ČÁST STŘEDOŠKOLSKÁ

Příspěvek k řešení rovnice $x^4 - y^4 = z^4 - u^4$ čísly celými.

Dr. *Mil. Hlaváček.*

(Dokončení.)

Obecnější řešení obdržíme, necháme-li ve (III′) r libovolné, položíme $s = s' + 1/r$ a v upravené rovnici

$$\left(\frac{r^3}{r^2-1}s'+1\right)\left[-r(r^2-1)s'^3-3(r^2-1)s'^2-\frac{3(r^2-1)}{r}s'+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{r^2-1}{r}\right)^2\right]=A^2$$

klademe $A = \left(\frac{r^3}{r^2-1}s'+1\right)\left(\nu s'+\frac{r^2-1}{r}\right)$. Zkraťme rovnici, anulujme a položme koeficient při s' roven 0. Tím určíme

$$\nu = \tfrac{1}{2}(-r^2-3),$$

ze zbylých pak členů rovnice vychází

$$s' = \frac{3(r^6-3r^4+3r^2-1)}{r(r^6+10r^4+r^2+4)}$$

a tedy

$$s = s' + \frac{1}{r} = \frac{4r^6+r^4+10r^2+1}{r(r^6+10r^4+r^2+4)}. \qquad (8)$$

Z rovnic (5), (6), (7) plyne

$$x = r^7+8r^6-17r^5+2r^4-17r^3+20r^2+r+2,$$
$$y = r^7-8r^6-17r^5-2r^4-17r^3-20r^2+r-2,$$
$$z = 2r^7+r^6+20r^5-17r^4+2r^3-17r^2+8r+1,$$
$$u = -2r^7+r^6-20r^5-17r^4-2r^3-17r^2-8r+1,$$

a zavedeme-li $r = a/b$ (a, b celá čísla) a homogenisujeme-li,*) obdržíme řešení p. prof. Vl. Kučery (Rozhledy, roč. 9, 1930, čís. 2).

Jestliže dále ve (III) položíme $s = s' + \frac{1}{r}$, pak $A = \mu s'^2 + \nu s' + \frac{r^2-1}{r}$, anulujeme rovnici tak vzniklou a položíme

*) T. j. výrazy pro x, y, z, u učiníme celistvými homogenními.

rovny 0 koeficienty při s' a s'^2, určíme tím

$$\nu = \frac{r^2 - 3}{2}, \quad \mu = \frac{(3 - 18r^2 - r^4)\, r}{8\,(r^2 - 1)},$$

ze zbylých pak členů rovnice vypočteme

$$s' = \frac{8\,(r^8 - 18r^6 + 18r^2 - 1)}{r\,(r^8 + 100r^6 + 190r^4 - 44r^2 + 9)}$$

a tedy

$$s = s' + \frac{1}{r} = \frac{9r^8 - 44r^6 + 190r^4 + 100r^2 + 1}{r\,(r^8 + 100r^6 + 190r^4 - 44r^2 + 9)}. \tag{9}$$

Z rovnic (5), (6), (7) vychází

$$\begin{aligned}
x &= r^{13} + 27r^{12} - 214r^{11} - 186r^{10} - 2481r^9 + 861r^8 - 2804r^7 - \\
&\quad - 972r^6 - 2481r^5 - 27r^4 - 214r^3 + 294r^2 + r + 3,\\
y &= r^{13} - 27r^{12} - 214r^{11} + 186r^{10} - 2481r^9 - 861r^8 - 2804r^7 + \\
&\quad + 972r^6 - 2481r^5 + 27r^4 - 214r^3 - 294r^2 + r - 3,\\
z &= 3r^{13} + r^{12} + 294r^{11} - 214r^{10} - 27r^9 - 2481r^8 - 972r^7 - \\
&\quad - 2804r^6 + 861r^5 - 2481r^4 - 186r^3 - 214r^2 + 27r + 1,\\
u &= -3r^{13} + r^{12} - 294r^{11} - 214r^{10} + 27r^9 - 2481r^8 + 972r^7 - \\
&\quad - 2804r^6 - 861r^5 - 2481r^4 + 186r^3 - 214r^2 - 27r + 1,
\end{aligned}$$

kde lze opět zavésti $r = a/b$ (a, b celá čísla) a výrazy učiniti celistvými homogenními.

Toto řešení podává výsledky obecně různé od výsledků řešení předcházejícího, jak snadno plyne ze srovnání (8) a (9).

III. Označme s_0 výraz $1/r$, nejjednodušší to řešení rovnice (III) (jenže triviální), pak s_1 řešení v (8). Položíme-li ve (III') $s = s' + s_1$, můžeme postupovati jako dříve a obdržíme další řešení s_2, na základě tohoto pak s_3 atd. do nekon. Snadno lze ukázati, že $s_k \neq s_l$, když $k \neq l$, vyjma nanejvýš pro několik zvláštních hodnot r, racionálních to kořenů rovnice $s_k = s_l$, ačli takové kořeny vůbec existují (nehledě ke společnému kořenu všech těch rovnic $r = 1$).

Obdobnou nekonečnou řadu částečných, od sebe různých řešení (III) obdržíme, vyjdeme-li od $1/r$ jakožto prvního a výrazu v (9) jakožto druhého členu.

Ve (III) a rovněž ve (III') můžeme také klásti (kromě $s = s' + 1/r$ nebo obecněji $s = s' + s_k$) za A racionální lomenou funkci arg. s'. Na př.

$$A = \frac{\left(\dfrac{r^3}{r^2 - 1}\, s' + 1\right)\left[\mu s'^2 + \nu s' + \dfrac{r^2 - 1}{r}\right]}{1 + \delta s'}.$$

Koeficienty μ, ν, δ určíme opět anulováním koef. při s', s'^2, s'^3 a ze zbylých členů rovnice vypočteme posléze s. Tento výraz však jest 18. stupně v r v čitateli a 19. stupně ve jmenovateli, proto jej pro jeho složitost neuvádím.