ROZHLEDY
MATEMATICKO-PŘÍRODOVĚDECKÉ.

ROČNÍK 12 (1932/33). ČÍSLO 2.

O kuželosečkách majících společné ohnisko.

Prof. *Ota Setzer*, Kralupy n. Vlt.

1. Z elementární teorie kuželoseček víme, že každou kuželosečku lze považovati za geometrické místo středů kružnic, jež procházejí pevným bodem F a dotýkají se pevné „řídicí" kružnice d opsané kolem středu G poloměrem r. Body F, G jsou ohniska kuželosečky a poloměr r délkou hlavní osy.

Pro $\left\{\begin{matrix}\text{elipsu}\\ \text{hyperbolu}\end{matrix}\right\}$ leží bod F $\left\{\begin{matrix}\text{uvnitř}\\ \text{vně}\end{matrix}\right\}$ kružnice d. Je-li bod G bodem úběžným, přechází řídicí kružnice d v řídicí přímku d' paraboly.

Dvě kuželosečky nazveme unikonfokálními, mají-li jedno ohnisko společné.

Mějme dvě unikonfokální kuželosečky k_1, k_2 o ohniscích F, G_1 resp. F, G_2 a délce hlavní poloosy a_1 resp. a_2. Hledejme jejich společné body.

Budiž bod P jeden takový průsečík. Ježto leží na k_1, jest středem kružnice l_1, jež prochází bodem F a dotýká se kružnice d_1 opsané poloměrem $r_1 = 2a_1$ kolem G_1; protože však P leží i na k_2, jest středem kružnice l_2, jež jdouc bodem F dotýká se kružnice d_2 opsané poloměrem $r_2 = 2a_2$ kolem G_2; kružnice l_1, l_2 majíce společný střed P a jeden bod F, jsou totožné. Dostaneme tedy průsečíky P_i kuželoseček k_1, k_2 jako středy kružnic, jež se dotýkají řídicích kružnic d_1, d_2 a jdou společným ohniskem F. To však jest úloha Apolloniova, kterou lze řešit inversí.

Budiž z základní kružnice opsaná kolem středu O poloměrem k a B libovolný bod. Pak k bodu B inversním rozumíme bod B', ležící na spojnici $\overline{BO}$, pro nějž platí

$$\overline{OB} \,.\, \overline{OB'} = k^2.$$

V inversi odpovídá kružnici nejdoucí středem O opět kružnice, kružnici procházející středem — přímka neprocházející středem. Úhly se při inversi zachovávají (příbuznost isogonální).

Aplikujme to na danou úlohu. Společné ohnisko F zvolme za střed inverse, poloměr základní kružnice z budiž libovolný. Inversními útvary k řídicím kružnicím d_1, d_2 jsou kružnice d'_1, d'_2. Hledané kružnici l jdoucí středem inverse odpovídá přímka l', jež se dotýká kružnic d'_1, d'_2. Sestrojíme proto společné tečny l'_i kružnic d'_1, d'_2, k nim inversní kružnice l_i a jejich středy P_i jsou hledanými průsečíky našich dvou unikonfokálních kuželoseček.

Protože existují obecně 4 společné tečny kružnic d'_1, d'_2, jsou obecně i čtyři průsečíky dvou kuželoseček, jak víme odjinud.

Je-li jedna z kuželoseček hyperbola, zvolíme pro zjednodušení poloměr základní kružnice z roven délce tečny z F k příslušné řídicí kružnici hyperboly. Potom inversí přejde tato kružnice v sebe samu.

Tažme se nyní po společných tečnách unikonfokálních kuželoseček.

Při řešení této úlohy užijeme fundamentální ohniskové vlastnosti kuželoseček: Body s jedním ohniskem středové kuželosečky souměrně položené podle všech jejich tečen, vyplňují kružnici opsanou kolem druhého ohniska poloměrem hlavní osy. U paraboly přechází tato kružnice v přímku řídicí.

U našich dvou unikonfokálních kuželoseček $k_1\,(F, G_1; a_1)$, $k_2\,(F, G_2; a_2)$ budiž bod F společným ohniskem a t společnou tečnou. Bod F' s ním souměrně položený podle t leží na řídicí kružnici d_1 kuželosečky k_1, současně i na řídicí kružnici d_2 druhé kuželosečky. Vyhledáme proto průsečíky F'_1, F'_2 kružnic d_1, d_2 a symetrály úseček $\overline{FF'}_1$, $\overline{FF'}_2$ jsou hledané společné tečny t_1, t_2 kuželoseček k_1, k_2.

Dvě kuželosečky mají obecně 4 společné tečny. Jsou-li unikonfokální, pak dvě ze společných tečen jsou vždy imaginární.

Jsou to samodružné paprsky pravoúhlé involuce, jíž ve společném ohnisku indukují obě unikonfokální kuželosečky. Reálnost ostatních dvou tečen závisí na vzájemné poloze ohnisek a délce hlavních os. V případě dvou nesouosých unikonfokálních parabol jest v konečnu vždy jen jedna reálná společná tečna.

O unikonfokálních kuželosečkách lze odvoditi řadu vět. Jako příklad uvádím:

„*Buďtež* $e_1\,(F_2, F_3;\, a_1)$, $e_2\,(F_1, F_3;\, a_2)$ *dvě unikonfokální elipsy. Pak hyperbola* $h\,(\overline{F}_1, F_2;\, a_3)$ *s oběma unikonfokální a jdoucí jedním jejich průsečíkem* X *prochází nutně i dalším průsečíkem* Y *obou elips. Bod* Y *jest druhé ohnisko jedné ze čtyř kuželoseček* k *určených ohniskem* X *a body* F_1, F_2, F_3.“

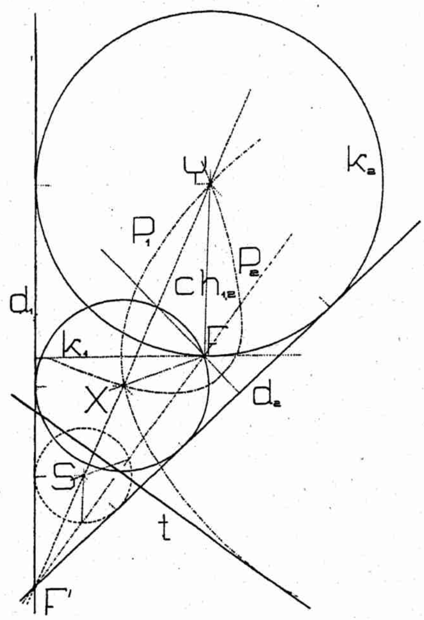
Protože jeden průsečík elips e_1, e_2 — X jest reálný, jest nutně reálný i druhý jejich průsečík Y. Vyjádřeme, že oba tyto body leží na elipsách:

$$\left.\begin{aligned}\overline{F_2X} + \overline{F_3X} &= \overline{F_2Y} + \overline{F_3Y}\\ \overline{F_1X} + \overline{F_3X} &= \overline{F_1Y} + \overline{F_3Y}\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Odečtením těchto rovnic plyne

$$\overline{F_1X} - \overline{F_2X} = \overline{F_1Y} - \overline{F_2Y} \quad (2)$$

což značí, že hyperbola h s ohnisky F_1, F_2 a procházející bodem X



Obr. 1.

jde i bodem Y, který leží na téže její větvi. Píšeme-li rovnice (2), (1) ve tvaru

$$\overline{F_1X} - \overline{F_1Y} = \overline{F_2X} - \overline{F_2Y} = \overline{F_3Y} - \overline{F_3X} \quad (3)$$

vidíme, že X, Y jsou ohniska kuželosečky k, jež jde body F_1, F_2, F_3.

Tento specielní případ dvou elips lze poněkud zevšeobecnit, což přenechávám píli čtenáře.

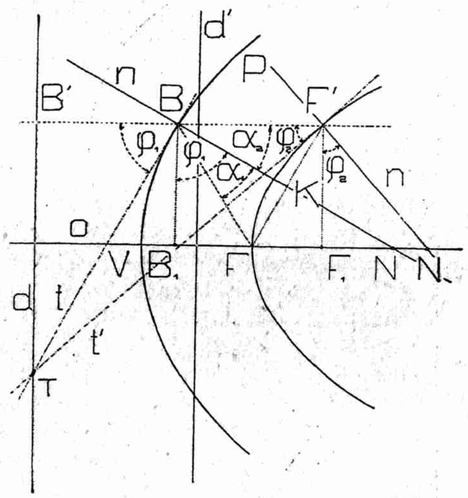
2. Vytkněme si nyní za úkol vyhledati společné elementy dvou parabol o témže ohnisku.

a) Společné body:

Přímky d_1, d_2 buďtež řídicími přímkami parabol P_1, P_2 o společném ohnisku F. Hledané průsečíky X, Y, ležíce na obou parabolách, musí býti od obou řídicích přímek i společného ohniska stejně vzdáleny. Jsou to tedy středy kružnic k_1, k_2, jdoucích bodem F a dotýkajících se přímek d_1, d_2. Elementární jejich konstrukce (na základě homothetie) plyne z obr. 1.

b) Věta o chordálách:

Předchozí úloha má dvě řešení: X, Y. Spojnici těchto průsečíků nazveme — analogicky jako u dvou kružnic — *chordálou.* Tato chordála půlí zřejmě úhel řídicích přímek d_1, d_2. Jsou-li nyní P_1, P_2, P_3 paraboly o společném ohnisku F a řídicích přímkách d_1, d_2, d_3,



Obr. 2.

jest osa úhlu $\widehat{d_1d_2}$ ($\widehat{d_2d_3}$, $\widehat{d_3d_1}$) chordálou $ch_{1,2}$ ($ch_{2,3}$, $ch_{3,1}$) parabol P_1P_2 (P_2P_3, P_3P_1). Z os úhlů volme vždy ty, které půlí úhel obsahující ohnisko F.

Chordály $ch_{1,2}$, $ch_{2,3}$, $ch_{3,1}$, jsouce osami úhlů trojúhelníku, procházejí jedním bodem. Odtud věta:

„Chordály tří parabol o společném ohnisku protínají se v jednom bodě.“

c) Společné tečny:

Při sestrojování společných tečen užijeme elementární věty:

„Body souměrně položené s ohniskem paraboly podle všech jejích tečen vyplňují přímku řídicí.“

Bod F' souměrně položený s ohniskem F podle společné tečny t leží na řídicí přímce d_1 a současně na d_2, tedy v jejich průsečíku. Jediná společná tečna t jest osou souměrnosti úsečky $\overline{FF'}$.

d) Pomocná věta:

Hledejme geometrické místo bodů souměrně sdružených s ohniskem paraboly podle všech jejích normál!

V libovolném bodě B paraboly P (d, F) sestrojme normálu n, která půlí vnitřní úhel průvodičů! (Obr. 2.) Bod F' souměrně položený s ohniskem F podle normály n leží na průvodiči bodu B.

$\triangle$ BFF' jest rovnoramenný: $\alpha_1 = \alpha_2$, $\overline{FK} = \overline{F'K}$, proto:

$$\overline{BF} = \overline{BF'}.$$

Z vlastnosti paraboly: $\overline{BF} = \overline{BB'}$.

Přirovnáním pravých stran: $\overline{BB'} = \overline{BF'}$,

neboli

$$\overline{B'F'} = 2\,.\,\overline{B'B}.$$

Geometrickým místem bodů F' jest proto křivka afinní k dané parabole podle osy d, směru o a poměru $2:1$. Z obr. 2 plyne

$$\operatorname{tg}\varphi_1 : \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{\overline{B'T}}{\overline{B'B}} : \frac{\overline{B'T}}{\overline{B'F'}} = \overline{B'F'} : \overline{BB'} = 2 : 1.$$

Subnormála paraboly se rovná parametru, proto

$$\operatorname{tg}\varphi_1 : \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{\overline{B_1N}}{\overline{BB_1}} : \frac{\overline{F_1N'}}{\overline{BB_1}} = p_1 : p_2.$$

Srovnáním

$$p_1 : p_2 = 2 : 1.$$

Jest proto geom. místem bodů F' parabola, jejímž vrcholem jest bod F a řídicí přímkou symetrála úsečky $\overline{VF}$.

e) Společné normály:

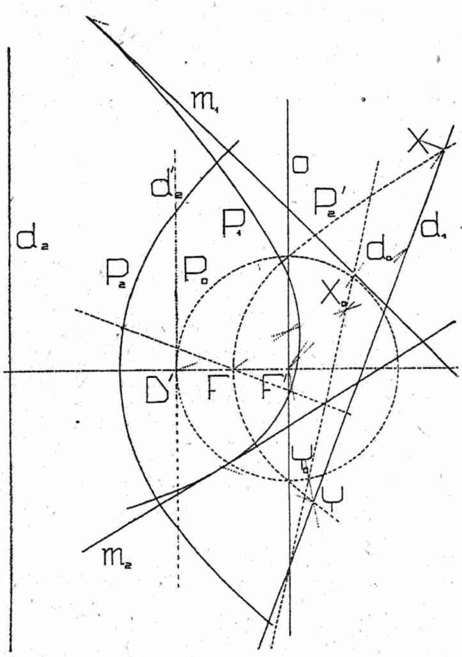
Užijme věty právě odvozené pro konstrukci společných normál parabol P_1 (d_1, F), P_2 (d_2, F)!

Sestrojíme parabolu P'_1 bodů souměrně sdružených s ohniskem F podle normál paraboly P_1 a analogickou křivku P'_2 (o témž vrcholu) pro parabolu P_2. Jejich průsečíky buďtež F, G_1, G_2, G_3 (G_2, G_3 mohou býti imaginární). Společná normála n_i jest symetrálou úsečky $\overline{FG_i}$.

f) Tečna jedné normálou druhé paraboly:

Hledejme přímky m, které se dotýkají paraboly P_1 (d_1, F) a jsou normálami paraboly P_2 (d_2, F)! Užijeme opět geometrických míst d_1 resp. P'_2 bodů souměrně položených s ohniskem F podle tečen paraboly P_1 resp. podle normál paraboly P_2. Vyšetříme průsečíky X, Y (reálné nebo imaginární) přímky d_1 s pomocnou parabolou P'_2. Symetrály úseček $\overline{FX}$, $\overline{FY}$ jsou hledané přímky.

Tuto úlohu lze řešiti pouhým pravítkem a kružítkem takto (obr. 3): Parabole $P'_2\,(d'_2, F')$ přiřaďme kolineární kružnici P_0 o středu F' a poloměru $\overline{F'D'}$. Středem kolineace jest F', osou přímka $o[F' \parallel d_2]$ a jednou družinou body F, D'. K přímce d_1 sestrojíme kolineární přímku d_0, vyhledáme její průsečíky X_0, Y_0



Obr. 3.

s kružnicí P_0 a k nim kolineárně sdružené body X, Y jsou hledanými průsečíky přímky d_1 s parabolou P'_2.

g) Analogie v prostoru:

Úvahy o společných bodech, tečnách, normálách lze aplikovati i na průsečíky, společné tečné roviny i normály tří rotačních paraboloidů o společném ohnisku, což přenechávám píli laskavého čtenáře.