Poznámka k dvojicím prvočísel s konstantním rozdílem.

Napsal *Karel Koutský*.

(Došlo 20. února 1932.)

Věta, kterou v této práci chci dokázati, zní:

Prvočísla p, pro něž $p + 2k$ (kdež $k \geqq 1$ jest dané celé číslo) jest rovněž prvočíslem, jsou tak řídce rozložena, že v řadě všech prvočísel (srovnaných podle velikosti vzestupně) nelze udati žádnou konstantu $c \geqq 1$ (c celé číslo) tak, aby mezi každou skupinou c sousedních prvočísel bylo aspoň jedno prvočíslo s žádanou vlastností.

Jinými slovy: V řadě všech prvočísel (srovnaných podle velikosti vzestupně) vyskytují se libovolně velké úseky, v nichž neleží ani jedno prvočíslo p, pro něž $p + 2k$ jest rovněž prvočíslem.

Důkaz: Východiskem jest tu věta, kterou jsem dokázal v práci: „Zobecnění Brunovy věty o prvočíslech", kterou jsem nedávno předložil čes. Akademii věd a umění v Praze. — Věta tato jest:

Existuje-li nekonečně mnoho prvočísel p, pro něž číslo $p + 2k$ (kdež $k \geqq 1$ jest dané celé číslo) jest rovněž prvočíslem, potom obě nekonečné řady:

$$\sum_p \frac{1}{p}, \text{ resp. } \sum_p \frac{1}{p + 2k}, \tag{1}$$

kdež součty vztahují se na prvočísla z dvojic o konstantním rozdílu $2k$, jsou konvergentní.

Nám se jedná hlavně o první z těchto řad.

Všechna prvočísla srovnaná podle velikosti vzestupně buďtež:

$$2 = p_1 < p_2 < p_3 < \ldots \text{ in inf.} \tag{2}$$

Dále pak σ_n nechť jest součet převratných hodnot těch prvočísel p ležících v intervalu

$$p_{c(n-1)} < p \leqq p_{cn}, \tag{3}$$

pro něž $p + 2k$ jest rovněž prvočíslem.

Předpokládáme-li existenci aspoň jednoho prvočísla p s žádanou vlastností mezi každou skupinou c sousedních prvočísel, potom z předešlé nerovnice plyne:

$$\frac{1}{p} \geqq \frac{1}{p_{cn}}$$

a tedy i

$$\sigma_n = \sum \frac{1}{p} \geqq \frac{1}{p} \geqq \frac{1}{p_{cn}}, \tag{4}$$

kdež součet Σ vztahuje se jen na prvočísla s žádanou vlastností, ležící v intervalu (3).

Tu však řada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n, \tag{5}$$

jsouc totožná s první z řad (1) — což snadno lze nahlédnouti — jest konvergentní. — Podle (4) pak ale i řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_{cn}}, \tag{6}$$

mající vesměs kladné členy, nutně by musela býti konvergentní. Dokáži však, že řada (6) jest divergentní pro každé c.

Je-li $c = 1$, pak řada (6) představuje součet převratných hodnot všech prvočísel a tato řada, jak známo jest divergentní.[1])

Budiž tedy $c > 1$. Pro r-té prvočíslo v řadě (2) pro $r > 1$ platí vztah[2])

$$p_r < a \,.\, r \,.\, \log r,$$

kdež a jest určitá konstanta. Poněvadž jest $c > 1$, jest jistě též $cn > 1$ a tedy platí

$$p_{cn} < a\, cn \log cn,$$

čili

$$\frac{1}{p_{cn}} > \frac{1}{ac} \cdot \frac{1}{n \log cn}. \tag{7}$$

Je-li nyní $u_n = \frac{1}{n \log cn}$, potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ současně konverguje nebo diverguje s řadou $\sum_{t=1}^{\infty} a^t \,.\, u_{a^t}$ pro každé $a > 1$.[3]) Tu jest:

---

[1]) Landau: Vorlesungen über Zahlentheorie. I. str. 69. věta 114. (Lipsko 1927.)

[2]) Tamtéž: str. 68., věta 113. $\log r$ jest přirozený logaritmus.

[3]) Petr: Počet diferenciální, str. 62. Praha 1923.