\begin{aligned} v = \frac{d\sigma}{dt} &= \frac{f}{g} c = c \left(1 - 2 \frac{m}{r} \right) = c \left(1 - 2 \frac{hM}{rc^2} \right) = \\ &= c \left(1 + 2 \frac{\Phi}{c^2} \right) = c + 2 \frac{\Phi}{c}. \end{aligned} \quad (47)$$

Stejný výsledek dává (38), uvážíme-li, že klasická rychlost světelná by měla být podle (7) $v_0 = c (1 + m/r)$, takže podle (38) opět

$$v = c (1 - 2 m/r).$$

¹⁰⁾ Charlier: Die Mechanik des Himmels.

¹¹⁾ K. V. Zenger: Světová soustava elektrodynamická (1901).

Patří tedy podle naší klasifikace postup světelného paprsku do oné skupiny otevřených drah, pro něž rychlosti ubývá čím blíže k perihelu.

Poněvadž $ds = 0$, musí v systému (35) být jmenovatele nekonečně velké, takže bude nutno vyšetřit některé limity. Dosaďme-li ze (44) $A^2 = c^2/(c^2 - V^2)$ do (34), bude

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{B} &= \pm \lim_{V=c} \frac{1}{rg^2cf} \sqrt{\frac{r^2g^2c^4}{B^2(c^2 - V^2)} - f^2} = \\ &= \pm \lim \frac{1}{rg^2cf} \sqrt{r^2g^2c^2 \frac{A^2}{B^2} - f^2}. \end{aligned} \quad (48)$$

Podle (35) je však

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{B}{A} \cdot \frac{f^2}{r^2g^2} = \frac{B}{A} \cdot \frac{1 - 4m/r}{r^2}. \quad (48')$$

Poněvadž v přísluní je $\left(r \frac{d\varphi}{dt}\right)_{r=\Delta} = c \left(1 - 2\frac{m}{\Delta}\right)$ a dále podle (48') pro přísluní

$$\left(r \frac{d\varphi}{dt}\right)_{r=\Delta} = \frac{B}{A} \cdot \frac{1 - 4m/\Delta}{\Delta^2},$$

je konečně

$$\frac{B}{A} = \left(1 + 2\frac{m}{\Delta}\right) \Delta c$$

a tudíž

$$\frac{\mu}{B} = \pm \frac{1}{rg^2cf} \sqrt{\frac{r^2g^2}{\Delta^2} \left(1 - 4\frac{m}{\Delta}\right) - f^2}.$$

Z (35) máme

$$\frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{B}{\mu} \cdot \frac{1}{r^2g^2c}$$

a podle předešlého po dosazení za B/μ po několikeré úpravě

$$d\varphi = \mp \Delta \frac{d\frac{1}{r}}{\sqrt{\left(1 - \frac{4m}{\Delta}\right) + \frac{4m}{r} - \frac{\Delta^2}{r^2}}}. \quad (49)$$

Volme souřadný systém tak (obr. 1), aby při $r = \Delta$ bylo $\varphi = \frac{1}{2}\pi$. Integrace (49) v mezích $r = \infty, \Delta$ dává

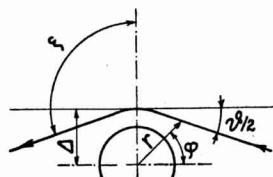
$$\begin{aligned} \varphi_{\Delta} - \varphi_{\infty} &= \frac{1}{2}\pi - \varphi_{\infty} = \\ &= \pm \left[\arcsin \frac{\Delta/r - 2m/\Delta}{\sqrt{1 - 4m/\Delta}} \right]_{\infty}^{\Delta} = \pm \left[\arcsin \left(\frac{\Delta}{r} - \frac{2m}{\Delta} \right) \left(1 + 2\frac{m}{\Delta} \right) \right]_{\infty}^{\Delta} = \end{aligned}$$

$$= \pm \left[\arcsin \left(\frac{\Delta}{r} - \frac{2m}{\Delta} + \frac{2m}{r} \right) \right]_{\infty}^{\Delta} = \pm \left[\frac{1}{2}\pi + 2 \frac{m}{\Delta} \right]. \quad (50)$$

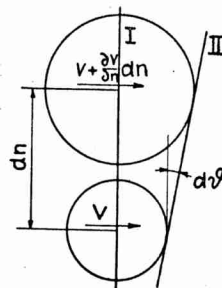
S ohledem na volbu souřadného systému nutno voliti znamení horní. Pak je patrné, že paprsek odchýlí se oproti přímočarému pohybu v nekonečnu o úhel $\frac{1}{2}\vartheta = -2m/\Delta$, takže celková odchylka v průběhu z nekonečna do nekonečna je

$$\vartheta = \frac{4m}{\Delta} \quad (51)$$

a sice ve směru k ústřednímu tělesu. Tedy přichází v úvahu taková čára, v jejíž konkávní části je ústřední těleso.



Obr. 1.



Obr. 2.

Úloha z optiky. Je zajímavé, že výraz pro světelnou rychlost stačí na vyšetření křivení paprsku na půdě klasické optiky.

a) Šíří-li se rovinná vlna rychlostí v závislou na místě, tu podle principu Huyghensova je zdrojem elementárních vln, takže za čas dt odkloní se o úhel $d\vartheta$ podle obr. 2, daný rovnicí

$$d\vartheta = \frac{\left(v + \frac{\partial v}{\partial n} dn \right) dt - v dt}{dn} = \frac{\partial v}{\partial n} dt.$$

Poněvadž proběhnutá dráha je $d\sigma = v dt$, je

$$d\vartheta = \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma. \quad (52)$$

¹²⁾ Jinak řečeno: Pro křivočarý pohyb je rychlost rovna obvodové rychlosti kolem středu křivosti $v = n \cdot \frac{d\sigma}{dt}$ a tedy derivováním

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d\vartheta}{d\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{dt} = d\vartheta \cdot \frac{v}{d\sigma}, \text{ takže } d\vartheta = \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma.$$

V našem případě $v = c - 2m/r$ a zavedeme-li podle obrazce

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2}}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin \varphi,$$

takže

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{2mc}{r^2} \sin \varphi.$$

Velmi přibližně platí klasické relace:

$$\Delta c = r^2 \frac{d\varphi}{dt}, \quad \frac{d\sigma}{dt} = c, \quad v \doteq c$$

a tedy

$$d\vartheta = \frac{2m}{\Delta} \sin \varphi d\varphi$$

integrováno v mezích $-\frac{1}{2}\vartheta$ a $\pi + \frac{1}{2}\vartheta$ pro φ dává

$$\vartheta = 4 \frac{m}{\Delta}.$$

b) Úlohu lze považovati za řešení refrakce, kde index lomu i je dán vztahem

$$i = \frac{c - 2m/rc}{c} = 1 - 2m/r, \quad (53)$$

Pak zenitová vzdálenost (obr. 1) ζ je dána rovnicí¹³⁾

$$\zeta = z + \int \frac{\sin z}{(ir/i_0 r_0)^2 - \sin^2 z} \cdot \frac{di}{i}, \quad (54)$$

kde z je zenitová vzdálenost bez refrakce, i_0, r_0 veličiny v místě pozorovatele, tedy v našem případě

$$i_0 = 1 - 2m/\Delta, \quad r_0 = \Delta$$

a přibližně:

$$\frac{ir}{i_0 r_0} = \frac{r}{\Delta}, \quad z = \frac{1}{2}\pi, \quad \sin \varphi = \frac{\Delta}{r},$$

takže

$$\zeta = \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\vartheta = \frac{1}{2}\pi + \frac{2m}{\Delta} \int_{\vartheta/2}^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi = \frac{1}{2}\pi + \frac{2m}{\Delta}.$$

V případech a) i b) odchylka nastává v tom směru, ve kterém rychlost světla klesá, tedy opět ústřední hmota je uvnitř křivky.

Rudý posuv. Necht' přichází světelný paprsek ze zdroje světla, na němž je gravitační potenciál Φ_e , do místa tak vzdáleného, že

¹³⁾ Ball: Lehrbuch der sphärischen Astronomie.

gravitační potenciál je téměř nula. Pak bude se rychlost světla měnit od $c + 2\Phi_c/c$ do c . Střední rychlost bude

$$\bar{c} = \frac{\int_{\Phi_c}^0 (c + 2\Phi/c) d\Phi}{\int_{\Phi_c}^0 d\Phi} = c + \frac{\Phi_c}{c} = c - \frac{hM}{\Delta c}. \quad (55)$$

Je to tedy tak, jakoby se zdroj světelný vzdaloval od pozorovatele (pro nějž je rychlost světla c) rychlostí $c_2 = -hM/\Delta c$. Musí se tedy objevit Dopplerův efekt a sice změni se frekvence ν_0 vysílaného světla na ν podle vzorce

$$\frac{\delta\nu}{\nu_0} = \frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} = \frac{c_2}{c - c_2} \doteq \frac{c_2}{c} = -\frac{hM}{\Delta c^2}.$$

Naměří tedy pozorovatel frekvenci $\nu < \nu_0$, takže nastává posuv spektrálních čar k červenému konci.

Weberův zákon. Nejprve několik historických poznámek.¹⁴⁾ V roce 1846 uveřejnil Heinrich Weber svůj zákon, podle něhož odpudivá síla dvou elektrických množství e, e' ve vzdálenosti r je dána výrazem

$$P = \frac{ee'}{r^2} \left\{ 1 - \frac{1}{2c^2} \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - 2r \frac{d^2r}{dt^2} \right] \right\}, \quad (57)$$

a upozornil, užije-li se obdobného zákona pro zjevy gravitační, že budou rozdíly mezi výpočtem a pozorováním nepostřehnutelné. Hodnoty pro postup perihelu Merkura počítané podle této rovnice vycházely příliš malé. Přenesení svého zákona na zjevy gravitační odůvodnil Weber (1877) takto: Náboj $+e$ nechť je vázán na množství hmoty ε , $-e$ na $\alpha\varepsilon$. Jednotku hmoty volíme tak, že číselně bude e a ε stejné. Pak neutrální částice o celkové hmotě $m = (1 + \alpha)\varepsilon$ působí na jinou o hmotě $m' = n(1 + \alpha)\varepsilon$ odpudivými silami elektrickými

$$f = \frac{ee}{r^2} \left\{ 1 - \frac{1}{2c^2} \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - 2r \frac{d^2r}{dt^2} \right] \right\} = \frac{\varepsilon \cdot n\varepsilon}{r^2} [\dots],$$

$$f' = \frac{-e \cdot -e}{r^2} [\dots] = \frac{\varepsilon \cdot n\varepsilon}{r^2} [\dots] = f$$

¹⁴⁾ H. Weber: Elektrodynamische Maassbestimmung. Abhandlungen d. k. sächsischen Gesellschaft d. Wissensch. zu Leipzig 1846.

Friedrich Zöllner: Erklärung d. universellen Gravitation aus den statischen Wirkungen d. Elektrizität und d. allgemeine Bedeutung des Weberschen Gesetzes. Leipzig 1882.

Hattendorf: Schwere, Elektrizität u. Magnetismus 1876.

Poincaré: Elektrizität u. Optik 1892.

Dr. A. Seydler: Základové theoretické fysiky 1880.

a přitažlivými, jež pro obecnost položíme rovné μf . Předpokládáme-li $\alpha = 1$, bude výsledná síla $= -\frac{\mu - 1}{2} \frac{mm'}{r^2}$ [. . .]. Je-li hmota v obvyklé míře M gramů $= N \cdot m$, bude konečně síla

$$P = -\frac{\mu - 1}{2N^2} \cdot \frac{MM'}{r^2} \left\{ \dots \right\},$$

kde výraz $(\mu - 1)/2N^2$ je gravitační konstanta.

Zákon Weberův vyhovuje principu o zachování energie, neboť perpetuum mobile je znemožněno tím, že síla P má potenciál =

$$\Phi_0 \left[1 - \frac{1}{2c^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right], \quad (59)$$

kde Φ_0 je klasický potenciál.

Vraťme se nyní k rovnici (36), přepíšme ji do tvaru

$$v^2 + 2\Phi_0 (1 - v^2/c_1^2) = 2h_1$$

a zavedme „relativistický potenciál“

$$\Phi = \Phi_0 (1 - v^2/c_1^2). \quad (60)$$

Tím ocítáme se ihned ve styku s Weberovým zákonem, jak patrně ze srovnání (59) se (60). Potenciál Φ skládá se podle (60) jednak z klasického a jednak z potenciálu příslušejícího odpudivé síle. S ohledem na to, že může být $v = \gtrless c_1$ a nemá-li gravitační účinek stát se odpudivým, musíme definovati sílu (působící na jednotku hmoty)

$$P = \mp \frac{\partial \Phi}{\partial r} \text{ pro } v \gtrless c_1.$$

Pro $v = c_1$ je $\Phi = 0$, $P = 0$ a máme dříve uvažovaný případ rovnoměrného pohybu.

Pro kruhové pohyby položme v korekčním členu za v^2 hodnotu známou z klasické mechaniky, totiž $v^2 = -\Phi_0 = \frac{hM}{r}$, takže dostředivá síla bude

$$P = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\frac{hM}{r^2} \left(1 - \frac{2hM}{rc_1^2} \right), \quad (61)$$

která co do absolutní hodnoty je rovna odstředivé $r\omega^2$, takže srovnáním se (60) a po úpravě dostaneme třetí Keplerův zákon

$$r^3 \omega^2 \left(1 + \frac{2hM}{rc_1^2} \right) = hM.$$

z něhož jako dříve je patrné, že klasická úhlová rychlost

$$\omega_0 = \omega \left(1 + \frac{hM}{rc_1^2} \right),$$

jež vykládá postup perihelu.

Pro pohyb se světelnou rychlostí můžeme s dostatečnou přesností položit v korekčním členu v rovnici (60) $v = c$. Pak je

$$\Phi = -2\Phi_0 = + \frac{2hM}{r}.$$

Z toho je patrné, že je to tak, jako by se gravitační konstanta oproti klasické zdvojnásobila¹⁵⁾ a změnila svoje znamení. Následkem toho však rychlosti bude k perihelu ubývat, odchylka bude dvakrát větší než podle (9), a poněvadž definujeme v tomto případě $P = + \partial\Phi/\partial r$, bude se pohyb dít po větvi, v níž leží ústřední hmota, tudíž v úplném souhlase s relativitou.

Pro bod volně padající z nekonečna je $v = -dr/dt$ tedy podle (60)

$$\Phi = -\frac{hM}{r} \left[1 - \frac{1}{c_1^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right]$$

a síla

$$P = -\frac{\partial\Phi}{\partial r} = -\frac{hM}{r^2} \left\{ 1 - \frac{1}{c_1^2} \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - 2r \frac{d^2r}{dt^2} \right] \right\},$$

což je Weberův zákon, v němž však místo $2c^2$ vystupuje rychlost $c_1 = c/\sqrt{3}$.

*

Quelques remarques sur la théorie de la relativité.

(Extrait de l'article précédent.)

La théorie classique du mouvement hyperbolique explique la moitié de la déflexion du trajet de la lumière dans un champ gravifique. La théorie large de la relativité donne la valeur précise. Par une méthode élémentaire on peut venir de la théorie spéciale à la théorie large. Par la transformation $r = (1 + 2m/r') r'$ on arrive à la forme très utile pour ds^2 . Le rayon de la courbure du plan non-euclidien est proportionnel au temps de la révolution au cercle. L'expansion de l'univers se rattache à la courbure locale. Un système canonique des équations permet une solution unifique des cas fondamentaux. Le mouvement du périhel, une classification des orbites ouvertes, l'inflexion du trajet de la lumière, la déplacement rouge et la loi de Weber sont les suites aisément déduites du précédent.

¹⁵⁾ B. Hostinský: Einsteinovy přednášky o teorii relativity. Časopis pro pěst. matem. a fys., roč. LIII, čís. 3 (1924).

Výpočet živé síly, se kterou elektron dopadá na anodu, a časového kolísání počtu elektronů dopadajících na anodu při ultrakrátkých kmitech.

Karel Teige.

(Došlo 20. března 1934.)

Některé teorie vzniku ultrakrátkých elektromagnetických kmitů pomocí elektronových lamp potřebují znáti živou sílu, se kterou dopadá elektron na anodu, a to v případě, kdy na anodě je vedle stálého, dosti vysokého napětí též malé napětí střídavé velmi vysokého kmitočtu. Uvedené teorie se spokojily toliko přibližným řešením, kdy tato živá síla je dána součinem z náboje elektronu a potenciálu anody v okamžiku dopadu elektronu na anodu. To ovšem předpokládá, že celá dráha elektronu se děje ve statickém poli uvnitř lampy, že tedy doba dráhy elektronu mezi katodou resp. mřížkou a anodou je velmi krátká proti době kmitů střídavého napětí anodového. Tento předpoklad však při vznikajících kmitech v lampě není splněn.

Je proto úlohou této práce odvoditi přesný výraz pro dopadovou energii elektronu na anodu a ukázati pak z tohoto přesného vzorce, jaké je přiblížení těch teorií, které tuto energii určují toliko potenciálem anody v okamžiku dopadu elektronu.

Ovšem ani náš výpočet nebude úplně obecný, poněvadž ten naráží na nepřekonatelné matematické potíže. My musíme se spokojiti s těmito zjednodušujícími předpoklady:

1. elektronovou lampu si nahradíme dvěma rovinnými elektrodami o vzájemné vzdálenosti a ,
2. mezi těmito elektrodami vedle stálého dosti vysokého napětí V máme ještě střídavé napětí $E_0 \sin \omega (t + \varphi)$, při čemž E_0 je tak malé, že jeho čtverec zanedbáme při výpočtech. Při tom φ značí čas, kdy elektron opustí první elektrodu a směrem osy X letí ke druhé elektrodě.

Výpočet sám provedeme pak pro tyto dva různé případy:

- a) Elektron opustí první elektrodu s rychlostí nulovou. (To je případ lampy o dvou elektrodách.)
- b) Elektron opustí první elektrodu s konečnou rychlostí. (To je případ lampy s mřížkou, kdy periodická síla je mezi mřížkou

a anodou, a kdy první elektroda je vlastně mřížka, kterou proletí elektron s rychlostí získanou stálým napětím mezi katodou a mřížkou.)

Případ *a*). Elektron opustí první elektrodu s nulovou rychlostí.

Je-li m hmota elektronu, e jeho náboj, a vzdálenost obou elektrod, bude rovnice diferenciální pro pohyb elektronu mít tvar

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{e}{a} [V + E_0 \sin \omega (t + \varphi)]. \quad (\text{I})$$

První elektrodu $x = 0$ opouští elektron v čase $t = 0$ s rychlostí $\frac{dx}{dt} = 0$. Tedy integrál uvedené rovnice musí v čase $t = 0$ vyhovovati podmínkám $x = 0$, $\frac{dx}{dt} = 0$. Takový integrál je

$$x = \frac{E_0 e}{am\omega} \left[\frac{\sin \omega \varphi}{\omega} + t \cos \omega \varphi - \frac{\sin \omega (t + \varphi)}{\omega} \right] + \frac{1}{2} \frac{e}{am} V t^2. \quad (\text{II})$$

Zavedeme-li zkratky

$$\frac{eE_0}{am\omega} = \eta, \quad \frac{eV}{am} = \zeta,$$

je

$$x = \eta \left[\frac{1}{\omega} \sin \omega \varphi + t \cos \omega \varphi - \frac{1}{\omega} \sin \omega (t + \varphi) \right] + \frac{1}{2} \zeta t^2, \quad (\text{IIa})$$

odkud

$$\frac{dx}{dt} = \eta [\cos \omega \varphi - \cos \omega (t + \varphi)] + \zeta t.$$

Při zanedbání druhých mocností malé veličiny η dostaneme pro čtverec rychlosti, se kterou elektron dopadá na anodu, výraz, kde t_a značí dobu, za kterou elektron urazí dráhu mezi elektrodami

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = 2\eta \zeta t_a [\cos \omega \varphi - \cos \omega (t_a + \varphi)] + \zeta^2 t_a^2.$$

Doba t_a je určena rovnicí

$$a = \eta \left[\frac{1}{\omega} \sin \omega \varphi + t_a \cos \omega \varphi - \frac{1}{\omega} \sin \omega (t_a + \varphi) \right] + \frac{1}{2} \zeta t_a^2. \quad (\text{III})$$

Je-li, jak předpokládáme, E_0 velmi malé proti V , tu možno přibližně položit

$$t_a = t_0 + \left(\frac{\partial t_a}{\partial \eta} \right)_0 \eta. \quad (\text{IV})$$

Z rovnice (III) pro derivaci doby t_a podle η dostáváme

$$\frac{1}{\omega} \sin \omega \varphi + t_0 \cos \omega \varphi - \frac{1}{\omega} \sin \omega (t_0 + \varphi) + \xi t_0 \left(\frac{\partial t_a}{\partial \eta} \right)_0 = 0,$$

odkud

$$\left(\frac{\partial t_a}{\partial \eta} \right)_0 = -\frac{1}{\xi t_0} \left[\frac{1}{\omega} \sin \omega \varphi + t_0 \cos \omega \varphi - \frac{1}{\omega} \sin \omega (t_0 + \varphi) \right]. \quad (\text{V})$$

Podobně substitucí (IV) výraz pro čtverec rychlosti dopadajícího elektronu dostane tvar

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 &= 2\eta \xi t_0 [\cos \omega \varphi - \cos \omega (t_0 + \varphi)] + \xi^2 \left[t_0^2 + 2t_0 \left(\frac{\partial t_a}{\partial \eta} \right)_0 \eta \right] = \\ &= \xi^2 t_0^2 + 2\eta \xi t_0 \left[\xi \left(\frac{\partial t_a}{\partial \eta} \right)_0 + \cos \omega \varphi - \cos \omega (t_0 + \varphi) \right]. \quad (\text{VI}) \end{aligned}$$

Jelikož pak t_0 je určeno rovnicí

$$a = \frac{1}{2} \xi t_0^2,$$

je

$$t_0 = \sqrt{\frac{2a}{\xi}} = \sqrt{\frac{2a^2 m}{eV}}$$

Dosazením této hodnoty jakož i výrazů za η a ξ do rovnice pro $\left(\frac{dx}{dt} \right)^2$ dostaneme

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 &= \frac{e^2 V^2}{a^2 m^2} \frac{2a^2 m}{eV} + 2 \frac{e^2}{a^2 m^2} \frac{EV}{\omega} \sqrt{\frac{2a^2 m}{eV}} \cdot \\ &\cdot \left[-\frac{1}{t_0 \omega} \sin \omega \varphi - \cos \omega \varphi + \frac{1}{t_0 \omega} \sin \omega (t_0 + \varphi) + \right. \\ &\left. + \cos \omega \varphi - \cos \omega (t_0 + \varphi) \right] = 2 \frac{eV}{m} + 2 \sqrt{2} \frac{e\sqrt{e}}{m\sqrt{m}} \frac{E\sqrt{V}}{a\omega} \cdot \\ &\cdot \left[\frac{1}{\omega t_0} [\sin \omega (t_0 + \varphi) - \sin \omega \varphi] - \cos \omega (t_0 + \varphi) \right]. \end{aligned}$$

Tím pro živou sílu dopadajícího elektronu na anodu dostáváme definitivně

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)_a^2 &= eV + \sqrt{2} \frac{e\sqrt{e}}{\sqrt{m}} \frac{\sqrt{V}E}{\omega a} \left[\frac{1}{\omega t_0} (\sin \omega (t_0 + \varphi) - \sin \omega \varphi) - \right. \\ &\left. - \cos \omega (t_0 + \varphi) \right]. \quad (\text{VII}) \end{aligned}$$

Rozvinutím výrazu v závorce v nekonečnou řadu, dostáváme

$$\frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt} \right)_a^2 = eV + \sqrt{2} \frac{e\sqrt{e}}{\sqrt{m}} \frac{\sqrt{VE}}{a\omega} \left\{ \cos \omega\varphi \left[\frac{2}{3!} (\omega t_0)^2 - \frac{4}{5!} (\omega t_0)^4 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{6}{7!} (\omega t_0)^6 - \dots \right] + \sin \omega\varphi \left[\frac{1}{2!} \omega t_0 - \frac{3}{4!} (\omega t_0)^3 + \frac{5}{6!} (\omega t_0)^5 - \dots \right] \right\}. \quad (\text{VIII})$$

Z uvedeného vzorce je patrné, že vypočtená živá síla je jednoznačně určena potenciálem anody jenom tehdy, když možno druhé a vyšší mocnosti veličiny ωt_0 zanedbat. Tu je totiž

$$\frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt} \right)_a^2 = eV + \sqrt{2} \frac{e\sqrt{e}}{\sqrt{m}} \frac{\sqrt{VE}}{a\omega} \cdot \frac{1}{2} \omega t_0 \sin \omega\varphi = \\ = eV + \sqrt{2} \frac{e\sqrt{e}}{\sqrt{m}} \cdot \frac{\sqrt{VE}}{a \cdot 2} \cdot \sqrt{\frac{2a^2m}{eV}} \sin \omega\varphi = eV + eE \sin \omega\varphi.$$

Případ b). Elektron opustí první elektrodu s konečnou rychlostí v_0 .

V tomto případě nutno najít takový integrál rovnice (I), který pro $t = 0$ vyhovuje podmínkám

$$x = 0, \quad \frac{dx}{dt} = v_0.$$

Tento integrál jest

$$x = v_0 t + \eta \left[\frac{1}{\omega} \sin \omega\varphi + t \cos \omega\varphi - \frac{1}{\omega} \sin \omega(t + \varphi) \right] + \frac{1}{2} \zeta t^2.$$

Odtud máme

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + \eta [\cos \omega\varphi - \cos \omega(t + \varphi)] + \zeta t.$$

Povýšením tohoto výrazu na druhou, při čemž čtverec η^2 zanedbáme, je dále

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = (v_0 + \zeta t_a)^2 + 2(\zeta t_a + v_0) \eta [\cos \omega\varphi - \cos \omega(t_a + \varphi)].$$

Čas, který potřebuje elektron, aby od první elektrody dospěl ke druhé, je dán rovnicí

$$a = v_0 t_a + \eta \left[\frac{1}{\omega} \sin \omega\varphi + t_a \cos \omega\varphi - \frac{1}{\omega} \sin \omega(t_a + \varphi) \right] + \frac{1}{2} \zeta t_a^2.$$

Klademe-li zase

$$t_a = t_0 + \left(\frac{\partial t_a}{\partial \eta} \right)_0 \eta, \quad (\text{IV})$$

máme derivováním výše uvedené rovnice vztah

$$v_0 \left(\frac{\partial t_a}{\partial \eta} \right)_0 + \frac{1}{\omega} \sin \omega \varphi + t_0 \cos \omega \varphi - \frac{1}{\omega} \sin \omega (t_0 + \varphi) + \\ + \zeta t_0 \left(\frac{\partial t_a}{\partial \eta} \right)_0 = 0,$$

odkud je

$$\left(\frac{\partial t_a}{\partial \eta} \right)_0 = - \frac{1}{\zeta t_0 + v_0} \left[\frac{1}{\omega} \sin \omega \varphi + t_0 \cos \omega \varphi - \frac{1}{\omega} \sin \omega (t_0 + \varphi) \right].$$

Podobně zavedením substituce (IV) do rovnice pro čtverec rychlosti dopadajícího elektronu na anodu dostaneme

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = 2\eta (\zeta t_0 + v_0) [\cos \omega \varphi - \cos \omega (t_0 + \varphi)] + (v_0 + \zeta t_0)^2 + \\ + 2\zeta (v_0 + \zeta t_0) \left(\frac{\partial t_a}{\partial \eta} \right)_0 \eta = \\ = (v_0 + \zeta t_0)^2 + 2\eta (\zeta t_0 + v_0) \left[\zeta \left(\frac{\partial t_a}{\partial \eta} \right)_0 + \cos \omega \varphi - \cos \omega (t_0 + \varphi) \right],$$

při čemž doba t_0 je dána rovnicí

$$a = v_0 t_0 + \frac{1}{2} \zeta t_0^2.$$

Nyní tento výsledek budeme aplikovati na elektronovou lampu, a to na pohyb elektronu mezi mřížkou a anodou. Napětí katody položíme rovno nule, napětí mřížky označme V_g a stálé napětí anody V_a . Tu je jasno, že

$$v_0 = \sqrt{\frac{2eV_g}{m}}, \quad v_0 + \zeta t_0 = \sqrt{\frac{2eV_a}{m}}, \quad V = V_a - V_g.$$

Tím dostáváme definitivně výraz pro živou sílu dopadajícího elektronu na anodu

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = eV_a + \frac{eE}{a\omega} \cdot \sqrt{\frac{2eV_a}{m}} \left[-\frac{1}{t_0^1 \omega} \sin \omega \varphi - \frac{t_0}{t_0^1} \cos \omega \varphi + \right. \\ \left. + \frac{1}{t_0^1 \omega} \sin \omega (t_0 + \varphi) + \cos \omega \varphi - \cos \omega (t_0 + \varphi) \right] \quad (\text{VIII'})$$

$$\text{kde } t_0^1 = t_0 + \frac{v_0}{\zeta}.$$

Tento výraz pro $v_0 = 0$ přechází ve výraz uvedený pro a .)

Dosud řešili jsme případ, jak periodicky měnící se EMS. mezi elektrodami působí na živou sílu dopadajícího jediného elektronu na anodu. Avšak v elektronových lampách nemáme co činiti s jedním elektronem, nýbrž s mnoha elektrony. Abychom pak znali celkovou živou sílu všech dopadajících elektronů, nutno znáti ještě, jak uvedená periodická EMS. působí časové kolísání v počtu elektronů dopadajících na anodu. Tuto úlohu budeme nyní řešiti.

Z prvé elektrody vycházejí elektrony zcela stejnoměrně. To značí, že v čase $d\varphi$ vyjde z této elektrody počet elektronů $N d\varphi$. Ty elektrony, které vyšly na počátku intervalu $d\varphi$, dopadnou na anodu v čase

$$\varphi + t_a.$$

ty pak, které vyšly na konci intervalu $d\varphi$, dopadnou na anodu v čase

$$\varphi + t_a + d\varphi + \frac{\partial t_a}{\partial \varphi} d\varphi = \varphi + d\varphi + t_a^1.$$

Jelikož podle vztahu (IV) je

$$t_a = t_0 + \left(\frac{\partial t_a}{\partial \eta} \right)_0 \eta,$$

máme odtud

$$\varphi + d\varphi + t_a^1 = \varphi + t_a + d\varphi + \frac{\partial^2 t_a}{\partial \eta \partial \varphi} \eta d\varphi.$$

Tím pak počet elektronů, které v době $d\varphi$ mezi časy $\varphi + t_a$ a $\varphi + d\varphi + t_a$ dopadnou na anodu, bude

$$N d\varphi \frac{d\varphi}{d\varphi + \eta \frac{\partial^2 t_a}{\partial \eta \partial \varphi} d\varphi} = \frac{N d\varphi}{1 + \frac{\partial^2 t_a}{\partial \eta \partial \varphi} \cdot \eta} = N \left[1 - \frac{\partial^2 t_a}{\partial \eta \partial \varphi} \eta \right] d\varphi.$$

To je rovno dále

$$d\varphi \cdot N \{ 1 + K [\cos \omega \varphi - t_0 \omega \sin \omega \varphi + \cos \omega (t_0 + \varphi)] \},$$

kde

$$K = \frac{\eta}{\zeta t_0 + v_0} = \frac{E}{a\omega} \sqrt{\frac{e}{2mV_a}}.$$

Periodickou část možno upravit na tento tvar

$$d\varphi \cdot NK \sqrt{2 + 2 \cos \omega t_0 + 2 \omega t_0 \sin \omega t_0 + \omega^2 t_0^2} \cdot \sin \left(\omega \varphi - \arctg \frac{1 + \cos \omega t_0}{\omega t_0 + \sin \omega t_0} \right). \quad (\text{IX})$$

Le calcul de l'énergie avec laquelle l'électron choque l'anode, et l'oscillation temporelle de nombre des électrons tombants sur l'anode dans le cas des oscillations ultracourtes.

(Extrait de l'article précédent.)

On calcule l'énergie avec laquelle l'électron choque l'anode de la lampe électronique, s'il y a entre les électrodes une différence potentielle, qui se compose d'un assez grand potentiel constant (l'anode négative) et d'un petit potentiel oscillant. Le calcul est exécuté pour le cas de deux (la formule VII. resp. VIII.) et pour celui de trois électrodes. Dans le dernier cas la différence oscillatoire se trouve entre la grille et l'anode (la formule VIII). Enfin il est calculé l'influence de la différence oscillatoire sur la distribution temporelle de nombre des électrons tombants sur l'anode (formule IX').

L I T E R A T U R A

A. Recense.

Václav Hlavatý: Les courbes de la variété générale à n dimension. Vyšlo jako LXIII. svazek sbírky *Mémorial des Sciences Mathématiques* r. 1934 v Paříži u Gauthier-Villars. Str. 72.

V *Mémorialu* vycházejí dobré přehledy výsledků, kterých se lidé dopracovali v moderních odvětvích matematiky; bývá to vždy, jakmile určitá část je uzavřena. Je zásluhou redakce, že dovede pro ně vždy získati odborníka nad jiné povolaného. — Prof. Hlavatý již ve své habilitační práci se přiklonil k studiu křivek uložených v prostorech o n dimensích, a byť dnes se již jím nezabývá, není téměř problému z teorie křivek v prostorech vícerozměrných, kterého by se nebyl dotkl. Publikace, kterou máme před sebou, je souhrnem jeho samostatných řešení základních problémů z tohoto oboru, byť některé výsledky jeho řešení byly odvozeny jinými autory. Je věru škoda, že rozsah publikace nedovolil, aby některé zde naznačené metody byly detailně doprovázeny počtem, jehož nuancí je prof. Hlavatý znamenitým odborníkem. Čtenáři dá někdy velmi mnoho práce, než dospěje k formulí zde jen uvedené. (Na př. v kap. III.)

Předmět je rozdělen do sedmi kapitol. V první kapitole jsou uvedeny základní poznatky absolutního počtu, které slouží v dalších kapitolách k odvozování některých vět. Je zde užito běžné symboliky Schoutenovy a obvyklých definic. Čtenáře - začátečníka v oboru absol. počtu jistě zarazí stručná definice afinoru nebo hustoty:

Afinorem (p -krát kovariantním a q -krát kontravariantním) nazýváme souhrn funkcí $v_{\lambda_1 \dots \lambda_p}^{\mu_1 \dots \mu_q}(x)$, které při transformaci $x' = x'(x)$ se transformují takto:

$$v_{\lambda_1 \dots \lambda_p}^{\mu_1 \dots \mu_q} = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_q}}{\partial x^{\alpha_q}} \cdot \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\lambda_1}} \dots \frac{\partial x^{\beta_p}}{\partial x'^{\lambda_p}} \cdot v_{\beta_1 \dots \beta_p}^{\alpha_1 \dots \alpha_q}.$$

Hustotou váhy k nazýváme funkci $w(x)$, která při transformaci $x' = x'(x)$ se transformuje podle rovnice:

$$w'(x) = \Delta^{-k} w(x) \quad \left(\Delta = \text{determ.} \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right| \right).$$

Nevznikne tu otázka: Jak se mohou na pravé straně objeviti parc. derivace? Domníváme se, že by pochyby čtenáře-neodborníka odstranila poznámka, že funkce jsou určitým funkcionálním způsobem závislé na systému souřadném a tento explicitě definovati. Jinak pro analytika je snadné dokázat, že hustoty neexistují.

V II. kapitole autor studuje křivosti, skalární invarianty křivek, které jsou v prostoru o n dimensích, v němž je definována obecná metrická konexe nebo Weylova nebo konečně obecná afinní konexe. V každém případě jsou tu odvozeny *Frenetovy* formule (příp. *Jordanovy*) a vhodně upozorněno, že samotné křivosti křivky netvoří kompletní systém invariantů uvažované křivky. — Zajímavé jsou metody určení pole rovnoběžných vektorů jednotkových podél uvažované křivky; jsou to zdařilé aplikace *Frenetových* formulí.

III. kapitola má za úkol vysvětliti poznámku, že křivosti křivky netvoří kompletní systém invariantů křivky. Hledá tedy vztahy, které platí mezi křivostí křivky a křivostí prostoru.

Rozvoje pro fundamentální tensor, v okolí uvažovaného bodu (v lok. geodet. parametrech r -stupně) užívá autor na posuv vektoru podél křivky a pro odvození kanonických rovnic.

Vliv křivosti prostoru ukázán při hledání invariantů křivky, která je položena ve dvou prostorech: *Riemannově* a *Euklidově*. — Je to speciální případ invariantů křivky uložené ve dvou prostorech Riemannových, kterým se zabýval autor v *Rendiconti Lincei* r. 1927, 6^e s., t. 5. Vlastnosti styku p -řádu dvou křivek pěkně od dřívějšího kontrastují: Afinor křivosti variety vůbec se tu nevyskytuje. Kapitola je uzavřena geometrickou interpretací křivosti variety ve dvojsměru.

IV. kapitola studuje křivky na varietách m -rozměrných, které jsou uloženy v prostorech n -rozměrných. Na několika řádcích odvozeno zobecnění formule *Enneperovy* pro asymptotiku a řada vlastností kvasisymptotik. Znamé Hlavatého zobecnění věty *Beltramiho* pro kvasisymptotiku, zobecnění věty *Meusnierovy* je tu podáno velmi zdařile.

Řešení problémů z oboru infinitesimální transformace, podané v V. kapitole, jsou opět založeny na definici příliš stručné a svádějící k omylu. Přece vždy tu jde o transformace závislé na proměnné veličině ε vztahem:

$x^\mu = x^\mu + \varepsilon V^\mu$ a nikoliv na „konstantě nekonečně malé“, nýbrž na konstantě „dostatečně“ malé. Transformací dospíváme k vzorcům, v nichž potom provádíme, jako autor provádí, limitní přechod pro $\varepsilon \rightarrow 0$. Poslední dvě kapitoly VI. a VII. jsou aplikací výsledků absol. počtu pro relativistický prostor resp. prostor trojrozměrný. Jsou však spíše doplňkem teoretických výsledků předchozích kapitol. V VI. kapitole je stanoven obecný integrál

rovnice $\frac{dx^\mu}{dt} D_\mu v^\nu = 0$, který definuje obecný kontravariantní vektor posouvaný podél světelného paprsku v obecném časoprostoru.

(Nebude možno řešit problém ještě jednodušeji, když známe poznámku prof. Hlavatého k práci *Fermiho*, uveřejněnou jako recenzi v *Zentralblattu*?) V VII. kapitole určeny přirozené rovnice křivek na ploše uložené v trojrozměrném prostoru *Riemannově* ve dvou etapách.

V první určena rovnice obsahující vedle obou křivosti křivky také geodetickou křivost křivky. Tato rovnice řeší problém přirozené rovnice křivek na ploše jen pro speciální případy, v nichž geod. křivost dovedeme vyloučiti. Některé z nich, jako geodetickou kružnici, sfér. křivku a j. autor uvádí.

V druhé etapě dospívá ke třem rovnicím, z nichž v případě možné eliminace geod. křivosti a dvou zavedených veličin obdržíme hledanou přirozenou rovnici. Je-li tato eliminace vždy možná, autor nezkoumá.

Monografie je doprovázena důkladným seznamem prací všech, kteří teorii křivek něčím obohatili, a je na ně na příslušných místech odkazováno. Několik tiskových nedopatření v indexech nebo slovech čtenář jistě opraví si sám. Publikace je tedy velmi zdařilá a dává dobrý přehled poznatých nových cest a výsledků v teorii křivek v prostorech vícerozměrných. Bude jistě vítanou příručkou každému pracovníku v absol. dif. počtu a zřídlem mnoha podnětů.

F. Vyčichlo.

Elektrotechnický slovník. Vydal Elektrotechnický svaz československý, 368 stránek formátu A5, cena pro členy Kč 30,—.

Elektrotechnický svaz československý vydal před půldruhým rokem *Slovník elektrotechnický*, který má jistě velký význam nejen pro elektrotechniku, ale i pro fyziku a zejména profesory fyziky. Tento slovník, vydaný jako československá norma, jest výsledek několikaleté mezinárodní práce a opírá se o britský slovník z roku 1926, takže očíslování názvů, definice a anglické výrazy jsou z onoho slovníku, prohlášeného v Anglii též za normu.

Náš Elektrotechnický slovník má názvy české, polské, anglické, francouzské a německé.

Slovník je uspořádán tak, jak mají býti uspořádány odborné slovníky normalizačních společností, pracujících na podkladech mezinárodních. Jeho první část obsahuje názvy rozříděné podle odborů, tak na př. díl 82 obsahuje žárovky a všechno, co s nimi souvisí, díl 83 obloukovky a jiné lampy. U názvů, kde je toho třeba, jsou pod čarou podrobná vysvětlení a u mnohých názvů jsou i obrázky. Na prvním místě jsou názvy normované. V závorce pak je ta část názvu, kterou lze vynechat. Názvy zastaralé jsou pak v závorkách hranatých. Za zlomkovou čarou názvu pak jdou zkratky obvyklé, na př.: magnetické pole (*n*) mag pole. Na posledním místě jsou pak znaky, po př. značky, jichž se užívá v tisku a ve vzorcích.

Druhá část slovníku jest abecední rejstřík s údaji číslic názvů, a to český, polský, francouzský, anglický a německý.

V dodatku je pak klasický článek zesnulého profesora V. Ertla „České názvosloví elektrotechnické“, který znamenitým způsobem ukazuje, jak se má postupovati při tvoření nových názvů.

Elektrotechnikové naši pracovali nejen s mnoha odborníky našimi i cizími, ale zejména s našimi filology, kteří se účastnili velmi podrobně práce jazykové. Po stránce jazykové byl slovník velmi dobře kritisován v časopise „Naše řeč“.

Náš slovník obsahuje zatím 2000 pojmů, britský má 1900, polský 1000 a podobné slovníky francouzské 500. Německé slovníky elektrotechnické mající více hesel jsou uspořádány jinak, proto je nelze s tímto slovníkem srovnávat.

Členové Jednoty českosl. matematiků mohou si tento slovník objednat buď v Jednotě, aneb přímo u Elektrotechnického svazu československého, Praha XII, Vocelova č. 3.

Vladimír List.

Louis de Broglie: L'électron magnétique. (Théorie de Dirac.) — Paris, 1934. Stran VIII + 316. Cena Kč 175.—.

Zakladatel vlnové mechaniky překládá vědecké veřejnosti ne příliš rozsáhlou monografii o Diracově teorii elektronu; je to vlastně jedna z nejkrásnějších a při tom nejprístupnějších učebnic této moderní teorie. Kniha vznikla z přednášek, které autor konal v Paříži v „Institut Henri Poincaré“.

Kniha sestává ze tří částí. Aby se nezdálo, že Diracova teorie je snad pouhou hříčkou teoretikovou, nýbrž že poskytuje možnost výkladu důležitých fyzikálních fakt, proto spisovatel vykládá v první části své knihy o spektru vodíku, dubletech u alkalií a Röntgenových spektrech charakteristických, a to jednak o výsledcích experimentálních, jednak o teoretickém jich výkladu podle Bohra a Sommerfelda jakož i o nepostačitelnosti těchto teorií. Pak přechází k výkladu anomálního zjevu Zeemanova a k zavedení předpokladu, že elektron rotuje kolem své osy. V těchto čtyřech kapitolách na 50 stránkách jsou vyloženy základní myšlenky starší kvantové teorie stavby atomu. Další čtyři kapitoly (asi 50 stránek) jsou věnovány principům vlnové mechaniky nerelativistické hlavně ve tvaru Schrödingerově a relativistické o jedné vlnové funkci. Výklad je založen na vlastnostech operátorů typu Hermiteova a všude je provázen velmi jasnou fyzikální interpretací početního formalismu ve vlnové mechanice užívaného. Důkazem nepostačitelnosti relativistické vlnové rovnice elektronu o jedné vlnové funkci končí část první.

Druhá část obsahuje teorii Diracovu, t. j. relativistické rovnice elektronu o čtyřech vlnových funkcích. Po výkladech o aproximaci Pauliově následuje ve čtyřech dalších kapitolách (asi 55 stran) reprodukce myšlenek Diracových, nalezení Diracových rovnic, jejich relativistická a elektromagnetická invariance, fyzikální interpretace užívaného formalismu; další čtyři kapitoly (asi 55 stran) obsahují výklady o vlastním magnetismu

elektronu, o tensoru reprezentujícím elektrický a magnetický moment, o maticích a prvních integrálech v teorii Diracově a o vlastním rotačním momentu elektronu. Systematickým přehledem dosažených výsledků končí část druhá.

V třetí části jsou probírány některé aplikace Diracovy teorie, její kritika a různé doplňky k teorii. První tři kapitoly (asi 45 stran) jednají o proslulém odvození detailní struktury spektrálních čar (formule Sommerfeldova), o odvození vzorců Landéových a o Bohrově důkazu nemožnosti oddělit vlastní magnetický moment elektronu od magnetického momentu (obíhajícího) elektronu jakožto celku. Po menší zmínce o polarisaci elektronových vln přechází autor k třem posledním kapitolám (asi 45 stran) o stavech charakterizovaných zápornou kinetickou energií v teorii Diracově, o obtížích teorie spojených s nemožností tyto stavy úspěšně z teorie eliminovat, ač jsou na závalu, o třaslavém pohybu elektronu Diracově, jak na to poukázal Schrödinger (Zitterbewegung, tremblement). Zajímavými kritickými úvahami o nerovnoprávnosti času se souřadnicemi v teorii Diracově jakož i o relacích elementární neostrosti (zvláště jejich zpřísnění) třetí a poslední část knihy končí.

Z krátkého obsahu zde uvedeného je patrna bohatost látky v knize snesené i její systematické uspořádání. Výklad je neobyčejně jasný a nečiní přílišných nároků na předběžnou přípravu po matematické stránce, takže se kniha hodí velmi dobře i pro toho, kdo není náležitě vyzbrojen všemi vymoženostmi formálního rázu. Četba této mistrně sepsané knihy jest opravdovým požitkem.

V. Trkal.

B. Přehled původních publikací českých matematiků a fysiků.

Z. Horák: Sur la théorie de la réfraction astronomique, Astr. Nachr., Bd. 247 (1933), p. 345—350.

Teorie refrakce založená na analogii mechaniky a geometrické optiky, vedoucí k hypotéze hyperbolických paprsků a k refrakčnímu vzorci ekvivalentnímu vzorci Mayerovu.

Z. Horák: Sur une formule des réfractions normales, Astr. Nachr., Bd 248 (1933), p. 405—410.

Z úvah o střední hodnotě refrakčního integrálu odvozen nový vzorec pro normální refrakci, který přes svou jednoduchost vyhovuje v celém rozsahu stejně dobře jako nejpřesnější teorie Radauova.

Z. Horák: Sur la dynamique absolue des systèmes rhéonomes, Prace Mat.-Fiz., Warszawa, XLI (1933), p. 25—37.

Odvození pohybových rovnic kovariantních pro nejobecnější transformace prostoročasových parametrů.

ZPRÁVY

Sir Thomas Muir, známý historik teorie determinantů, zemřel 21. března 1934 v požehnaném věku 90 let v Rondebosch (Jižní Afrika). Narodil se 25. srpna 1844 ve Skotsku, věnoval se dráze školské, která jej zavedla v r. 1892 do kapské kolonie jako nejvyššího školského funkcionáře (Superintendent-General of Education); v této funkci setrval až do svého odchodu na odpočinek v r. 1915. V době svého úřadování získal si velkých zásluh o vybudování školství v kapské kolonii (nynější anglické jižní Africe), které našel v primitivních začátcích. Mimo svůj úřad věnoval se hlavně studiím matematickým a platil právem za nejlepšího znalce teorie determinantů. Napsal učebnici teorie determinantů a po celý svůj život publikoval drobnější pojednání týkající se této teorie, hlavně však sledoval s neobyčejnou pílí a pozorností veškerou produkci matematickou na tomto poli. O tom svědčí zvláště veliké dílo, svým způsobem jedinečné, „The Theory of Determinants in the historical order of development“, které ve 4 silných svazcích uvádí všechna pojednání determinantů se týkající i se stručným, ale zpravidla dosti výstižným obsahem, od r. 1693 (Leibniz) až do r. 1900. Pokračováním a doplňkem tohoto díla je pak „Contributions to the history of determinants 1900—1920“, dílo vydané r. 1930 a psané v témž duchu. Toto základní dílo stále doplňoval drobnými skizami historickými a přehledy bibliografickými; poslední — mně známý — jeho literární projev byl právě toho druhu (A twelfth contribution to the bibliography of determinants, v South African Journal of Science, vol. XXX), předložený k tisku ve dnech, kdy autor dokončoval svůj 89. rok; je zde uvedena řada publikací od r. 1870 do r. 1933. By.

O. D. Chwolson zemřel 12. května 1934. Proslulý nestor ruských fyziků Orest Daniilovič Chwolson narodil se v Petrohradě dne 5. prosince 1852 (podle našeho kalendáře); jeho otec Daniel Chwolson byl znamenitý orientalista na petrohradské universitě. Po studiích v Petrohradě (1869—1873) odešel dále se odborně vzdělávat na universitu do Lipska, načež od r. 1875 působil na různých středních školách v Petrohradě, r. 1876 stal se soukr. docentem, r. 1890 mimoř. profesorem a r. 1898 řádným profesorem fyziky na universitě petrohradské. Vedle toho přednášel i na jiných vysokých školách v Petrohradě. Dosáhl různých vyznamenání, mimo jiné obdržel titul Excelence (Превосходительство); těsně před válkou odešel na odpočinek, zůstal však jako honorární profesor ve svazku university. Nástupcem jeho stal se prof. Rožděstvenský.

Vedle doktorské disertace (r. 1880) „Magnetische Dämpfer“, jejímž veřejným obhájením se mu otevřel přístup ke kariéře universitního profesora, napsal větší počet původních prací z oboru magnetismu, elektřiny i optiky, a to rázu jak experimentálního tak teoretického, do publikací Berlínské akademie, Ann. d. Phys., Schlömilchova Ztschr. f. Math., do publikací Petrohradské akademie a do ruského časopisu Společnosti pro fysiku a chemii. Vedle toho sepsal velmi mnoho článků populárně vědeckých. Sestrojil též aktinometr vlastní konstrukce.

Chwolsonovým životním dílem jest známá jeho učebnice „Kurs fysiky“ v 6 svazcích (byla též přeložena do němčiny i francouzštiny); z ní pořídil stručný výtah, čímž vznikla trojdílná elementární učebnice „Zkrácený kurs fysiky“. Tato díla dočkala se mnoha vydání v několikatisícových nákladech.

Hlavní těžiště jeho činnosti spočívalo v působnosti pedagogické; ani v pozdním věku neztrácel zájem o moderní problémy fysikální: na př. psal o principu relativnosti, o Ramanově zjevu a ke konci života sepsal větší populárně vědeckou knihu pro širší veřejnost: „Fysika našich dnů“.

Byl poctěn členstvím různých cizích korporací vědeckých; také naše Jednota čs. mat. a fys. zvolila jej svým čestným členem.

Churavěl dlouho, takže celkem málo vycházel; před třemi lety podrobil se oční operaci, která mu podstatně zlepšila takřka ztracený zrak.

O jeho ušlechtilosti jsem mnoho slyšel od jeho žáků a přátel; sám mám na něho nejlepší vzpomínky ze svého pobytu v Rusku a nemohu mu býti ani dosti vděčen za to, jak mě podporoval v mých vědeckých snahách. Později setkal jsem se s ním ještě v Jeně na sjezdu německých fysiků; celkem se mnoho nezměnil přes všechna strádání, jimž byl vysazen v prvních dobách sovětského režimu.

Pro nás není bez zajímavosti, že jeho choť, kterou o několik let přežil, pocházela podle jeho tvrzení z českých předků.

Chwolsonem odchází poslední představitel fysiky staré školy v Rusku, do jisté míry fysik-polyhistor; dnešní fysikální generace jest již jiného rázu — účastní se úspěšně řešení nejmodernějších problémů soudobé fysiky. V. Trkal.

Nový matematický časopis. Dne 25. ledna 1934 vyšel první sešit nového matematického časopisu „Compositio mathematica“ (vychází u P. Noordhoffa v Groningen). V prospektu zdůrazňuje redakce, že časopis má sloužiti rozvoji matematiky a současně mezinárodní spolupráci. Redakční kruh je vskutku složen mezinárodně (z československých matematiků je v redakci Ed. Čech*)

*) Pro příští sešity je m. j. ohlášeno též Čechovo pojednání „Sur la connexité locale d'ordre supérieur“.

a též autoři, kteří přispěli do prvního sešitu, jsou příslušníky neméně než osmi států (Anglie, Francie, Holandska, Itálie, Německa, Ruska, Spojených států a Švýcarska). Podle složení redakce, v níž se setkáváme většinou se jmény matematiků velmi významných, i podle obsahu prvního sešitu lze s bezpečností souditi, že nový časopis bude jedním z nejvýznačnějších matematických časopisů světových.

Obsah prvního sešitu zdá se nasvědčovati tomu, že časopis nebude pěstovati speciálně některý obor matematiky (jako na př. *Fundamenta mathematicae*, jež jsou cele věnována teorii množství a oborům s ní souvisejícím), nýbrž že bude přihlížeti rovnoměrně k nejrozličnějším větvím matematiky (asi tak, jako *Mathematische Zeitschrift* nebo *Mathematische Annalen*; první číslo ostatně svým složením tyto časopisy dosti připomíná — až na větší zdůraznění mezinárodního rázu). Tak v prvním sešitě píše Watson o vytvořujících funkcích pro počet tříd binárních kvadratických forem (při čemž připomíná práce Petrovy); van der Corput píše o asymptotickém vyjádření některých typů určitých integrálů (v dalších částech této práce slibuje m. j. aplikace na analytickou teorii čísel); Bourion otiskuje práci z teorie analytických funkcí jedné proměnné (o nulových bodech úseků mocninné řady); Hille a Tamarkin zabývají se jednou třídou funkcí analytických v půlrovině; Doetsch píše o sumatorických vlastnostech Besselových funkcí a pod.; o Fourierových řadách pojednávají Bosanquet a Offord (ve společné práci) a Lévy; Loewy píše o systému lineárních diferenciálních rovnic; Wawre se zabývá analytickým pokračováním Newtonova potenciálu; Chinčín (Khintchine) zostrňuje Poincaréovu větu o „návratu“, týkající se stacionárních pohybů, zachovávaných míru; v. Neumann píše o topologických grupách; o diferenciální geometrii píše Fubini (jenž navazuje na práce Čechovy) a Levi-Civita.

Časopis bude vycházeti v nepravidelných lhůtách, při čemž sešity budou spojovány ve svazky po 480 stranách; cena svazku jest 20 holandských zlatých. Časopis není tedy bohužel levný, ale jeho důležitost mu zaručuje, že jistě nebude chyběti v žádné větší matematické knihovně.

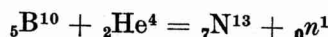
Jarník.

Fysikální sjezd. Union Internationale de Physique Pure et Appliquée bude pořádati letos ve dnech 1. až 6. října generální shromáždění a současně fysikální kongres v Londýně a Cambridgi. Přednášek tohoto sjezdu mohou se zúčastniti všichni fysikové. Otázky, o nichž bude na tomto sjezdu pojednáno, budou se jednak týkati studia hmoty pevného skupenství, jednak budou jednati o nejnovějších výzkumech fysiky jádra. Příhlášky k tomuto sjezdu

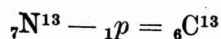
přijímá podepsaný nejpozději do 10. července t. r. Přihlášení dostanou pak podrobné zprávy a programy o uspořádání sjezdu.

Žáček.

Umělé radioaktivní prvky. Překvapující objev zdařil se nedávno *F. Joliotovi* a *I. Curieové* (C. R. 198; 1934. C. R. 29; 1934. Nature 133, 201; 1934). Je to objev tří nových, umělou cestou vzniklých prvků radioaktivních, nazvaných *radionitrogen*, *radio-silicon* a *radiophosphorus*, t. j. jednoduše: *radiodusík*, *radiokřemík* a *radiofosfor*. Jsou to, jak jména již naznačují, radioaktivní isotopy prvků dusíku, křemíku a fosforu. Důvodem k objevu byl poznatek, že některé lehké prvky, bombardovány zářením alfa, vysílají pozitrony (kladné elektrony); tak na př. hliníková folie ozařovaná zářením alfa polonia. Objev záleží pak v tom, že vysílání pozitronů trvá, i když je poloniový preparát odstraněn. Folie zůstává radioaktivní a množství záření ubývá exponenciálně, podobně jako u jednoduchých radioaktivních prvků. „Doba polovičního rozpadu“ (poločas) u hliníku je 3,25 minuty. Podobný fakt zjištěn u bóru a magnesia, jejichž poločasy jsou rovněž jen několikaminutové; měřitelnou aktivitu jeví prvky tedy stěží půl hodiny. Celá řada jiných, lehkých prvků zkoušena na tento zjev s negativním výsledkem. U tří kladných uvedených výsledků nejvíce překvapuje vysílání pozitronů, pozitron-aktivita, jak bychom řekli obdobně s názvy alfa- a beta-aktivita. Joliot a Curieová vysvětlují zjev nové radioaktivity vznikem svrchu uvedených nestabilních isotopů. Tak na př. z bóru vzniká bombardováním alfa částicami radiodusík:



kde n značí neutron, N^{13} je radioaktivní isotope dusíku, který se rozpadá za vysílání pozitronů:



na stabilní isotope uhlíku. Z hliníku a magnesia vznikají radioakt. isotopy ${}_{15}\text{P}^{30}$ a ${}_{14}\text{S}^{27}$. Spektrum vysílaných pozitronů je spojitě, maximum energie odpovídá třem milionům voltů. Opět zde narážíme na spojitě spektrum elektronů jádrem vysílaných, tak jak je v případě elektronů záporných známo u primárního záření beta. Nových radioaktivních prvků však je velmi nepatrné množství, výtěžek je opět v nejlepším případě řádu 10^{-6} vzhledem k počtu částic alfa — podobný slabý výtěžek jako při rozbíjecích pokusech (rozbití atomu). Důkaz, že běží vskutku o zmíněné isotopy, proveden cestou chemické evidence. Na př. kompaktní nitrid bóru (BN), zahříván s hydroxydem sodným. Jak známo, vzniká plynný amoniak. Současně radioaktivita je unášena amoniakem jako důkaz, že vzniká radioaktivní isotope dusíku. Chemické pokusy

musely býti prováděny velmi rychle vzhledem ke krátké době polovičního rozpadu prvků. Třeba si uvědomiti, že takové radiochemické pokusy jsou zároveň chemickým důkazem zachycení částičky alfa na atomovém jádře prvku, tedy chemickým důkazem jak transmutace, tak syntesy prvků. Nový objev snad vnese také více světla do otázky positronu, který dosud nebyl dostatečně včleněn mezi ostatní stavební kameny hmoty. *Santholzer.*

Studium těžkého vodíku pomocí radioaktivního záření. T. zv. těžký vodík, jak známo, byl objeven již r. 1932. Během roku 1933 jeho existence znovu dokázána a vyrobena také „těžká voda“. O historii objevu obou těchto látek referoval v letošním ročníku Středoškolské části Časopisu (str. 68) Vladimír Novák v „Mosaice“. V tomto referátu je atom těžkého vodíku nazýván ještě deuteronem nebo deutonem. Tyto názvy se však v odborné literatuře zatím neujaly, nyní se užívá názvu *diplogen* pro celý atom těžkého vodíku a názvu *diplon* pro jádro atomu těžkého vodíku (${}_1\text{H}^2 = {}_1\text{D}^2$). Názvy vytvořil a užívání jejich navrhl Rutherford. Diplogen je tedy isotop vodíku, podle Bainbridge má atomovou hmotu 2,0136, určenou hmotovým spektrografem. Otázka, skládá-li se diplon ze dvou protonů a jednoho elektronu, anebo z jednoho protonu a jednoho neutronu, není dosud pokusně rozřešena. Zajímavé jsou pokusy Lawrencovy, který bombardoval uměle zrychlenými diplony (v „diplonové kanálové trubici“) různé prvky a zjistil, že vysílají protony o dosahu až 18 cm. Láme se diplon v silném elektrickém poli jader bombardovaných prvků? Také tento názor nebyl dosud dostatečně potvrzen. (Lit. k základním fys. otázkám těžkého vodíku viz na př.: Rutherford - A. E. Kempton, *Proc. Roy. Soc. A* 143, 724; 1934.)

Zatím co chemikové pracují již s těžkým vodíkem a těžkou vodou s hlediska ryze chemického, snaží se fysikové cestami ryze fysikálními prostudovati strukturu diplogenu a zařaditi jej do říše již známých stavebních kamenů hmoty. Nejlepším příkladem takové práce je citovaná práce Rutherfordova a Kemptonova.

Je nasnadě použití na fysikální prozkum diplogenu radioaktivního záření alfa, podobně jako kolem r. 1910 postupoval Rutherford při budování názoru o jádrovém modelu atomu. Skutečně také sám Rutherford provedl v poslední době pokusy s rozptylem a pohlcováním záření alfa diplogenem, kteréžto pokusy dokazují úplnou rovnocennost elektrického pole diplonu s polem protonu, v souhlase s tím, že běží o isotopy. Ovšem i brzdicí schopnost diplogenu pro záření alfa je stejná jako vodíku. Tato zásada má svoje omezení: rovnocennost obou polí je stejná, pokud částičky alfa neproniknou příliš těsně k jádru diplogenu, k diplonu. V tom případě, až bude vytvořena s diplogenem analogie známých pokusů Bielerových, pravděpodobně se projeví odchylky způsobené

rozdílností vnitřní výstavby diplonu od vnitřní výstavby protonu. Takové těsné srážky částic alfa s diplony vnesou pak další světlo do názorů o vnitřní struktuře jádra těžkého vodíku.

Další zajímavé pokusy prováděl Rutherford, aby prokázal, jsou-li z bombardovaného diplogenu uvolňovány neutrony, což by právě dokazovalo domněnku o složení diplonu z jednoho protonu a z jednoho neutronu. Tenká vrstvička těžké vody bombardována zářením alfa vysílaným značně silným poloniovým preparátem. (Preparát odpovídal svým zářením záření 10 milicurie radiové emanace; v našem radiologickém ústavě měří se polonium galvanometrickou kompenzační metodou a jeho aktivita vyjadřuje se — jak je obvyklejší — v elektrostatických jednotkách proudových. Preparát Rutherfordův odpovídal asi 30.000 těchto jednotek.) Použitá těžká voda obsahovala 91% diplogenu. Na zjištění event. sekundární ionisace neutrony způsobené použito ionizační komory, spojené s lampovým zesilovačem a oscilografem. Pokus však probíhal negativně, přítomnost těžké vody nepůsobila žádný abnormální počet trhnutí vlákna oscilografu, zatím co tenká vrstvička berylia, vložená do cesty záření alfa, ihned projevila vznik spousty neutronů a skoro dvacetkrát větší počet trhnutí vlákna oscilografu v témž čase. Rutherford z toho usuzuje, že výtěžek neutronů musí býti menší než 10^{-7} , t. j. sotva jeden neutron na 10^7 alfa částic polonia. Otázka, z čeho je složen diplon, zůstává tedy i nadále nevyřešenou.

Jiný obor pokusů jsou přímé (head-on) srážky částic alfa s diplony. Jde tu opět o využitkování dosti dobře známého oboru radioaktivity pro studium diplonu. Jak známo (viz na př. knihu Rutherfordovu: *Radiations from rad. Substances*, str. 241), srazí-li se částice alfa hmoty M a rychlosti V s nehybným atomovým jádrem hmoty m , které má po srážce rychlost u , a je-li úhel, který svírá odražené atomové jádro s původním směrem letu alfa částičky, roven φ , pak pro rychlost atom. jádra u platí vzorec:

$$u = V \frac{2M}{M + m} \cos \varphi.$$

Pro srážku „head-on“ je $\varphi = 0$, jde-li tedy na př. o vodík, dostáváme pro takovou srážku částice alfa s protonem $u = \frac{2}{3}V$. Rychlost odraženého protonu je o 60% vyšší než částice alfa; zjev dobře pokusně známý z drah t. zv. H -paprsků. (Svrchu uvedený vzorec si čtenář lehko sám odvodí z vět zachování energie a momentů při srážce, jádro ovšem zůstává po srážce v rovině, určené původní drahou částice alfa a její drahou po odrazu. Celá klasická úvaha je správná ve skutečnosti jen tehdy, nenastává-li při ději nějaká neobvyklá změna energie, na př. vyzářením kvanta gama paprsku, rozbití atomu atd.)

Pro diplon vychází z uvedeného vzorce $u = \frac{4}{3}V$; rychlost odraženého diplonu je o 17% menší než protonu. Energie odraženého diplonu, vzhledem k jeho větší hmotě, je $2 \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{4}$ energie odraženého protonu. Protože ionisace, letící částíčkou působená, týká se jen vnějšího oboru působnosti atomového jádra, musí mít jak proton, tak diplon téže rychlosti, stejný počet iontů na 1 cm dráhy, tudíž také stejnou ztrátu energie na 1 cm dráhy. Z pokusně zjištěných křivek Blackettových, udávajících závislost dosahu protonu na jeho rychlosti, lze předvídati, že diplony, bombardováním alfa zářením polonia v pohyb uvedené, měly by mít dosah o 8% větší než protony za týchž okolností, přes to, že jejich rychlost je — jak svrchu uvedeno — o 17% menší než protonů. Diplon má, jak rovněž zmíněno, vyšší energii než odražený proton vzhledem k své dvakrát větší hmotě. Rutherford také vskutku našel pokusně vyšší dosah odražených diplomů, v dobrém souhlase s teoretickými předpoklady. Existence těžšího isotopu vodíku byla by těmito pokusy dokázána také ryze fyzikálně.

Santholzer.

Význam objevu kladného elektronu (positronu) pro výklad některých zjevů radioaktivního záření. Objev positronu v r. 1933 — historii objevu viz v práci *V. Trkala*, Časopis roč. 62, str. 354 — bude mít také, jak se poslední dobou ukazuje, mnohé důsledky pro vysvětlení některých, dosud velmi záhadných zjevů radioaktivního záření. Především je to výklad spojitého rozdělení energie primárního záření beta.

Primární záření beta radioaktivních prvků je tvrdým oříškem pro teoretiky. Vlnová mechanika mohla sice do jisté míry i kvantitativně vysvětlit vznik záření alfa, ale na druhé straně selhala při výkladu primárních paprsků beta. Vyskytly se sice některé pokusy o výklad (na př. Kudarův) a také jsem o nich příležitostně na tomto místě referoval, pronikavého obratu z dosavadní nejistoty však nepřinesly. Musíme si nejprve jasné uvědomiti, oč při teoretickém výkladu primárního záření beta běží a kde jsou obtížná místa.

Třeba přesně rozeznávat mezi sekundárním zářením beta, které nám představuje vlastně fotoelektrony, vznikající účinkem záření gama v oblasti vnějších elektronů, kdež gama záření prodělává fotoelektrický zjev. Paprsky gama, jak známo, jsou důsledkem radioaktivního rozpadu jádra, vyskytují se u prvků vysílajících jak záření alfa, tak i záření beta. Sekundární záření beta vyskytuje se tedy u obou prvků. Nejlépe se to pozná v praxi: radium vysílá záření alfa a také se v tom smyslu posunuje v periodické soustavě o 2 místa vlevo, mění se v radiovou emanaci. Radium však vysílá také záření beta. To není primární, pocházející z jádra, nýbrž sekundární, vzniklé fotoelektrickým zjevem gama

záření (doprovázejícího rozpad jádra) v oblasti vnějších elektronů atomu radia.

Podobně jako záření alfa, také primární záření beta mělo by při odletu z jádra atomu letěti zcela určitou, charakteristickou rychlostí. (U záření alfa, jak známo, je přesný vztah mezi rozpadovou konstantou prvků a rychlostí alfa částic, t. zv. pravidlo Geigerovo-Nuttalovo.) Praxe však ukazuje, že záření beta, pozorované mimo atom nevyznačuje se jednou určitou rychlostí, nýbrž spojitě rozdělenými rychlostmi a tudíž i spojitým rozdělením energie. V magnetickém spektru primárního záření beta nevyskytuje se jedna čára, odpovídající jedné, charakteristické rychlosti, avšak celý pás, dokazující, že není zde jedna rychlost, ale celý obor rychlostí. Tak na př. isotop thoria, prvek uran X_1 , který vysílá pouze primární záření beta a žádné záření gama, má ve spektru celý pás rychlostí od 56% do 60% světelné rychlosti c . Prvek radium E dokonce od 75% c skoro do c . Při prvcích, které současně vysílají záření gama, staví se ovšem experimentálnímu studiu primárního záření beta velké potíže v cestu právě vzhledem k sekundárnímu záření beta a ke zjevu Comptonovu, které vždy mají určitý podíl na zčernání fotografické desky a činí tak nezřetelným začátek a konec šedého pozadí, odpovídajícího zmíněnému pásu primárního záření beta.

Jak vysvětliti tuto nehomogenost primárního záření beta, pozorovanou mimo atom? Až dosud předpokládaly se různé vlivy, které na částici beta z jádra vylétnuvší působily jednak ještě v poli jádra, jednak v oblasti vnějších elektronů. Předpoklady tyto měly jednu společnou vadu: nebylo možno pokusně dokázat, kde se znovu objevuje ztracená energie primárních částic beta.

Kunze (Phys. Zs. 34, 849; 1933) navrhl jednoduchou teoretickou představu o mechanismu vzniku positronu a t. zv. „elektronových dvojčat“, z kteréžto představy pravděpodobně také bylo by možno vysvětliti nehomogenitu primárního záření beta. Před deseti lety byl z t. zv. bilančních rovnic, plynoucích z vět o zachování energie a impulsu, vysvětlen jednoduše zjev Comptonův. Podobně vysvětluje vznik positronů Kunze, mluví o tvoření „elektronových dvojčat“ ze zářivých kvant. Nutno totiž zachovati elektrický náboj a vedle positronu musí vznikat vždycky také jeden elektron záporný, jak je jasně viděti na krásných snímcích, které zhotovili Wilsonovou metodou I. Curieová a Jolliot. Foton mizí, místo něho objevuje se celý roj takových dvojčat elektronů. (Jádro atomu dle Kunzeových představ účastní se na celém ději jen pasivně, podobně jako zjev Comptonův probíhá za pasivní účasti elektronů.)

Z věty zachování energie plyne, že na vytvoření jednoho elektronového dvojčete je třeba minimální energie jednoho milionu voltů. (Proto se podařilo experimentálně získati positrony použitím

pouze tvrdých paprsků gama.) Názor Kunzův nepřináší žádných zvláštních představ o rozdělení energie fotonů mezi dvojčata; má-li foton energii E milionů voltů, pak na vytvoření dvojčete uplatňuje se energie $E - 1$ milionů voltů a tato se dělí libovolně mezi oba partnery. Vzniká tak spojitě spektrum jak positronů, tak elektronů záporných. Uvésti tuto jednoduchou a nenucenou představu nějak v souvislost se zjevem primárního záření beta, to je úkolem nejbližší budoucnosti.

Také není pomocí tvoření se positronů vyloučeno vysvětlení t. zv. anomální přídatné absorpce velmi tvrdého záření gama, vlastně odchylek od formule *Kleinovy-Nishinovy*. Ve všech těchto oborech je fyzika teprve na začátku možností upotřebení představy positronu.

Pomocí tvoření se positronů bylo by tudíž možno vysvětliti existenci spojitěho spektra elektronů záporných. Pokusně však není dosud prokázáno, zdali se při radioaktivním rozpadu beta vskutku positrony uplatňují a co se s nimi děje, když mimo radioaktivní atom nebyly zatím prokázány. Lze tedy jen doufat, že tato obtíž dá se snáze odstraniti než obtíže s výkladem spojitěho spektra primárních paprsků beta.

Santholzer.

Spektrální zdroje pro vědecké účely. Při velmi četných pracích optických je užíváno světla sodíkového jakožto monochromatického zdroje. Při tom působí mnohdy obtíže opatřiti si zdroj tohoto světla s potřebnou konstantní a dostatečnou světelností. Neboť až dosud bylo většinou užíváno Bunsenova hořáku, jehož plamen byl barven solemi sodíku, při čemž bylo dosaženo největší světelnosti pouze 0,35 HK/cm². Je tudíž jenom vítati, že továrna Osram a nyní také Philips uvedly na trh sodíkovou lampu, vydávající světlo téměř úplně monochromatické a mající velkou plošnou světelnost 4—6 HK/cm². Lampy jsou vyráběny jak pro střídavý tak pro stejnosměrný proud. Lampa pro střídavý proud je tvořena skleněnou trubicí se dvěma katodami, umístěnými proti sobě na koncích trubice; je naplněna vzácným plynem a obsahuje kovový sodík. Tato vlastní lampa je obklopena další skleněnou trubicí za tím účelem, aby při provozu lampy byla vnitřní trubice tepelně izolována a udržována na teplotě ca 350° C, potřebné k vytvoření par sodíkových. Chceme-li lampu rozžhnouti, spojíme obě žhavé katody za sebou a rozžhavíme je připojením na světelnou síť (120 resp. 220 V) přes vhodný odpor (70 resp. 155 Ω). Asi po 20 vteřinách přerušíme spojení mezi katodami, takže plné napětí sítě je mezi oběma katodami na koncích trubice. Vzácný plyn, který byl zionisován elektrony, vysílanými po 20 vteřin žhavými katodami, se tím uvede do doutnavého výboje a zprostředkuje transport elektřiny v lampě. Lampa se výbojem zahřeje na teplotu ca 350° C, potřebnou k vypařování sodíku, který převezme funkci

vzácného plynu a v důsledku svého nízkého budicího napětí zabarví výboj v lampě intenzivně žlutým světlem. Pozorujeme-li výboj spektroskopem, spatříme hned po zažehnutí lampy spektrum vzácného plynu, které pomalu ustupuje do pozadí; po 2—3 minutách zmizí úplně a lampa vysílá pouze spektrum sodíku. Podobně jako lampa pro střídavý proud je zařízena i lampa pro stejnosměrný proud (Ztschr. f. Instrumentenkunde, 51, 474, 1931). Světlo, které tyto lampy dávají, je skoro úplně monochromatické; vysílají sice vedle čar D_1 a D_2 ještě sodíkové čáry 4983 Å, 5682/88 Å, 6154/60 Å a tři čáry v infračervené části spektra mezi 8000 až 11.000 Å, jejich intenzita činí však pouze 1% intenzity čar D_1 a D_2 . Konečně můžeme intenzitu těchto čar ještě snížit vhodnými filtry kapalinovými (roztoky dvojchromanů), nebo filtry skleněnými a želatinovými. Firma Schmidt & Haensch zhotovila k této lampě speciální monochromátor, ale dobrých výsledků lze dosáhnouti také na př. filtrem čís. OG2 firmy Schott nebo kombinací Kodakových filtrů Wratten čís. 17 a 57. Ovšem je jasno, že při použití těchto filtrů poklesne i světelnost čar D , neboť jsou též těmito filtry částečně absorbovány. Vedle těchto lamp sodíkových jsou vyráběny dnes i lampy kadmiové, thaliové, rthudiové, caesiové a j. a jsou popsány i s příslušnými filtry v časop. Das Licht 3, 69 (1933), resp. referát o nich v Ztschr. f. Instrumentenkunde, 53, 518 (1933).

Poněvadž tyto lampy jsou vzhledem k obyčejným žárovkám velice úsporné, dojdou jistě dalšího použití v osvětlovací technice; o to se pokouší již firma Osram výrobou t. zv. technické sodíkové lampy, která má sloužiti k levnému osvětlování ulic a silnic.

V. Petržálka.

ČÁST BIBLIOGRAFICKÁ

Tímto číslem se končí ročník BIBLIOGRAFICKÝCH ZPRÁV. Příští ročník nevyjde z důvodů úsporných.

1. MATEMATIKA, FYSIKA, CHEMIE.

- Hrudíčka B.*: O námrazcích. 1934. 4^o 11 s.
- Maška O.*: Hvězdná obloha. 1934. 8^o 68 s. 7,50
- Mikan M.*: Přímková geometrie ve čtyřrozměrném prostoru. 1934. 8^o 12 s. Spisy přír. fak. Praha, 131.
- Periodický systém Mendělejevův* v úpravě univ. prof. dra J. Křepelky. 1934. 8^o 1 list.
- Rolčík V.*: Návod k sestavení hvězdářského dalekohledu. 1934. 8^o 33 s. 6 o.
- Aerodynamic theory*. A general review of progress. Vyd. W. F. Durand. V 6 sv. D. 1. 1934. 8^o 15, 398 s. 151 o. 200,—
- Abercromby R.*: Weather: the nature of weather changes from day to day. N. v. 1934. 8^o 12, 274 s. 75,60
- Baker J. W.*: Tautomerism. 1934. 8^o 8, 332 s. 180,—
- Bridgman P. W.*: The thermodynamics of electrical phenomena in metals. 1934. 116,—
- Britton H. T. S.*: Conductometric analysis. 1934. 8^o 90,—
- Burton E. F. a j.*: The phenomenon of superconductivity. 1934. 8^o 112 s. 61,20
- Clayton A. E.*: Alternating currents. 2. v. 1934. 8^o 8, 334 s. 283 o. 75,60
- Cohen A.*: An elementary treatise on differential equations. 2. v. rev. 1933. 8^o 7, 337 s. 54,—
- Dockeray N. R. C.*: Elementary treatise on pure mathematics. 1934. 8^o 14, 566 s. na 1500 cvič. 115,20
- Dwight H. B.*: Tables of integrals a. other mathematical data. 1934. 8^o 8, 222 s. 47,—
- Faraday Society*: Free radicals (disc.). 1933. 8^o 4, 248 s. 90,—
- Fincham W. H. A.*: Optics. 1934. 8^o 6, 462 s. 130,—
- Gregory J. C.*: Combustion. From Heraclitos to Lavoisier. 1934. 8^o 8, 232 s. 76,—
- Hawks E.*: The starry heavens. 1934. 8^o 154 s. 25,20
- Lorentz H. A.*: Collected papers. D. 7. 1934. 8^o 7, 399 s. 216,— Subskr. cena na 9 sv. váz. 1620,—
- Mitchell A. C. G. - Zemansky M. W.*: Resonance radiation and excited atoms. 1934. 8^o 16, 338 s. o. 130,—
- Nejedlý V. a J.*: The polarograph. After the system of Heyrovský-Shikata. 1934. 8^o 44 s.
- Reimann A. L.*: Thermionic emission. 1934. 8^o 151,20
- Richardson O. W.*: Molecular hydrogen a. its spectrum. 1934. 8^o 14, 343 s. 97,20
- Richtmyer F. K.*: Introduction to modern physics. 2. v. 1934. 8^o 18, 747 s. 216,—
- Science to-day*. The scientific outlook on world problems expl. by leading exponents of modern scientific thought. Vyd. J. G. Crowther. 1934. 8^o 398 s. 61,20
- Shah N. M.*: Elementary chemical theory a. problems. 1933. 8^o 7, 145 s.
- Sierpiński W.*: Introduction to general topology. Přel. C. C. Krieger. 1934. 8^o 10, 238 s. 125,—

- Sokolnikoff J. S. - E. S.*: Higher mathematics f. eng. a. phys. 1934. 8° 475 s. 166,—
- Sulaiman S. M.*: A unified theory of physical phenomena. 1. The inner world. 1933. 8° 5, 70 s.
- Tappenden H. J.*: Reversions a. life interests. 1934. 8° 12, 57 s. 54,—
- Thomas T. Y.*: The differential invariants of generalized spaces. 1934. 8° 151,20
- Tutin J.*: The atom. 1934. 8° 109 s. 43,20
- Venable W. O.*: The sub-atoms. An interpretation of spectra in conform. with the principles of mechanics. 1934. 8° 8, 148 s. 65,—
- Abdullah Ch.*: Notions de photogrammétrie terrestre et aérienne. 1934. 8° 272 s. 103 o. 63,—
- Alliaume M.*: Cours d'astronomie. 1. Partie générale élémentaire. 1934. 8° 14, 510 s. 31 o. 144,—
- Boll M.*: L'atomistique. 1934. 8° 140 s. 82 o. 36,—
- Brard R. - Gorceix Ch.*: Balance pendulaire de précision. 1934. 8° 196 s. 20 o. 45,—
- Cazalas E.*: Carrés magiques au degré n. Séries numérales de G. Tardy. 1934. 8° 192 s. 36 o. 72,—
- Duclaux J.*: Traité de chimie-physique appliquée à la biologie. I. 1934. 8° 330 s. 126,—
- Einstein A.*: La géométrie et l'expérience. 2. v. rev. 1934. 8° 24 s. 7,20
- Exposés d'analyse générale.* 1934. 8° I. Fréchet M.: L'arithmétique de l'infini. 42 s. 18,— II, III. Appert A.: Propriétés des espaces abstraits les plus généraux. 62 s. 68 s. po 21,60
- Exposés sur l'analyse math.* II. Godeaux L.: La théorie des surfaces et l'espace réglé (géométrie projective différentielle). 1934. 8° 36 s. 21,60
- Exposés d'astronomie stellaire.* Mineur H.: Photographie stellaire. Mesure photographique des positions et des magnitudes des étoiles. 1934. 8° 68 s. 32,40
- Exposés de géométrie.* 4. Godeaux L.: Les surfaces algébriques non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls. 1934. 8° 33 s. 18,—
- Exposés mathématiques.* 1934. 8° I. Hasse H.: Über gewisse Ideale in einer einfachen Algebra. 16 s. 7,20 II. Dieudonné J.: Sur quelques propriétés des polynômes. 24 s. 10,80 III. Brelot M.: Etude des fonctions sousharmoniques au voisinage d'un point. 55 s. 25,20
- Exposés de physique atomique expér.* III. Leprince-Ringuet L.: Rayons cosmiques. Aspect des phénomènes et méthodes expérimentales. 1934. 8° 48 s. 4 o. 27,—
- Exposés de physique théorique.* X. Destouches J. L.: Les principes de la mécanique générale. 1934. 8° 56 s. 27,— XI. Boulligand G.: Relations d'incertude en géométrie et en physique. 28 s. 16,20
- Fabry Ch.*: Optique. 4. v. 1934. 8° 266 s. 194 o. 72,—
- Falguières E.*: Mesures électriques. II. Généralités. Mes. en courant alternatif. 1934. 4° 288 s. 186 o. 63,—
- Gay L.*: Cours de chimie-physique. 1934. 8° I/1. Thermodynamique générale. Étude des états gazeux dilué et cristallin. 2. v. 416 s. 78 o. 108,— I/2. Osmose et règle des phases. Étude du corps pur. 2. v. 316 s. 86 o. 72,— II/1. Mélanges doubles et triples. 370 s. 135 o. 126,— II/2. Equilibres chimiques. Solubilités des solides dans les liquides. 420 s. 88 o. 135,— II/3. Alliages. Solutions diluées. 220 s. 66 o. 63,—
- Gunther N. M.*: La théorie du potentiel et ses applications aux problèmes fondamentaux de la physique mathématique. 1934. 8° 304 s. 49 o. 126,—

Údaje o knihách jsou uvedeny podle oficiálních bibliografií a neručí se za jejich správnost. Nepřijímáme ani záruky za hodnotu uvedených publikací, jež jsou tu prostě registrovány. — Není-li rok vydání vyznačen, jest jím rok 1934. — Ceny jsou udány (bez závaznosti) v Kč podle původních cen nakladatelských, zpravidla za knihu nevázanou, ačli není jako vázaná vyznačena. — Při koupi knihy se účtuje cena té doby platná; výlohy za její opatření se účtují pouze výjimečně, jsou-li neúměrně ceně knihy. — Formát knihy je cm nebo

- Heinrich W. W.*: Note sur la variation des arbitraires dans le problème de la rotation d'un corps solide pesant autour d'un point fixe. 1933. 8° 12 s. Spisy přír. fak. Praha, 126.
- Heinrich W. W.*: Recherches sur certaines coordonnées de la dynamique. 1933. 8° 20 s. Spisy přír. fak. Praha, 125.
- Iliovici G. - Saint-Laguë A.*: Mathématiques appliquées à l'usage des ing., des élèves-ing. et des étud. d. fac. d. sciences. 1934. 8° 233 s. 114 o. 72,—
- Jarník V.*: Sur la dérivabilité des fonctions continues. 1934. 8° 9 s. Spisy přír. fak. Praha, 129.
- Julia G.*: Leçons sur la représentation conforme des aires multiplement connexes. 1934. 8° 6, 96 s. 50,40
- Long L.*: Méthodes de résolution des problèmes de lieux, d'enveloppes et de constructions géométriques et applications. 1934. 8° 124 s. 105 o. 21,60
- Mieghem J. van.*: Étude sur la théorie des ondes. 1934. 8° 12, 192 s. 54,—
- Monnier A. M.*: L'excitation électrique des tissus. 1934. 8° 16, 326 s. 86 o. 153,—
- Perbal L.*: L'air et l'eau, similitude. 1934. 8° 70 s. 27,—
- Picard E.*: La vie et l'oeuvre de Joseph Boussinesq. 1934. 8° 56 s. 21,60
- Pomey J. B.*: Notions de calcul tensoriel. 1934. 8° 222 s. 90,—
- Privault M.*: Les rayons X au laboratoire, à l'hôpital, à l'usine. 1934. 8° 204 s. 121 o. 45,—
- Réunion internationale de chimie physique*, 1933. 8° 1934. I. Dubois E.: L'effet Volta. 26 s. 10,80 II. Wilson A. H.: The electrical properties of semi-conductors a. insulators. 14 s. 7,20 III. Rideal E. K.: On phase boundary potentials. 17 s. 7,20 IV. Scarpa O.: Pile metalliche che funzionano in eccezione alla legge delle tensioni elettriche nei circuiti metallici. 22 s. 10,80 V. Volmer M.: Das elektrolytische Kristallwachstum. 14 s. 7,20 VI. Bloch F.: Les électrons dans les métaux. Problèmes statiques. Magnétisme. 22 s. 9,— VII. Joffé A. F.: Conductibilité électrique des isolants solides et des semi-conducteurs. 41 s. 18,— VIII. Brillouin L.: Les électrons dans les métaux du point de vue ondulatoire. 36 s. 16,20 IX. Brillouin L.: Conductibilité électrique et thermique des métaux. 75 s. 32,40 X. Heyrovský J.: A polarographic study of the electro-kinetic phenomena of adsorption, electroreduction a. overpotential displayed at the dropping mercury cathode. 52 s. 21,60 XI. Audubert R.: Phénomènes photoélectrochimiques. Action de la lumière sur le potentiel métal-solution. 34 s. 14,40 XII. Gillet A. - Andraut de Langeon N.: Les colloïdes et la couche de passage. 44 s. 18,— XIII. Dutoit P.: Sur le potentiel métal-solution dans les dissolvants autres que l'eau. 13 s. 7,20 XIV. Benedicks C.: Nouveaux résultats expérimentaux sur l'effet électro-thermique homogène. 30 s. 14,40 XV. Nordheim L.: Die Theorie d. thermoelektrischen Effekte. 26 s. 10,80 XVI. Langevin P.: La notion de corpuscules et d'atomes. 47 s. 21,60
- Tardi.*: Traité de géodésie. II. 1934. 8° 11, 308 s. 75 o. 126,—
- Tourriol J. B.*: Optique géométrique. 1934. 8° 6, 300 s. 38 o. 63,—
- Aumann G.*: Konvexe Funktionen u. d. Induktion bei Ungleichgn. zwischen Mittelwerte. Ak. München. 1933. 8° 13 s. 10,—
- Aumann G.*: Satz über d. Verhalten v. Polynomen auf Kontinuen. Ak. Berlin. 1933. 4° 10 s. 10,—
- Behre A.*: Chemische Laboratorien.

obvyklou značkou. — *Zkratky* jsou snadno luštitelné, na př.: *sv.* svazek, *d.* díl, *č.* část, *sš.* sešit, *v.* vydání, *rozš.* rozšířené, *přepr.* přepracované, *zm.* změněné, *zl.* zlepšené, *dop.* doplněné, *zc.* zcela, *přel.* přeložil, *vyd.* vydal, *s.* strana, *l.* list, *t.* tabulka, *o.* obrazce, *m.* mapa, *př.* příloha, *váz.* vázáno, *pl.* plátěná vazba, *kž.* kožená vazba, *ppl.* poloplátěná vazba, *krt.* kartonováno a pod. — Je-li cena nebo rozsah udán přibližně (*asi*), nebo je-li uveden jen titul knihy, značí to, že kniha teprve vyjde.

- Ihre neuzeitliche Einrichtg u. Leitg. 2. v. 1934. 8° 10, 113 s. 34 t. 68,—
- Berliner A.*: Lehrbuch d. Physik in element. Darstellg. 5. v. 1934. 4° 7, 736 s. 847 o. 198,—
- Bolam T. R.*: Die Donnan-Gleichgewichte u. ihre Anwendg auf chem., physiol. u. techn. Prozesse. 1934. 8° 120 s. 60,—
- Bowley A. L.*: Grundzüge d. mathematischen Ökonomik. Pörl. H. Bernadelli. 1934. 8° 130 s. 19 o. 80,—
- Bräuer A.* - *Reitstötter J.*: Fortschritte d. chemischen Apparatewesens. 1. Alterthum H.: Elektrische Öfen. 1934. 4° asi 900 s. v 6 ss. po 280,—; v subskr. po 220,—
- Cauer W.*: Äquivalenz von $2n$ -Polen ohne Ohmsche Widerstände. Ges. Göttingen. 1934. 8° 33 s. 20,—
- Clusius K.* - *Bartholomé E.*: Die Rotationswärme d. Molekel H^2H^2 . Ges. Göttingen. 1934. 8° 14 s. 10,—
- Cremers L.*: Vierpoldarstellg u. Resonanzkurven bei schwingend. Stäben. Ak. Berlin. 1934. 4° 25 s. 20,—
- Danckwort P. W.*: Lumineszenz-Analyse im filtrierten ultravioletten Licht. 3. rozš. v. 1934. 8° 8, 190 s. 62 o. 85,—
- Eddén B.*: Wellenlängen u. Termssysteme zu d. Atomspektren d. Elemente Li, Be, B, C, N u. O. Soc. Uppsala. 1934. 4° 153 s. o. 130,—
- Ergebnisse d. Enzymforschg.* D. 3. 1934. 8° 12, 355 s. 57 o. 280,—
- Eucken A.* - *Förster F.*: Ein Versuch zur Ermittlg d. freien Weglänge d. Metallelektrone in Wismut durch Bestimmg d. elektr. Widerstandes sehr dünnen Einkristalldrähte. Ges. Göttingen. 1934. 8° 12 s. 10,—
- Fermat P.*: Abhandlgn über Maxima u. Minima (1629). Pörl. M. Miller. 1934. 8° 50 s. 32,—
- Feuerriegel T.*: Geometrische optische Abbildg. 1934. 8° 6, 130 s. 44 o. 80,—
- Geschichte d. Fixsternhimmels.* Č. 1, d. 20. 1934. 4° 14, 306 s. 324,—
- Gey K.* - *Teichmann H.*: Einführg in d. Ballistik. asi 33,—
- Godske C. L.*: Die Störng d. zirkularen Wirbels e. homogeninkompressiblen Flüssigkeit. Ak. Oslo. 1934. 8° 130 s. 19 o. 80,—
- Grötzsch H.*: Über d. Geometrie d. schlichten konformen Abbildg. 2. Ak. Berlin. 1933. 4° 18 s. 10,—
- Haalck H.*: Lehrbuch d. angewandten Geophysik. 1934. 8° 7, 376 s. 142 o. 6 t. 260,—
- Handbuch d. experimentellen Pharmakologie.* D. 3/2. 1934. 4° 882 s. 66 o. 960,—
- Handwörterbuch d. Naturwissenschaften.* 2. v. D. 9. Silikate-Transformatoren. 1934. 4° 8, 1158 s. 1048 o. 610,—
- Haas A.*: Materiewellen u. Quantenmechanik. 4. a 5. zl. rozš. v. 1934. 8° 8, 299 s. 7 o. 78,—
- Heisenberg W.* - *Schrödinger E.* - *Dirac P. A. M.*: Die moderne Atomtheorie. 1934. 8° 45 s. 6 o. 25,—
- Henker K.*: Chemie für Techniker. 5. v. 1. 1934. 8° 360 s. 55,—
- Hessenberg G.*: Ebene u. sphärische Trigonometrie. 4. v. 1934. 8° 171 s. 59 o. 16,20 SG 99.
- Hilbert D.* - *Bernays P.*: Grundlagen d. Mathematik. D. 1. 1934. 8° 12, 471 s. 378,—
- Howink R.*: Physikalische Eigenschaften u. Feinbau von Natur- u. Kunstharzen. 1934. 8° 12, 225 s. 75 o. 120,—
- Klemm W.*: Fortschritte d. anorganischen Chemie 1930—1933. 1934. 8° 65 s. 20,—
- Koch S.*: Optischer u. visueller Nutzeffekt bei gestreuter Strahlg. Ak. Oslo. 1934. 8° 11 s. 15,—
- Kochanowsky W.*: Über d. Stabilität d. Gleichgewichtes u. d. Knickfestigkeit e. räumlichen Gittermaßes. 1934. 8° 34 s. 25,—
- Konetschny K.*: Einrichtg d. Instrumente f. d. optische Längenmessg u. d. tachymetrische Messverfahren. 1933. 8° 92 s. 40,—
- Kühl A.*: Blendgs-, Schwellen- und Kontrastempfindlichkeit als Grundelemente zur Darstellg d. allgem. Helligkeitsfunktion d. Auges. Ak. München. 1933. 8° 16 s. 14,—
- Kuhn H.*: Atomspektren. 1934. 8° 6, 266 s. 78 o. 260,—
- Lagally M.*: Vorlesungen über Vektorrechng. 2. v. 1934. 8° 16, 358 s. 77 o. 120,—
- Lampe E.* - *Wagner F.*: Mathematik u. Wehrsport. asi 15,—
- Landau E.*: Einführg in d. Differential-

- rechng u. Integralrechng. 1934. 8° 368 s. 243,—
- Liebmann H.*: Synthetische Geometrie. 1934. 8° 8, 119 s. 45 o. 56,—
- Lindelöf E.*: Einführng in d. höhere Analysis. asi 170,—
- Ludendorff H.*: Weitere astronomische Inschriften d. Maya. Ak. Berlin. 1934. 4° 17 s. 10,—
- Mayer F.*: Chemie d. organischen Farbstoffe. 3. präpr. v. 1. Künstliche org. Farbst. 1934. 8° 255 s. 248,—
- Menninger K.*: Rechenkniffe. Lustiges u. vorteilhaftes Rechnen. 3. präpr. rozš. v. 1934. 8° 8, 86 s. 25,—
- Meyer M. W.*: Weltschöpfung. 75. v. 1934. 8° 95 s. 18,—
- Mie G.*: Die geistige Struktur d. Physik. Předn. 1934. 8° 36 s. 10,—
- Perron O.*: Eine neue Winkeldreiteilg d. Schneidermeisters Kopf. Ak. München. 1933. 8° 7 s. 6,—
- Planck M.*: Das Prinzip v. Le Chatelier u. Braun. Ak. Berlin. 1934. 4° 7 s. 10,—
- Pozděna R.*: Meter u. Kilogramm. asi 14,—
- Rast K.*: Atomtheorie u. Atombau. 1934. 8° 138 s. 28 o. 66,—
- Reinhardt K.*: Methodische Einführng in d. höhere Mathematik.
- Riesenfeld E. H.*: Lehrbuch d. anorganischen Chemie. 1934. 4° 24, 698 s. 150,—
- Ritala A. M.*: Zur Berechnng d. statistischen mittleren Fehlers. 1933. 8° 85 s. o. 50,—
- Seifert H. - Threlfall W.*: Lehrbuch d. Topologie. 1934. 8° 7, 353 s. 132 o. 200,—
- Senn G.*: Wesen u. Aufgaben d. mathematisch-naturwiss. Abteilg d. philosophischen Fakultät. Referat. 1934. 8° 13 s. 4,50
- Schaefer C. - Bergmann L.*: Laue-Diagramme mit optischen Wellen. Ak. Berlin. 1934. 4° 4 s. 15,—
- Scheffers G.*: Wie findet u. zeichnet man Gradnetze v. Land- u. Sternkarten? 1934. 8° 98 s. 27 o. 12 t. 24,—
- Schmidt J.*: Organo-Metallverbindng. Č. 2. 1934. 8° 16, 376 s. 345,—
- Die *Spektren*. Entstehg u. Zusammenhang mit d. Struktur d. Materie. 1. Kuhn H.: Atomspektren. 1934. 8° 6, 265 s. 78 o. 260,— subskr. 221,—
- Steinitz E.*: Vorlesgn über d. Theorie d. Polyeder unter Einschluss d. Elemente d. Topologie. Vyd. H. Rademacher. 1934. 8° 8, 351 s. 190 o. 288,—
- Stuart H. X.*: Molekülstruktur. asi 350,—
- Szegő G.*: Bemerkgn zu e. Satz v. E. Schmidt über algebr. Gleichgn. Ak. Berlin. 1934. 4° 15 s. 8,50
- Voss A.*: Über orthogonale Systeme. Vyd. O. Volk. Ak. München. 1933. 8° 30 s. 20,—
- Wagner K. W. - Gemant A.*: Der Frequenzgang d. Durchschlagsspanng im Wärmegebiet. Ak. Berlin. 1934. 4° 14 s. 10,—
- Wegener K.*: Die Physik d. Erde. 1934. 8° 6, 111 s. 53 o. 66,—
- Weiss E. A.*: Wozu Mathematik? 1933. 8° 16 s. 5,—
- Wildt R.*: Ozon u. Sauerstoff in d. Planetenatmosphären. Ges. Göttingen. 1934. 8° 9 s. 10,—
- Zimmer E.*: Umsturz im Weltbild d. Physik. S. úv. M. Plancka. 1934. 8° 263 s. 58 o. 57,—
- Zimmer E.*: Johannes Kepler. 1934. 8° 58 s. 6,—
- Compositio mathematica*. Quod periodicum internationale ed. R. Baer. Sv. 1, 3 sš. 1934. 8° Předpl. 360,—
- Physica*. Vyd. J. D. van der Waals a j. Sv. 1 (10 sš.). Předpl. 450,—

2. FILOSOFIE, PEDAGOGIKA, ŠKOLSTVÍ.

- Duda J.*: Přehled počtů pro I. tř. měřč. škol. Příručka pro žáky k učebnicím. 1934. 8° 50 s.
- Hanák J.*: Přijímací zkoušky do první třídy škol střed. 1934. 8° 190 s. 15,—
- Hrazdíl A.*: Střední školství ve dvaceti státech evropských. 1934. 8° 180 s. 22,—

- Kratochvíl J. - Černocký K.:* Filosofický slovník. 3. zc. př. v. 1934. 8° 346 s. 52,—
- Lodge O.:* Člověk a vesmír. Přel. J. A. Theurer. 1934. 8° 357 s. 50,—
- Downing E. R.:* An introduction to the teaching of science. 1934. 8° 8, 258 s. 65,—
- Huxley J.:* Scientific research a. social needs. 1934. 54,—
- Whitehead A. N.:* Nature a. life. 1934. 8° 96 s. 25,20
- Bachelard G.:* Le nouvel esprit scientifique. 1934. 8° 165 s. 18,—
- Brunschvicg L.:* Les ages de l'intelligence. 1934. 8° 162 s. 18,—
- Caronnet T.:* Exercices de trigonométrie. 1934. 8° 301 s. 27,—
- Chatillon-Savariau:* Cahiers de manipulations. 1934. 8° Chimie. Cl. de 1. Charbons, silice, métaux. 64 s. 10,80 Cl. de 2. Métalloïdes. 64 s. 9,— Physique. Cl. de 1. Optique, électrique. 64 s. 10,80 Cl. de 2. Forces, balances, hydrostatique, gaz, chaleur. 64 s. 9,—
- Menot L.:* La résolution des problèmes d'arithmétique. Guide du maître. 1934. 8° 255 s. 27,—
- Picard E.:* Une édition nouvelle du discours de la méthode de Descartes. 1934. 8° 10 s. 9,—
- Berensanskaja E. S.:* Sammlg arithmet. Aufgaben u. Übungen f. d. Mittelschulen. 5. š. r. Moskva 1933. 8° 119 s. o.
- Bolzano B.:* Paradoxien in d. Politik. Vyd. W. Stähler. 1933. 4° 65, 173 s. 70,—
- Falejev G. J. - Peryskin A. V.:* Physik. 2. v. Moskva 1933. 8° Č. 1. 5. š. r. 83 s. o. Č. 2. 6. š. r. 158 s. o.
- Gurwitz J. O. - Gangnus R. W.:* Anfangsgründe d. Geometrie. 5. š. r. Moskva 1933. 8° 66 s. o.
- Lötzbeier P.:* Theorie u. Praxis der Tafeln u. d. Tafelrechnens. 1934. 8° 6, 61 s. 32,—
- Schiffner V.:* Die Probleme d. Raumes u. d. Zeit u. d. Vorstellg d. realen Unendlichkeit. 1934. 8° 175 s. 56,—
- Schröter M.:* Philosophie d. Technik. 1934. 8° 86 s. 38,—
- Schulze C.:* Gut Rechnen durch Selbst-Unterricht. 46. v. 1934. 8° 160 s. 18,—
- Stähli F. - Meyer F.:* Aufgaben-Sammlung d. Algebra. Č. 2. 1934. 8° 96 s. 20,—
- Wulfern G.:* Gedankengänge im Rechenunterricht d. Volks-, Berufs-, Mittel- u. höheren Schulen. Č. 3 a 4. 1934. 8° 176 s. 34,—
- Wyss A.:* Methodisch geordnete Beispielsammlg f. d. Kopfrechnen auf d. Mittelstufe. 1934. 8° 4, 42 s. 10,—

3. VĚDY TECHNICKÉ, RŮZNÉ.

- Elektrisace Československa.* 1934. 4° 1. 24 s. 12,— 2. 22, 24 s. 12,—
- Houšť F.:* Vypínání velkých výkonů v oleji a vodě se zřením k teplotě oblouku. 1933. 4° 7 s.
- Kesl K.:* Nejvhodnější uspořádání kontaktů z hlediska elektrického a mechanického. 1934. 4° 15 s.
- Klokner F.:* Tabulky pro posuzování a navrhování průřezů ze železového betonu podle čsl. normy. 1934. 8° 96 s. 16 o. 2 diagr. 30,—
- Kučera J.:* Jak se stanu dobrým šoférem. 6. dopl. v. 1934. 8° 360 s. 18 t. 28,—
- Mikesch L.:* Elektrické přístroje na motorových vozidlech. 1933. 8° 174 s. 182 o. 30,—
- Srbek F.:* Ústřední topení a jeho obsluha. 1934. 8° 95 s. 78 o. 15,—
- Štěpánek F.:* Kurs pro radioamatéry. 1934. 8° 79 s. o. 25,—
- Addison H.:* A text book of applied hydraulics. 1934. 8° 12, 409 s. 24 t. 151,20
- Aston K.:* Design of alternating-current machines. 1934. 8° 381 s. 115,20
- Barr J. R.:* Principles of direct-current electrical engineering. 2. v. 1934. 8° 496 s. 151,20
- Barber T. W.:* The engineers' sketch-book of mechanical movement, devices, appliances, contrivances a. details. 6. v. 1934. 8° 362 s. 76,—
- Blue book.* The directory handbook

- of the electr. engineering a. allied trades. 52. v. 1934. 1474 s. 180,—
- Colebrook F. M.*: Magnetic materials at radio frequencies. 1934. 8° 4, 22 s. 4,—
- Colebrook F. M.*: Valve oscillators of stable frequency. A critical survey of present knowledge. 1933. 8° 7, 56 s. 7,20
- Dickinson H. W.* - *Titley A.*: Richard Trevithick, the engineer a. the man. 1934. 8° 17, 290 s. 75,60
- Fanstone R. M.*: Modern miniature cameras. 1934. 25,20
- Gregg J. L.*: The alloys of iron a. tungsten. 1934. 8° 12, 511 s. o. 259,20
- Harrison H. H.* - *Preist T. P.*: Automatic street traffic signalling (apparatus a. methods). 1934. 8° 10, 187 s. 90,—
- Haslett C.*: The electrical handbook for women. 1934. 8° 416 s. 35 t. 36,—
- Henny K.*: Principles of radio. 2. v. 1934. 8° 155,—
- Charnock G. F.*: Mechanical technology. 2. v. rev. rozš. 1934. 12, 725 s. 529 o. 108,—
- Ladner A. W.* - *Stoner C. R.*: Short-wave wireless communication. 2. v. rozš. 1934. 8° 14, 384 s. 108,—
- Lunge G.* - *Ambler H. R.*: Technical gas analysis. 1934. 8° 432 s. 151,20
- Matthews E. R.*: Coast erosion a. protection. 3. v. rev. 1934. 8° 18, 228 s. 36 t. 90,—
- McLachlan N. W.*: Loud speakers: theory, performance, testing a. design. 1934. 8° 12, 399 s. 288,—
- Mills J.*: Signals a. speech in electrical communication. 1934. 8° 6, 281 s.
- Morecroft J. H.*: Elements of radio communication. 2. v. rev. rozš. 1934. 8° 12, 286 s. 133,20
- Murray D. S.*: The laboratory, its place in the modern world. 1934. 8° 117 s. 21,60
- Perry J. H.*: Chemical engineers' handbook. 1934. 8° 2623 s. 360,—
- Ricker C. W.* - *Tucker C. E.*: Electrical engineering laboratory experiments. 3. v. 1934. 8° 17, 404 s. 108,—
- St. John A.* - *Isenburger H. R.*: Industrial radiography. 1934. 8° 9, 232 s. 155,—
- Stoley R. W.*: Instruments: repair, overhand, testing a. calibration of aircraft a. aero-engine instruments etc. 1934. 8° 81 s. 36,—
- Stoughton B.*: The metallurgy of iron a. steel. 1934. 8° 571 s. 173,—
- Timoshenko S.*: Theory of elasticity. 1934. 8° 16, 416 s. 216,—
- Whitehead T. N.*: The design a. use of instruments a. accurate mechanism: underlying principles. 1934. 8° 108,—
- Agenda Lumière* 1934. 16° 464 s. 10,—
- Iliovici H.*: Les coordonnées symétriques en électrotechnique. 1934. 8° 284 s. 113 o. 63,—
- Katel I.*: Les divers avantages de l'isolement des machines. 1934. 4° 11 s. 10,80
- Lebelle M.*: L'obtention du négatif photographique. 1934. 8° 148 s. 15 o. 45,—
- Lobel L.*: La technique cinématographique. 4. v. rev. rozš. 1934. 8° 16, 384 s. 348 o. 176,40
- Maurer P.*: Machines automatiques mécaniques et électriques. 1934. 8° 230 s. 42 o. 21,60 Coll. A. C. 163.
- Mironneau L.*: Technologie du froid. I. Compresseurs. Condenseurs. 1934. 8° 275 s. 163 o. 4 t. 72,—
- Roches C.*: Le matériel des industries chimiques. 1934. 8° 388 s. 252 o. 171,—
- Rosenstiehl M. A.*: Traité de la couleur au point de vue physique, physiologique et esthétique. 2. v. rev. 1934. 8° 16, 247 s. 53 o. 8 t. 194,40
- Seyewetz J.*: Les nouvelles méthodes d'analyse. L'emploi de la lumière de Wood. 1934. 8° 242 s. 34 o. 54,—
- Valensi G.*: La théorie de la transmission téléphonique. 1934. 8° 626 s. 272 o. 144,—
- Arbeiten aus d. Elektrotech. Institut d. Techn. Hochschule Aachen.* D. 6. 1934. 4° 184 s. 120,—
- Brunnckow W.*: Pressen von Nicht-eisenmetalle. 1934. 8° 20 s. 13 t. 16,—
- Buch, W.*: Elektrizität im Nahrungsmittel-Gewerbe. 1934. 8° 124 s. o. 45,—
- Dehlinger U.*: Die Auswirkg d. Röntgenstrahlenuntersuchg auf d. Entwicklg d. Metallkunde. 1934. 4° 4 s. 6,—
- Dürrwang J.*: Wissenswerte Kapitel

- aus d. Radio-Technik. 2. v, 1934. 8° 117 s. o. 26,—
- Fink R.*: Wörterbuch f. d. Edelmetallgewerbe. Něm., angl., franc., špaň. 1934. 8° 237 s. 120,—
- Fischer E. J.*: Wachse, wachsähnliche Stoffe u. techn. Wachsgemenge. 1934. 8° 11, 192 s. 140,—
- Heinze R.*: Die Veredlg flüssiger Brennstoffe. 1934. 8° 70 s. 3 o. 63,—
- Heinze R.*: Die Veredlg gasförmiger Brennstoffe. 1934. 8° 70 s. 63,—
- Der Chemie-Ingenieur*. D. 1, č. 4. Elektr. u. magn. Materialtrenng, Materialvereing. 1934. 8° 8, 309 s. 180 o. 310,—
- Jipp A.*: Moderne Telegraphie. 1934. 8° 6, 234 s. 260 o. 180,—
- Kaufmann W.*: Angewandte Hydro-mechanik. D. 2. 1934. 8° 7, 293 s. 210 o. 180,—
- Merz O.*: Kautschucklacke u. Kautschuckkitte. 1933. 8° 170 s. 14 o. 115,—
- Mitteilungen d. Instituts f. Kraftfahrwesen an d. Sächs. Techn. Hochschule, Dresden*. 1934. 4° 89 s. 140 o. 54,—
- Möller H. - Barbers J.*: Ueber d. röntgenographische Messg elastischer Spanngn. 1934. 4° 11 s. 20,—
- Přibram R.*: Raumgittertheorie. Ein Fundament zur konstruktiven Materialenkunde. I. 1933. 8° 192 s. 72,—
- Seiler E.*: Elektrische Zündg, Licht u. Anlasser d. Kraftfahrzeuge. 2. v. 1934. 8° 8, 256 s. 286 o. 118,—
- Schaefer K.*: Flugmotorenkunde. Č. 2. 1934. 8° 71 s. 59 o. 25,—
- Scheiber J.*: Kunststoffe. 1934. 8° 68 s. 77,—
- Schütt K.*: Einführg in d. Physik d. Fliegens. 2. zc. n. přepr. v. 1934. 8° 136 s. 88 o. 40,—
- Schwaiger K.*: Entwerfen u. Berechnen neuzeitlicher Nutzkraftwagen-Motoren. 1934. 8° 172 s. 116 o. 9 t. 180,—
- Spalckhaver R. - Rüster A.*: Die Dampfkessel nebst ihren Zubehörteilen u. Hilfseinrichtgn. 2. zl. v. Doplněk. 1934. 4° 6, 190 s. 338 o. 320,—
- Späth W.*: Theorie u. Praxis der Schwinggsprüfmaschinen. 1934. 8° 6, 98 s. 48 o. 120,—
- Wengenroth H.*: Das Risiko u. die Prämiapolitik in d. privaten Krankenversicherg. 1933. 8° 92 s. 20,—
- Wever F.*: Anwendg v. Röntgen-Feinbauuntersuchgn bei techn. Aufgaben. 1934. 4° 4 s. o. 6,—

Obsah. — Sommaire.

Část matematická — Travaux mathématiques

	Strana
Dvořák Oldřich: O funkcích prostých. (Sur les fonctions univalentes.)	9
Gebauer Jan: Řady vhodné k použití při přibližné integraci. (Sur des séries applicables dans l'intégration approximative.)	152
Hostinský Bohuslav: O teorii Markovových řetězů a o integraci lineárních transformací. (Sur la théorie de chaînes de Markoff et sur l'intégration des transformations linéaires.)	167
Jarník Vojtěch: O jedné třídě funkcí spojitých. (Sur une classe de fonctions continues.)	135
Jarník Vojtěch - Kössler Miloš: O minimálních grafech, obsahujících n daných bodů. (Sur les graphes minima, contenant n points donnés.)	223
Klíma Josef: O křivkách a plochách, jež vytvářejí spojnice sdružených bodů dvou kolineárních, zvláště pak shodných křivých řad. (Sur les courbes et les surfaces engendrées par les droites joignant les couples de points correspondants sur deux courbes en homographie.)	236
Neubauer Miloš: O spojitých funkcích, nabývajících každé své hodnoty konečněkrát. (Sur les fonctions continues qui prennent chaque leur valeur un nombre fini de fois.)	1
Seifert Ladislav: Několik poznámek o pectenoidu. (Quelques remarques sur le pectenoïde.)	247
Vondráček Augustin: Zobecnění věty Feuerbachovy. (Généralisation du théorème de Feuerbach.)	254
Vyčichlo František: Konstrukce meridiánu šroubové plochy. (Une construction de la section méridienne d'un hélicoïde général.)	147
Vyčichlo František: Poznámka k vytvoření prostorové křivky 4. řádu 2. druhu. (Note relative à l'engendrement de la courbe du 4 ^e degré et de la 2 ^e espèce.)	73

Část fyzikální — Travaux de physique

Dittrich Arnošt: Matematické prostředky babylonských astronomů. (Les moyens mathématiques des astronomes babyloniens.)	17
Dittrich Arnošt: Náhrada astronomických tabulek babylonských trigonometrickými vzorci. (Substitution des tables astronomiques babyloniennes par les formules trigonométriques.)	82
Dolejšek Václav: O modifikaci Moseleyho zákona pro prvky stabilní konfigurace. (Sur la modification de la loi de Moseley.)	260

	Strana
Dolejšek Václav: O rozdílu mezi vývěvami kondenzačními a difusními. (Sur la difference entre les pompes à vide à condensation et à diffusion.)	267
Dráb Karel: Kinematografické studium výboje v iontové trubici konstrukce Dolejšek - Kunzl. (Sur l'étude cinématographique de la décharge dans une tube ionique Dolejšek - Kunzl.)	31
Klier Emanuel: Poznámky k relativitě. (Quelques remarques sur la théorie de la relativité.)	284
Knepko Ludevít: Príspevok k predchádzajúcemu článku prof. L. Šimka o analýze kriviek napätia a prúdu. (Une analyse mathématique de l'article précédent.)	196
Kunzl Vilém - Köppel Josef: Nová metoda pro precisní měření mřížkové konstanty krystalů. (Une méthode nouvelle pour mesurer les constantes cristallines.)	109
Liška Jiří: Elektromagnetické vlny na dielektrických trubcích. (Les ondes électromagnétiques le long des tuyaux diélectriques.)	97
Mikulíšek Jan: Longitudinální termomagnetický efekt potenciální u oceli. (L'effet thermomagnétique longitudinal en acier.)	273
Potoček Jan: K Brownovu pohybu torsního zrcátka. (Sur le mouvement Brownien d'un miroir de torsion.)	45
Slouka Hubert: Sluneční korona a protuberance při úplném zatmění Slunce 31. srpna 1932. (La couronne solaire et les protubérances pendant l'éclipse totale le 31 août 1932.)	204
Šimek Ludvík: Fysikální metoda analýze křivek napětí a proudu. (Une méthode pour l'analyse des courbes de courant.)	188
Teige Karel: Výpočet živé síly, se kterou elektron dopadá na anodu, a časového kolísání počtu elektronů dopadajících na anodu při ultrakrátkých kmitech. (Le calcul de l'énergie avec laquelle l'électron choque l'anode, et l'oscillation temporelle de nombre des électrons tombants sur l'anode dans le cas des oscillations ultracourtes.)	300
Zahradníček Josef: Měření doby kyvu pomocí dvou stoppek. (La mesure de la durée d'oscillation à l'aide de deux chronographes compteurs.)	277

Literatura — Analyses

A) Recense	
Abhandlungen aus dem Seminar für Vektor- und Tensoranalysis	217
Born, Optik	64
Broglie, L'électron magnétique	309
Brown-Shook, Planetary Theory	219
Elektrotechnický slovník	308
Gebauer, Aplikovaná matematika pro vojsko	52, 216
Hilbert - Cohn - Vossen, Anschauliche Geometrie	53
Hlavatý, Les courbes de la variété générale à n dimension	307
Sahánek, Výklad vzniku krátkých elm. vln v elektronových lampách	64, 122, 126
Sierpiński, Wstep do teorii funkcji zmiennej rzeczywistej	53
Strömgren, Lehrbuch der Astronomie	218
Teige, Fysika krátkých elm. vln	57, 60
Záviška, Mechanika	54

	Strana
B) Přehled	
původních publikací českých matematiků a fyziků	65, 220, 310

Zprávy — Communications

O. D. Chwolson	311
Paul Ehrenfest	128
Leonhard Euler	67
J. Heyrovský	72
Sir Thomas Muir	311
V. Posejpal	72
Činnost Čsl. národní skupiny Mezinár. výboru pro dějiny věd v r. 1933	129
Fysikální sjezd	313
Nobelova cena za fysiku	133
Nové práce v otázce rozbití atomu	131
Nový matematický časopis	72, 312
Pátý sjezd „International Union for Geodesy and Geophysics“ . .	130
Spektrální zdroje pro vědecké účely	319
Studium těžkého vodíku pomocí radioaktivního záření	315
Umělé radioaktivní prvky	314
Význam objevu kladného elektronu (positronu) pro výklad některých zjevů radioaktivního záření	367
Zlaté medaile pro matematiky	222

Část didakticko-metodická — Questions didactiques et methodiques

Friedrich Jaroslav: K reformě vyučování v oboru elektřiny . .	49
Thern Ladislav: Několik pokusů s krátkovlnným oscilátorem . .	18
Tuček Vojtěch: Staré a nové o středoškolské geometrii vůbec a o geo- metrii trojúhelníku zvlášť	1
Vetter Quido: Označování logaritmů	41
Vetter Quido: Vládní rada Ladislav Červenka šedesátníkem . .	33

Drobnosti

Aerostatické paradoxon	27
Hydrostatické paradoxon	28
Obrácení natriové čáry	26
Odras vln	26
Poznámka k umocňování čísel zvláštních	24, 72
Poznámky k rozměrům veličin	26
Přístroj na tvoření mlhy	72
Resonance	27
Souvislost práce a tepla	72

Z literatury.

Červenka, Aritmetika pro první, druhou a třetí třídu	76
Hahn - Henckel, Lehrbuch der Physik	73, 74
Petřra - Šmok, Fysika pro nižší školy střední	29
The seventh yearbook of the National council of teachers of mathe- matics	31

	Strana
Shibli, Recent developments in the teaching of geometry	30
Valouch - Špaček, Měřičtvi pro I. třídu	29, 77
Valouch - Špaček - Říman, Meroveda pre I. triedu	80
Zoll, Mathematisches Arbeits- und Lehrbuch	32

Věstník — Bulletin

Řád k vydávání „Časopisu“	72
Návrh komise pro jednotné názvosloví a označování fysikálních pojmů, veličin a jejich jednotek	67
Druhý sjezd matematiků slovanských zemí	64
Členům Jednoty	1
Program členských schůzí	5, 49, 53, 55, 63
Zprávy z členských schůzí	5, 45, 51, 53, 56, 63, 75
Zprávy z výborových schůzí	7, 46, 52, 58, 79, 80
Výroční zpráva za rok 1932/33	9
Zápis o valné schůzi	49
Ostatní zprávy	8, 47, 52, 54, 58, 66, 80
Seznam učebnic	57, 65

SPOLKOVÝ VESTNÍK.

Návrh

komise Jednoty čsl. matematiků a fysiků pro jednotné názvosloví a označování fyzikálních pojmů, veličin a jejich jednotek se zřetelem k vyučování fyziky na středních školách.

Členové komise (Mašek, Nachtikal, Petíra, Šmok, Ryšavý, Štěpánek, Wangler) si rozdělili látku středoškolské fyziky podle oddílů, v několika společných schůzích prodebatovali společně obecné zásady, poté pak podrobně návrhy jednotlivých referentů a sestavili předběžný návrh. O něm si vyžádali posudek, po př. opravné návrhy brněnského odboru Jednoty a bratislavského matematicko-fyzikálního kroužku, jež. pak zevrubně projednali. Před konečným rozhodnutím si vyžádali dobré zdání filologů (pp. prof. Dra Quido Hodury a Dra Rudolfa Schamse) a jím se úplně řídili. Přijatá usnesení byla schválena též fyzikální sekci vědecké rady Jednoty, jejíž členové (Dolejšek, Nachtikal a Valouch) se zúčastnili závěrečné porady.

Obecné zásady. Komise se řídila při svém rozhodování těmito zásadami:

1. Změn proti nynějšímu stavu budiž co nejméně a jen nezbytné.
2. Názvy budtež pokud lze české; avšak mezinárodní názvy už zavedené a zdomácnělé nebudtež nahrazovány českými. Doporučuje se v jednotlivých případech vedle českých uvést také názvy mezinárodní, a to na místech, kde se po prvé vyskytují.
3. Přihlédnuto bylo k názvům i označování, které zavedly v užívání odborné korporace, zejména Elektrotechnický svaz čsl., Chemická společnost čsl., jakož i k názvům v našich vysokoškolských učebnicích.
4. Na vyšším i nižším stupni středních škol budiž používáno bezpodmínečně stejných názvů i stejného označení. Zejména by měla být též shoda názvosloví ve fyzice a v chemii.
5. Po stránce pravopisné a jazykové (gramatické) jest se řídit platnými Pravidly českého pravopisu. Křestní jména cizích badatelů, zejména zkratky, jest uváděti pokud jen možno v původním jazyce, na př. H. Hertz a ne J. Hertz.
6. Fyzikální veličiny se označují v tisku kursivou, výjimkou se připouští písmo gotické u vektorů. Jednotky se vesměs označují obyčejným tiskem (antikvou), nikoli tedy kursivou, na př. m, g (gram), V volt, A ampér atd. Desetinná tečka se nahrazuje čárkou dole. Dvě desetinná čísla se oddělují středníkem, na př. 12,5; 13,5.

I. Geomechanika.

A) Názvy:

Skupenství pevné — ne tuhé
měřítko pásmové (pásové)
skládání a rozklad sil — ne sklad
směr souhlasný a opačný — ne
protivný

síly stejnosměrné, protisměrné a různosměrné
smysl (jen při rotaci) kladný a záporný
zrychlení — ne urychlení

hustota a spec. hmota se považuje za
týž pojem, přednost dávati hustotě
pohyb středový — ne středoběžný
nebo dostředivý, avšak zrychlení
dostředivé
páka lomená — ne úhlová
stříkačka vozová — ne vozni
součinitel pokud možno místo koefi-

cient, tedy na př. součinitel tření
činitel = faktor
poloha vrátká (vratká)
příkon = energie přivedená za vteři-
nu, výkon = energie vydaná za vte-
řinu
účinnost = výkon/příkon

B) Znaký veličin a jejich jednotek.

Centimetr cm, gram g, vteřina sec (po
př. s, zejména ve složených znač-
kách). Čas (i doba) se vyznačují
psaním značek nahoře, na př. 2^h
15^m 40^s.
mikron μ (10^{-3} mm)
milimikron, mikromilimetr $\mu\mu$
(10^{-6} mm)
mega- = M = 10^6 , mikro- = μ =
= 10^{-6}
dyn — ne dyna
erg
joule J = 10^7 ergů
watt W, kilowatt kW.
wattsekunda Ws, watthodina Wh,
kilowatthodina kWh
kůň HP
hodinový kůň HPh
souřadnice bodu x, y, z
délka l
vzdálenost d
hloubka, výška h
poloměr kruhu r
výchylka (elongace) y, u
amplituda (rozkmit) A
plocha S
průřez s

objem V
hmota M
hustota (spec. hmota) ρ
rychlost v , úhlová rychlost ω
zrychlení a , úhlové zrychlení ε
zrychlení tíhové g
síla P
břemeno Q
váha G , měrná váha γ
moment síly, moment dvojice D
hybnost mv (impuls)
energie E
výkon N
účinnost η
moment setrvačnosti J
deviační moment U
gravitační konstanta κ
gravitační potenciál V
modul pružnosti v tahu E
modul objemové pružnosti C
modul pružnosti ve smyku G
protážení (poměrné prodloužení) λ
relativní posun γ
Poissonův součinitel σ
normální napětí ν , tečné napětí τ
stlačitelnost γ

II. Hydromechanika. Aeromechanika.

A) Názvy:

Kapalina dokonalá, ideální
hladina
střed tlakový
artéská studna
vztlak — ne nadlehčení, ani nadnáška
stlačitelnost — ne součinitel stlač.
vnitřní tření, viskositá; tekutost (fluidita)
povrchové napětí (kapil. konst. se
vypustí)

krajní úhel — ne mezný úhel
trubice vlásková (kapilární)
rozpustnost — ne součinitel rozp.
napětí = expanse, tense
tlakoměr dvouramenný — ne násos-
kový
hutnost plynů a páry
vakuum je širší pojem než vzducho-
prázdnota

B) Znaky:

Atmosféra technická at	normální tlak, napětí N
atmosféra fyzikální atm	stlačitelnost (místo součinitel stlačitelnosti) γ
bar b = megadyn/cm ²	viskozita η
milibar mb, barye = dyn/cm ² = μ b	součinitel difuze D
bar. tlak b	absorpce (pohltivost) A
měrný tlak (na cm ²) p	součinitel absorpce α
hutnost plynu Δ	
napětí páry e	

III. Teplo (Thermika).

A) Názvy:

Teploměr — ne teplotoměr	kruhový oběh, kruh. cyklus
bod i teplota tuhnutí, varu	směs chladicí, mrazivá — ne mrazotvorná
anomalie (zvláštnost) vody	hubice — ne dýsa
roztavnost — ne roztajivost	teplotní spád — ne tepelný
nasyčená pára (syťá pára)	

B) Znaky:

Kalorie cal	redukovaný objem, tlak, teplota φ , π , θ
kilokalorie kcal	skupenské teplo tání q
absol. stupně se označují ⁰ K (na př. 273° K)	skupenské teplo varu σ
gramatom α	plynová konstanta R
grammolekula, mol, μ	konstanty van der Waalsova vzor. a , b
počet grammolekul n	účinnost tepelného stroje η
atomové číslo Z	mechanický ekvivalent tepla J
Avogadrovo číslo N	entropie S
součinitel roztavnosti látek pevných, kapalin a plynů α , β , γ	vnitřní energie U
obyčejná teplota t (θ , τ)	volná energie $F = U - TS$
absol. teplota T	tepelný obsah (entalpie) $I = U + pV$
kritická teplota θ	thermodynamický potenciál Φ
krit. tlak π	kryoskopická konst. K
množství tepla Q	ebulioskopická konst. E
měrné (specifické) teplo c	tepelná vodivost λ
měrná (specifická) tepla plynů c_p , c_v	vlhkost prostá f
poměr těchto tepel κ	vlhkost maxim. F
	vlhkost poměrná (relativní) φ

IV. Nauka o vlnění.

A) Názvy:

Bod kmitá, těleso se chvěje, neomezené prostředí se vlní	kmitna a uzel, vrch a důl
chvění = stojaté vlnění	zhuštění a zředění
vlnoplocha	sinusoida

B) Znaký:

Amplituda (rozkmit) A	kilocykl kc
výchylka (elongace) y nebo u	fázový posun φ (fázový rozdíl jen při interferenci)
kmitočet (frekvence) f	fázové zpoždění $\tau = \varphi/\omega$
kruhová frekvence $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$	vlnová délka λ
doba kmitu T	

V. Akustika.

A) Názvy:

Vrchní tóny harmonické; základní se počítá za první harmonický	jinak užívati: vynucené kmity (souznění)
barvitost	rázy — ne zázněje
souzvuk (akord)	dozvuk — ne pazvuk
resonance nastává jen při sladění;	vodič zvuku (zvukovodič)

B) Znaký:

Prostá (absolutní) výška tónu, kmitočet f , ν	rychlost zvuku c
---	--------------------

VI. Magnetismus (zkratka mag.).

A) Názvy:

Silové čáry (siločáry); indukční čáry	magnetisace — ne intenzita magnetisace
intenzita mag. pole, mag. síla; jednotkou zůstává ještě gauss G	zbytkový magnetismus = remanence
	koerzitivní síla (bránivá s.)

B) Znaký:

Gauss G	mag. indukce B , $\mathfrak{B}$
světové strany N (sever), S (jih); zatím též české zkratky S a J	mag. tok znamená tok mag. indukce, jinak nutno rozlišovati mag. tok indukční a silový
mag. množství m	indukční tok mag. Φ
mag. moment M	magnetisace $J = M/V$
permeabilita μ	
intenzita mag. pole (mag. síla) H , $\mathfrak{H}$	

VII. Elektřina (zkratka el.).

A) Názvy:

Elektrostatika a elektrokinetika — ne el. statická a kinetická	hladina = ekvipotenciální plocha
elstat. indukce — ne influence (zjev)	kapacita — ne jímavost
elektrická indukce = el. posunutí (vektor $\mathfrak{D}$); intenzita el. pole (el. síla) je vektor $\mathfrak{E}$	kondensátor otočný
konduktor — ne vodič	proud — ne intenzita proudová
silová čára (siločára)	coulombmetr (coulometr) — ne voltmetr
elektrostatická (elst.) a elektromag. (elmag.) jednotka náboje	měrný (specifický) odpor
	reostat — ne odporník
	vodič — ne proudovod nebo proudovodič

proudový okruh
šunt (shunt)
proud se spojuje nebo zapíná — ne
zavírá; proud se přerušuje nebo
vypíná — ne otvírá nebo rozpo-
juje
thermoelektrická síla; thermoelektri-
cký článek (thermočlánek)
teplotní součinitel odporu — ne te-
pelný
elektrolysa; katoda — ne kathoda;
anion, gen. aniontu
galvanostegie, elektrometalurgie,
elektrická rafinace, galvanoplastika,
ne jiné názvy
článek s jednou, se dvěma kapalinami
hysteresní smyčka — ne klička
fázový posun — ne fázový rozdíl
účinník ($\cos \varphi$)
jalový proud
impedance = zdánlivý odpor, skládá
se z odporu ohmického, indukčního
a kapacitního
komutátor (dynama) — ne kolektor
kotva (dynama) — ne indukt ani
armatura
rotor, stator
induktor je část stroje, tvořící magne-
tické pole indukující

ruhmkorf nebo Ruhmkorffův trans-
formátor — ne induktor Ruhmkorf-
fův
generátor stejnosměrného proudu slo-
ve dynamo
generátor střídavého proudu slove
alternátor
motorgenerátor — ne motorový gene-
rátor
točivé (otáčivé) pole
komutovati = měniti směr proudu;
konvertovati = měniti stejnosměr-
ný proud na střídavý nebo na-
opak; usměrňovati = měniti stří-
davý proud na stejnosměrný; trans-
formovati = měniti napětí proudu;
fáze nebo kmitočet se mění
zvrstvený (proužkový) výboj
röntgenové záření — ne světlo
paprsky X, X paprsky, Röntgenovy
paprsky
paprsky alfa, paprsky α , α paprsky
(podobně β , γ paprsky)
pronikavé (kosmické) záření
zesilovač vysokofrekvenční — ne frek-
venční
spojení se zemí nebo uzemnění
chabnutí = fading

B) Znaky:

ampér A, ampérhodina Ah; volt V;
ohm Ω ; megohm M Ω ; coulomb C =
= As; farad F; henry H
množství el., náboj el. q , Q ; náboj
elektronu e
potenciál mag. nebo el. V
dielektrická konst. (permitivita) ϵ
kapacita C
elektrické posunutí (indukce elst.) D , $\mathfrak{D}$
intensita el. pole (el. síla) E , $\mathfrak{E}$
elektromotorická síla E (zkratka ems.)
napětí stejnosměrného proudu E
anodové napětí E_a , mřížkové napětí E_g
efektivní napětí stříd. proudu E
max. napětí stříd. proudu E_m
ohmický odpor R , spec. odpor ρ

teplotní součinitel odporu α
vodivost G
měrná vodivost el. λ
redukční činitel tang. busoly C
elektrochem. ekvivalent A
proud, efektivní proud I
anodový proud I_a , mřížkový proud I_g
maximální proud I_m
průnik D , zesilovací činitel $k = 1/D$
strmost S
samoindukčnost (součinitel samoin-
dukce) L
vzájemná indukčnost M
odpor samoindukční nebo kapacitní X
impedance $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$
počet závitů na 1 cm z

VIII. Optika.

A) Názvy:

Zatmění prstencové — ne středové
třípyt hvězd = scintilace hvězd

rozptyl světla (difuse) liší se od roz-
kladu světla (disperse)

vada barevná a kulová (chromatická a sférická)	homocentrické paprsky nepřekládati
spektrum čárové, spektrum pásové (ne pásmové), spektrum spojitě	lomivost — ne lámavost
sekundární (druhotné) záření	vláknový kříž — ne nitkový
	mezny úhel (při úplném odrazu)
	fázový rozdíl (při interferenci)

B) Znaký:

Angström A	index lomu n , N
mezinárodní svíčka SI (základem fotometrických jednotek je mezinár. svíčka a ne Hefnerova svíčka HK)	ohnisková dálka f
lumen Lm, lux Lx	dioptrie D
lumenhodina Lmh, luxhodina Lxh	absorpce A
rychlost světla c	součinitel absorpce α
svítivost I	měrná otáčivost α
světelný tok Φ	mřížková konstanta d
osvětlení E	číselná apertura A
Planckova konstanta h	zorný úhel v optice u
	zvětšení v optice Z

Řád k vydávání „Časopisu pro pěstování matematiky a fyziky“.

1. „Časopis pro pěstování matematiky a fyziky“ jest určen práci vědecké i školské a tvoří jej, počínaje roč. 64, tyto části:

a) Část vědecká dělí se na „ČÁST MATEMATICKOU“ a na „ČÁST FYZIKÁLNÍ“, které obsahují pouze původní články vědecké (nikoli přetisky nebo překlady článků jinde publikovaných).

b) Část nazvaná „VYUČOVÁNÍ, ZPRÁVY, LITERATURA“ (D), která obsahuje vědecké referáty, konkrétní a detailní metodiku, popisy školních pomůcek a pokusů, články z elementární matematiky a fyziky, úlohy pro posluchače a absolventy vysokých škol, recenze vědeckých a pedagogických publikací, seznam prací československých autorů a zprávy (životopisné, vědecké a školské aktuality, drobnosti a pod.).

c) Část nazvaná „ROZHLEDY“ (R), která obsahuje články přístupné žákům středních (průmyslových a obchodních) škol z matematiky s deskriptivní geometrií a z fyziky, jakož i z příbuzných oborů (chemie a věd technických), zejména pak o praktickém užití těchto věd, dále v prvním čísle úlohy k řešení pro žáky středních škol (nejvýše 20 matematických, 10 fyzikálních a 5 z deskriptivní geometrie), jejichž řešení se uveřejní v posledním čísle.

d) „VĚSTNÍK SPOLKOVÝ“ (V), který obsahuje program členských schůzí pro nejbližší dobu, zprávy o konaných schůzích členských, výborových a valných, různá oznámení spolková a podniků spolkových se týkající, seznamy knih Jednotou vydaných a prodávaných a pod.

2. Rozsah činí zpravidla u částí matematické a fyzikální po 112 str., u částí D a R po 160 str. a u části V 112 str. K překročení rozsahu jest si vyžádati napřed schválení výboru; rovněž k otištění článku delšího než dva tisk. archy je třeba svolení výboru dříve, než se dá rukopis do sazby. Každá část je paginována samostatně, při čemž k paginaci částí b), c) a d) jsou připojena písmena D, R a V.

3. „Časopis“ vychází v osmi sešitech ročně, vždy v druhé polovině měsíce, počínaje říjnem a konče květnem. Část D vychází čtyřikrát ročně a jest obsažena v sudých sešitech „Časopisu“. Část R vychází čtyřikrát ročně a jest obsažena v lichých sešitech „Časopisu“. Část vědecká vychází nejvýše

čtyřikrát ročně a jest obsažena v tom kterém sešitu „Časopisu“. Část V obsahuje podle možnosti každý sešit „Časopisu“.

Část vědecká se zasílá jako samostatná publikace v obálce „Časopisu“ výměnou zahraničním korporacím, pokud nereflktují na úplný „Časopis“.

Část R vychází též samostatně jakožto „ROZHLEDY MATEMATICKO-PŘÍRODOVĚDECKÉ“ ve čtyřech sešitech ročně pro studující středních (průmyslových a obchodních) škol a jiné interesenty. Předplatné pro studující je polovice předplatného normálního.

Část V vychází podle potřeby také samostatně jakožto „VĚSTNÍK JČMF“ pro informaci členů Jednoty i jiných interesentů.

4. Rukopisy článků jest dodati kanceláři Jednoty pro tiskárnu osm neděl před vyjitím, rukopisy recenzí, zpráv, úloh a pod. nejméně tři neděle před vyjitím. Tiskárna zasílá u části vědecké 1 otisk sloupcové korektury a obrazců s rukopisem autoru článku a vrácenou korekturu předloží k nahlednutí hlavním redaktorům, lomenou korekturu zasílá jen hlavním redaktorům, pokud jí redaktor neuložil poslati ji též autorovi. Totéž platí o korekturách vědeckých referátů v části D. Sloupcovou i lomenou korekturu všech příspěvků částí ostatních zasílá tiskárna v 1 otisku jen redaktorům. Korektury jest provést pečlivě a čitelně a vrátiti nejdéle do týdne po obdržení. Imprimatur dává redaktor. O rozsahu jednotlivých čísel se dohodne redaktor s ředitelem.

5. Autoři zasílají členům redakce přímo nebo prostřednictvím kanceláře rukopisy náležitě k tisku upravené, čitelně po jedné straně psané, pokud lze strojem. Slova, jež mají býti vytištěna **tučně**, dlužno podtrhnouti úsečkou — *kursivou*, vlnovité — *prostrkaná*, čárkovaně; řecká písmena buďtež psána červeně nebo červeně podtržena. Značky, písmena a typy jiného druhu než text, obtížnější tvary, odlišná typografická úprava a pod. buďtež v poznámce na počátku rukopisu sazeči vysvětlena. Typografická úprava sazby jest jednotná a lze ji seznati z předešlého ročníku; funkční znaky se tisknou vždy písmem obyčejným, argumenty kursivou, jednotky měr písmem obyčejným. V desetinných číslech jest psáti pouze desetinnou čárku. Zlomky v textu se sázejí se šikmým lomítkem (dy/dx). Pravopis se řídí zásadami obsaženými v „Pravidlech českého (slovenského) pravopisu“, posl. vyd.

Autorské korektury, t. j. korektury způsobené nejasností rukopisu nebo jeho změnou po vysázení, se účtují autorům k tíži. Požádá-li autor, aby nebyl uveřejněn jeho článek přijatý do tisku, je povinen nahraditi hotové výlohy, pokud Jednotě vzešly sazbou, tiskem, štočky a pod. Přijetím příspěvku do tisku nevzniká Jednotě vůči autorovi závazek, že příspěvek vyjde v určitém čísle nebo na určitém místě.

Obrazce schopné reprodukce buďtež nakresleny tužkou v dvojnásobném zvětšení; redakce sama obstará na náklad autorův jejich úpravu pro reprodukci. Tloušťky čar, velikost písmen, vzdálenosti čar, písmen a indexů jest voliti přiměřeně se zřetelem ke zmenšení obrazce na $\frac{1}{2}$ při reprodukci. Popisovány buďtež obrazce normalisovaným písmem. Každý obrazec buď na rubu (v části, která při obštížení obrazce při reprodukci neodpadne) označen jménem autorovým, titulem článku, číslem obrazce a poměrem zmenšení.

Recenze buďtež věcné a co možná stručné, zejména recenze cizojazyčných publikací.

Rukopisy (ani do tisku nepřijaté) se nevracejí a ani Jednota ani redakce neručí za jejich ztrátu. Přeje-li si autor písemné zprávy od redakce, přiloží známku na odpověď. Za obsah příspěvku odpovídá jeho autor.

V části vědecké se uveřejňují články v řeči české nebo slovenské, anglické, francouzské, italské a německé; každý článek má pod titulem a jménem autorovým s udáním jeho bydliště uvedeno datum, kdy do redakce došel. Před vlastním textem je stručný obsah (petitem sázený) v téže řeči

jako článek, za textem pak stručný výtah, a to u článků českých nebo slovenských zpravidla francouzský, u ostatních článků český nebo slovenský.

Veškeré ostatní příspěvky jsou tištěny pouze v řeči české nebo slovenské; výlohy event. překladu z cizí řeči nese autor.

Příspěvky se přijímají v první řadě od členů, od nečlenů jen výjimečně. Každý příspěvek budiž podepsán; anonymní příspěvky se neotiskují.

6. Autoři článků otištěných v části vědecké obdrží zdarma 50 zvláštních otisků v normální úpravě; další otisky obdrží na příslušnou objednávku napsanou zřetelně na sloupcovou korekturu článku, při čemž se jim zaúčtuje za každých 25 výtisků 1—4 str. 6 Kč, 5—8 str. 12 Kč, 9—12 str. 18 Kč, 13—16 str. 24 Kč atd. Zvláštní otisky jiných příspěvků se nezhotovují.

7. „Časopis“ redigují dva hlavní redaktori (matematik a fysik) s redakční radou a s odbornými redaktory; volí je výbor na tři roky:

a) Pro matematickou a fysikální část vědeckou zvolí dvě redakční rady, jichž členové si rozdělí obory, v kterých se pak starají o získání vhodných příspěvků a mají právo přijímat nebo zamítat příspěvky jim dodané a je upravovat, jak toho „Časopis“ vyžaduje. Svá rozhodnutí předkládají hlavnímu redaktoru, který, kdyby s nimi nesouhlasil, dohodne se s nimi přímo nebo předloží věc k rozhodnutí redakční radě. Dále mají právo žádati za svolání redakční rady nebo plena a tam činit návrhy, týkající se obsahu a úpravy „Časopisu“ a o nich hlasovat.

b) Pro část D a R zvolí odborné redaktory, jichž práva a povinnosti jsou tytéž jako členů redakční rady. Vědecké referáty a recenze jest předloprospědnictvím hlavního redaktora příslušným členům redakční rady k dalšímu řízení. O přijetí příspěvků do části D a R rozhodují odborní redaktori společně s redaktory hlavními, kteří mají na zřeteli vědeckou úroveň přijatých příspěvků; kdyby se nedohodli, rozhodne redakční plenum. Odborní redaktori dodávají rukopisy tiskárně, určují jejich pořadí a čtou korektury veškerých příspěvků (kromě vědeckých referátů a recenzí); jen výjimečně se korektury na jejich poukaz zasílají autorům.

c) Redakci části V obstarává ředitel.

d) Články příležitostné, jež nejsou výhradně vědecké, odpovědi na ně, recenze, na které bude pravděpodobně reagováno, polemiky a pod. příspěvky rázu osobního lze zařadit do „Časopisu“ jen po jejich schválení redakční radou nebo plnem.

e) Hlavní redaktori mají všechna práva členů redakční rady, u části vědecké dodávají rukopisy tiskárně, určují jejich pořadí a revidují korektury autorovy, u částí D a R revidují korektury vědeckých referátů a čtou korektury recenzí. Za zařazení příspěvku do „Časopisu“ odpovídá výboru hlavní redaktor s odborným redaktorem nebo členem redakční rady, který příspěvek přijal.

f) Schůzi redakční rady (matematické nebo fysikální) řídí příslušný hlavní redaktor, schůze redakčního plena (všech členů redakce „Časopisu“) řídí hlavní redaktori střídavě (první schůzi matematik). Redakční rada se schází podle potřeby nebo na návrh některého jejího člena a svolává ji příslušný hlavní redaktor. Schůze plena se koná zpravidla do týdne po vydání každého sešitu, jehož obsah a úprava se posoudí, a učiní se potřebné dispoice pro další sešity. Plenum ustanoví také bližší podrobnosti o postupu redakčních prací. Při hlasování rozhoduje absolutní většina přítomných. Z rozhodnutí redakčního plena nebo rady lze se odvolat k výboru; dokud výbor nerozhodne, zůstává sporná věc v klidu. O schůzích redakční rady a plena jest vésti stručné zápisy.

8. Autorský honorář se vyplácí za příspěvky otištěné v části D a R a činí 12 Kč za 1 stranu, 5 Kč za 1 úlohu. Za recenzi honorář odpadá, obdržel-li recensent výtisk k recenzi od redakce.

Zprávy z členských schůzí.

Matematická sekce vědecké rady pořádala tyto schůze:

Dne 1. března 1934 přednášel prof. dr. MILOŠ KÖSSLER: O některých novějších výsledcích z teorie funkcí prostých.

Přednášející podal přehledný referát o knize P. Montelov: *Leçons sur les fonctions univalentes ou multivalentes* (Paris, 1933) a připojil několik vlastních poznámek o zvláštních družinách funkcí prostých. Obsah těchto poznámek bude uveřejněn ve Věstníku Král. čes. spol. nauk.

Dne 12. a 13. března 1934 přednášel dr. H. HAHN, profesor university ve Vídni: 1. Lokální souvislost. 2. Aditivní funkce množství.

Dne 12. dubna 1934 přednášel prof. dr. B. BYDŽOVSKÝ: Poznámky k teorii ortogonálních matic.

Dokázal, že každá ortogonální matice C , která je zároveň souměrná, je součinem matic tvaru $J - 2aa$, $J - 2bb$, $J - 2cc$, ..., kde $aa = bb = cc = \dots = J_1$, $ab = ac = bc = \dots = 0$ (zde J je matice jednotková, J_1 matice mající jako první hlavní prvek 1, ostatní prvky vesměs nuly), přičemž počet těchto matic je roven hodnotě matice $C + J$ anebo $C - J$. Oba tyto rozklady jsou možné. Při důkaze se setkal s výsledkem, který byl v odporu s t. zv. větou Brioschiovou, jak je uvedena na př. v Pascalově knize „Die Determinanten“, str. 165. Ukazuje, že věta tak uvedená je chybná, sleduje chybu zpět až k autorovi a uvádí pak přesné znění této věty.

Dne 3. května 1934 přednášel KAREL DUSL: O vyšších funkcích Mathieuových a jejich mechanických aplikacích.

V přednášce pojednáno nejprve o funkcích E. C. Pooleových s periodou 4π , které vyznačují se hlavně tím, že sudá a lichá funkce téhož indexu jsou současně partikulárními integrály téže diferenciální rovnice Mathieuovy. Nato pojednáno o funkcích Mathieuových přidružených, čili vyššího řádu, které do analýzy zavedli P. Humbert a L. Ince. Funkce tyto, jsouce partikulárními integrály diferenciální rovnice druhého řádu:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2\nu \operatorname{ctg} x \frac{dy}{dx} + (a + k^2 \cos^2 x) y = 0,$$

redukují se jednak pro $k = 0$ a $a = n(n + 2\nu)$ na polynomy Gegenbaue-rovy, jednak pro $\nu = 0$ resp. $\nu = t$ na funkce Whittaker-Mathieuovy. Přednášející vytkl čelné vlastnosti těchto funkcí, odvodil některé nové vztahy a poukázal k aplikacím mechanicko-fyzikálním týkajícím se sferoidu. Vedle toho promluvil o mechanickém problému dvou artistů na kouli balan-cující (Hamel), který vede rovněž k řešení diferenciální rovnice Ma-thieuovy.

Dne 9. května 1934 přednášel prof. dr. KAREL PETR: O rozkladu polynomů s celočíselnými koeficienty podle modulu p .

Polynom $f(x)$ s celistvými součiniteli sluje reducibilní podle prvočísla p , existují-li polynomy $g(x)$, $h(x)$ stupňů větších než 0 (> 0), takový, že jest

$$f(x) \equiv g(x) h(x) \pmod{p};$$

při tom se znaménko $\equiv$ vztahuje k součinitelům polynomů na obou stranách. Jest jednoduché kritérium, jež nás poučuje o tom, zda polynom daný jest reducibilní podle modulu p a jež zároveň nám udává stupně jednotlivých ireducibilních činitelů (ireducibilních podle modulu p). Budiž daný polynom tvaru

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n. \quad (I)$$

Celá čísla a_k můžeme redukovati podle modulu p ; úkol, o který se jedná, závisí pouze na třídách podle mod p , v nichž jednotliví součinitelé se nacházejí.

Stanovíme výrazy

$$x^{kp} \equiv b_{k0} + b_{k1}x + \dots + b_{k,n-1}x^{n-1} \pmod{p},$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Přitom jest $b_{00} = 1$, $b_{0i} = 0$ pro $i = 1, 2, \dots, n-1$. Potom, jestliže p není dělitelem diskriminantu mnohočlenu (I),*) matice

$$\{b_{ik}\} \quad i, k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

má rovnici charakteristickou, jež podle modulu p se dá upravit na součin tvaru

$$(\lambda r_1 - 1)(\lambda r_2 - 1) \dots (\lambda r_t - 1),$$

λ proměnná v mnohočlenu dávající levou stranu rovnice charakteristické. Jestliže $p > n$, můžeme pak tvrditi, že mnohočlen (I) jest rozložitelný v t ireducibilních činitelů stupňů $r_1, r_2, \dots, r_t$ a jest okolnost uvedená v případě, že $p > n$, nutnou a postačující podmínkou pro takovýto rozklad. Důkaz tohoto tvrzení jest jednoduchý při užití Galoisových komplexních čísel.

Fysikální sekce vědecké rady pořádala tyto schůze:

Dne 27. února 1934 přednášel prof. d. F. LINK: Zatmění Měsíce a výzkum vysoké atmosféry.

K četným metodám výzkumu vysoké atmosféry řadí se měsíční zatmění jako optické sondáže vysoké atmosféry. Kdežto všechny dosud užívané sondáže optické mají charakter převážně radiální, jsou zatmění měsíční sondážemi tangenciálními a hodí se proto velmi dobře k výzkumu vertikální struktury zemské atmosféry. Autor vybudoval teorii umožňující výpočet optické hustoty stínu vrženého zemí na Měsíc. Teorie předpokládá znalost hustoty vzduchu v různých výškách nad povrchem zemským a rozložení specifické svítivosti na kotouči slunečním. Dnes, kdy známe z výstupů registračních balonků hustotu vzduchu asi do výše 40 km, můžeme počítati optickou hustotu stínu od středu až k okrajům plného stínu. Výsledky teorie porovnané s měřeními hustoty stínu potvrzují znovu existenci vysoké absorpční vrstvy. Její existence byla objevena Denjouem a potvrzena měřeními vlastními týkajícími se atmosférické absorpce. Jedná se o vrstvu neznámé povahy, asi téže výšky jako Heavisideova vrstva (kolem 120 km), a absorbující v zenitu asi 10% dopadajícího záření. Rovněž existence vrstvy ozonu byla měřeními potvrzena. Absorpce ve vrstvě ozonu pro horizontální paprsky počne klesati, když první horizontální paprsky překročily výšku 20 km. To by poukazovalo na to, že spodní hranice vrstvy jest nedaleko této výšky.

Viz též: Comptes Rendus, 196 (1933), 251, a úplnou práci v Bulletin astronomique, 8 (1933), fasc. 2.

Dne 10. dubna 1934 přednášel dr. V. POSPÍŠIL: Mechanická teorie zraku.

Přednášející podal nástin své teorie vidění: Zrakové počítky vznikají mechanickým drážděním čípků a tyčinek údery černých pigmentových zrnek, které jsou důsledkem rázů 2. druhu, odehrávajících se mezi povrchovými molekulami pigmentových částic, vzbuzených absorpcí světla, a molekulami oční kapaliny. Pigmentový epitel je základní vrstvou oka. Čípky a tyčinky fungují jen jako jemná tykadélka, ohmatávající vrstvu pigmentu. Jsou proto od pupily odvráceny a zavrtány v pigmentu. Na tomto základě

*) Jestliže p jest dělitelem diskriminantu mnohočlenu (I), pak $f(x)$ a $f'(x)$ mají společnou míru podle modulu p a polynom $f(x)$ lze rozložití podle modulu p v součin faktorů, jejichž diskriminanty nejsou dělitelný p .

snadno se vysvětlí účelnost stavby sítnice, účel cestování pigmentových zrněk, nepatrná setrvačnost zrakových počítků, vznik iradiace, slepota způsobená odchlípnutím sítnice, atd. — Pro výklad vidění barev je nutný předpoklad, že ve spektrálně monochromatickém a koherentním paprsku existují zázněje, mající původ v přirozené šířce čar $\Delta\nu$ resp. $\Delta\lambda$. Světelné kvanty dopadají na sítnici v pravidelném rytmu $\Delta\nu = N/\text{sec}$ a s toutéž periodicitou oklepávají též pigmentová zrnka čípky. Ty jsou podle anatomického nálezu složeny z kotoučků, majících úkol resonátorů, nalaďených svými vlastními elastickými kmitovými frekvencemi F na záznějové frekvence barev N . Podle výpočtu $F \sim 10^8/\text{sec}$ a odtud (protože $F = N = \Delta\nu$) vychází pro $\Delta\lambda \sim 0,001 \text{ Å}$ v soulase se zkušeností. Z modrosleposti po přestálém odchlípnutí sítnice lze soudit, že špička čípku je nalaďena na červenou, spodek na modrou. Z toho vyplývá snadný výklad pro vzdálenostní efekt barev a pro fialovou červeň modrého konce spektra, která je patrně 1. harmonickou k základní frekvenci krajní modré. Z těsného spřažení resonátorů snadno se vyloží všechny známé zjevy o skládání barev. — Při vidění za šera spoluúčinkuje též zrakový purpur, a sice též mechanicky, rázy 2. druhu. Všechny známé zkušenosti o vidění za šera (poměrná slepota fovey centralis, bezbarvosť, bezbarvý interval, adaptace noční i denní, zjev Purkyňův) se tak vyloží velmi snadno.

Dne 17. dubna 1934 přednášel dr. V. PETRŽÍLKA: Kennelly-Heavisideova vrstva a její význam pro šíření elektromagnetických vln (referát).

Přednášející se nejprve zmínil o tom, které zjevy vedou k předpokladu, že kolem naší země existuje vodivá vrstva, která je nyní všeobecně nazývána vrstvou Kennelly-Heavisideovou resp. ionosférou. Realizaci totální reflexe elektromagnetických vln na této vrstvě byla v novější době její existence nezvratně dokázána. K těmto pokusům byla vypracována řada metod, které dovolují z provedených pozorování reflexe vyčísliti výšku vrstvy. Tato pozorování zároveň ukázala, že existují vlastně dvě vodivé vrstvy: jedna s maximem ionisace ve výši mezi 90 až 130 km, druhá s maximem ionisace ve výši mezi 300 až 400 km nad zemí, a umožnila učiniti si představy o tom, jakými plyny jsou obě vrstvy tvořeny. Ježto příčinou ionisace těchto vrstev je záření sluneční (ať už ultrafialové či korpuskulární), plyne z toho okamžitě závislost jejich ionisace na době denní; lze si tím vysvětliti také změny ionisace pozorované při zatmění slunečním. Není na tyto vrstvy bez vlivu ani magnetické pole zemské, které v nich způsobuje dvojtlom. Rovněž byly studovány vztahy těchto vrstev k polární záři, která je vyvolávána přílivem korpuskulí do blízkosti naší země; severní záře se totiž objevuje nejčastěji ve výši circa 100 km nad zemí, t. j. právě v místech, kde je maximum ionisace spodní vrstvy. Znátí všechny tyto souvislosti má nejen velkou vědeckou cenu, ale i eminentní význam praktický vzhledem k tomu, že šíření krátkých elektromagnetických vln a zvláště překlenutí ohromných vzdáleností pomocí těchto vln je umožněno jedině existencí vrstvy Kennelly-Heavisideovy.

Dne 24. dubna 1934 přednášel prof. dr. FRANT. NACHTIKAL: Vysoké školy a vědecké ústavy v SSSR.

Přednáška byla referátem o poznatcích, kterých nabyl přednášející při vědecké exkursi profesorů, inženýrů a studentů do sovětského Ruska. Přípravné studium pro vstup na vysokou školu trvá 9 let (od 8 do 17 let), ale není podmínkou. Na vysokou školu může vstoupiti každý 17letý, složil-li s úspěchem přijímací zkoušku, jež pro vys. školy technického směru se skládá z matematiky, fyziky, chemie a ruštiny. Studium na vysokých školách technických trvá 5 let, při čemž první dva ročníky jsou věnovány teoretickému vzdělání a další 3 ročníky odbornému školení v určitém speciálním technickém oboru. Návštěva přednášek je povinná a přísně se

kontroluje. Koncem každého semestru skládají posluchači zkoušky před komisí. Při neprospěchu z jediného základního předmětu musí posluchač ročník opakovati, což je však dovoleno jen jednou. Vedle vlastních přednášek profesora, společných pro všechny posluchače, opakují a procvičují asistenti vyložené učivo se studenty v menších skupinách (třídách asi po 25 posluchačích). V laboratořích musí každý posluchač vypracovati předepsaný pořad úloh. Ve vyšších ročnících asi 30% učebné doby připadá na odbornou praxi. Na konci studií uloží se každému absolventu „diplo-mový projekt“, jež pak „obhajuje“ před komisí složenou z profesorů a odborníků z praxe. Po úspěšné zkoušce dostává pak titul „inženýra“ (velmi vážený titul v Rusku) a je poslán do praktické služby. Nejlepší absolventi se stávají aspiranty a z nich po vypracování disertační práce a složení disertačního „disputu“ se vybírají budoucí profesori. V čele vysoké školy technického směru stojí direktor, jmenovaný komisariátem těžkého průmyslu (nemusí to být profesor); jemu k ruce je přidělen prorektor, jenž je vždy profesor. Studium technické je velmi specialisováno, takže každý absolvent je vzdělán jen v zcela úzkém úseku technickém. Nemajetní posluchači dostávají stipendia odstupňovaná podle ročníků a podle prospěchu v obnosu 70 až 150 rublů. Vláda nyní naléhá na to, aby všechny zkoušky byly přísné, neboť dřívější mírnost vedla k neuspokojivým výsledkům.

Exkurse prohlédla si též zařízení fyzikálně-elektrotechnických ústavů v Leningradě, v Moskvě a v Charkově a aerodynamický ústav v Moskvě. Tyto ústavy jsou bohatě vypraveny i dotovány a jsou určeny jak k vědeckému badání, tak i k řešení vědeckých otázek technických, jež mají význam pro průmysl. Hlavní zřetel se věnuje studiu zjevů při vysokém napětí (až milion voltů), při velmi nízkých teplotách, dále vyšetřování materiálů rentgenospektrografií, radiotechnice, problémům letu a pod.

Na konec předvedl přednášející řadu projekcí vztahujících se k tomu, co exkurse v Rusku viděla.

Dne 8. května 1934 přednášel dr. L. ZACHOVAL: Moderní teorie vedení elektřiny v kovech (referát).

Referent vytkl hlavní znaky Fermiho statistiky a důvody, pro které byla zavedena do úvah o vedení elektřiny v kovech. Ukázal na nedostatky Sommerfeldovy teorie a naznačil zásady, podle kterých problém vedení v kovech řeší kvantová mechanika (Bloch, Peierls, Brillouin a j.). Potom ukázal, jak teorie Blochova přechází v Sommerfeldovu pro vyšší teploty a jaké jsou její nedostatky při vyšetřování odporu při teplotách nízkých. Na konec se zmínil o některých dosažených výsledcích.

Dne 15. května 1934 přednášel dr. V. KUNZL: Nové pokroky ve spektroskopii paprsků X (referát).

Přednášející referoval o nových výsledcích ve spektroskopii paprsků X, pokud ještě nejsou souborně v literatuře uvedeny. — Co se týče metodiky, byly nalezeny nové spektroskopické metody pro obor středních a kratších délek vlnových. Metody ty se vyznačují proti metodám v tomto oboru dosud užívaným mnohonásobně zvýšenou světelností. Metoda Johannova dociluje toho reflexí divergentního svazku paprsků na cylindricky zakřivené deštičce krystalu. Optimální fokusace je docílena tehdy, když fotografický film je rozložen podél válcové plochy, jež se dotýká reflektující plochy krystalu zakřiveného do válcové plochy o poloměru dvojnásobném. Pro obor kratších délek vlnových je vhodnější metoda Cauchioiové, která za téhož uspořádání užívá průchodu záření krystalovou deštičkou a reflexe na plochách k povrchové ploše krystalu příčných, analogicky k metodě Rutherford-Andradeho. Zajímavé je, že u těchto metod ke zobrazení spektra není potřeba štěrbin. Je tedy možno využití celého fokusu, což je jedním důvodem jejich velké světelnosti. Obě metody trpí však jistým nedostatkem rozlišovací mohutnosti, který se u Johannovy metody zvláště projevuje v oboru

délek vlnových kratších relativně k mřížkové konstantě použitého krystalu, u metody Cauchiové naopak v oboru vln. délek delších. Nedostatek ten se podařilo odstraniti Johanssonovi, jehož metoda — v podstatě zdokonalená metoda Cauchiové — užívá cylindricky zbroušené desky krystalu. Referující naznačil odvození fokusačních podmínek, popsal metody a spektrografie na jejich principu konstruované a některé výsledky jimi dosažené srovnal se staršími.

V druhé části svého referátu uvedl přednášející nové výsledky v oboru spekter emisních. V dlouhovlnném oboru byly dosaženy hlavně školou Siegbahnovou za použití plošných mřížek. Linie v tomto oboru nalezené jsou zařaditelné do Bohr-Costerova schematu a jsou tedy jen potvrzením dosavadní teorie spektroskopické. Ale nové výsledky dosažené v oboru středních vlnových délek, jež tvoří již detaily tohoto oboru, jsou právě zajímavé tím, že kladou teorii nové úkoly. Mimo několika jiných druhů linií uvedených přednášejícím jsou to hlavně linie podle výběrových pravidel zakázané. Nastínil též teorie vzniku takových linií.

Třetí část referátu byla věnována spektrům absorpčním. Vedle výsledků v dlouhovlnném oboru uvedl přednášející také nové poznatky v oboru středních vlnových délek, týkající se struktury absorpčních spekter, t. zv. sekundární absorpce, které právě posloužily k prohloubení názoru na mechanismus absorpce. Nastíněny byly teorie absorpce, zvláště pak moderní teorie Kronigova. Na experimentálních poznatech o sekundární absorpci ukázána nosnost této teorie, která dává v některých směrech i kvantitativní souhlas s experimentem.

Přednášející všechny uvedené výsledky porovnal s výsledky dosaženými ve spektroskopickém ústavu Karlovy university, o nichž bylo již většinou referováno ve schůzích JČMF. Podal pak stručně přehled činnosti spektroskopického ústavu v poslední době a nastínil též směry další činnosti.

Dne 29. května 1934 přednášel doc. dr. L. TRUKSA: Statistické základy teorie difuze. Vyjde v příštím ročníku „Časopisu“.

Matematicko-fyzikální kroužek v Bratislavě konal dne 1. června 1934 schůzi, na které přednášel prof. dr. VIKTOR TEISLER: Několik pokusů z lékařské fyziky.

Ostatní zprávy.

Schůze výboru konaná dne 18. dubna 1934. Výbor blahopřeje předsedovi L. Červenkovi k jeho šedesátinám. — Bydžovský podává zprávu z jednání redakční rady o ředitelově návrhu na úpravu Časopisu (V46). Návrh byl schválen všemi hlasy proti jednomu; pro vědeckou část navržený řeči: česká nebo slovenská, anglická, francouzská, italská a německá. Po diskusi byl návrh schválen jednomyslně a ředitel pověřen vypracováním řádu do příští výborové schůze, v níž bude rozřešena též otázka personální. — Na II. sjezdu matematiků slovanských zemí budou Jednotu zastupovati Kössler a Rychlík. — Šmok oznamuje, že není vyhlídek na pořádání kursu pro profesory reálných oborů. — K posouzení dvou prací, které se ucházejí o vypsanou Mrňávkovu cenu, byla zvolena komise: Březina, Bydžovský, Červenka, Šmok, Vyčichlo. — Po referátu Maškově bylo usneseno vydati Hvězdářskou ročenku na rok 1935 v rozsahu asi 72-76 stran s obsahem poněkud rozšířeným proti r. 1933, aby bylo lze vyhověti přáním Čes. astron. společnosti a profesorů středoškolských. K zabezpečení jejímu je nevyhnutelné, aby vzrostl její odbyt na středních školách. — Nachtikal referuje o postupu prací názvoslovné komise fyzikální, jež svých prací dosud neskončila. — Usneseno odebrati

holandský časopis *Physica*. — Podána byla zpráva o stavu tisku a o tržbě do konce února.

Schůze výboru konaná dne 30. května 1934. Zemřeli řed. Gardavský a řed. Rón. — Za člena zakládajícího přijat řed. dr. Šmok. — Místo resignovaného min. kom. O. Jeništy povolán do výboru dr. F. Vyčichlo. — Nejmenovaný člen Jednoty věnoval 1000 Kč jakožto Mackův základ Fondu pro podporu vědeckého badání. Výbor věnování s díkem přijal a usnesl se vyzvat po prázdninách členy k příspěvkům na tento základ. — Návoslovná komise předložila vypracovaný návrh pro jednotné názvosloví fyzikální; otiskne se ve Věstníku. — Ředitel předkládá Řád k vydávání Časopisu, který se po diskusi jednomyslně schvaluje; uveřejní se ve Věstníku. — Bibliografické zprávy nebudou zatím vydávány z důvodů úsporných. — Vzaty na vědomí resignace dosavadních hlavních redaktorů prof. Bydžovského (red. 15 let) a prof. Žáčka (red. 14 let) a vřele jim poděkováno; s potěšením byla konstatována jejich ochota zůstat členy redakční rady. Prof. Petrovi, který resignuje na členství redakční rady, vysloveny upřímné díky za jeho zásluhy, kterých si získal o Časopis za své třicetileté činnosti, z nichž 27 let byl redaktorem hlavním. Potom byli na příští tříletí zvoleni jednomyslně: hlavními redaktory Jarník a Závíška, odbornými redaktory Friedrich, Vyčichlo a Wangler, členy redakční rady matematické Bydžovský, Čech, Hlavatý, Kössler a Rychlík, fyzikální Dolejšek, Hostinský, M. A. Valouch a Žáček. — Ježto učebnice fyziky pro vyšší třídy, s jejímž vydáním Jednota počítala, vyjde jinde, byl požádán řed. dr. Šmok o její sepsání za účasti i jiných osvědčených praktiků. — Upravený rukopis II. dílu Maškovy fyziky je pro převod do slovenštiny připraven. V důsledku vzniklé situace bylo schváleno, aby byly oba díly pro nové české vydání přepracovány podle nových osnov. — Zamítnuto bylo vydání jedné tabulek a jedné učebnice (po vyžádaném posudku). — Podána byla zpráva o stavu tisku a o tržbě do konce dubna. — Kancelář a knihkupectví Jednoty budou zavřeny od 21. června do 7. července.

Návrh na jednotné názvosloví fyzikální laskavě zrevidujte a své připomínky pošlete kanceláři Jednoty do 30. září 1934.

Mechanická dílna p. Frant. Kmenta přesídlila do nových místností v býv. továrně Mautnerově v Praze XIX-Bubenč, Piettova 114 (tramvaji č. 2, 7, 11, 20, 22 na křižovatku Badeniho a Belcrediho, pak pěšky k bubeneckému nádraží a za ním směrem k Podbabě). Upozorňujeme na to P. T. pp. zájemce, kteří by snad hodlali o prázdninách závod Kmentův si prohlédnouti. Budou vítáni. — Veškerou korespondenci jest jako dosud adresovati výhradně na Jednotu, Praha II, Vodičkova 20, jinak nemůžeme ručit za přesné a včasné vyřízení.

ÚVOD DO POČTU PRAVDĚPODOBNOSTI A TEORIE STATISTIKY

Napsal

PhDr. JOSEF KAUCKÝ,

s. docent matematiky na Masarykově universitě.

S podporou Elektrotechnického svazu československého.

1934, 8° 79 stran, 7 obr.

Brož. výt. Kč 14,—

Knížka má čtyři části. První oddíl obsahuje rozdělení pravděpodobností podle počtu případů možných a na příkladech jsou ukázány metody, vedoucí k jejich výpočtu. Část druhá se týká pravděpodobností při opakovaných pokusech; výsledky této části vedou k formulaci vět stěžejní důležitosti pro celý počet pravděpodobnosti. Třetí část je stručný úvod do teorie statistiky a v poslední části jsou uvedeny aplikace, jako teorie o rozdělení chyb a několik poznámek o statistické mechanice. Posléze je připojen seznam některých děl o počtu pravděpodobnosti, teorii statistiky a jejich použití, z nichž si čtenář již snadno doplní a prohloubí vědomosti, získané z této knížky.

Jména autorů a pojmy jsou sestaveny abecedně.

Lze dostati u každého knihkupce nebo přímo u nakladatele.

**Jednota československých matematiků a fysiků v Praze II,
Vodičkova 20.**

Dr. JOSEF KLÍMA - VÁCLAV INGRÍŠ

RÝSOVÁNÍ

PRO III. A IV. TŘÍDU

bylo právě ministerstvem školství a národní osvěty
výnosem ze dne 8. května 1934, čísl. 52869/34-II/1,

schváleno

ve dvojitým vydání:

1. pro gymnasia a reálná gymnasia (s 56 obrazci a 8 tabulkami),
2. pro ref. reálná gymnasia a reálky (se 72 obrazci a 8 tabulkami).

|| Dovolujeme si upozorniti, že učebnice budou ||
určitě na skladě k počátku škol. roku 1934/35. ||

ŠABLONKY

k popísování norma-
lisovaným písmem.

Velká abeceda 7 mm, 5 mm, $3\frac{1}{2}$ mm vysoká
Malá abeceda 7 mm, 5 mm, $3\frac{1}{2}$ mm vysoká po Kč 12,—

Číslice $3\frac{1}{2}$ mm vysoké Kč 5,60. — Též
držáky dřevěné nebo hliníkové a pera dodá

KNIHKUPECTVÍ JEDNOTY ČESKOSLOV. MATEMATIKŮ A FYSIKŮ
V PRAZE II, VODIČKOVA 20.
