

Werk

Label: Periodical issue

Jahr: 1934

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311028X_0063|log115

Kontakt/Contact

[Digizeitschriften e.V.](#)
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

ROČNÍK 63.

SEŠIT 7.

ČASOPIS

PRO PĚSTOVÁNÍ

MATEMATIKY A FYSIKY

Část matematickou řídí BOHUMIL BYDŽOVSKÝ s redakční radou:
EDUARDEM ČEČEM, KARLEM PETREM a KARLEM RYCHLÍKEM.

Část fyzikální řídí AUGUST ŽÁČEK s redakční radou:
VÁCLAVEM DOLEJŠKEM, BOHUSLAVEM HOSTINSKÝM
a FRANTIŠKEM ZÁVIŠKOU.

Část didakticko-metodickou řídí JAROSLAV FRIEDRICH.

Část středoškolskou řídí FRANTIŠEK VYČICHLO
A ALOIS WANGLER.

Část bibliografickou a Věstník řídí MILOSLAV VALOUCH.

VYDÁVÁ VLASTNÍM NÁKLADEM

JEDNOTA ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

ZA PODPORY MINISTERSTVA ŠKOLSTVÍ A NÁRODNÍ OSVĚTY.



V P R A Z E 1934.

Ročně 8 sešitů.

Předplatné (pro nečleny) 120 Kč.

Journal Tchécoslovaque de Mathématique et Physique.

Éditeur: Jednota čsl. matematiků a fysiků, Praha II-681, Tchécoslovaquie.

Obsah seš. 7. — Sommaire du fasc. 7.

Část středoškolská — Revue des sciences mathématiques et naturelles

| | |
|---|-------|
| Mil. Hlaváček: Příspěvek k řešení rovnice $x^4 - y^4 = z^4 - u^4$ číslly celými. (Contribution à résoudre de l'équation $x^4 - y^4 = z^4 - u^4$ par les nombres entiers.) | 101 |
| Ladislav Klír: Konstrukce paraboly ze dvou bodů a osy. (Une construction de la parabole donnée par les deux points et l'axe.) | 103 |
| Bohuslav Pavlík: O elektronových lampách, používaných v přijímačích, se zřetelem k jejich vývoji a zdokonalování. (Sur les lampes électroniques.) | 106 |
| Přehled. (Revue.) | 117 |
| Řešení úloh. (Les problèmes résolus.) | 125 |
| Seznam řešitelů. (Les noms des étudiants qui ont envoyé les solutions des problèmes.) | 139 |
| Udělení cen. (Prix décernés.) | 139 |
| Příloha: E. Čermák: Automobil. (L'auto.) | 25—32 |

Věstník — Bulletin.

SBÍRKA PŘEDNÁŠEK A ROZPRAV

Řada III (bratislavská), svazek 4

Prof. dr. JOSEF KOPAL

O VÁLEČNÉM ROMÁNU FRANCOUZSKÉM

1934

Cena 12 Kč

8° 66 stran

Položivši otázku válečné literatury v celém rozsahu a závažnosti problému, studie soustřeďuje metodicky pozornost na užší výbor válečné literatury francouzské, na nejtypičtější románová díla svědků: Barbusse, Duhamela, Dorgelèsa. Spisovatel si všímá slovesných hodnot, jež těmto dílům propůjčily vyšší stupeň literární účinnosti, především však mu jde o to, aby na ideologii Barbussově, na humanitním idealismu Duhamelově a na tragedii tohoto humanismu v díle Dorgelèsově osvětlil reakci francouzské duše na otřes války. Jestliže jmenovaní romanopisci zachycují rub medaile, jež Alfred de Vigny označil slovem servitude, stať Pohled s jiné strany upozorňuje na nejvýznamnější ze spisovatelů, kteří se snaží osvětlit její líc. V závěru ukazuje autor, kterak význam těchto otázek přesahuje zájem literární, protože válečná literatura poskytuje klíč k duši národa a osvětluje pronikavě jeho mravní posici v zápolení válečném a poválečném.

Lze obdržeti u každého knihkuce i přímo u nakladatele.

Tento sešit vyšel 19. května 1934.

ČÁST STŘEDOŠKOLSKÁ

Príspevek k řešení rovnice $x^4 - y^4 = z^4 - u^4$ čísly celými.

Dr. *Mil. Hlaváček.*

(Dokončení.)

Obecnější řešení obdržíme, necháme-li ve (III') r libovolné, položíme $s = s' + 1/r$ a v upravené rovnici

$$\left(\frac{r^3}{r^2-1} s' + 1\right) \left[-r(r^2-1)s'^3 - 3(r^2-1)s'^2 - \frac{3(r^2-1)}{r}s' + \left(\frac{r^2-1}{r}\right)^2 \right] = A^2$$

klademe $A = \left(\frac{r^3}{r^2-1} s' + 1\right) \left(\nu s' + \frac{r^2-1}{r}\right)$. Zkrátíme rovnici, anulujeme a položíme koeficient při s' roven 0. Tím určíme

$$\nu = \frac{1}{2}(-r^2 - 3),$$

ze zbylých pak členů rovnice vychází

$$s' = \frac{3(r^6 - 3r^4 + 3r^2 - 1)}{r(r^6 + 10r^4 + r^2 + 4)}$$

a tedy

$$s = s' + \frac{1}{r} = \frac{4r^6 + r^4 + 10r^2 + 1}{r(r^6 + 10r^4 + r^2 + 4)}. \quad (8)$$

Z rovnic (5), (6), (7) plyne

$$x = r^7 + 8r^6 - 17r^5 + 2r^4 - 17r^3 + 20r^2 + r + 2,$$

$$y = r^7 - 8r^6 - 17r^5 - 2r^4 - 17r^3 - 20r^2 + r - 2,$$

$$z = 2r^7 + r^6 + 20r^5 - 17r^4 + 2r^3 - 17r^2 + 8r + 1,$$

$$u = -2r^7 + r^6 - 20r^5 - 17r^4 - 2r^3 - 17r^2 - 8r + 1,$$

a zavedeme-li $r = a/b$ (a, b celá čísla) a homogenisujeme-li,*) obdržíme řešení p. prof. Vl. Kučery (Rozhledy, roč. 9, 1930, čís. 2).

Jestliže dále ve (III) položíme $s = s' + \frac{1}{r}$, pak $A = \mu s'^2 +$

$+ \nu s' + \frac{r^2-1}{r}$, anulujeme rovnici tak vzniklou a položíme

*) T. j. výrazy pro x, y, z, u učiníme celistvými homogenními.

rovný 0 koeficienty při s' a s'^2 , určíme tím

$$\nu = \frac{r^2 - 3}{2}, \quad \mu = \frac{(3 - 18r^2 - r^4)r}{8(r^2 - 1)},$$

ze zbylých pak členů rovnice vypočteme

$$s' = \frac{8(r^8 - 18r^6 + 18r^2 - 1)}{r(r^8 + 100r^6 + 190r^4 - 44r^2 + 9)}$$

a tedy

$$s = s' + \frac{1}{r} = \frac{9r^8 - 44r^6 + 190r^4 + 100r^2 + 1}{r(r^8 + 100r^6 + 190r^4 - 44r^2 + 9)}. \quad (9)$$

Z rovnic (5), (6), (7) vychází

$$\begin{aligned} x &= r^{13} + 27r^{12} - 214r^{11} - 186r^{10} - 2481r^9 + 861r^8 - 2804r^7 - \\ &\quad - 972r^6 - 2481r^5 - 27r^4 - 214r^3 + 294r^2 + r + 3, \\ y &= r^{13} - 27r^{12} - 214r^{11} + 186r^{10} - 2481r^9 - 861r^8 - 2804r^7 + \\ &\quad + 972r^6 - 2481r^5 + 27r^4 - 214r^3 - 294r^2 + r - 3, \\ z &= 3r^{13} + r^{12} + 294r^{11} - 214r^{10} - 27r^9 - 2481r^8 - 972r^7 - \\ &\quad - 2804r^6 + 861r^5 - 2481r^4 - 186r^3 - 214r^2 + 27r + 1, \\ u &= -3r^{13} + r^{12} - 294r^{11} - 214r^{10} + 27r^9 - 2481r^8 + 972r^7 - \\ &\quad - 2804r^6 - 861r^5 - 2481r^4 + 186r^3 - 214r^2 - 27r + 1, \end{aligned}$$

kde lze opět zavést $r = a/b$ (a, b celá čísla) a výrazy učiniti celistvými homogenními.

Toto řešení podává výsledky obecně různé od výsledků řešení předcházejícího, jak snadno plyne ze srovnání (8) a (9).

III. Označme s_0 výraz $1/r$, nejjednodušší to řešení rovnice (III) (jenže triviální), pak s_1 řešení v (8). Položíme-li ve (III') $s = s' + s_1$, můžeme postupovati jako dříve a obdržíme další řešení s_2 , na základě tohoto pak s_3 atd. do nekón. Snadno lze ukázati, že $s_k \neq s_l$, když $k \neq l$, vyjma nanejvýš pro několik zvláštních hodnot r , racionálních to kořenů rovnice $s_k = s_l$, ačli takové kořeny vůbec existují (nehledě ke společnému kořenu všech těch rovnic $r = 1$).

Obdobnou nekonečnou řadu částečných, od sebe různých řešení (III) obdržíme, vyjdeme-li od $1/r$ jakožto prvního a výrazu v (9) jakožto druhého členu.

Ve (III) a rovněž ve (III') můžeme také klásti (kromě $s = s' + 1/r$ nebo obecněji $s = s' + s_k$) za A racionální lomenou funkci arg. s' . Na př.

$$A = \frac{\left(\frac{r^3}{r^2 - 1} s' + 1\right) \left[\mu s'^2 + \nu s' + \frac{r^2 - 1}{r} \right]}{1 + \delta s'}$$

Koeficienty μ, ν, δ určíme opět anulováním koef. při s', s'^2, s'^3 a ze zbylých členů rovnice vypočteme posléze s . Tento výraz však jest 18. stupně v r v čitateli a 19. stupně ve jmenovateli, proto jej pro jeho složitost neuvádím.

Konstrukce paraboly ze dvou bodů a osy.

Prof. Ladislav Klír.

Úloha sestrojiti parabolu ze dvou daných bodů a osy,*) máme-li užítí vztahů plynoucích jen z její definice — (jako geometrického místa bodů stejně vzdálených od pevného bodu a pevné přímky) — vyžaduje najítí takové dvě kružnice, mající v daných bodech svoje středy, jež by se protály zrovna na ose (v ohnisku paraboly F), a jejichž společná tečna by byla kolmá k dané ose (co přímka řídící: viz obr. 1). Tedy jest vlastně vyhledati průsečík dané osy paraboly s geometrickým místem průsečíků dvou kružnic o pevných středech, jichž společné tečny mají konstantní směr.

Abys však společné tečny oněch kružnic byly navzájem rovnoběžné, jest třeba, aby rozdíl poloměrů příslušných kružnic byl stálý a rovnal se ortogonálnímu průmětu vzdálenosti bodů AB do osy paraboly ($2a$).

Proto možno též říci, že hledáme geometrické místo průsečíků dvou kružnic o pevných středech, jichž rozdíl poloměrů jest stálý.

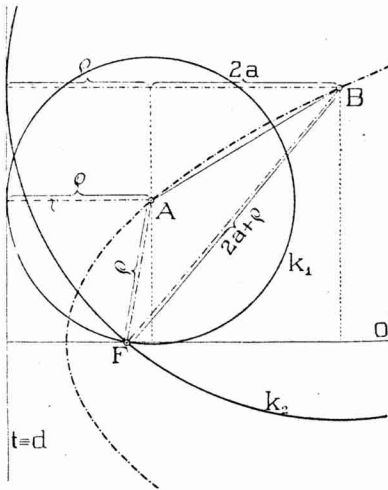
Vrátíme-li se k původní úloze, máme naléztí geometrické místo ohnisek všech parabol, jež procházejí dvěma danými body a jejichž osa má daný směr.

Abychom analyticky odvodili, co jest geometrickým místem průsečíků dvou kružnic o pevných středech, jichž rozdíl poloměrů jest stálý, volme (viz obr. 2) na ose x souměrně podle počátku středy kružnic $S_1(-m, 0)$, $S_2(m, 0)$. Proměnný poloměr jedné kružnice označme ϱ , pak poloměr druhé jest $\varrho + 2a$, když stálý rozdíl poloměrů má hodnotu $2a$; jest tedy libovolná dvojice kružnic dána rovnicemi:

$$k_1 \equiv (x + m)^2 + y^2 = \varrho^2, \quad (1)$$

$$k_2 \equiv (x - m)^2 + y^2 = (\varrho + 2a)^2. \quad (2)$$

Vyloučením proměnného ϱ dospějeme k rovnici hledaného geometrického místa



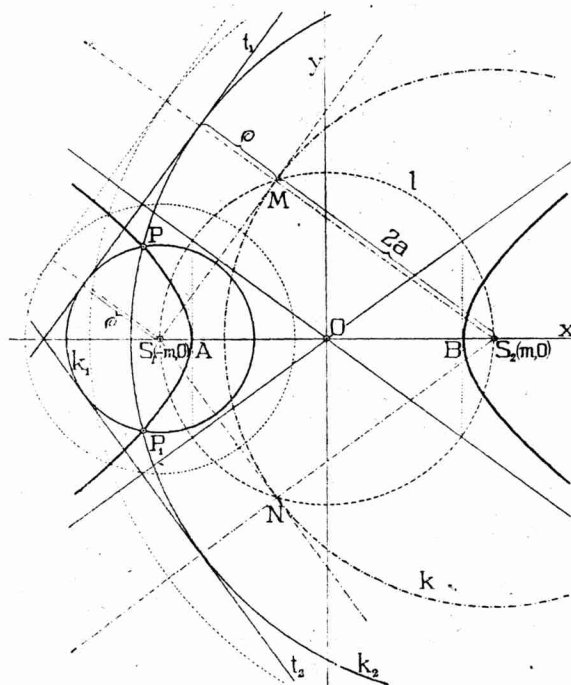
Obr. 1.

*) Viz též čl. dr. A. Pleskota, Rozhledy roč. X, str. 10.

či jinak

$$(m^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(m^2 - a^2),$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{m^2 - a^2} = 1. \quad (3)$$



Obr. 2.

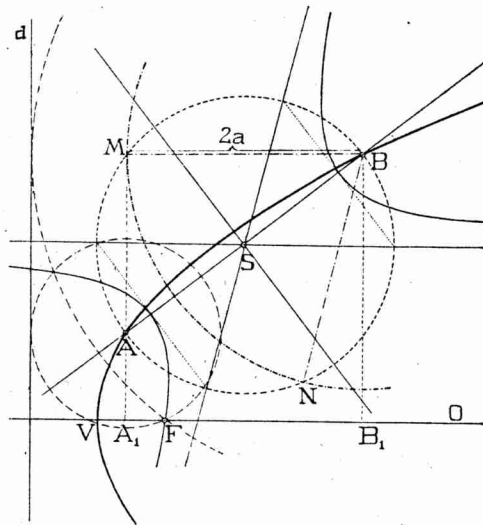
Jest to hyperbola o poloosách a , $\sqrt{m^2 - a^2}$ a výstřednosti délkové $e = m$, z čehož následuje, že ohniska hyperboly splývají se středy kružnic s_1, s_2 , hlavní osa její rovná se stálému rozdílu poloměrů; asymptoty mají směrnice $k_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{m^2 - a^2}}{a}$ a pohněvadž společné tečny kružnic mají směrnice $k'_{1,2} = \mp a\sqrt{m^2 - a^2}$, značí to, že asymptoty hyperboly jsou kolmé ke společným tečnám kružnic.

Asymptoty jsou též rovnoběžné se spojnicemi S_2M, S_2N , kde M, N jsou průsečíky kružnice l , opsané nad S_1S_2 jako nad průměrem, a kružnice k , opsané ze středu S_2 poloměrem $2a$. (Totéž platí ovšem i pro střed S_1 .)

Dospíváme k výsledku:

Geometrickým místem průsečíků dvou kružnic o pevných středech, majících rozdíl poloměrů stálý, jest hyperbola, která má ohniska ve středech kružnic, hlavní její osa rovná se stálému rozdílu poloměrů kružnic a asymptoty jsou kolmé ke společným tečnám kružnic.

A pro naši původní úlohu vyplývá:



Obr. 3.

Geometrickým místem ohnisek všech parabol, jež procházejí dvěma danými body a mají stálý směr osy, jest hyperbola, která má ohniska v daných bodech, jejíž hlavní osa má délku rovnou ortogonálnímu průmětu vzdálenosti obou bodů do směru os parabol a jejíž jedna asymptota je rovnoběžná s daným směrem.

V obr. 3 jest provedena konstrukce paraboly ze dvou bodů A, B a osy o užitím vpředu vyvozené věty. Jest třeba jen sestrojiti hyperbolu a určití její průsečík s osou paraboly (hledané ohnisko F); poněvadž jedna asymptota jest s osou paraboly rovnoběžná, jest úloha jednoznačná. Bližší patrno z obrazce.

Tato konstrukce jest ovšem složitější než ona, jež se zakládá na polárních vlastnostech křivky, kde užíváme jen pravítka a kružítko, ale tato vychází pouze z definice paraboly.

O elektronových lampách, používaných v přijimačích, se zřetelem k jejich vývoji a zdokonalování.

Bohuslav Pavlík.

Část I.

Úvod. Dnešní rozvoj dorozumivací techniky na vzdálenost je umožněn v první řadě konstrukcí kvalitních zesilovačů. Hlavní jejich součástí, stejně jako hlavní součástí vysílačů jsou elektronové lampy. Elektronová lampa je dnes nezbytnou pomůckou při zesilování, výrobě kmitů, usměrňování, demodulaci i příjmu netluměných oscilací heterodynovou metodou.

Edison již r. 1884 zjistil, že ve vyčerpané baňce elektrické žárovky může procházeti elektrický proud od studené elektrody, do baňky zatavené, směrem k vlákně, když vlákno svítí; opačným směrem proud neprochází. Wehnelt (1903) použil tohoto zjevu pro konstrukci usměrňovače. Fleming (1904) první použil elektronové lampy jako detektoru. Robert v. Lieben (1906) sestrojil první elektronové relé; on a před ním již Fleming používali v lampě mřížky. První zesilovače pocházejí z r. 1906 (v. Lieben, de Forest), vysokofrekvenční zesilovač sestrojil v. Bronck (1911). První pokusy o využití výbojové dráhy pro výrobu oscilací pocházejí od Ruhmera a Piepera (1904) a dále od Vreelanda (1905). V praxi dnes používané spojení pochází od dra Meissnera (1913). Zásluhou Meissnerovou je, že dovedl využití a správně postřehl význam již známého principu zpětné vazby. Touž myšlenku si dal patentovati o čtyři měsíce dříve v Rakousku Siegmund Strauss, spolupracovník Liebenův. O prioritu hlásí se též de Forest, který se odvolával na pískání, jež pozoroval u lamp a jež je způsobeno vznikem oscilací, dále Armstrong, kterému byla na základě svědectví jeho tchána přiznána ve Spojených státech severoamerických priorita vynálezu audionu se zpětnou vazbou, a Langmuir, jehož priorita vynálezu je pozdějšího data než vynálezu Meissnerova. Myšlenka heterodynního příjmu pochází od Fessendena (1905). Zmenšení (redukce) útlumu dosahoval audionem se zpětnou vazbou Franklin.

Tím jsem v hrubých rysech popsal, jak se vyvíjelo použití elektronových lamp od prvních počátků. V dalším šel vývoj k jejich zdokonalení. Do baňky zatavovány další elektrody (tetrody, pentody, hexody, pentagrid converter) a lampové systémy vzájemně kombinovány v jedné baňce po případě i s vazbovými elementy (Loewe, binoda). Katoda upravována, aby vzrostla emise a aby bylo možno použití k zahřívání střídavého proudu. Vhodnou úpravou elektrod působeno na průběh charakteristiky (lampa s proměnnou strmostí, selektoda).

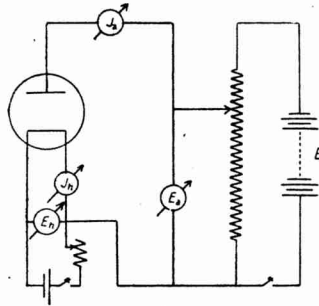
V dalším přihlídneme k elektronovým lampám, pokud se jich používá v přijimačích.

Definice elektronové lampy. Dioda. Elektronová lampa sestává z jedné žhoucí elektrody (katody) a jedné nebo více studených elektrod; vše je zataveno v evakuované baňce. Tlak plynu v baňce je takový, že nemůže za studena nastati v baňce výboj. U novějších druhů přijímacích lamp (catkin) a u větších vysílacích lamp jedna z elektrod (anoda) tvoří přímo část baňky. Katoda za vyšší teploty emituje elektrony, ostatní elektrody řídí jejich pohyb.

V kovových vodičích se pohybuje velký počet volných elektronů mezi pevnými molekulami stále sem a tam; při tom mají všechny možné rychlosti v , jež se kupí kol jisté střední rychlosti v_0 , jež závisí na absolutní teplotě kovu T .

S teplotou roste střední rychlost elektronů. Při jisté teplotě je kinetická energie elektronů tak velká, že se elektrony počnou uvolňovati s povrchu katody, kov počne emitovati elektrony. Tento zjev lze srovnati s varem kapaliny. Množství elektronů I_s , „vypařených“ z plošné jednotky katody při teplotě T (abs.) je určeno vztahem Dushmanovým

$$I_s = AT^2 e^{-\frac{B}{T}}$$



Obr. 1.

(A je konstanta pro čisté kovy = 60,2 A/(cm/grad)², B je konstanta závislá na materiálu). I_s je maximální proud, připadající na plošnou jednotku katody, který za daných poměrů (daného T) může lampou procházeti; největší proud, který celkem za daných poměrů může lampou procházeti, se nazývá nasycený proud a značí se také I_s .

Představme si, že elektronová lampa obsahuje jen jednu další (studenou) elektrodu, jež obklopuje katodu. Taková lampa se nazývá dioda. Provedeme-li spojení podle obr. 1, pozorujeme, že při stálém topném napětí E_h roste anodový proud I_a s rostoucím anodovým napětím E_a až do jisté největší hodnoty $I_a = I_s$ (na př. křivka I v obr. 2). Křivky vyjadřující závislost anodového proudu protékajícího diodou na anodovém napětí slují charakteristiky diody (obr. 2). Největší hodnota anodového proudu I_s je t. zv. nasycený proud; příslušné anodové napětí $E_a = E_s$ je sytící napětí. Jednotlivé křivky (anodové charakteristiky diody) obr. 2 odpovídají různým teplotám katody.

Obrátili-li bychom polaritu baterie E , nepoteče diodou prakticky žádný proud, bylo-li anodové napětí větší (v záporných hodnotách) než -2 V.

Podíl

$$H = \frac{I_s}{E_h I_h} \quad (I_s \text{ v mA, součin } E_h I_h \text{ ve wattech)}$$

sluje míra topení; je to nasycený proud, připadající na 1 watt spotřeby v topném kruhu lampy.

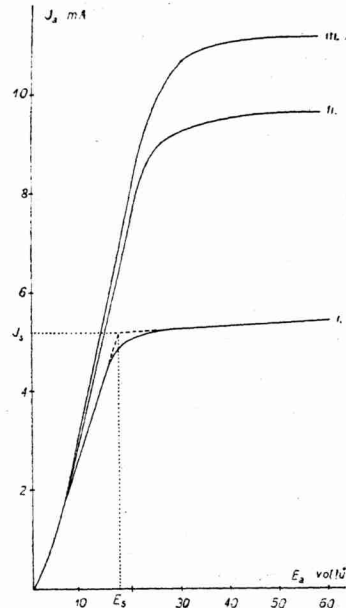
Okolnost, že anodový proud nestoupne při vzrůstajícím kladném anodovém napětí hned na maximální hodnotu I_s , vysvětlujeme existencí t. zv. prostorového náboje. Elektron, letící od katody, v důsledku svého negativního náboje brání novým elektronům v cestě k anodě. Teprve, je-li elektrické pole od anody dosti silné, strhnou se prakticky všechny elektrony, emitované katodou, k anodě (vzniká nasycení).

V oboru, kde se uplatňuje vliv prostorového náboje, platí nezávisle na teplotě katody zákon Langmuir-Schottkyho

$$I_a = k E_a^{3/2} \quad (\text{pro } 0 < E_a < E_s). \quad (1)$$

Směrnice tečny charakteristiky v některém jejím bodě se nazývá strmostí charakteristiky. Tuto strmost zmenšuje prostorový náboj, jakož i spád napětí na topném vlákně (katodě).

Ze vzorce (1) by plynulo, že $I_a = 0$, když $E_a = 0$. Ve skutečnosti pro $E_a = 0$ jest $I_a \neq 0$. Tato okolnost je způsobena tím, že elektrony nevystupují z katody s nulovou rychlostí. Potenciál V je definován prací, kterou je nutno vynaložiti při přenosu pozitivního jednotkového náboje z nekonečna do daného bodu. Přenes-li se elektron, vykoná se práce eV . Proběhl-li původně klidný elektron potenciálním rozdílem V , nabyl rychlosti v , takže jeho kinetická energie stoupla na $\frac{1}{2}mv^2$. Na základě vztahu



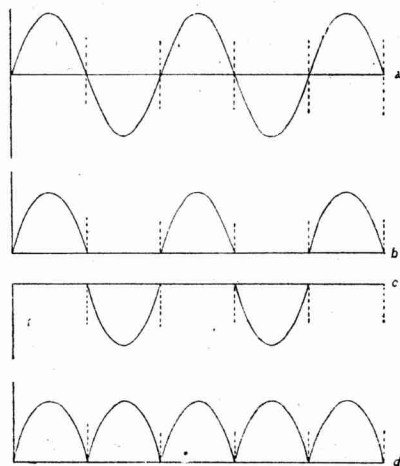
Obr. 2.

Charakteristiky $I_a = f(E_a)$ diody s wolframovým vláknem (u franc. lampy à corne spojena anoda s mřížkou): I. $E_h = 2,52$ V, $I_h = 2,012$ A; II. $E_h = 2,7$ V, $I_h = 2,09$ A; III. $E_h = 2,755$ V, $I_h = 2,114$ A.

$$eV = \frac{1}{2}mv^2$$

je patrné, že lze rychlost elektronu vyjadřovati také ve voltech potenciálního spádu, jímž by elektron musel proběhnouti, aby nabyl své rychlosti („elektron-volt“). Většina elektronů vystupuje z katody s rychlostí 0,2 elektron-voltu, t. j. tyto elektrony jsou s to ještě doběhnouti na elektrodu, jež má záporný potenciál 0,2 voltu. Naproti tomu již téměř žádné elektrony nevystupují s rychlostí 2 elektron-voltů. Má-li tedy pomocná elektroda v lampě větší záporný potenciál vůči katodě než -2 volty, prakticky žádný elektron k ní nedospěje. Pro anodový proud v oboru záporných napětí na pomocné elektrodě v diodě platí vztah

$$I_a = I_s e^{\frac{E_a}{E_T}} \quad (\text{pro } E_a < 0).$$



Obr. 3.

I_s značí v tomto případě nasycený proud, odpovídající teplotě T ; E_T souvisí s teplotou katody. Vzorec předpokládá, že vliv topného proudu na pohyb elektronů je zanedbatelně malý. Také se zde nepřihlíží k vlivu „kontaktního potenciálu“ mezi katodou a anodou.

Dioda jako usměrňovač. Dioda vede proud jedním směrem. Vložíme-li mezi žhavou (katodu) a studenou elektrodu (anodu) diody střídavé napětí, prochází proud pouze v časovém intervalu,

kdy je studená elektroda (anoda) na pozitivním potenciálu. Diody lze tedy používati k přeměně střídavého proudu na proud stejnosměrný (pulsující), z něhož lze pomocí tlumivek a kapacit oddělit (eliminovati) střídavou složku, takže stálé složky lze pak účelně použítí (eliminátor).

Má-li dioda pouze jednu anodu, mluvíme o jednocestném usměrňování (obr. 3a, b); proud protéká pouze během půl periody. Použije-li se dvou anod a jedné nebo dvou katod, lze vhodným spojením transformátoru se středním vývodem dosáhnouti toho, že proud prochází v obou půlperiodách (obr. 3b, c), takže ve společné části vedení je proudová křivka tvaru podle obr. 3d. Mluvíme o dvoucestném usměrňování.

Dioda jako demodulátor. Ve vlastním přijímači rozezná-

váme tři hlavní části: vysokofrekvenční zesilovač, usměrňovač (detektor) a nízkofrekvenční zesilovač.

J. A. Fleming (1905) zjistil, že lze použít jako indikátoru oscilací (detektoru) žárovky, do jejíž baňky je zatavena pomocná elektroda (dioda). A. Wehnelt (1906) používal k témuž účelu lampy jím konstruované, jež obsahovala žhoucí katodu, potaženou kyslíč-níkem alkalických zemin, a jako anodu dutý hliníkový válec.

V rozhlasových přijímačích se však používalo k demodulaci (přeměně vysokofrekvenčních modulovaných proudů na proudy střídavé, modulační frekvence) téměř výhradně triod; dosáhlo se tím vedle demodulace i zesílení. Používalo-li se triody jako t. zv. anodového usměrňovače, dosáhlo se vysokofrekvenčního zesílení a současně demodulace, používalo-li se triody v zapojení audionovém (mřížkový usměrňovač), dosáhlo se současně demodulace a nízkofrekvenčního zesílení. To bylo v dobách, kdy zesílení dosažené jedním stupněm (lampou) nebylo příliš veliké; proto se přihlíželo k tomu, aby každá lampa zesilovala. Ke zvětšení zesílení v demodulačním stupni sloužila i zpětná vazba.

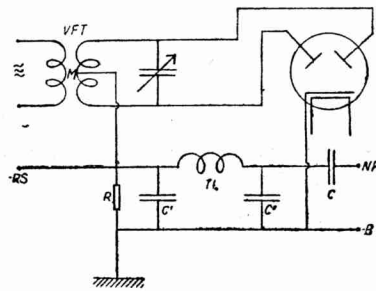
V moderních přijímačích se nepoužívá zpětné vazby. K demodulaci slouží dioda. Dioda ovšem nezesiluje. Používá se jí všude, kde jde o demodulaci s co nejmenším zkreslením.

Katoda diody je spojena se záporným pólem anodové baterie a představuje kladný pól usměrněného napětí, které je zatíženo odporem R . Vedení — RS (záporný pól napětí regulujícího hlasitost reprodukce) vede tedy záporné napětí vzhledem k zápornému pólu anodové baterie, jehož velikost závisí na amplitudě vkládaného vysokofrekvenčního napětí. Napětí — RS lze použít k regulaci předpětí lampy s exponenciální charakteristikou, které se používá ve vysokofrekvenčním stupni přijímače. Blíže bude vysvětlena funkce této lampy později. Bylo-li vkládané vysokofrekvenční napětí modulováno, překládá se přes stejnosměrné napětí na odporu R napětí střídavé, modulační frekvence; tuto střídavou složku lze převést kondensátorem C k nízkofrekvenční zesilovací části přístroje. Z regulujícího napětí — RS pro lampu s exponenciální charakteristikou je nutno vyfiltrovat střídavou složku. Kondensátor C' přemostuje odpor R pro vysokou frekvenci, tlumivka Tl a kondensátor C'' brání vysoké frekvenci ve vstupu do nízkofrekvenční části zařízení. T. zv. duplex-diody slouží k dvojcestnému usměrňování (obr. 4). Lze ovšem použít také každé diody separátně: jedné k demodulaci, druhé k získání předpětí pro regulaci hlasitosti. Nebo lze obě diody spojit vedle sebe.

Jak jsme řekli, dioda nezesiluje. Doporučuje se jí tedy kombinovat ještě na př. s triodou nebo stíněnou lampou v jedné baňce (*duplex-dioda-trioda*, *binoda*). Výsledkem je lampa-dvojče. V binodě je kolem dolní části katody stíněné lampy umístěn

prsten, dobře odstíněný od ostatních částí lampy, jenž tvoří anodu usměrňující diody; přívod k němu je vyveden k jedné ze šesti nožiček soklu. Duplex-diody-trioda obsahuje dvě úplně nezávislé diody spolu s triodou v jedné baňce. Tyto diody mohou sloužit jedna k detekování a druhá pro automatickou regulaci síly zvuku, nebo obě mohou sloužit dvojcestnému usměrňování.

O materiálu elektrod. Katoda elektronové lampy může býti dvojího druhu: 1. přímo žhavená katoda (stručně „vlákno“) je drát



Obr. 4.

ohříváný průchodem proudu; tento drát za vyšší teploty emituje elektrony; 2. nepřímo žhavená katoda je kovový váleček, opatřený povlakem z látky emitující elektrony, vyhříváný izolovaně uvnitř umístěným topným tělískem.

Původně byly vyráběny katody přímo žhavené, a to z wolframu; nevýhodou wolframu byla ovšem veliká spotřeba energie v topném kruhu. Značné úspory se dosáhlo thoriovanými vlákny

wolframovými; wolframové vlákno bylo vhodným formováním pokryto monomolekulární vrstvou thoria, jež uvolňuje elektrony při nižší teplotě (vykazuje menší výstupní práci). Emisní schopnost vlákna těchto lamp lze regenerovat. Ještě větší úspory v topném kruhu se dosáhlo používáním katod z niklové slitiny, pokryté na povrchu vrstvou kyslíčků alkalických zemin. Také u lamp nepřímo žhavených je vlastní katoda pokryta vrstvou těchto kyslíčků. U nepřímo žhavených lamp se nehledí na spotřebu energie v topném kruhu, ale na to, aby katoda mohla být vyhřívána střídavým proudem. Katoda lamp nepřímo žhavených je ekvipotenciální plocha.

Maximální výkon střídavé složky proudu, který protéká anodovým odporem, roste s energií, která se může ve formě tepla beze škody pro životnost lampy uvolnit na anodě dopadem elektronů. U lamp vzduchem chlazených jsou ztráty na anodě vyzařovány ve formě tepla skleněnou baňkou do okolního prostoru. Energie vyzařovaná je přibližně úměrná čtvrté mocnině teploty. Bylo by tedy žádoucí pracovat s anodou co možná vysoké teploty. Ježto při této vysoké teplotě nastávají různé rušivé zjevy (uvolňování plynů a pod.), bylo shledáno málo látek za vhodný materiál pro hotovení anod.

O vhodnosti materiálu pro hotovení anod rozhoduje množství a jakost materiálem okludovaných plynů a snadnost, s níž lze onen

materiál plynů zbaviti. Uvolní-li se totiž během provozu v lampě plyn, jonisuje se nárazem elektronů na molekuly. Uvolněné kladné jonty neutralisují prostorový náboj a působí vzrůst anodového proudu a tím živější uvolňování plynů. Pochod se snadno stane kumulativní a může vésti ke vzniku obloukového výboje a tím ke zničení lampy.

Druh okludovaných plynů je důležitý v případě, že se v lampě používá thoriované wolframové katody. Wolfram v tomto případě je pokryt jednoatomovou vrstvou thoria. Stopy kyslíku vedou k oxidaci thoria a tím ke zničení emise katody. Tato vrstva se také rozrušuje dopadem pozitivních jontů. Lehké plyny (vodík, helium) jsou méně nebezpečné u srovnání s těžšími (rtuťové páry).

Dále je žádoucí, aby anoda snadno vyzařovala teplo, neboť pak může být malá a tím se zmenší i vzájemná kapacita elektrod. Aby anoda snadno vyzařovala teplo, byl zvětšován její povrch, po případě povlákána uhlíkem (černé těleso).

Materiál anody musí být také pevný a, musí se dáti snadno opracovati. Napětí par materiálu anody musí být dosti nízké, aby se neusazovala vodivá vrstvička na izolátorech v lampě. Vrstvička na baňce pak způsobuje, že sklo má vysokou teplotu a snadno praská.

Materiál anody musí být také elektricky dobře vodivý, aby nenastávaly podstatné ztráty v důsledku špatné vodivosti.

Pro hotovení anod se hlavně používá molybden, tantalu a niklu. Nejvíce je rozšířeno používání molybdenu. (Spitzer, Proc. Inst. R. E. 1077, 21, 1933.)

V novější době doporučují v Americe hotoviti anody z grafitu. Některé z nejlepších druhů umělého grafitu obsahují až desetinásobný objem okludovaného plynu, než obsahuje molybden. Vhodným zpracováním lze tento obsah snížit dříve, než se anoda vloží do budoucí lampy. Pak čerpání lampy trvá stejně dlouho, jako když se použije molybdenové anody.

Podle úpravy povrchu grafitové anody lze dosáhnouti toho, že schopnost tepelné emise obnáší až 90% schopnosti černého tělesa.

Nevýhodou je poměrná křehkost grafitu; proto síla anody se volí aspoň $\frac{1}{16}$ palce. Tím se dosáhne současně lepšího rozvádění tepla po anodě.

Celkem se grafitové anody osvědčily a snad bude jejich výroba i levnější než anod molybdenových.

Trioda. Vložíme-li mezi anodu diody a katodu další (studenou) elektrodu ve formě mřížky (síťky), vznikne trioda (tři elektrody, při čemž nepočítáme eventuelní vodič, vyhřívající katodu). Je patrné, že proud emisní (t. j. celkový proud emitovaných elektronů)

I_e se rozdělí na anodový proud I_a a proud mřížkový I_g

$$I_e = I_a + I_g.$$

Je současně zřejmo, že anodový proud bude ovlivňován nejen napětím na anodě, nýbrž i napětím na mřížce. V teoretických úvahách lze nahraditi triodu diodou, která má anodu v místě mřížky triody a na níž je t. zv. ekvivalentní napětí (prvního druhu) E_{st_1} ; v tomto napětí se bude mřížkové napětí E_g uplatňovati plně, napětí anodové E_a pak jen z části

$$E_{st_1} = E_g + DE_a.$$

D je t. zv. průnik lampy (vyjadřuje se v procentech). Ježto zde jde o počet siločar, pronikajících z anody mřížkou k vláknu, je patrné, že D je poměr kapacit anody a mřížky vůči vláknu.

Stejně však lze nahraditi vzhledem k emisnímu proudu triodu diodou, která má anodu v místech anody triody a na níž působí ekvivalentní napětí (druhého druhu)

$$E_{st_2} = D'E_g + E_a.$$

Činitel D' budeme nazývati reciprokový průnik (Zurückgriff, Barkhausen). S touto druhou náhradou se setkáme při tetrodě.

Volíme-li $E_g < -2$ volty, je patrné z toho, co jsme řekli u diody, že $I_g = 0$ a že tedy $I_e = I_a$. Tento případ je důležitý, používá-li se elektronové lampy jako zesilovače. Při zesilování se žádá, aby změny anodového proudu byly úměrné změnám zesilovaného napětí (napětí mřížkového). Toho se dosáhne za jinak příznivých okolností jen tehdy, když mřížkový kruh lampy není zatížen ($I_g = 0$); jinak nastává zkreslení.

Emisní (a v oboru záporného mřížkového napětí anodový) proud závisí na mřížkovém i anodovém napětí. Zmíněné t. zv. ekvivalentní napětí (není-li zvláštní zmínky, míní se vždy ekvivalentní napětí prvního druhu) zastupuje anodové napětí a emisní proud anodový proud ekvivalentní (náhradní) diody.

U triody (a vůbec u vícemřížkových lamp) známe t. zv. mřížkové a anodové charakteristiky. Mřížkové charakteristiky jsou křivky, vyjadřující závislost anodového proudu na mřížkovém napětí; parametrem je anodové napětí (t. j. anodové napětí je vždy pro určitou křivku grafu stálé, mění se však při přechodu k jiné křivce) (obr. 5). Anodové charakteristiky vyjadřují závislost anodového proudu na anodovém napětí; parametrem je mřížkové napětí. Abychom mohli stanoviti mřížkové charakteristiky triody, provedeme spojení podle obr. 6.

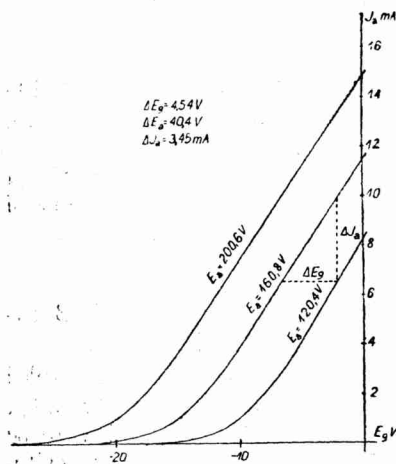
Mřížkové charakteristiky, odpovídající různým anodovým napětím, jsou co do tvaru stejné, s rostoucím anodovým napětím se rovnoběžně posouvají směrem záporné osy napětí.

Pro triodu jsou důležité tři t. zv. její konstanty; v oboru $E_g < 0$ jsou definovány takto:

1. strmost (mutual conductance, transconductance) S

$$S = \left(\frac{\partial I_a}{\partial E_g} \right)_{E_a} \quad (2)$$

jež je směrnici tečny charakteristiky;



Obr. 5.

Mřížkové charakteristiky lampy RE 134. Z trojúhelníku, v obrázku vyznačeného, vycházejí konstanty lampy:

$$S = \left(\frac{\Delta E_a}{\Delta I_a} \right)_{E_g} = \frac{3,45}{4,44} = 0,76 \text{ mA-volt,}$$

$$D = \left(\frac{\Delta E_g}{\Delta E_a} \right)_{I_a} = \frac{4,54}{40,4} = 11,2\%,$$

$$R_i = \left(\frac{\Delta E_a}{\Delta I_a} \right)_{E_g} = \frac{40,4}{3,45} \cdot 10^3 = 11.700 \Omega.$$

Dosazením do Barkhausenovy rovnice (5) obdržíme $SDR_i = 0,996 \pm 1$.

2. průnik D

$$D = - \left(\frac{\partial E_g}{\partial E_a} \right)_{I_a} \quad (3)$$

udávající, do jaké míry se uplatňuje anodové napětí v napětí ekvivalentním (prvního druhu). T. zv. zesilovací činitel (amplification factor) μ je převrácená hodnota průniku

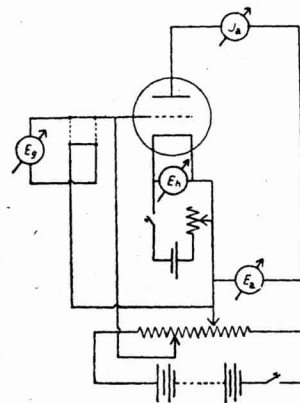
$$\mu = 1/D;$$

3. (dynamický) vnitřní odpor R_i je definován vztahem

$$R_i = \left(\frac{\partial E_a}{\partial I_a} \right)_{E_g} \quad (4)$$

Všechny tři konstanty jsou vázány vzájemně vztahem Barkhausenovým (vnitřní lampová rovnice)

$$SDR_i = 1. \quad (5)$$



Obr. 6.

Pro četné úvahy týkající se střídavých proudů je výhodné znáti t. zv. náhradní schema triody.

Podle definice strmosti (2) proudová změna di_a je úměrná změně napětí de_g . Změna proudová sleduje změnu napětí prakticky okamžitě, ježto jde o elektronový výboj. Předpokládáme-li, že mřížkové napětí se mění periodicky kol jistého klidového napětí E_g

$$e_g = \mathcal{E}_g \sin \omega t$$

a že není v anodovém kruhu zařazen odpor, překládá se přes klidový anodový proud I_a složka střídavá

$$i_a = \mathfrak{I}_a \sin \omega t,$$

při čemž platí

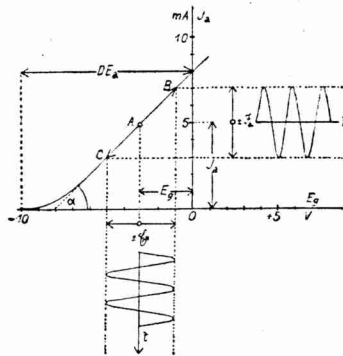
$$i_a = S e_g$$

a tedy pro vrcholové hodnoty (amplitudy)

$$\mathfrak{I}_a = S \mathcal{E}_g$$

(viz obr. .7).

V anodovém kruhu nejsou poměry ovšem tak jednoduché; bývá tam zařazen odpor \mathfrak{R}_a (na př. transformátor). Pokud předpokládáme malé amplitudy, t. j. pokud lze charakteristiku po-



Obr. 7.

kládati za přímkovou, superponují se střídavé a stejnosměrné složky jednoduchým způsobem. Stejnosměrná napětí E_g a E_a zajímají nás jen potud, abychom nastavili vhodný pracovní bod (A) na charakteristice.

Mřížkové napětí \mathcal{E}_g vyvolává obecně mřížkový proud \mathfrak{I}_g a anodové napětí \mathcal{E}_a . Komplikace prvního druhu se zbavíme jednoduše vhodnou volbou záporného mřížkového předpětí tak, aby bylo co do absolutní hodnoty větší než amplituda střídavého napětí na mřížce; pak $\mathfrak{I}_g = 0$.

Mřížkové napětí \mathcal{E}_g způsobí změnu anodového proudu \mathfrak{I}_a , takže anodové napětí poklesne o $\mathcal{E}_a = -\mathfrak{R}_a \mathfrak{I}_a$. Není-li odpor \mathfrak{R}_a ryze ohmický, nastává fázové posunutí mezi \mathcal{E}_a a \mathfrak{I}_a . Ježto anodový proud je řízen nejen mřížkovým, nýbrž i anodovým napětím, je patrné, že vliv napětí mřížkového je zmenšen o

$$D\mathcal{E}_a = -D\mathfrak{R}_a \mathfrak{I}_a;$$

mluvíme o t. zv. zpětném působení anody na mřížku. Je patrné, že platí

$$\mathfrak{I}_a = S \mathcal{E}_{st} = S (\mathcal{E}_g + D\mathcal{E}_a) = S \mathcal{E}_g - S D\mathfrak{R}_a \mathfrak{I}_a;$$

odtud

$$\mathfrak{I}_a = \frac{S\mathfrak{E}_g}{1 + DS\mathfrak{R}_a} = \frac{\mathfrak{E}_g}{D} \cdot \frac{1}{R_i + \mathfrak{R}_a} \quad (6)$$

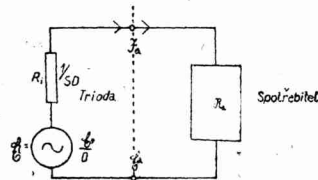
nebo

$$-\mathfrak{E}_a = \frac{\mathfrak{E}_g}{D} \cdot \frac{\mathfrak{R}_a}{R_i + \mathfrak{R}_a} \quad (7)$$

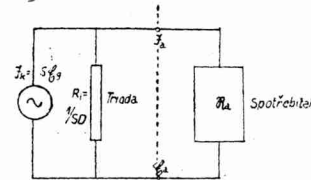
při tom jsme použili vztahu

$$R_i = 1/SD.$$

Jestliže $\mathfrak{R}_a = 0$, je $(\mathfrak{I}_a)_{\mathfrak{R}_a=0} = S\mathfrak{E}_g = \mathfrak{I}_k$ (proud na krátko). Jestliže $\mathfrak{R}_a = \infty$, čehož docílíme na př. velmi velkou tlumivkou v anodovém kruhu, je $\mathfrak{I}_a = 0$; pak $-(\mathfrak{E}_a)_{\mathfrak{R}_a=\infty} = \mathfrak{E}_g/D = \mathfrak{E}_l$ (napětí na prázdko).



Obr. 8.



Obr. 9.

Zesilovací lampu, na jejíž mřížku je vloženo střídavé napětí \mathfrak{E}_g , lze nahraditi [vzhledem k rovnici (6)] co do jejího chování vůči střídavému proudu na anodové straně generátorem o stálé elektromotorické síle $\mathfrak{E}_l = \mathfrak{E}_g/D$ a odporem R_i , zařazeným v serii (obr. 8) nebo generátorem o stálém proudu $\mathfrak{I}_k = S\mathfrak{E}_g$ a odporem zapojeným paralelně (obr. 9). R_i je ryzí ohmický odpor.

Z naší úvahy je patrné, že platí

$$\frac{1}{D} = \mu = \frac{\mathfrak{E}_l}{\mathfrak{E}_g}$$

μ udává, kolikrát je větší střídavé napětí vznikající v anodovém kruhu při běhu na prázdko než napětí vkládané na mřížku, t. j. udává velikost zesílení při běhu na prázdko (odtud název zesilovací činitel).

Pro zesilovací lampu je důležitá veličina

$$G_r = S/D = S\mu,$$

jež se nazývá kvalita lampy.

Z generátoru o stálé elektromotorické síle (v našem případě pro zesilovací lampu o elm. síle \mathfrak{E}_g/D) dostaneme největší výkon, když vnější odpor je roven vnitřnímu odporu generátoru:

za této podmínky platí $|\mathfrak{R}_a| = R_i$;

$$\begin{aligned} \text{pro } \varphi_a = 0^\circ & \quad \mathfrak{S}_a = \frac{1}{2}\mathfrak{S}_k, \quad \mathfrak{E}_a = \frac{1}{2}\mathfrak{E}_i; \\ \text{pro } \varphi_a = 90^\circ & \quad \mathfrak{S}_a = \sqrt{\frac{1}{2}}\mathfrak{S}_k, \quad \mathfrak{E}_a = \sqrt{\frac{1}{2}}\mathfrak{E}_i. \end{aligned}$$

Platí tedy pro maximální výkon

$$\mathfrak{N}_{a \max} = \frac{1}{2}\mathfrak{E}_a\mathfrak{S}_a = \frac{1}{8}\mathfrak{E}_i\mathfrak{S}_k = \frac{1}{8}\frac{\mathfrak{E}_g}{D}S\mathfrak{E}_g = \frac{S}{D}\frac{\mathfrak{E}_g^2 \text{eff}}{4} \quad \text{pro } \varphi_a = 0^\circ;$$

$$\mathfrak{N}_{a \max} = \frac{1}{2}\mathfrak{E}_a\mathfrak{S}_a = \frac{1}{4}\mathfrak{E}_i\mathfrak{S}_k = \frac{S}{D}\frac{\mathfrak{E}_g^2 \text{eff}}{2} \quad \text{pro } \varphi_a = 90^\circ.$$

Vidíme tedy, že

$$G_r = \frac{S}{D} = \frac{4\mathfrak{N}_{a \max}}{\mathfrak{E}_g^2 \text{eff}} \quad \text{pro } \varphi_a = 0^\circ,$$

nebo

$$G_r = \frac{S}{D} = \frac{2\mathfrak{N}_{a \max}}{\mathfrak{E}_g^2 \text{eff}} \quad \text{pro } \varphi_a = 90^\circ.$$

Kvalita lampy G_r je rovna čtyřnásobku (pro $\varphi_a = 0^\circ$) střídavého výkonu $\mathfrak{N}_{a \max}$, jež lze maximálně odbírat z lampy, přivádí-li se mřížce střídavé napětí $\mathfrak{E}_g \text{eff} = 1$ volt. Docílení tedy velkého zesílení výkonu znamená zvětšiti strmost a zmenšiti průnik D . Strmost obyčejné triody nelze hnáti příliš vysoko; doporučuje se tedy vhodnou úpravou mřížky dosáhnouti malé hodnoty D . Kdyby však v limitě $D=0$, pak při $E_g < 0$ by vůbec netekl anodový proud, který by byl řízen střídavým napětím na mřížce. Je patrné, že dosti velké anodové napětí musí svým působením pronikat do dosti velké míry záporně nabitou mřížkou, t. j. ekvivalentní napětí $E_{st} = E_g + DE_a$ musí býti kladné. Čím větší je E_{st} , tím lépe lze provéstí řízení anodového proudu. Průnik D má tedy vyhovovati dvěma vzájemně si odporujícím požadavkům: jednak má býti velký, aby posouvací napětí DE_a bylo dosti velké a jednak má býti současně malý, aby kvalita lampy byla velká; je-li průnik malý, je zpětné působení anody na mřížku $D\mathfrak{E}_a$ také malé.

Druhá část (lampy vícemřížkové) vyjde v příštím čísle Rozhledů.

PŘEHLED.

Drobnosti. Některé hodnoty goniometrických funkcí lze srovnati v zajímavé řady. Tak na př. Jaeckels v Math. Unterrichtsbl. 1911 uvádí tyto hodnoty:

Rozhledy matematicko-přirodovědecké. Ročník 13.

$$\begin{aligned} \sin 0^\circ &= \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{4}} & \sin 60^\circ &= \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{1}} \\ \sin 15^\circ &= \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{3}} & \sin 67,5^\circ &= \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}} \\ \sin 22,5^\circ &= \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2}} & \sin 70^\circ &= \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}} \\ \sin 30^\circ &= \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{1}} & \sin 90^\circ &= \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{4}} \\ \sin 45^\circ &= \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{0}} \end{aligned}$$

* * *

Řadu 2. mocnin čísel přirozené řady lze srovnati do schema:

$$\begin{array}{rcl} & 1 & = 1^2 \\ & 1 + 3 & = 2^2 \\ & 1 + 3 + 5 & = 3^2 \\ & 1 + 3 + 5 + 7 & = 4^2 \\ & 1 + 3 + 5 + 7 + 9 & = 5^2 \\ & 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 & = 6^2 \\ & \dots & \dots \\ & 1 + 3 + 5 + \dots + 2n + 1 & = (n + 1)^2 \end{array}$$

Součet čísel v řádce je roven čtverci *středního* členu (který je ev. virtuální). Členy ve sloupcích (nad sebou) v levé polovině trojúhelníka, nebo v řadách rovnoběžných s pravou stranou trojúhelníka, tvoří řady lichých čísel, jaké jsou v řádcích.

* * *

A na konec jeden příklad z jisté „Enzyklopedie“:

„Dokažte, že přímka $x + \frac{1}{4}y = 1$ se dotýká elipsy $x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$.“

Řešení: Rovnice tečny má tvar:

$$xx_1 + \frac{1}{4}yy_1 - 1 = 0.$$

Přirovnáme-li ji k rovnici

$$x + \frac{1}{4}y - 1 = 0,$$

dostaneme

$$x_1 = 1, \quad y_1 = 1.$$

Bod (1, 1) jest bodem dotyku. (Čím byla způsobena chyba?)

F. Balada.

Z historie neeuklidovské geometrie. Geometrie, jak ji poznáváte na střední škole, vznikla z praktických potřeb měření na zemi. Vzpomeňte na začátky její historie!

Zkušeností při měření a abstrakcí získána byla určitá pravidla, kterých člověk k usnadnění práce při takových měřeních užíval. Z nich dále teoretickými úvahami sestavil řadu předpisů a vět, které byly obecně platné; všechny spočívaly na požadavcích, jichž splnění bylo ale verifikováno jen praxí.

Prvý, kdo sestavil velmi důkladně řadu takových pouček teoretických, byl Euklid (330—275 př. Kr.). Spolu s jinými geometry, jako Hyposiklem a Eudoxem srovnal soustavně všechny předpoklady, na nichž je geometrie vybudována a uložil je v knihách zvaných *Elementy*.

Pět základních jeho předpokladů je:

1. *Dva body lze vždy spojití přímkou.*
2. *Přímku lze neomezeně prodlužovati.*
3. *Lze vždy sestrojiti kružnici o libovolném středu a poloměru.*
4. *Všechny pravé úhly jsou mezi sebou shodné.*
5. *Rovnoběžky jsou přímky v rovině, které byvše prodlouženy neprotínají se na žádné z obou stran.*

Vedle těchto postulátů užil Euklid při tvoření geometrických pouček vzájemně si neodporujících, ještě jiných předpokladů, které z části uvedl anebo je mlčky jako samozřejmé předpokládal za vždy splněné.

Všimněme si blíže uvedených postulátů! Předně pozorujeme, že jsou to geometrické věty, které užívají základních pojmů bod, přímka, rovina, kružnice. Tyto pojmy Euklid nedefinoval. Ve svých *Elementech* uvedl jen představu o nich a to představu získanou zkušeností. (Tak na př. definuje bod jako „něco“ co nemá žádný díl a pod.) Jeho definice těchto pojmů jsou tedy přešpané zkušenosti do řeči teoretika.

Za druhé si uvědoměme, že všechny tyto předpoklady mají svůj původ v praxi a že tedy vyplynuly z vnější zkušenosti. Tato zkušenost, která byla vždy a vždy podepřena praktickým měřením, byla právě brzdou vývoje geometrie. Zeptáte se proč?

Geometři po Euklidovi nepřijímali slepě jeho poučky, ale vedeni skepsí pochybovali o oprávněnosti uvedených postulátů a snažili se je dokázati teoreticky nezávisle na zkušenosti. Když potom správné úvahy je vedly k novým výsledkům, které však odporovaly úplně zkušenostem získaným měřením, pokládali je za špatné — absurdní, odmítali je a tak vzrůst geometrie v tomto směru přímo zastavovali. A byl to hlavně 5. postulát (nebo častěji rovnocenný s ním postulát: k dané přímce lze vésti bodem mimo ni ležícím jen jedinou rovnoběžku), jehož oprávněnost a správnost dokazovali geometři různých národů po celou dobu dvou tisíc let. Byl proto významným, poněvadž v něm bez důkazu Euklid omezuje na jednu počet rovnoběžek, které lze daným bodem mimo přímku položeným k ní vésti. Euklid byl si vědom tohoto

zvláštního postavení postulátu, neboť pokud možno neodvozoval z něho důsledků. O důkaz jeho ani se snad nepokusil; alespoň jeho důkaz se nedochoval.

Důkazy ze starší doby užívají předpokladů, o nichž později bylo dokázáno, že jsou s uvedeným postulátem rovnocenné. Předpokládali tedy při důkazu 5. postulátu již předem jeho správnost. Tak na př. Posidonius (1. stol. př. Kr.) dokázal 5. postulát na základě věty: Dvě přímky jsou rovnoběžné, mají-li body jedné od druhé stejné vzdálenosti. Ptolemaios předpokládal platnost věty o rovnosti dvou párů střídavých úhlů při přímce dvou rovnoběžek, atd.

A tak ještě v 6. století po Kr. trvala tato „záhada“ již stará devět set let. Začátkem 7. stol. vzdává se svět o Euklidův rovnoběžkový postulát, vlastně vzdává se zájmu o geometrii vůbec — a staré empirické názory staly se opět běžnými. Avšak řecká kultura pronikala k Arabům a s ní i „záhada“ 5. postulátu. Arab Nasr-Edin ve stol. 13. znovu pokouší se bezvýsledně o důkaz. Badání J. Wallise (1665) přineslo větší výsledek: poznal, že máme-li přejímati nezávislost tvaru na velikosti (existenci útvarů podobných), že je třeba předpokládati správnost Euklidova 5. postulátu. Výsledek tedy jistě zajímavý byť ne korunovaný úspěchem.

Důkazy pozdější jsou teoreticky správné — vedly však k výsledkům, které odporovaly dosavadním zkušenostem; proto byly buď zavrhnuty, anebo místo aby byly vzaty za nové objevy, sloužily jako „argument“ proti správnosti uvedeného postulátu.

Tak na př. G. Saccheri (1667—1733) ve spisku „Eukleides ab omne novo vindicatus . . .“ (1733) uveřejnil vlastně skutečný nárys neeuklidovské geometrie, přesto, že byl psán k obhájení 5. postulátu „jednou provždy“. Ukázal totiž, že 5. postulát nepraví nic jiného, než že součet tří vnitřních úhlů trojúhelníku se rovná dvěma pravým. Aby ukázal nezávislost tohoto postulátu na ostatních zkoumal, jaké důsledky plynou z předpokladu, že zmíněný součet je menší nebo větší dvou úhlů pravých.

V druhém případě, kdy Saccheri předpokládal, že $\alpha + \beta + \gamma > 2R$, podařilo se mu dojít ke sporu — a tedy dokázal nemožnost předpokladu (S. předpokládal totiž, že přímka je délky nekonečné). V případě $\alpha + \beta + \gamma < 2R$ nepodařilo se Saccherimu přes všechno úsilí dojít ke sporu. Dospěl jen k řadě pouček, které si sice matematicky neodporovaly, ale které byly v rozporu s názorem na přímku. Spoléháje na tento apriorní názor, domníval se Saccheri, že ze zdánlivé nemožnosti důsledků předpokládané věty dokázal její nemožnost a tím tedy tvrzení $\alpha + \beta + \gamma = 2R$ a tedy také 5. postulát. Zdá se, že tento italský mnich neměl dosti odvahy k úplnému spolehnutí na vlastní logiku a tím k vyřknutí věty: postulát je nedokazatelný, ale je faktem, že rozvinul souvisle

ROZHLEDY MATEMATICKO - PŘÍRODOVĚDECKÉ

PŘÍLOHY K ČASOPISU

PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY A FYSIKY
PRO STUDUJÍCÍ ŠKOL STŘEDNÍCH

ROČNÍK 42.

REDIGUJÍ:

Dr. FRANTIŠEK VYČICHLO, Dr. ALOIS WANGLER.

ROČNÍK 13.



V PRAZE 1934.

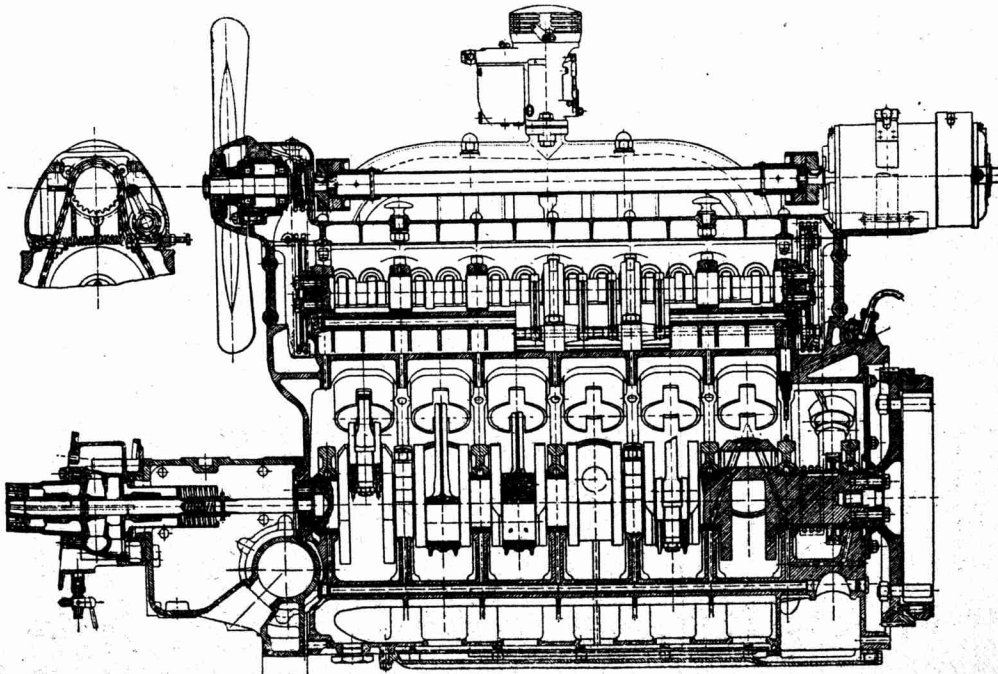
Sdružené tiskárenské a nakladatelské podniky Prometheus, spol. s r. o.
Praha VIII, Rokoska 94.

Poněvadž teploty při spalování ve válci jsou značně vysoké, i přes 1700° C, musí být postaráno o náležitě chlazení pracujících částí, hlavně pístů a válců. Dnes převládá vodní chlazení; kolem vlastních válců je vytvořen v litinovém bloku chladičí plášť, a horká voda jest ochlazována známým chladičem, umístěným obyčejně vpředu vozu. Teplota chladičí vody má být pokud možno vysoká, neboť motor pracuje nejlépe za určité, dosti vysoké teploty; nesmí ovšem nastati var, který vede k přehřátí součástí. Aby se plochy chladiče lépe využilo, podporuje se oběh vody malým čerpadlem, obyčejně odstředivým; u malých vozů spokojíme se samočinným oběhem vody, t. zv. termosyfonem. Aby byla teplota vody pokud možno nejvýhodnější, dává se u větších vozů do potrubí t. zv. thermostat, kterým se samočinně přivírá průstup vodě při klesající teplotě.

Ojedinele vyskytuje se i chlazení vzdušné. Válec má chladičí žebra, která odevzdávají teplo okolnímu vzduchu sáláním a stykem se vzdušným proudem, podporovaným ventilátorem. Značné množství tepla přebývá tehdy náležitě konstruktivně vyvinuto a dávalo příčinu k stížnostem. V nové době bylo však využito zkušeností z motocyklových a leteckých motorů a bylo postaveno několik vozů se vzdušným chlazením, které nejen velmi dobře vyhovují, ale předčí i vozy s chlazením vodním. Zvlášť dokonalé řešení má náš domácí vůz „Tatra“; v Americe se osvědčil „Franklin“.

Nejnovější snahou je dosáhnouti chlazení odpařením kapaliny v uzavřeném chladiči a páry zkapalňovati, takže chladičí tekutina obíhá a nemusí být doplňována. Tato tekutina má mít vyšší bod varu než voda, aby motor pracoval za příznivější teploty. Tím zmenší se veliká ztráta tepla, vzniklá chlazením.

Vysoké střední pistové rychlosti automobilního motoru vynucují si bezvadné mazání. Dnes používá se takřka výhradně mazání tlakového, cirkulačního, při čemž kliková komora motoru tvoří nádržku oleje (obsah 5—20 l). Olej je nasáván čerpadlem s ozubenými koly, tlačem do podélných kanálů, odtud do všech důležitých

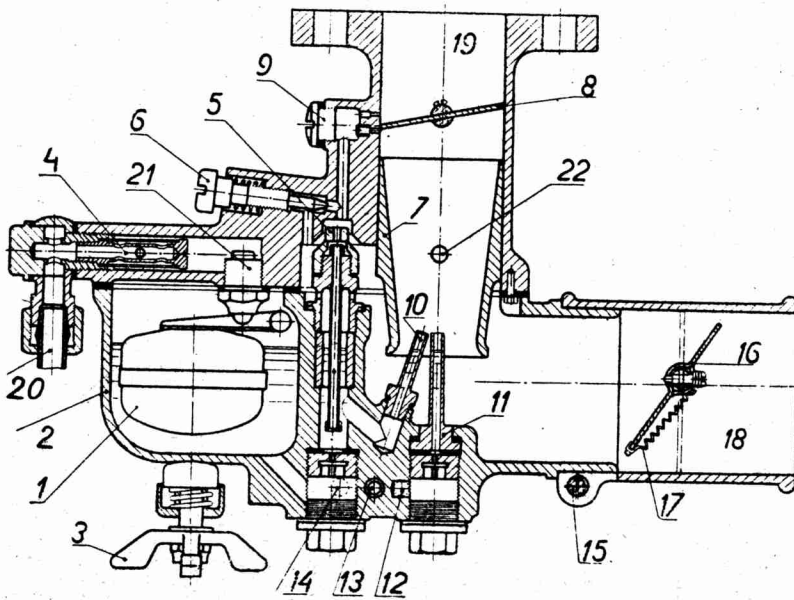


K jednotlivým válcům rozvádí se směs ssacím potrubím, na jehož správném tvaru mnoho záleží. Potrubí musí být tak vytvořeno, aby každý válec obdržel stejné směsi. Poruchy v ssacím potrubí mohou vyvolat nepravidelnosti běhu a otřesy, které mohou rušit právě tak, jako nevyvážené síly kmitajících hmot.

Zapalování směsi děje se výhradně elektrickou jiskrou vysokého napětí. Proud dodává buď magnetoelektrický zapalovač (magnetka), úplně samostatný to přístroj k tomuto účelu vytvořený, nebo se používá indukční cívky, kombinované s ústrojím přerušovacím a rozdávacím. V tomto případě upotřebí se jednotlivého proudu, neboť indukční cívka je připojena na vedení světelné, napájené dynamem a paralelně připojenou akumulátorovou baterii. Jiskra přeskakuje mezi póly t. zv. zapalovací svíčky ve vzdálenosti asi 0,5 až 0,8 mm. Odtud šíří se plamen na všechny strany, a poněkud vadí rychlost šíření není zvlášť veliká, musí se okamžik zapálení dít před vnější krajní polohou pístu. Zážehový předstih musí být tím větší, čím větší rychlost má motor a čím pomaleji směs hoří. Nařízení předstihu děje se sarnocínně zapalovací magnetkou nebo ručně pákou u volantu (řídícího kola).

Automobilní motor je vydán otřesům a vibracím. Pohybují se v něm hmoty přímočaře kývavě (písty s čepy a část váhy ojnice) i točivé (klikový hřídel), čímž vznikají setrvačné a odstředivé síly, které otrásejí motorem. Tyto síly musí být zachyceny vyvážením. Se-

I = normální řadový čtyřválcový motor, nejčastěji používaný; postup zážehů ve válcích: 1-3-4-2. 2 = čtyřválcový motor s přesazenými válci typu Lancia; přesazením zkrátí se délka motoru. 3 = pětiválcový motor hvězdový s radiálně uspořádanými válci, velmi dobře vyvážený. 4 = šestiválcový řadový motor velmi často používaný. Postup zážehů ve válcích: 1-5-3-6-2-4. Podobně je proveden řadový motor osmiválcový, používaný velmi často u osobních vozů. 5 = dvanáctiválcový motor se dvěma řadami válců po šesti. Úhel řady 90°. Vždy 2 válce pracují na společném čepu. Používá se u luxusních osobních vozů („Latra“ atd.).



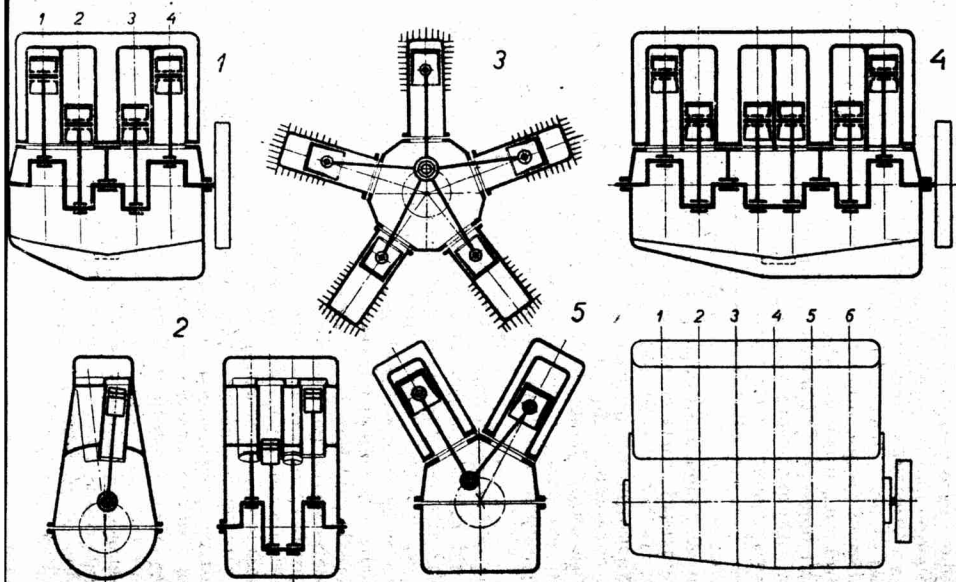
Obr. 196. Karburátor „Zenith“ typů UP—UL.

1 = plovák; 2 = plováková komora; 3 = křídlové rameno přítlučného třmenu; 4 = filtr na benzin; 5 = tryska pro běh na prázdko; 6 = šroub k regulaci množství směsi při běhu na prázdko; 7 = difuzér (vzdušná hubice);

ložisek, odstřikuje na písty, klesá dolů a hromadí se opět v klikové komoře. Jindy přechází se k oddělené nádrži olejové, takže odstříkaný olej jest odsáván z klikové komory a vrácen do této nádržky, kde je lépe chlazen (soustava t. zv. suché motorové skříně). Při své cestě prochází olej obyčejně dvěma filtry, hrubším a jemným. Jakost oleje trpí tím, že palivo při chlazeném počasí a za určitých okolností kondensuje na stěnách válce, dostává se do klikové komory a ztřeďuje olej, takže povstávají poruchy v ložiskách. Proto u větších a lepších osobních vozů připojují se rektifikátory oleje, kde se kondensáty vylučují z oleje vysokou teplotou.

Výbušná směs tvoří se v karburátoru. V proudě nasávaného vzduchu, procházejícího karburátorem velkou rychlostí, rozprašuje se palivo na velmi jemnou mlhovinu. Vzniklá směs skládá se tedy ze vzduchu, této mlhoviny a z nasycených i přehřátých par paliva. Dnešní karburátory jsou samočinné, t. j. k jejich ovládní stačí jediná páka. Dávají při všech obrátkách směs určitého složení, která odpovídá nejlepší výkonnosti nebo nejmenší spotřebě paliva. Oba požadavky nelze sloučiti. Každý automobilní karburátor má zařízení spouštěcí

8 = hlavní klapka (škrťací); 9 = zátkka kanálů pro běh na prázdnno; 10 = tryska pro malé a střední rychlosti motoru (pomocná); 11 = tryska pro vysoké rychlosti motoru (hlavní); 12, 13, 14 = příváděcí kanály; 15 = příružný šroub nátrubku; 16 = škrťací klapka k usnadnění spouštění; 17 = zpružina k vrácení klapky; 18 = vzdušné hrdlo (nátrubek); 19 = ústí karburátoru, připojené k ssacímu potrubí; 20 = šroubení k trubce pro přívod paliva; 21 = uzavírací ventil plovákové komory; 22 = upevňovací šroub difusoru. Při spouštění motoru uzavře se klapka 16, tím povstane v karburátoru tak silné zředění, že ze všech trysek vystříkne benzin a spouštění se usnadní. Jakmile motor zapálí, klapka skočí sama do polohy otevřené. Běhu na prázdnno je dosaženo trysekou 5, množství směsi při tom (tedy i rychlost otáčení motoru) šroubem 6. Obě trysky 10 a 11 pracují současně a doplňují se účinkem; tryska 10 pracuje při menších a středních rychlostech, 11 při vysokých rychlostech.

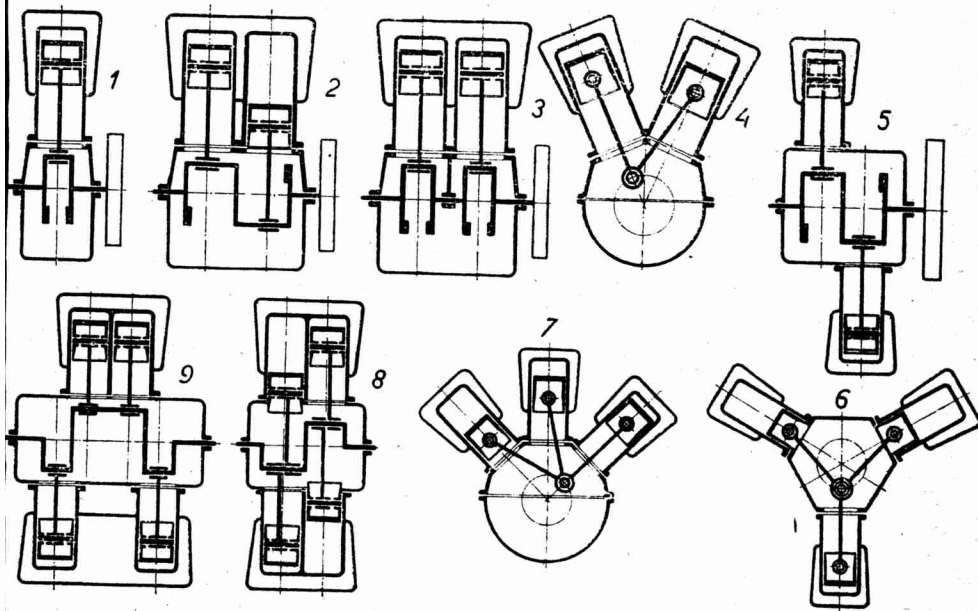


Obr. 21. Uspořádání válců. Vysvětlení na str. 31.

a na pomalý běh motoru při běhu naprázdno. U největších karburátorů vyskytuje se t. zv. zařízení akcelerační (zrychlovací), které má čerpadlo, jež vstříkne při rychlém stlačení páky karburátoru palivo do směsi a zvyšuje její bohatost, nutnou k dosažení nejvyšších tlaků při spalování. Nejčastěji používané soustavy karburátorů jsou „Zenith“, „Solex“, z amerických „Stromberg“, „Schebler“, „Carter“ atd. Vzduch, nassávaný do karburátoru, čistí se obyčejně filtrem, který zachycuje prach a jemný písek, čímž šetří se hladké plochy válců a pístů od vyždění. Také benzin se procezuje, nejčastěji samostatným filtrem, montovaným před karburátorem. Benzin přitéká do karburátoru hrdlem vlastním spádem, nebo je dopravován t. zv. nassavači, nejnověji rozmagnetnými čerpadly. Největší výkonnost motoru dává směs o váhovém poměru 0-08, t. j. o 20% bohatší, než je teoretický poměr. Složení nejspornější směsi není stále, nýbrž mění se zatížením a rychlostí stroje. Při plném zatížení bývá nejhošpodárnější složení 0-058, t. j. o 11% chudší než je teoretický poměr.

Má-li se směs dostati v původním složení až do válce, musí býti postarano o její stabilisaci. Proto má býti palivo rozprašeno na velmi jemné a pokud možno stejné veliké částice, a teplota směsi má býti udržována na určité výši, stále stejné i při různých atmosférických poměrech. Toto rozprašení podporuje se t. zv. atomiséry. Stálé teploty dosahuje se autostatem, přístrojem, který samostatně připravuje do karburátoru horký vzduch podle atmosférických poměrů.

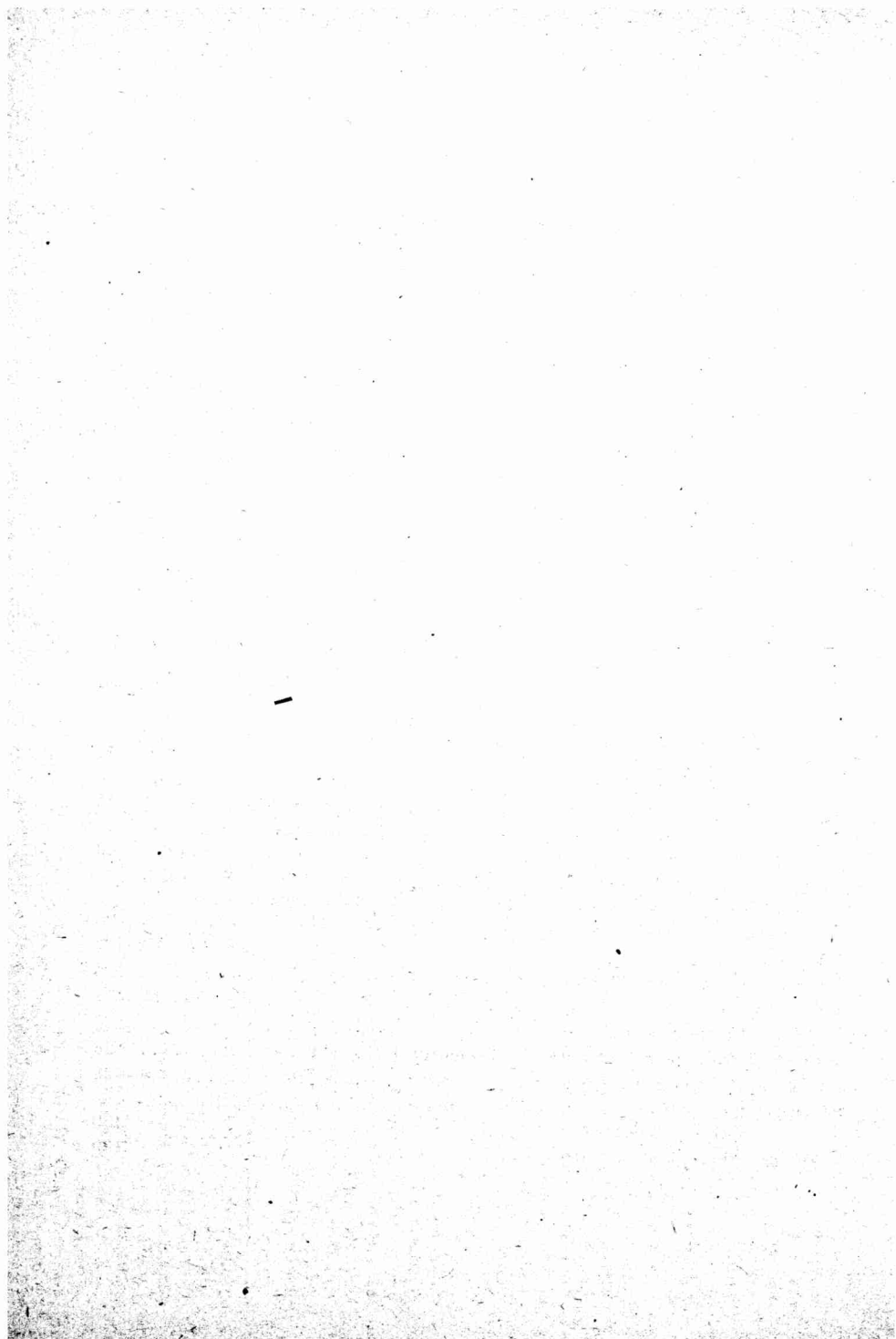
1 = jednoválcový motor; 2 = dvouválcový motor řadový s klikami na 180°; 3 = dvouválcový motor řadový s klikami na 360°; 4 = dvouválcový motor V, úhel válců 42°-90°; 5 = dvouválcový motor s klikami na 180° a s protilehlými válci, zvaný „flat-twin“; velmi dobře vyvážený; 6 = čtyřválcový motor, dvojitý „flat-twin“, ale se trojnásobně zalomeným hřídelem, málo používáno; 7 = čtyřválcový motor „dvojitý flat-twin“ s jednoduchým hřídelem (čtyřválcová Taura); 8 = tříválcový motor větřitý s válci v jedné rovině; 9 = tříválcový motor hvězdotový s válci radiálně uspořádanými.



Obr. 20. Uspořádání válců. Vysvětlení na str. 29.

Obsah. — Sommaire.

| | Strana |
|--|-----------------|
| V. Veselý: Něco o prvočíslech. (Sur quelque chose des nombres premiers.) | 1 |
| J. Matoušek: Důkaz velké Fermatovy poučky pro exponent 4. (Une preuve de la théorème de M. Fermat pour la 4 ^{ème} puissance.) . | 4 |
| Š. Schwarz-L. Frenyo: O Heronových trojúhelníkových. (Sur les triangles de M. Heron.) | 7, 29 |
| J. Sahánek: Elektrické dvojvrstvy. (Les feuillets électriques.) ... | 9, 56 |
| Č. Kohlmann: O praktickém významu geofyziky. (Sur l'importance pratique de la géophysique.) | 14, 52 |
| Š. Schwarz: Niekoľko poznámok k určeni čísla π . (Remarque relative à la détermination du nombre π .) | 31 |
| J. Roháček: Geom. místo středů kolineací, které danou kuželosečku převádějí ve svazek kružnic. (Sur un lieu des centres des homographies centrales qui transforment la conique donnée dans un faisceau des cercles.) | 36 |
| V. Sukdol: Steinerovy elipsy. (Sur les ellipses de M. Steiner.) .. | 40, 78 |
| B. Hacar: Z astronomie dvojhvězd. (Quelque chose de l'astronomie des doubles-étoiles.) | 48, 83 |
| Mil. Hlaváček: Příspěvek k řešení rovnice $x^4 - y^4 = z^4 - u^4$ čísly celými. (Contribution à résoudre de l'équation $x^4 - y^4 = z^4 - u^4$ par les nombres entiers.) | 73, 101 |
| † V. Jeřábek-Roháček: O průmětu kuželoseček rotačního kužele. (Le projet des coniques placées sur un cone à révolution.) | 75 |
| Ladislav Klír: Konstrukce paraboly ze dvou bodů a osy. (Une construction de la parabole donnée par les deux points et l'axe.) .. | 103 |
| Bohuslav Pavlík: O elektronových lampách, používaných v přijímačích, se zřetelem k jejich vývoji a zdokonalování. (Sur les lampes électroniques.) | 106 |
| Mosaika..... | 20, 65, 95, 122 |
| Řešení úloh. (Les problèmes résolus.) | 125 |
| Přehled. (Revue.) | 18, 59, 93, 117 |
| Úlohy. (Problèmes à résoudre.) | 25 |
| Vypsání cen za řešení úloh. (Concours.) | 28 |
| Příloha: E. Čermák: Automobil. (L'auto.) | 1—32 |
| Seznam řešitelů. (Les noms des étudiants qui ont envoyé les solutions des problèmes.) | 139 |
| Udělení cen. (Prix décernés.) | 139 |



a logicky geometrii a že to co pokládal za souhrn pouček, které svou „absurdností“ dokazovaly 5. postulát, je základem nové geometrie, která je bezesporná.

Podobně Legendre (1752—1833) dokazoval 5. postulát za pomoci absurdnosti věty: Velikost úhlu závisí na velikosti ramene. Správnými matematickými dedukcemi dospěl k této větě, ale místo aby se přidržel těchto dedukcí, ustoupil před vžitou vírou v apriornost názoru a prohlásil větu za absurdní a tím „dokazoval“ 5. postulát. A podobně uvažoval Lambert a jiní.

Dílo Saccheriovo nezůstalo však bez vlivu na pozdější badání.

Již Gauss (1777—1855) odvážil se setrojit geometrii (t. j. řadu neodporujících si pouček), ve které 5. postulát byl nahrazen jiným, který jej vylučoval. Svě výsledky neuměl uvést v soulad s apriorním geom. názorem a proto se obával své výsledky uveřejnit, ačkoliv byl přesvědčen o správnosti svých matematických dedukcí.

Výsledkem všech úvah byla tedy pochybnost o nutnosti euklidovské geometrie.

Pochybnost jistě odvažná, neboť uvažme, že po dvě tisíciletí byly E. postuláty považovány za absolutně správné — jejich existence měla značný vliv na filosofii, tehdy považovanou za královnu věd.

Tato pochybnost trvala a rostla až konečně počátkem 19. stol. dali světu Rus Lobačevskij (1793—1856) a několik let po něm Maďar J. Bolyai (1802—1860) úplně logickou a souvislou geometrii neeuklidovskou zamítající rozhodně postulát rovnoběžkový.

Nová geometrie obsahovala vlastně důsledky oné Saccheriovy alternativy, která předpokládala, že součet vnitřních úhlů trojúhelníka je menší než dva pravé t. j. vybudovanou na postulátu: bodem mimo přímku lze k ní vésti dvě rovnoběžky, který ovšem vylučoval 5. postulát Euklidův. Celý názor na geometrii nabyt tím jiné tvářnosti.

Riemann zkoušel, jaký vliv bude mítí popření nekonečnosti přímky a rozvinutí druhé ze Saccheriových možností. Nedošel rovněž k žádným rozporům a vybudoval další geometrii. Bylo později ukázáno, že obě tyto geometrie jsou bezesporné v takové míře, v jaké je bezesporná geometrie euklidovská a tím vlastně potvrzeno, že 5. postulát je nedokazatelný a tedy, že je pro výstavbu geometrie pouhou konvencí, kterou lze nahradit jinou.

Existovaly tedy v 60. letech minulého století vlastně vedle sebe 3 geometrie: Euklidova, Lobačevského a Riemannova. Poslední dvě nazýváme obvykle geometrie neeuklidovské. Každá z nich vedla k jinému názoru na prostor a dodejme předem: nepodařilo se rozhodnouti, která z nich je geometrií prostoru, který nás obklopuje. (Ta geometrie bude geometrií prostoru, která plyne

z fyzikálních zákonů tohoto prostoru.) Je to více méně vinou měnicích se fyzikálních názorů na svět.

Snažili jsme se stručně uvést vývoj geometrie, jak se dál od doby staré skepsi o 5. postulátu Euklidově. (Stanovisko axiomatické.) Poznali jsme, že geometři nahradili 5. postulát jiným a dospěli tak ke geometriím, kterým říkáme *neeuclidovské*. Je myslitelný jiný postup — nezvoliti místo 5. postulátu žádný jiný. Skutečně řada matematiků obírala se takovými geometriemi; dostali geometrie, o nichž říkáme že *nejsou euklidovské*.

Historie důkazů 5. postulátu ukazuje, že přesné vybudování geometrie na axiomech je velmi obtížné. Je však možná ještě jiná cesta, která vedla geometry nové doby k studiu geometrie neeuclidovské — ukázal ji geniální matematik F. Klein. Přihlédneme k oběma těmto cestám v jednom z příštích čísel. Upozorňujeme zatím na českou učebnici neeuclidovské geometrie, která byla v podstatě našemu článku pramenem: V. Hlavatý: Úvod do neeuclidovské geometrie. Vydala JČMF r. 1926 ve sbírce Kruh.

F. V.

Mosaika.

Prof. Dr. Vladimír Novák.

Povrchové napětí. Snadno a lacině pobavíte se jednoduchými pokusy, které ukazují zajímavé rozdíly v povrchovém napětí čisté vody a vodního roztoku. Je to vděčné odvětví mechaniky a velmi poučné, v němž se dají sestavit mnohé překvapující pokusy. Nalijte čistou vodu (nejlépe přímo z vodovodu) do ploché misky (fotografické) a když se povrch uklidní, posypte jej jemnou vrstvou prášku z barviva, které se ve vodě nerozpouští. Hodí se dobře světlý okr, nebo anglická zeleň a pod., kterých užívají malíři pokojů. Povrch vody se poprásí při tomto uspořádání. Misku s vodou překlopíme lepenkovou krabicí, z níž lze sejmouti víko. Pigmentový prášek vloží se do širokohrdlé láhve, kterou převážeme plátnem, převrátíme a nárazy pěsti vytvoříme mráček prachu, kterým se naplní krabice. Pak se krabice víkem přikryje a prach se volně snese na vodní hladinu.

Různost povrchového napětí čisté vody a roztoku ukáže se pak tímto jednoduchým pokusem. Větší jehlu protáhneme prsty tak, aby zvláště na špičce utkvělo něco kožního výpotku a pak protkne me špičkou poprášený povrch vody. Okamžitě se kolem jehly vytvoří prázdný kruh, který po vynoření jehly se pomalu svírá a po př. úplně zmizí. Utvoříme-li dva takové „kruhy“ rychle za sebou, v místech poněkud vzdálených, povstane zajímavý pronik

obou čistých hladin. Byla-li vodní hladina posypána světlým práškem, hodí se pro pokusy černá miska, nebo skleněná miska, kterou položíte na černý papír.

Z barevného celuloidu (asi 0,3 mm silného) vystříhnete lodičku tvaru na obr. 1 naznačeného. Na užším konci je vystřižen otvor *O*, který je vyveden rozbíhajícím se ústím k vnějšímu obrysu. Položte lodičku na povrch čisté vody, kde se ustálí v klidné poloze. Z krystalického kafru odlomte malý krystalek a vložte jej na vodu v kruhovém otvoru. Lodička okamžitě dá se v přímočarý pohyb jako raketa, vypouštějící u *A* stlačený plyn. Tento pohyb neskončí však nárazem na stěnu, neboť tam je povrchovými silami hladina do výše vzdutá a proto se lodička obrátí a pokračuje na své pouti. Má-li nádoba s vodou takový tvar, aby se utvořil kruhový obrys u „břehu“, pak lodička krouží do kola.

Upravme dále z celuloidu kotouček, opatřený čtyřmi otvory, jak je to naznačeno na obr. 2. Položme jej na hladinu čisté vody a připravme si blízko otvorů na deštičky po čtyřech krystalcích kafru co možná stejně velikých. Přidržíme pincetkou kotouček za držáček *D* ve středu kotoučku voskem přilepený a svrhneme jehlou, kterou držíme v druhé ruce, do každého otvoru jeden krystalek kafru. Kotouček se pak otáčí v naznačeném směru jako malá turbína.

Popsané pohyby vznikají růzností povrchového napětí čisté vody a roztoku kafru ve vodě. Čistá voda má povrchové napětí větší a proto utvořený roztok proudí z otvorů. Proudí tyto lze na poprášené hladině dobře pozorovati. Na čisté vodě trvají popsané pohyby nejméně 10—15 minut, než se roztok rozšíří po hladině vodní tak, že se povrchová napětí vyrovnají.

Umělá radioaktivita. Mnohá přírodní zařízení byla odedávna člověku vzorem pro napodobení, třeba tento vzor byl často nedostižný. Srovnajme na př. fotografický přístroj a oko lidské a spočítejme všechny překážky dokonalého zobrazování, které dlouho bylo překonávati, nežli dosaženo uspokojivých výsledků, které byly u přirozeného zařízení dávno rozluštěny. Podobný příklad poskytuje úloha sestrojiti umělý zdroj světelný. Jak mnoho práce bylo v tomto oboru vykonáno a jak daleko jsme od přirozeného světla, které vysílá svatojanská muška nebo americký světloňoš! U nejlepších světelných zdrojů zužitkuje se z původní energie pouze několik procent, kdežto „studené“ světlo svatojanské mušky složeno je pouze ze světelného, viditelného záření, jehož nejpůsobivější paprsky jsou paprsky žlutozelené t. j. paprsky toho druhu, který je též nejmohutnější ve světle slunečním! Třetí příklad, který uvádíme a to hlavně pro jeho časovost, je umělé vyvolání radioaktivity. Až do nedávna nebylo jiné radioaktivity nežli přirozené, t. j. rozpadu některých „prvků“ s nejvyšší atomovou

hmotou, které při tom vysílají jednak hmotná záření „alfa“ a „beta“ a nehmotné záření „gama“. Zdálo se též nemožno přirozený tento rozpad radioaktivních látek nějak zrychlit nebo zvolnit, takže také praktická použití zmíněných záření na př. v lékařství zdála se býti omezena jen na vzácné látky radioaktivní. Nové výzkumy o složení atomového jádra vedly ke zkušenostem o možnosti umělé radioaktivity. Asi před rokem konali *Chadwick*, *Blackett* a *Occhialini*, dále manželé *Joliotovi* v Cambridgi (v Anglii) a *Meitner* a *Philipp* v Berlíně pokusy o rozbití jádra bóru zářením „alfa“ paprsků. Dopadají-li alfa částice na jádro bóru, vzniká umělé záření, které trvá po několik minut i když proud alfa částic se přeruší; při tom se bór rozpadá tak, že asi třetina jeho změní se za 15 minut. Zjev si vykládáme spojením heliového jádra (alfa částice) s bórem na neutron a nestálý atom dusíku, který se promění v uhlíkový atom pořadového čísla 13. Při tom se uvolní kladný elektron, jemuž dán v září r. 1932, kdy *C. D. Anderson* tyto částice objevil, název positron. Podobná umělá radioaktivita nalezena byla při dopadu heliových jader na hliník a hořčík. V kalifornském ústavu technologickém v Pasadeně konali *C. C. Lauritsen*, *R. Crane* a *W. Harper* nové pokusy o bombardování uhlíku jádru těžkého vodíku, které se nazývají deutony (diplony). Pohybové energie dostává se deutonům ve vyčerpané trubici při velmi vysokém potenciálovém rozdílu na elektrodách. Metoda amerických fyziků je mnohem účinnější, poskytuje alespoň stonásobné množství positronů proti pokusům *M. F. Joliot* a jeho manželky *Ireny*, rozené *Curiové*. Z pokusů amerických vyplývá, že z úhrnného působení alfa částic, protonů a deutonů jsou to zejména tato jádra těžkého vodíku, která jsou působivá. Umělá radioaktivita takto vyvolaná na uhlíku je prudčí, ale doznívá rychleji než na bóru, kde není tak intenzivní. Autoři soudí, že deuton vchází do uhlíkového jádra a vypuzuje neutron. Tím se přeměňuje uhlík na dusík, který má pořadové číslo 13 místo 14 nebo 15. Nová forma dusíku je nestálá pro přílišný nadbytek kladného náboje a proto vysílá positrony, aby přešla zase v původní uhlík. Dopadají-li deutony na bór, vypuzují neutron z bórového jádra a vytváří se uhlík o pořadovém čísle 11. Při tom povstávají positrony i nehmotné gama záření. V anglické Cambridgi pokračují v pokusech o umělé radioaktivitě *J. D. Cockcroft*, *C. W. Gilbert* a *E. T. S. Walton* a to s trubicí, která způsobuje při napětí 600.000 voltů proud protonů, jež dopadaly na tuhovou elektrodu.

Z těchto počátků umělé radioaktivity nelze zatím usuzovati o praktickém použití, ale zato vědecký význam je dalekosáhlý. Vedle negativních elementárních částic o hmotě 1840 menší než je atom vodíkový, nalezeny pozitivní částice stejně hmotné a o stejně velikém náboji, třeba jejich „jepičí“ život jim poskytuje

jen tak kratičké trvání, že proto byla jejich existence dlouho vůbec neznáma.

Vysokého tlaku a vysoké teploty snaží se dosáhnouti *C. Ramsauer* mechanicky výstřelem projektilu do hlavně, v níž by se uzavřený plyn zabrzděním projektilu jednak značně stlačil, jednak silně zahřál. Při rychlosti střely 100 m/sec. stlačil by se dokonalý plyn stálého specif. tepla při zabrzdění v hlavni o délce 1 m při hmotě střely 20 g a průřezu hlavně 1 cm² na 15 atmosfér při argonu, 25 atmosfér u dusíku a 36 atmosfér při kysličníku uhličitém. Zvýšení teploty by bylo při prvním plynu 2200°, 1500° u druhého plynu a 1200° u třetího plynu. Když by platil zákon o adiabatickém stlačování i pro veliké rychlosti, dosáhlo by se při rychlosti střely 1000 m/sec. pro argon tlaku 11 milionů atmosfér a teploty 190.000° C! Praktické pokusy musily se zatím spokojiti s rychlostmi značně menšími, neboť rychlosti 500 m/sec. a výše nevydržel žádný materiál a již při rychlosti 150—200 m/sec. se i kalená ocel značně deformovala. Aby bylo možno sledovati optické vlastnosti náhle stlačeného a zahřátého plynu, byl spodek hlavně, do níž projektil vnikl, z křemene, který však se při rychlosti 175 m/sec. drtil v neprůhlednou hmotu. Ačkoliv pokusná stránka Ramsauerovy metody vykazuje značné obtíže, zdá se, že přece bude možno užití tohoto způsobu k stanovení hustoty stlačených a silně zahřátých plynů, k stanovení elektrické vodivosti a pod.

ŘEŠENÍ ÚLOH.

(Texty úloh zde řešených jsou otištěny v 1. čísle Rozhledů matem.-přírodovědeckých letošního ročníku.)

Z matematiky.

1. Řešil p. *Frant. Matějka*, studující VII. tř. I. r. v Brně.

A) V trojúhelníku platí:

$$vb - va = a \sin \gamma - b \sin \gamma;$$

odtud

$$b - a = \frac{va - vb}{\sin \gamma} \text{ (čtvrtá měř. úměrná),}$$

Známe-li $(a + b)$, $(a - b)$, jest v podstatě trojúhelník určen stranami a , b a úhlem γ .

B) Sestrojíme pravoúhlý trojúhelník EFB , jehož odvěsna $\overline{FB} = vb - va$ a protější úhel $\widehat{FEB} = \gamma$. Prodlužme přeponu a nanese $BE + ED = a + b$! Rameno DA úhlu $\widehat{BDA} = \frac{1}{2}\gamma$ s osou úhlu FED protíná se ve vrcholu A trojúhelníka hledaného. Vrchol C obdržíme jako průsečík symetraly úsečky AE se spojnicí BD .

2. Řešil p. *Frant. Matějka*, studující VII. tř. I. r. v Brně.

Elipsa o středu S a vrcholech A, B, C, D a kružnice nad hlavní osou opsaná jsou v afinitě. Je-li bod M' bod sdružený s bodem M a protínají-li se sdružené přímky \overline{MC} a $\overline{M'C'}$, nebo \overline{MD} a $\overline{M'D'}$ v bodech Q resp. P na ose elipsy, jakožto ose afinity, jest $\triangle C'D'M' \sim \triangle PQM'$, protože souhlasné strany jsou navzájem kolmé. Je-li dále bod O středem úsečky \overline{PQ} , jsou souhlasné těžnice $\overline{M'S}$ a $\overline{M'O}$ rovněž na sebe kolmé, čili spojnice $\overline{M'O}$ jest tečna kružnice. Afinně sdružená přímka \overline{MO} jest tedy tečna elipsy mající skutečně vlastnost v úloze vytčenou.

3. Řešil p. *M. Baumann*, studující VIII. tř. rg. v Domažlicích.

Elipsa nechť vznikla třeba kolmým průmětem kružnice do roviny σ , jež s ní svírá úhel φ . Bod na průměru rovnoběžném se σ ve vzdálenosti e od středu má mocnost $F'A' \cdot F'B' = e^2 - r^2 = -b^2 = -r^2 \cos^2 \varphi$. Poloměr rovnoběžný s $A'B'$ svírá se σ úhel φ_1 .

$$q = r \cos \varphi_1, \quad \overline{FA} = \overline{F'A'} \cos \varphi_1, \quad \overline{FB} = \overline{F'B'} \cos \varphi_1,$$

$$\left| \frac{\overline{FA} \cdot \overline{FB}}{q^2} \right| = \frac{+b^2}{r^2} = \cos^2 \varphi = \frac{b^2}{a^2} = \text{konst.}$$

4. Řešil p. *Arnošt Knöpfelmacher*, studující VIII. a tř. rg. v Trenčíně.

Inverzním útvarom dvoch sdružených, t. j. ortogonálne sa pretínajúcich sväzkov kružnic sú zase dva sväzky sdružených kružnic. Dané dve kružnice k_1, k_2 určujú sväzok kružnic S_1 , ktorému odpovedá sdružený sväzok kružnic S_2 pretínajúcich sa v bodech A, B . Jestliže inverzným útvarom kružnic k_1 a k_2 sú sústredné kružnice k'_1 a k'_2 , je inverzným útvarom sväzku S_1 sväzok sústredných kružnic S'_1 . Jestliže ten prípad nastane, pozostáva sdružený sväzok S'_2 zo systému priamok. Keď zvolíme za stred inverzie bod A alebo B , prejdú kružnice sväzku S_2 v priamky a kružnice k_1 a k_2 v kružnice sústredné. Pretože sústredné kružnice nemajú spoločných reálnych bodov, je nutnou podmienkou reálné riešiteľnosti úlohy, aby ani kružnice k_1 a k_2 nemaly spoločných reálnych bodov.

5. Řešil p. *M. Baumann*, studující VIII. tř. rg. v Domažlicích.

Výška kometce = h_1 , výška odříznutého kužele = h_2 . Těžiště přímého kužele je v $\frac{1}{4}$ výšky od základny. Těžiště kometce určíme z rovnosti statických momentů vzhledem k základně.

$$h_1 : h_2 = 1 : \sqrt{6}, \quad h_1 = \frac{h}{\sqrt{6} + 1}, \quad h_2 = \frac{h\sqrt{6}}{1 + \sqrt{6}}$$

$$V_2 = V \frac{h_2^3}{h^3} = \frac{6V\sqrt{6}}{(\sqrt{6} + 1)^3}, \quad F_1 = V - V_2 = \frac{V(19 + 3\sqrt{6})}{(\sqrt{6} + 1)^3}$$

$$V_1 x + V_2 (\frac{1}{4}h_2 + h_1) = \frac{1}{4}Vh$$

$$\frac{V(19 + 3\sqrt{6})}{(\sqrt{6} + 1)^3} x + \frac{6V\sqrt{6}}{(\sqrt{6} + 1)^3} \cdot \frac{h_1(4 + \sqrt{6})}{4} = V \frac{h_1(\sqrt{6} + 1)}{4}$$

$$x = \frac{37 + 4\sqrt{6}}{4(19 + 3\sqrt{6})} h_1$$

$$x : (h_1 - x) = (37 + 4\sqrt{6}) : (39 + 8\sqrt{6})$$

6. Řešil p. *Arnošt Knöpfmayer*, studující VIII. a tř. rg. v Trenčíně.

Pre výšku slnka v platí: $\sin v = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos t$, kde t je hod. uhol. Pre východ alebo západ slnka je $v = 0$, teda tiež $\sin v = 0$ a t_0 nech je hod. uhol slnka pri východe alebo západe. Po dosadení dostávame: $\cos t_0 = -\operatorname{tg} \delta \cdot \operatorname{tg} \varphi$.

Aby sme našli uhol α , ktorý sviera dráha slnka s rovinou horizontu, budeme riešiť pravouhlý sférický trojuholník so stranou $a = 90^\circ - \varphi + \delta$, $c = t_0$. Dosadením do vzorca $\sin \alpha = \frac{\sin a}{\sin c}$ a dosadením za $\sin c = \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \delta \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi}$, dostávame

$$\sin \alpha = \frac{\cos(\varphi - \delta)}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \delta \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi}}.$$

7. Řešil p. *Arnošt Knöpfmayer*, studující VIII. a tř. rg. v Trenčíně.

$$\text{Platí } \frac{p}{q} = \frac{z_1}{a} + r_1, r_1 = \frac{z_2}{a^2} + r_2, r_2 = \frac{z_3}{a^3} + r_3, \dots, r_{n-1} = \frac{z_n}{a^n},$$

$$\text{takže bude: } \frac{p}{q} = \frac{z_1}{a} + \frac{z_2}{a^2} + \frac{z_3}{a^3} + \dots + \frac{z_n}{a^n}.$$

Po prípade môže $n \rightarrow \infty$. Pre $\frac{p}{q} = \frac{7}{36}$ dostávame:

$$\frac{7}{36} = \frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{3}{7^3} + \frac{4}{7^4} + \dots \text{ in inf.}$$

P. *Ferd. Vitáček*, studující V. b tř. rg. v Praze XVI, poznamenává: Převedeme-li p, q z desítkové soustavy do soustavy o základu a a provedeme-li naznačené dělení, bude mít a -tiný zlomek, který tak obdržíme, žádanou formu. V uvedeném příkladě je: $7_X = 10_{VII}$, $36_X = 51_{VII}$.

Provedme dělení v sedmičkové soustavě! Je:

$$\begin{aligned} 10 : 51 &= 0,123460_{VII} = \\ &= \frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{3}{7^3} + \frac{4}{7^4} + \frac{6}{7^5} + \frac{0}{7^6} + \frac{1}{7^7} + \dots \end{aligned}$$

8. Řešil p. *Boh. Ondráček*, studující IV. roč. uč. úst. v Praze II.

Znásobíme-li druhou rovnici dvěma a od první odečteme, resp. přičteme, obdržíme rovnice: $(x - y)^2 + 6(x - y) + 8 = 0$ resp. $(x + y)^2 + 2(x + y) - 8 = 0$. Z nich $(x - y)_{1,2} = -2, -4$ resp. $(x + y)_{1,2} = 4, -2$. Z čehož dostávame páry řešení: $(0; 2)$, $(-3; -1)$, $(-4; 0)$, $(-1; 3)$.

9. Řešil p. *M. Baumann*, studující VIII. tř. rg. v Domažlicích.
Hrany trojhranu: x, y, z ,

$$x^2 + y^2 = a^2, x^2 + z^2 = b^2, y^2 + z^2 = c^2,$$

$$x^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2), y^2 = \frac{1}{2}(a^2 - b^2 + c^2), z^2 = \frac{1}{2}(-a^2 + b^2 + c^2).$$

Objem trojhranu $V_1 = \frac{1}{6}xyz$, výška $v_1 = \frac{xyz}{2\Delta}$, $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} =$
= plocha trojúh.; $\Delta' = \Delta \frac{(v_1 - v)^2}{v_1^2} =$ druhá zákl. komolce, $V =$ objem komol. jehl.

$$V = \frac{v}{3}(\Delta + \sqrt{\Delta_1 \Delta_2} + \Delta') = \frac{v\Delta}{3} \left(1 + \frac{v_1 - v}{v_1} + \frac{(v_1 - v)^2}{v_1^2} \right),$$

$$V = \frac{v\Delta}{3} \frac{3v_1^2 - 3v_1v + v^2}{v_1^2}.$$

10. Řešil p. *Frant. Matějka*, studující VII. tř. I. r. v Brně.

Pravidelný s -stěn omezený n -úhelníky má $\frac{sn}{2}$ hran a $\frac{sn}{2} - s + 2$ rohů (podle věty Eulerovy). Spojíme-li každý vrchol se všemi ostatními, obdržíme $\frac{1}{2} \left(\frac{sn}{2} - s + 1 \right) \cdot \left(\frac{sn}{2} - s + 2 \right)$ spojnic.

Od toho odečteme $\frac{sn}{2}$ hran a $\frac{s \cdot n (n-3)}{2}$ stěnových úhlopříček. Dostaneme po krátké úpravě

$$U = \frac{1}{2} s \left(\frac{1}{2} n - 1 \right) \cdot \left[(s-4) \left(\frac{1}{2} n - 1 \right) - 1 \right] + 1.$$

11. Řešil p. *M. Baumann*, studující VIII. tř. rg. v Domažlicích.

Dané rovnice pišme:

$$\begin{aligned} ax + by &= 2xyz^2 \\ ax + cz &= 2xy^2z \\ by + cz &= 2x^2yz \end{aligned}$$

a položíme $u = -2xyz$. Můžeme tedy psáti:

$$\begin{aligned} ax + by + uz &= 0 \\ ax + uy + cz &= 0 \\ ux + by + cz &= 0 \end{aligned}$$

Systém těchto homogenních rovnic má nenulové řešení, jen když:

$$\begin{vmatrix} a & b & u \\ a & u & c \\ u & b & c \end{vmatrix} = 0,$$

t. j. $u^3 - u(ab + ac + bc) + 2abc = 0$.

Potom

$$x : y : z = \begin{vmatrix} b & u \\ u & c \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} u & a \\ c & a \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a & b \\ a & u \end{vmatrix}$$

čili

$$y = \frac{\begin{vmatrix} u & a \\ c & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b & u \\ u & c \end{vmatrix}} x = \frac{1}{m} x, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ a & u \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b & u \\ u & c \end{vmatrix}} = \frac{1}{n} x.$$

Poněvadž je konečně

$$xyz = -\frac{1}{2} u,$$

a podobně další.

$$x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} mnu}$$

12. Řešení autorovo: Budiž číslo psáno ve tvaru $a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots n^\nu$. Počet všech jeho dělitelů jest

$$p = (\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1) \dots (\nu + 1),$$

počítajíc v to 1 a dané číslo.

Mohou nastati tyto tři případy:

I. $2^\alpha \cdot 3^\beta < 100$, z čehož $\alpha \log 2 + \beta \log 3 < 2$ neboli $\beta < \frac{2 - 0,301 \alpha}{0,477}$ nebo $\beta < 4,193 - 0,631 \alpha$, a počet dělitelů je $p = (\alpha + 1)(\beta + 1)$.

| $\alpha =$ | $\beta <$ | $\beta =$ | Číslo | Počet dělitelů |
|------------|-----------|-----------|-----------------|----------------|
| 0 | 4,193 | 4 | 3^4 | $p = 5$ |
| 1 | 3,562 | 3 | $2 \cdot 3^3$ | $p = 8$ |
| 2 | 2,931 | 2 | $2^2 \cdot 3^2$ | $p = 9$ |
| 3 | 2,300 | 2 | $2^3 \cdot 3^2$ | $p = 12^*$ |
| 4 | 1,669 | 1 | $2^4 \cdot 3$ | $p = 10$ |
| 5 | 1,038 | 1 | $2^5 \cdot 3$ | $p = 12^*$ |

II. $2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma < 100$, $p = (\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)$.

| $\gamma =$ | $\alpha =$ | $\beta =$ | Číslo | Počet dělitelů |
|------------|------------|-----------|-----------------------|----------------|
| 1 | 0 | 2 | $3^2 \cdot 5$ | $p = 6$ |
| 1 | 1 | 2 | $2 \cdot 3^2 \cdot 5$ | $p = 12^*$ |
| 1 | 2 | 1 | $2^2 \cdot 3 \cdot 5$ | $p = 12^*$ |
| 1 | 3 | 0 | $2^3 \cdot 5$ | $p = 8$ |
| 1 | 4 | 0 | $2^4 \cdot 5$ | $p = 10$ |

III. $2^a \cdot 3^b \cdot 7^c < 100$, $p = (a + 1)(b + 1)(c + 1)$.

| $\gamma =$ | $a =$ | $\beta =$ | Číslo | Počet dělitelů |
|------------|-------|-----------|-----------------------|----------------|
| 1 | 2 | 1 | $2^2 \cdot 3 \cdot 7$ | $p = 12^*$ |

Hvězdičky značí největší počet dělitelů příslušných čísel; jsou to čísla $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$, $2^3 \cdot 3^2 = 72$, $2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$, $2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90$, $2^5 \cdot 3 = 96$, která mají všechna 12 dělitelů, počítajíc v to 1 i dané číslo.

13. Řešil p. *Josef Kubín*, studující VIII. tř. rg. v Hlučíně.

Zvolme si na křivce $f(x, y) = 0$ bod $A(x_1, y_1)$ a proložme jím kolmici k dané přímce. Směrnice kolmice $k_1 = p/q$. Rovnice kolmice pak je $px - qy + qy_1 - px_1 = 0$. Jejich průsečík má souřadnice

$$P \left(\frac{pq^2 - pqy_1 + p^2x_1}{p^2 + q^2}, \frac{q^2y_1 - pq \cdot x_1 + p^2q}{p^2 + q^2} \right).$$

Hledáme bod, který je souměrně sdružen podle dané přímky k bodu A . Jeho souřadnice jsou

$$x_2 = \frac{2pq(q - y_1) + x_1(p^2 - q^2)}{p^2 + q^2}, \quad y_2 = \frac{y_1(q^2 - p^2) + 2pq(p - x_1)}{p^2 + q^2}.$$

Hledaná křivka má rovnici:

$$f \left(\frac{2pq(q - y) + x(p^2 - q^2)}{p^2 + q^2}, \frac{2pq(p - x) + y(q^2 - p^2)}{p^2 + q^2} \right) = 0.$$

14. Řešil p. *M. Baumann*, studující VIII. tř. rg. v Domažlicích.

U paraboly $y'^2 = 2px'$ provedme transformaci (I) a (II) a obdržíme paraboly, jejichž osy jsou kolmé a vrcholy pevné, ať φ nabývá libovolných hodnot.

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \varphi + y \sin \varphi, \\ y' &= -x \sin \varphi + y \cos \varphi. \end{aligned} \quad (\text{I})$$

$$\begin{aligned} x' &= (x - 1) \cos(R + \varphi) + (y - 1) \sin(R + \varphi), \\ y' &= -(x - 1) \sin(R + \varphi) + (y - 1) \cos(R + \varphi). \end{aligned} \quad (\text{II})$$

Dostaneme rovnice:

$$P_1 \equiv (-x \sin \varphi + y \cos \varphi)^2 = 2p(x \cos \varphi + y \sin \varphi),$$

$$P_2 \equiv [-(x - 1) \cos \varphi - (y - 1) \sin \varphi]^2 = 2p[-(x - 1) \sin \varphi + (y - 1) \cos \varphi].$$

Z nich sečtením dostáváme kružnici, která náleží do svazku, který je jimi určen.

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 \equiv K \equiv x^2 + y^2 - 2x(\cos^2 \varphi + \sin \varphi \cos \varphi + p \cos \varphi - p \sin \varphi) \\ - 2y(\sin^2 \varphi + \sin \varphi \cos \varphi + p \cos \varphi + p \sin \varphi) \\ + 1 + 2 \sin \varphi \cos \varphi + 2p \cos \varphi - 2p \sin \varphi = 0. \end{aligned}$$

Pro její poloměr $r^2 = 2p^2 + 4p \sin \varphi$. Tato rovnice vyjadřuje hledanou závislost.

15. Řešil p. *M. Baumann*, studující VIII. tř. rg. v Domažlicích.

Mnohočlen $f(x_i)$, jehož koeficienty jsou celá čísla reálná, musí se rovnat celému reálnému číslu, aby měl celistvá reálná řešení.

Tedy $f(x_i) = m$, kde m je celé reálné číslo. Potom $x^k/n = n \cdot m \pm 1$; pravá strana je číslo celé. Odtud $x^k = u \cdot n$, kde $u = m \cdot n \pm 1$; n a u jsou tedy čísla nesoudělná ≤ 0 . Je tedy: $|u| = v^k$ a $|n| = w^k$, c. b. d.

16. Řešil p. *Arnošt Knöplmacher*, studující VIII. a tř. rg. v Trenčíně.

Počet absolutních permutací z n prvků označme P'_n . Permutací z n prvků dostáváme n skupin, z kterých má každá $(n-1)!$ členů. Prvá skupina, v které sa všechny členy počínají prvkem 1, nedává žádné absolutní permutace. V ostatních skupinách můžeme najít 2 druhy vyhovujících členů. Po prve tie, v kterých sa členy skupiny začínajú k -tým prvkem a prvok 1 je na k -tom mieste. Potom môžeme $(n-2)$ prvky absolutne permutovať. Takých členů je potom v skupine P'_{n-2} . Po druhé tie členy, kde prvok 1 nie je na k -tom mieste; potom môžeme $(n-1)$ prvků absolutne permutovať. Počet týchto je P'_{n-1} . Z toho plynie redukčný vzorec

$$P'_n = (n-1)[P'_{n-1} + P'_{n-2}].$$

Sčítajme výrazy:

$$\begin{aligned} P'_n &= (n-1)[P'_{n-1} + P'_{n-2}], \quad -P'_{n-1} = -(n-2)[P'_{n-2} + P'_{n-3}], \\ + P'_{n-2} &= + (n-3)[P'_{n-3} + P'_{n-4}], \quad -P'_{n-3} = -(n-4)[P'_{n-4} + \\ &\quad + P'_{n-5}] \text{ atď. až} \\ (-1)^n \cdot P'_3 &= (-1)^n [P'_2 + P'_1]. \end{aligned}$$

(Platí: $P'_1 = 0$, $P'_2 = 1$.) Po upravení dostáváme:

$$P'_n = nP'_{n-1} + (-1)^n.$$

Dosaďme za $P'_{n-1} = (n-1)P'_{n-2} + (-1)^{n-1}$, do vzniklého výrazu dosaďme za P'_{n-2} a tým istým spôsobom pokračujme až dovtedy, keď dostaneme P'_1 . Po snadnej úprave potom dostáváme

$$P'_n = n! \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right].$$

17. Řešil p. *Jos. Kubin*, studující VIII. tř. rg. v Hlučíně.

Uvažujme nejprve, že bod je vržen v rovině (xz) pod úhlem α rychlostí c , pak

$$\begin{aligned} x &= c \cdot t \cdot \cos \alpha, \\ z &= c \cdot t \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2. \end{aligned}$$

Vyloučením t dostaneme

$$z = x \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{2}g \frac{x^2}{c^2 \cos^2 \alpha}. \quad (1)$$

Tato rovnice představuje systém parabol o parametru α . Obálku dostaneme, derivujeme-li rovnici parciálně podle α a z obou rovnic vyloučíme α .

Dostaneme

$$x^2 = -\frac{2c^2}{g} \left(z - \frac{c^2}{2g} \right).$$

Z toho plyne, že obálku tvoří parabola o vrcholu $V(x = 0, z = c^2/2g)$. Rovnice rotačního paraboloidu o ose z , vně kteréhož se musíme nacházeti, abychom nebyli zasaženi, zní

$$x^2 + y^2 = -\frac{2c^2}{g} \left(z - \frac{c^2}{2g} \right).$$

Pro vrcholy parabol systému (1) je

$$x_V = \frac{c^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{g}, \quad z_V = \frac{c^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Pro ohniska

$$x_F = \frac{c^2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{g}, \quad z_F = \frac{-c^2 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)}{2g}.$$

Vyloučíme-li α ze souřadnic vrcholu, dostaneme

$$\frac{x^2}{\left(\frac{c^2}{2g}\right)^2} + \frac{\left(z - \frac{c^2}{4g}\right)^2}{\left(\frac{c^2}{4g}\right)^2} = 1.$$

Tedy hledaným geom. místem vrcholů parabol, je-li bod vržen v rovině (xz) , je *elipsa*, pro kterou $a = \frac{c^2}{2g}$, $b = \frac{c^2}{4g}$ a střed $S\left(0; \frac{c^2}{4g}\right)$.

Podobně vyloučíme-li α ze souřadnic x_F, y_F , dostaneme

$$x^2 + y^2 = \frac{c^4}{4g^2}.$$

Tedy geometrické místo ohnisek parabol, jsou-li body vrženy v rovině (xz) , je *kružnice* se středem v daném bodě a poloměrem $r = \frac{c^2}{2g}$.

18. Řešil p. *Josef Kubín*, studující VIII. tř. rg. v Hlučíně.

Zvolme libovolnou přímku procházející těžištěm za souřadnou osu x . Pak vzdálenosti vrcholů od dané přímky budou jejich souřadnicemi y . Pro těžiště platí $y_T = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$. V našem případě tedy $y_1 + y_2 + y_3 = 0$. Tedy: Algebraický součet vzdáleností vrcholů trojúhelníka od každé přímky procházející těžištěm je roven nule. Tedy také od přímky Eulerovy.

19. Řešil p. *Juraj Haščík*, studující VII. tr. r. v Žilíně.

Pata kolmice spuštěné z bodu rovnoosé hyperboly na imag. osu má od vrcholu na hlavní ose vzdálenost $\sqrt{a^2 + y_M^2} = x_M$. Tedy: Kružnice, která má patu za střed a prochází uvažovaným bodem, prochází vrcholy hyperboly. Sestrojíme-li tyto kružnice pro dané body, dostaneme v jejich průsečících vrcholy hyperboly.

20. Řešil p. *Arnošt Knöpfmayer*, studující VIII. tř. rg. v Trenčíně.

Dve strany a nimi uzavřený uhol dávají nepremenný trojúhelník. Teraz treba určit maximálny štvoruholník, ktorého strany známe. Obsah štvoruholníka môžeme vyjadriť súčtom obsahov obidvoch trojúhelníkov oddelených uhläpriečkou f :

$$O = \frac{1}{2} (ad \sin \alpha + bc \sin \gamma).$$

Vypočítajme Carnotovou vetou f^2 z obidvoch trojuholníkov, obidva výrazy porovnajme a upravme:

$$2ad \cos \alpha - 2bc \cos \gamma = a^2 + d^2 - b^2 - c^2.$$

Štvornásobok rovnice vyjadrujúcej obsah a predchádzajúcu rovnicu umocníme dvoma a sčítajme ich. Po upravení dostávame

$$O^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cos^2 \frac{1}{2}(\alpha + \gamma),$$

kde $2s = a + b + c + d$. Obsah štvoruholníka bude maximálny, keď výraz $abcd \cdot \cos^2 \frac{1}{2}(\alpha + \gamma) = 0$. To nastane, keď $\alpha + \gamma = 180^\circ$, čiže keď štvoruholník bude tetivový.

21. Řešil p. *Boh. Ondráček*, studující IV. roč. uč. úst. v Praze II.

Znásobíme-li řadu x a odečteme od původní řady, obdržíme $S(1-x) = 3(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3x + 3 \cdot 4x^2 + 4 \cdot 5x^3 + \dots)$.

Označme

$$s = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3x + 3 \cdot 4x^2 + 4 \cdot 5x^3 + \dots$$

a opakujme týž postup jako s danou řadou; dostaneme

$$s(1-x) = 2(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots)$$

Znovu poloźme

$$\sigma = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots,$$

z níž jako nahoře obdržíme

$$\sigma(1-x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Z toho pak

$$\sigma = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Zpětným dosazováním dostaneme

$$S = \frac{6}{(1-x)^4}.$$

22. Řešil p. *Frant. Matějka*, studující VII. tř. I. r. v Brně.

Ortocentrum V a těžiště T a střed O kružnice opsané leží na jedné přímce, při čemž $\overline{VT} : \overline{TO} = 2 : 1$. Je-li bod Q střed těžnice t , jest $\overline{TQ} = \frac{1}{3}t$. Najdeme tedy těžiště a na těžnici vrchol a střed protější strany trojúhelníka. Dále užijeme výšky a kružnice opsané.

23. Řešil p. *M. Baumann*, studující VIII. tř. rg. v Domažlicích.

Dané rovnice pišme:

$$1296(3^{4x} - 2^{4y}) = 65 \cdot 3^{4x} \cdot 2^{4y}$$

$$216(3^{2x} - 2^{2y}) = 5 \cdot 3^{2x} \cdot 2^{2y}$$

Z nich dělením

$$6(3^{2x} + 2^{2y}) = 13 \cdot 3^x \cdot 2^y$$

$$(3 \cdot 3^x - 2 \cdot 2^y) \cdot (2 \cdot 3^x - 3 \cdot 2^y) = 0.$$

Odtud

$$\text{I. } 3^x = \frac{2}{3} 2^y$$

a po dosazení

$$2^4 = 2^{4y}$$

$$y = 1, x = 1;$$

II. $3^x = \frac{2}{3} \cdot 2^y$ má imag. řešení.

24. Řešil p. *Josef Kubín*, studující VIII. tř. rg. v Hlučíně.

Z dané rovnice plyne $\frac{y}{x} = \frac{\log y}{\log x}$. Protože řešení má být racionální,

musí být $\frac{y}{x} = n$ a $\log y = n \log x$, kde n je racionální číslo. Čili $x^{n-1} = n$. Tato rovnice pro racionální řešení v x dává: I. $n = 1$; $x = \text{lib. racionální číslo}$, $y = x$; II. $n = 2$, $x = 2$, $y = 4$; III. $n = 1 + \frac{1}{p}$ kde $|p| > 1$; je-li $p > 0$, je

$$x = \left(\frac{p+1}{p}\right)^p \quad y = \left(\frac{p+1}{p}\right)^{p+1}$$

Pro $p < 0$ x a y v posledním řešení se vymění.

25. Řešil p. *Arnošt Knöpflmacher*, studující VIII. a tř. rg. v Trenčíně.

Sud vznikne otáčením úseče paraboly s vrcholom $V(R, 0)$, osou v ose x a procházející bodem $M(r, \frac{1}{2}v)$, okolo osi y ; úseč je omezena pořadnicemi $y = -\frac{1}{2}v$, $y = +\frac{1}{2}v$. Rovnice paraboly je potom $y^2 = 2p(x - R)$, kde $p = \frac{v^2}{8(r - R)}$. Potom bude platit:

$$V = 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}v} x^2 dy = 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}v} \left(\frac{y^4}{4p^2} + \frac{Ry^2}{p} + R^2 \right) dy.$$

Vypočítáním tohoto integrálu a po dosazení za p , dostáváme po upravení:

$$V = \frac{1}{15} \pi v (8R^2 + 4Rr + 3r^2).$$

Z fyziky.

1. úl. *Řešení autorovo.*

Při centrálním kruhovém zatmění slunečním jest zdrojem světla mezikruží, jehož svítivost označme L' , kdežto svítivost celého kotouče slunečního jest L .

a) Při stejnoměrné plošné svítivosti povrchu slunečního svítivosti mají se k sobě jako plochy:

$$\frac{L}{L'} = \frac{978^2}{1861 \cdot 95} = 5,413 = \frac{100}{18,5}.$$

Je tedy světelná ztráta 81,5%.

b) Ubývá-li plošné jasnosti od středu slunečního kotouče k okraji, nutno veličiny L a L' stanoviti integrací. Položíme-li poloměr Slunce = 1, jest vzdálenost libovolného bodu od středu kotouče = $\sin \gamma$ a tudíž plocha elementárního mezikruží:

$$\Delta M = \pi [\sin \gamma + \sin(\gamma + \Delta\gamma)] \cdot [\sin \gamma - \sin(\gamma + \Delta\gamma)].$$

Ježto $\lim \Delta\gamma = 0$, jest

$$dM = 2\pi \sin \gamma d(\sin \gamma) = 2\pi \sin \gamma \cos \gamma d\gamma$$

a tudíž intenzita elementárního mezikruží

$$dL = \frac{2}{3} I_0 (1 + \frac{2}{3} \cos \gamma) \cdot 2\pi \sin \gamma \cos \gamma d\gamma.$$

Integraci v mezích 0 až 90 obdržíme odtud

$$L = \frac{1}{3}\pi I_0 \int_0^{\pi/2} [1 + \frac{2}{3} \cos \gamma] \sin \gamma \cos \gamma \, d\gamma = \frac{1}{3}\pi I_0.$$

Pro obvod Měsíce jest $\sin \gamma_m = 1766/1955 = 0,903$ a z toho $\gamma_m = 64^\circ 34'$. Jest tedy

$$L' = \frac{1}{3}\pi I_0 \int_0^{\pi/2} [1 + \frac{2}{3} \cos \gamma] \sin \gamma \cos \gamma \, d\gamma = \frac{2}{3}\pi I_0 \cdot 0,2636$$

a tudíž

$$L/L' = 2/0,2636 = 100/13,2,$$

t. j. světelná ztráta 86,8%.

2. úl. Řešil p. *Jan Navrátil*, VIII. rg., Litovel.

Označme dolní základnu lichoběžníka a , horní základnu b , výšku lichoběžníka v a vzdálenost těžiště od dolní základny x . Lichoběžník můžeme rozdělit známým způsobem na rovnoběžník a trojúhelník. Těžiště rovnoběžníka leží v průsečíku jeho úhlopříček a je vzdáleno od dolní základny o $\frac{1}{3}v$. Těžiště trojúhelníka je ve třetině výšky. Podle věty Varignonovy platí, že $(P_1 + P_2)x = P_1 \cdot \frac{1}{3}v + P_2 \cdot \frac{1}{2}v$, při čemž $P_1 = \frac{1}{2}(a - b) \cdot v$, $P_2 = b \cdot v$. Po dosazení a úpravě plyne, že $x = \frac{1}{3}v \cdot \frac{a + 2b}{a + b}$ a úměra $x : (v - x) = (\frac{1}{2}a + b) : (a + \frac{1}{2}b)$.

3. úl. Řešil p. *Anton Huta*, VIII. rg., Bratislava.

Na povrchu zemském, totiž ve vzdálenosti R od středu, je urýchlenie g , vo výške x (totiž vo vzdálenosti $R + x$ od středu) je urýchlenie g' . Doba kyvu kyvadla je daná vzorcem $T = \pi\sqrt{l/g}$, vo výške x je $T' = \pi\sqrt{l/g'}$. Urýchlenia ubýva so štvorcem vzdálenosti; z toho vyplýva, že $(R + x)^2 : R^2 = g : g' = \pi^2 l/T^2 : \pi^2 l/T'^2 = T'^2 : T^2$, čiže $(R + x) : R = T' : T$. Upravením úmery dostaneme $x = R(T'/T - 1)$.

4. úl. Řešil p. *Boh. Ondráček*, IV. uč. úst., Praha II.

Do vzorce pro dobu kyvu

$$T = \pi\sqrt{\frac{K}{Mg}}$$

dosadíme za moment setrvačnosti

$$K = \frac{2}{3}m_1r_1^2 + m_1\varrho_1^2 + \frac{2}{3}m_2r_2^2 + m_2\varrho_2^2,$$

za hmotu

$$M = m_1 + m_2$$

a za vzdálenost těžiště od závěsu

$$a = \frac{m_1\varrho_1 + m_2\varrho_2}{m_1 + m_2}.$$

Je tudíž

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{\frac{2}{3}m_1r_1^2 + m_1\varrho_1^2 + \frac{2}{3}m_2r_2^2 + m_2\varrho_2^2}{m_1\varrho_1 + m_2\varrho_2}},$$

$$\frac{dT}{d\varrho_2} = \frac{\pi}{\sqrt{g}} \frac{2m_2\varrho_2(m_1\varrho_1 + m_2\varrho_2) - (\frac{2}{3}m_1r_1^2 + m_1\varrho_1^2 + \frac{2}{3}m_2r_2^2 + m_2\varrho_2^2)m_2}{(m_1\varrho_1 + m_2\varrho_2)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{\frac{2}{3}m_1r_1^2 + m_1\varrho_1^2 + \frac{2}{3}m_2r_2^2 + m_2\varrho_2^2}{m_1\varrho_1 + m_2\varrho_2}}}$$

Z podmínky pro extrém $\frac{dT}{d\varrho_2} = 0$ plyne

$$m_2 \varrho_2^2 + 2m_1 \varrho_1 \varrho_2 - \frac{2}{3} m_1 r_1^2 - m_1 \varrho_1^2 - \frac{2}{3} m_2 r_2^2 = 0,$$

$$(\varrho_2)_{1,2} = -\frac{m_1}{m_2} \varrho_1 \pm \sqrt{\frac{m_1}{m_2} \left(\frac{m_1}{m_2} + 1 \right) \varrho_1 + \frac{2}{3} \left(\frac{m_1}{m_2} r_1^2 + r_2^2 \right)}.$$

Positivní kořen odpovídá poloze mezi bodem závěsu a koulí prvou, negativní kořen poloze na opačné straně (nad závěsem). Hmoty drátu nebyla vzata v úvahu.

5. úl. Řešil p. *Martin Baumann*, VIII. rg., Domažlice.

Kinetická energie bodu dopadlého z nekonečna by byla rovna práci vykonané na dráze z nekonečna až na povrch země, t. j. do vzdál. R od středu země. Hmoty země M .

$$\frac{1}{2} m v^2 = - \int_{\infty}^R k \frac{Mm}{x^2} dx,$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = k \frac{Mm}{R}.$$

Ježto:

$$k \frac{Mm}{R^2} = mg, \quad v = \sqrt{2gR}, \quad v = 11,18 \text{ km/sec.}$$

6. úl. Řešil p. *Martin Baumann*, VIII. rg., Domažlice.

Tyč má délku $2y$ a hmotu M . x je vzdálenost těžiště od osy kývání, K moment setrvačnosti tyče vzhledem k ose kyvu.

$$K = \frac{1}{3} M (y^2 + 3x^2), \quad T = \sqrt{\frac{K}{Mgx}} = 1$$

$$\frac{K\pi^2}{Mgx} = T^2 = 1$$

$$\frac{\pi^2}{g} \frac{y^2 + 3x^2}{3x} = 1$$

$$y^2 + 3x^2 - 3x \frac{g}{\pi^2} = 0$$

$$\frac{y^2}{\left(\frac{g\sqrt{3}}{2\pi^2}\right)^2} + \frac{(x - g/2\pi^2)^2}{\left(\frac{g}{2\pi^2}\right)^2} = 1$$

Poněvadž druhý zlomek je kladný, jest

$$y < \frac{g}{2\pi^2} \sqrt{3}.$$

Délka tyče musí být menší než

$$g \sqrt{3}/\pi^2 = 170 \text{ cm.}$$

Dodatek podle řešení *autorova*:

Z rovnice $y^2 + 3x^2 - 3x \frac{g}{\pi^2} = 0$ plyne, že

$$2x_{1,2} = \frac{g}{\pi^2} \pm \sqrt{\frac{g^2}{\pi^4} - \frac{4y^2}{3}}.$$

Poněvadž však $y > x$, je

$$2y > \frac{g}{\pi^2} \pm \sqrt{\frac{g^2}{\pi^4} - \frac{4y^2}{3}}$$

Po úpravě vychází $y > \frac{3}{4} \frac{g}{\pi^2}$. Je tedy délka tyče větší než $\frac{3}{4} \frac{g}{\pi^2} \doteq 150$ cm.

7. úl. Řešení *autorovo*.

Zrychlení padající nádoby jest dáno výrazem: $\gamma = g(\sin \alpha - k \cos \alpha)$. Poněvadž na částice vodní na hladině působí tíže mg svisle a z této síly přichází k platnosti jen složka $m\gamma$ rovnoběžná s délkou nakloněné roviny, přichází tím nazmar síla, jež se rovná vektorovému rozdílu sil mg a $m\gamma$. Tento rozdíl jest roven výslednici sil mg a síly $-m\gamma$ působící rovnoběžně s délkou nakloněné roviny směrem vzhůru. Hladina vodní jest pak na tuto výslednici kolmá.

Označíme-li úhel, jež tvoří hladina vodní v nádobě s rovinou vodorovnou, β , tu platí:

$$g : \gamma = \cos(\beta - \alpha) : \sin \beta,$$

čili

$$g/\gamma : 1 = (\cotg \beta \cos \alpha + \sin \alpha) : 1,$$

z čehož

$$g/\gamma = \cotg \beta \cos \alpha + \sin \alpha.$$

Dosadíme-li za

$$\frac{g}{\gamma} = \frac{1}{\sin \alpha - k \cos \alpha},$$

obdržíme z předchozí rovnice

$$\cotg \beta = \frac{\cos \alpha + k \sin \alpha}{\sin \alpha - k \cos \alpha}.$$

Položíme-li $k = \tg \varrho$, tu obdržíme:

$$\begin{aligned} \cotg \beta &= \cotg(\alpha - \varrho) \\ \beta &= \alpha - \varrho. \end{aligned}$$

t. j.

8. úl. Řešení *autorovo*.

Dopadne-li krychle na příčku rychlostí v , pak nastane ráz, následkem jehož počne se krychle otáčeti úhlovou rychlostí ω ; abychom tuto určili, uijíme věty, že otáčecí moment hybnosti kol hrany při rázu musí rovnati se otáčejícímu momentu hybnosti po rázu. Moment hybnosti při rázu jest $Mv \cdot \frac{1}{2}a$, značí-li M hmotu krychle a a její hranu. Moment hybnosti po rázu jest ωK , značí-li K moment setrvačnosti krychle kol hrany. Platí tedy

$$\frac{1}{2}Mv a = \omega K = \frac{1}{8}Ma^2\omega,$$

z čehož

$$\omega = \frac{4}{3}v/a.$$

Nemá-li se krychle po rázu překloupiti, musí její živá síla po rázu, která jest

$$\frac{1}{8}\omega^2 K = \frac{1}{8}\frac{1}{2}v^2/a^2 \cdot \frac{1}{8}Ma^2 = \frac{1}{16}Mv^2,$$

býti menší než práce, jež jest nutná, aby těžiště krychle stouplo o výši

$$\frac{1}{2}a\sqrt{2} - \frac{1}{2}a\sqrt{2} \cos 15^\circ = \frac{1}{2}a\sqrt{2}(1 - \cos 15^\circ) = a\sqrt{2} \sin^2 7,5^\circ.$$

Práce k tomuto stoupnutí těžiště vynaložená jest $a\sqrt{2} Mg \sin^2 7,5^\circ$.

Musí proto platiti

$$\frac{1}{16}Mv^2 \leq a\sqrt{2} Mg \sin^2 7,5^\circ,$$

t. j.

$$v^2 \leq \frac{1}{2}a\sqrt{2} g \sin^2 7,5^\circ.$$

Poněvadž vztah mezi rychlostí a výší h jest $v^2 = 2gh$, jest proto nutno, aby

$$h \leq \frac{1}{4}a\sqrt{2} \sin^2 7,5^\circ.$$

9. úl. Řešil p. *Martin Baumann*, VIII. rg., Domažlice.

$$a) \alpha) \quad x = \sin \varphi = \sin \frac{2\pi}{T} t, \quad y = \sin 2\varphi = \sin \frac{4\pi}{T} t.$$

Aby rychlost byla 0, je nutno, aby současně

$$\frac{dx}{dt} = 0 \text{ a } \frac{dy}{dt} = 0.$$

Takový bod není.

a) $\beta)$ Zrychlení jsou obě současně rovna nule jen pro počátek.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{4\pi^2}{T^2} \sin \frac{2\pi}{T} t = 0 \text{ pro } t = 0, \frac{1}{2}T, T, \frac{3}{2}T, \dots$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{16\pi^2}{T^2} \sin \frac{4\pi}{T} t = 0 \text{ pro } t = 0, T, \frac{1}{2}T, \frac{3}{2}T, T, \dots$$

$$b) \alpha) \quad x = \sin \varphi = \sin \frac{2\pi}{T} t, \quad y = \sin 3\varphi = \sin \frac{6\pi}{T} t.$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2\pi}{T} \cos \frac{2\pi}{T} t = 0 \text{ pro } t = \frac{1}{4}T, \frac{3}{4}T, \frac{5}{4}T, \dots$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{6\pi}{T} \cos \frac{6\pi}{T} t = 0 \text{ pro } t = \frac{1}{3}T, \frac{2}{3}T, \frac{4}{3}T, \dots$$

Současně jsou obě derivace rovny nule pro $t = \frac{1}{4}T, \frac{3}{4}T, \frac{5}{4}T, \dots$ Souřadnice příslušných bodů jsou $x = \pm 1, y = \mp 1$.

$$b) \beta) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{4\pi^2}{T^2} \sin \frac{2\pi}{T} t = 0 \text{ pro } t = 0, \frac{1}{2}T, T, \frac{3}{2}T, 2T, \dots$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{36\pi^2}{T^2} \sin \frac{6\pi}{T} t = 0 \text{ pro } t = 0, \frac{1}{6}T, \frac{1}{3}T, \frac{1}{2}T, \frac{2}{3}T, \frac{5}{6}T, T, \dots$$

Současně jest

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2} = 0 \text{ pro } t = 0, \frac{1}{2}T, T, \frac{3}{2}T, 2T, \dots$$

Všem hodnotám T odpovídá počátek.

10. úl. Řešil p. *Boh. Ondráček*, IV. uč. úst., Praha II.

Označme výšku kapaliny h (v okamžiku t). Za dobu dt činí úbytek kapaliny $q dh$, takže

$$-q dh = q\sqrt{2gh} dt,$$

při čemž $\sqrt{2gh}$ je výtoková rychlost určená Torricelliovým zákonem. Separujíc proměnné obdržíme diferenciální rovnici

$$-\frac{dh}{2\sqrt{h}} = \frac{q'}{q} \sqrt{\frac{g}{2}} dt.$$

Po integraci jest $-\sqrt{h} = \frac{q'}{q} \sqrt{\frac{g}{2}} t + c$.

Konstantu c určíme z podmínky, že v čase $t = 0$ je výška $h = h_0$, takže $c = -\sqrt{h_0}$, tedy

$$\sqrt{h} = \sqrt{h_0} - \frac{q'}{q} \sqrt{\frac{g}{2}} t.$$

Umocníme a upravíme na

$$h_0 - h = \frac{q'}{q} \sqrt{2gh_0} \cdot t - \frac{q'^2}{q^2} \cdot \frac{g}{2} t^2,$$

kde $h_0 - h = s$ značí, oč bod klesne za dobu t . Z rovnice je patrné, že bod koná pohyb rovnoměrně zpožděný. Počáteční rychlost jest $q' \sqrt{2gh_0}/q$, zpoždění $q'^2 g/q^3$.

Z deskriptivní geometrie.

1. úl. Řešil p. *Ferd. Vitáček*, studující V. b tř. rg. v Praze XVI.

Proložme každou ze tří mimoběžek rovinu rovnoběžnou s osou; její poloha je udána čtvrtou mimoběžkou. Tyto tři roviny se protnou ve třech rovnoběžkách. Protněme je rovinou čtvrtou kolmou na směr osy. Tato protíná ostatní tři roviny v trojúhelníku. Středem kružnice dotýkající se stran tohoto trojúhelníka prochází osa. Úloha je čtyřznačná.

2. úl. Řešil p. *M. Baumann*, studující VIII. tř. rg. v Domažlicích.

Vrchol kužele je na kružnici ležící v rovině σ , proložené osou elipsy kolmo na její rovinu. Poloměr kružnice je roven větší poloose a . Rovina σ protíná paraboloid v hlavní parabole o parametru $2p = 2b^2/a$; spojnice vrcholu kužele se středem elipsy je sdružený průměr ke směru hlavní osy elipsy. Spojnici určíme úhlem φ , který svírá s rovinou elipsy. Pro něj platí vztah: $\sin \varphi = b/a$.

Tím je parabola určena dvěma tečnami s body dotyku. Jejím otočením kolem osy vznikne hledaný paraboloid. Úloha je obecně čtyřznačná.

3. úl. Řešila sl. *Libuše Doležalová*, stud. VII. tř. r. v Bratislavě.

Hledaná koule a její stín budou souměrné podle roviny ρ , kolmé k π a procházející o . Proto svítící bod bude ležeti na průsečíku přímky s s ρ . Průměr koule bude vzdálenost bodu S od π . Má-li se parametr paraboly rovnat $2r$, bude se koule dotýkati kolmice s bodu S na π spuštěné; ohniskem stínu bude bod, v kterém se koule dotýká π .

4. úl. Řešil p. *Frant. Matějka*, studující VII. tř. I. r. v Brně.

Budiž površka a , rovina řezu ρ , vrchol rovnoosé hyperboly M . Hledaný kužel K , jehož vrcholový úhel bude pravý, myslíme si posunutý směrem površky a tak, aby jeho vrchol připadl do průsečíku V' přímky a s rovinou ρ , která jest nyní rovinou osového řezu posunutého kužele K' . Osa o' kužele K' jest přímka, ve které rovinu ρ protíná rot. kužel o ose a , o vrcholu V' a o vrcholovém úhlu pravém. Přímka m vedená bodem M rovnoběžně s o' jest hlavní osou rovnoosé hyperboly a rovina ρ kolmá k φ proložená přímkou m protíná površku a ve vrcholu V hledaného kužele K . Úloha jest obecně dvojnásobná.

5. úl. Řešil p. *Fr. Wergner*, studující VII. r. v Praze X.

A. Označíme-li střed světla Σ , jsou tečny vedené ze šikmého průmětu Σ k šikmému obrysu o plochy kulové dvě tečny šikmého průmětu meze vlastního stínu. Jejich body dotyku s o (které lze jednoduše přesně stanovit), jsou dotyčné body těchto tečen s mezí vl. stínu, neboť jsou to dotyčné body tečných rovin světelných, současně promítacích.

Další body meze vlastního stínu určíme pomocí dotyčných ploch válcových, opsaných kulové ploše směrem souřadných os. Do rovin rovnoběžných s rovinami souřadnými a procházejícími středem koule promítneme bod Σ . Z průmětů vedeme tečny k příslušným průsečným křivkám. Dotyčné body jsou body meze vlastního stínu příslušné plochy válcové a tedy také meze vlast. stínu plochy kulové.

Jest výhodné sestrojiti tyto body pro válec rovnoběžný s y , neboť příslušná dotyčná křivka se promítá jako kružnice.

Ze dvou tečen s body dotyku a jednoho dalšího bodu sestrojíme kuželosečku, v našem případě elipsu, velmi jednoduše kolineací. Libovolná kružnice dotýkající se dvou tečen je kolineární s hledanou kuželosečkou. Σ je střed kolineace. Osu kolineace určíme, vyhledáme-li dvě dvojice přiřazených přímek. Jedna je spojnicí dotýčných bodů a přiřazená přímka, druhá je spojnicí dalšího bodu s jedním bodem dotyku a přiřazená přímka. Kolineace je potom úplně určena středem, osou a párem sdružených bodů.

Vržený stín na libovolnou souřadnou rovinu dotýká se rovněž (v průmětu) tečen vedených z bodu Σ k obrysu σ . Můžeme pro něj získati ihned průměr a tedy střed, užijeme-li věty Quetelet-Dandelinovy. Kuželosečku určenou dvěma tečnami a průměrem lze jednoduše sestrojiti kolineací, jde-li o elipsu, pak afinitou. (Daný průměr je osou, směr je spojnice průsečíku tečen s bodem, který mu odpovídá.)

B. Konstrukce uvedené v A. platí i pro osvětlení rovnoběžné. Poněvadž při konstrukci meze vlastního stínu dostaneme přímo průměr a směr sdruženého a další bod, užijeme ke konstrukci elipsy afinity.

Seznam řešitelů úloh.

Bachleba Jos., VI. rg., Kežmarok, m.: 8, f.: 3, 8; *Baumann Martin*, VIII. rg., Domažlice, m.: 1—5, 7—15, 17—25, f.: 2, 3, 5, 6, 8, 9, dg.: 1—4; *Doležalová Libuše*, VII. r., Bratislava, dg.: 1—5; *Dřízga Cyril*, VII. rg., Místek, m.: 1, 3, 5, 7, 8, 10, 13, 16, 18, 23, 24, 25, f.: 1, 2, 5, 6, 8; *Haščík Juraj*, VII. r., Žilina, m.: 18, 19, 21, 22; *Huťa Ant.*, VIII. rg., Bratislava, m.: 8, 10, 12, 16, 21, 23, f.: 3, 5—8, 10; *Klíčková Jarm.*, VI. rg., Bratislava, m.: 1, 2, 7, 8; *Knöplmacher Arnošt*, VIII. rg., Trenčín, m.: 1—14, 16—25; *Kubín Josef*, VIII. rg., Hlučín, m.: 12, 13, 14, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24, dg.: 1, 4; *Matějka Frant.*, VII. r., Brno, m.: 1, 2, 8, 10, 19, 22, dg.: 1—4; *Mikolášik Ludevít*, VII. r., Žilina, m.: 2, 5, 8, 12, 21, 25, f.: 1—10, dg.: 2; *Minarič Janec*, VII. rg., Bratislava, m.: 8, 10, 12, 16, 21, 23, f.: 3, 5—8, 10; *Navrátil Jan*, VIII. rg., Litovel, m.: 8, 23, 25; *Ondrášek Bohuslav*, IV. roč. učit. ústav, Praha II, m.: 1, 5, 8, 21, 22, 23, f.: 1—4, 6—10; *Peciková Mar.*, VII. rg., Trenčín, m.: 8; *Vitáček Ferd.*, V. rg., Praha XVI, m.: 1, 2, 5, 7—10, f.: 3, dg.: 1; *Wergner Frant.*, VII. r., Praha X, dg.: 1—5.

Udělení cen.

Redakce přihlízejíc k jakosti a počtu řešených úloh, přisoudila těmto řešitelům ceny, vypsané výborem Jednoty československých matematiků a fysiků:

Z matematiky:

První cenu obdržel: *Martin Baumann*, VIII. rg., Domažlice a *Arnošt Knöpfmacher*, VIII. rg., Trenčín; druhou cenu obdržel *Jos. Kubín*, VIII. rg., Hlučín.

Z fysiky:

Obdržel ceny: *Boh. Ondráček*, roč. IV. učit. ústav, Praha a *Martin Baumann*, VIII. rg., Domažlice.

Z deskriptivní geometrie:

Obdržel ceny: *Libuše Doležalová*, VII. tř. r., Bratislava a *Frant. Wergner*, VII. tř. r., Praha X.

Z fondu Jaromíra Mareše:

Ceny obdržel: *Ferd. Vitáček*, V. tř. rg., Praha XVI a *Josef Kubal*, žák V. b třídy I. obecné chlapecké školy v Čes. Budějovicích, označený správou školy za nejlepšího počtáře.

Poznámka. Vypsání cen za provedení úloh z deskr. geometrie ve vzorných rysech nebylo uděleno.

Upozornění. Posledním výnosem MŠO obsahujícím předpisy pro výroční zprávy středních škol bylo znemožněno, aby ve výročních zprávách byly otištěny maturitní úlohy z deskriptivní geometrie. Redakce chce v příštím ročníku *Rozhledů* otisknouti vybrané takové úlohy. Obrací se proto na pány profesory deskriptiváře s prosbou, aby jí zasílali lístkem přesné texty úloh z deskr. geometrie, které byly letošního roku na jejich ústavě dány při zkouškách dospělosti a vzdává za to předem svůj dík. (Adresa redakce: Praha II, Vodičkova 20.)
