Základní rovnice pro časový rozpad statistických kolektivů.

Otomar Pankraz.

(Došlo 15. března 1933.)

V následujícím hodlám pokračovati v úvahách, které provedl p. prof. E. Schoenbaum v pojednání „*O jisté integrodifferenciální rovnici* (Rozpravy České akademie 1920)“. Obšírné propracování vyjde v časopisu československých pojistných matematiků „*Aktuárské vědy*“ pod názvem „*Zur Grundgleichung für den zeitlichen Zerfall der statistischen Kollektivs*“.

§ 1.

[1.] — Uvažujme konečné množství (soubor, souhrn, kolektiv) individuí s následujícími vlastnostmi:

1. Každé individuum má jako *znaky* přiřazena čísla *1, 2, . . ., n.*

2. V určitém okamžiku každé individuum může jen jediný znak ztratiti resp. znovu nabýti.

3. Ztráta znaku znamená *výstup* ze souhrnu, získání ztraceného znaku má za následek *návrat* do souhrnu.

Pozorujme toto množství v časovém období $0 \leq t \leq 1$ a hledáme počet $l(t, \tau)$ individuí, která v okamžiku t náležela do souhrnu po dobu τ.

Zřejmě

$l(0, 0)$ = počáteční stav (počet) individuí v souhrnu,
$l(t, 0) = l_0(t)$ = rozložení *prvého* vstupu do souboru,
$l(t, t)$ = rozložení individuí, která se *nezúčastní* rozpadu.

Z významu veličin plyne definiční obor

$$0 \leq \tau \leq t \leq 1.$$

Kromě toho definujeme: Je-li $l_0(t)$ *hladká* funkce (t. j. spojitá i se svojí první derivací), nazveme soubor *otevřeným.* Omezíme se na soubory tohoto typu.

[2.] — K popisu průběhu rozpadu použijeme funkcí ($i = 1, 2, \ldots, n$):

1. *Intensity výstupu:*

$\eta_i(t, \tau)$ = intensita, s níž *vystupuje* individuum ze souhrnu následkem ztráty znaku i; závisí na t a τ.

2. *Intensity návratu:* Individuum opustilo soubor následkem ztráty znaku i v okamžiku $u < t$ a doposud se nevrátilo.

$\varrho_i(t, u) =$ intensita, s níž se individuum *vrátí* do souhrnu následkem opětného získání znaku i právě v okamžiku t.

3. *Pravděpodobnosti pro nepřetržitý výskyt mimo souhrn:*

$\mathrm{p}_i(t, \xi) =$ pravděpodobnost, že individuum, které v okamžiku $\xi < t$ ztratilo znak i, jest v okamžiku t stále ještě (t. j. bez přerušení) beze znaku i.

§ 2.

Sestavení rovnice pro soubor otevřený. — *Předpoklad:* Popis rozpadu dán jest *hladkou* funkcí $\mathrm{l}(t, \tau)$.

Zvolme v oboru $0 \leq \tau \leq t \leq 1$ libovolný *vnitřní* bod (t, τ).

(I.) V $(t, t + \Delta t)$ nastanou změny: 1. vystoupí individuí

$$\mathrm{l}(t, \tau) \, . \left\{ \sum_{i=1}^{n} \eta_i(t, \tau) \right\} . \, \Delta t = \mathrm{A}(t, \tau) \, \Delta t;$$

2. přibudou individua, která v okamžiku $\xi < t$ vystoupila a doposud se nevrátila. Jejich počet jest

$$\Delta t \int_{\tau}^{t} \mathrm{l}(\xi, \tau) \, . \left\{ \sum_{i=1}^{n} \eta_i(\xi, \tau) \mathrm{p}_i(t, \xi) \, \varrho_i(t, \xi) \right\} d\xi = \mathrm{B}(t, \tau) \, . \, \Delta t.$$

(II.) Počet individuí, která v období $(t, t + \Delta t)$ byla v souhrnu, jest

$$\mathrm{l}(t + \Delta t, \, \tau + \Delta t) - \mathrm{l}(t, \tau).$$

Z (I.) a (II.)

$$\frac{\mathrm{l}(t + \Delta t, \, \tau + \Delta t) - \mathrm{l}(t, \tau)}{\Delta t} = \mathrm{B}(t, \tau) - \mathrm{A}(t, \tau).$$

Protože podle předpokladu $\mathrm{l}(t, \tau)$ jest hladká, lze použíti

$$\mathrm{l}(t + \Delta t, \, \tau + \Delta t) = \mathrm{l}(t, \tau) + \Delta t \left[\frac{\partial \mathrm{l}}{\partial t} + \frac{\partial \mathrm{l}}{\partial \tau} \right]_{t + \vartheta \Delta t, \, \tau + \vartheta \Delta t}$$

$$(0 < \vartheta < 1),$$

z čehož

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathrm{l}(t + \Delta t, \, \tau + \Delta t) - \mathrm{l}(t, \tau)}{\Delta t} = \frac{\partial \mathrm{l}(t, \tau)}{\partial t} + \frac{\partial \mathrm{l}(t, \tau)}{\partial \tau}.$$

Celkem tedy plyne rovnice typu (η, α jsou známé funkce)

$$\frac{\partial l}{\partial t} + \frac{\partial l}{\partial \tau} = l \,.\, \eta + \int_{\tau}^{t} l(\xi, \tau)\, \alpha(\xi, t, \tau)\, d\xi$$

s počáteční podmínkou

$$l(t, 0) = l_0(t).$$

§ 3.

Řešení rovnice

$$(+)\ldots \begin{cases} \dfrac{\partial l(t, \tau)}{\partial t} + \dfrac{\partial l(t, \tau)}{\partial \tau} = l(t, \tau)\,.\,\eta(t, \tau) + \lambda \displaystyle\int_{\tau}^{t} l(\xi, \tau)\, \alpha(\xi, t, \tau)\, d\xi \\ (0 \leq \tau \leq \xi \leq t \leq 1, \\ \lambda = \text{proměnlivý parametr obecně komplexní}). \end{cases}$$

Dokáže se *věta:*

V rovnici (+) buďtež η a α na svém definičním oboru *hladké* funkce. Kromě toho budiž na $0 \leq t \leq 1$ dána počáteční podmínka $l(t, 0) = l_0(t)$, při čemž $l_0(t)$ jest rovněž hladká funkce. Pak existuje jedna jediná funkce $l(t, \tau; \lambda)$, která 1. jest hladká v $0 \leq \tau \leq t \leq 1$, 2. jest celistvou transcendentou v rovině proměnné λ, a 3. při uvedené počáteční podmínce vyhovuje dané integrodiferenciální rovnici.

Postup řešení: Zvolme formálně $l(t, \tau; \lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i A_i(t, \tau)$. Značí-li $D[l] = \frac{\partial l}{\partial t} + \frac{\partial l}{\partial \tau}$, pak po dosazení do (+) a srovnáním koeficientů u mocnin parametru λ plynou podmínky

$$(++)\ldots \begin{cases} D[A_0] = \eta A_0 \\ D[A_i] = \eta A_i + \displaystyle\int_{\tau}^{t} A_{i-1}\alpha\, d\xi \quad (i = 1, 2, 3, \ldots), \end{cases}$$

což jsou parciální diferenciální rovnice pro koeficienty A_i ($i = 0, 1, 2, \ldots$). Podaří-li se určit A_i, třeba dokázat, že formální řady

$$l(t, \tau; \lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i A_i, \quad \frac{\partial l}{\partial t} = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \frac{\partial A_i}{\partial t}, \quad \frac{\partial l}{\partial \tau} = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \frac{\partial A_i}{\partial \tau}$$

stejnoměrně konvergují v určitém oboru. Dále nutno verifikovat, že $\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i A_i$ vskutku jest řešením rovnice (+), a dokázat pak unicitu řešení při dané počáteční podmínce.

§ 4.

Rovnice $(++)$ mají řešení:

1. $$\mathrm{A}_0(t, \tau) = \mathrm{l}_0(t - \tau) \,.\, \exp\left(\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{t+\tau}{2}} \bar{\eta}\, \mathrm{d}\xi\right),$$

kde

$$\bar{\eta} \equiv \eta\left(\xi + \frac{t-\tau}{2},\ \xi - \frac{t-\tau}{2}\right),$$

při čemž

$$\mathrm{A}_0(t, 0) = \mathrm{l}_0(t).$$

2. $(i = 1, 2, 3, \ldots)$

$$\mathrm{A}_i(t, \tau) \,.\, \exp\left(-\int_{\frac{\tau+t}{2}}^{\frac{t-\tau}{2}} \bar{\eta}\, \mathrm{d}\xi\right) =$$

$$= \int_{\frac{t-\tau}{2}}^{\frac{t+\tau}{2}} \mathrm{d}\xi_1 \,.\, \exp\left(-\int_{\frac{t-\tau}{2}}^{\xi_1} \bar{\eta}\, \mathrm{d}\xi_2\right) \times$$

$$\times \int_{\xi_1 - \frac{t-\tau}{2}}^{\xi_1 + \frac{t-\tau}{2}} \mathrm{A}_{i-1}\left(\xi_3, \xi_1 - \frac{t-\tau}{2}\right) \alpha\left(\xi_3, \xi_1 + \frac{t-\tau}{2}, \xi_1 - \frac{t-\tau}{2}\right) \mathrm{d}\xi_3,$$

při čemž

$$\mathrm{A}_i(t, 0) \equiv 0.$$

Z 1. a 2. snadno plyne, že *počáteční podmínka pro* $\mathrm{l}(t, \tau)$ *jest vskutku splněna.*

§ 5.

Konvergence řady $\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \mathrm{A}_i(t, \tau)$. — Odvodíme si dříve následující *pomocnou větu 1. Předpoklad: V příslušných definičních oborech jest*

$$0 \leq \mathrm{l}_0(t - \tau) < M = \text{konst.},$$

$$|\, \eta(t, \tau) \,| < N = \text{konst.}$$

a

$$|\, \alpha(\xi, t, \tau) \,| < L = \text{konst.}$$

Tvrzení: Pro každý bod oboru $0 \leq \tau \leq t \leq 1$ *platí*

$$|\mathrm{A}_i(t, \tau)| < \mathrm{B}_0 \frac{(e^{2N} L t)^i}{i!} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots),$$

(B_0 = *positivní konst. nezávislá na* i.)

Důkaz: Pro A_0 jest

$$|\mathrm{A}_0(t, \tau)| < M e^N = B_0.$$

Pro A_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ platí odhady

$$|\mathrm{A}_i(t, \tau)| < \exp\left(\int_0^1 N \, \mathrm{d}\xi\right) \int_{\frac{t-\tau}{2}}^{\frac{t+\tau}{2}} \mathrm{d}\xi_1 \exp\left(\int_0^1 N \, \mathrm{d}\xi_2\right) . \int_{\xi_1 - \frac{t-\tau}{2}}^{\xi_1 + \frac{t-\tau}{2}} L . |\mathrm{A}_{i-1}| \, \mathrm{d}\xi_3 <$$

$$< e^{2N} L \int_0^1 \mathrm{d}\xi_1 . \int_0^t \left| \mathrm{A}_{i-1} \left(\xi_3, \xi_1 - \frac{t-\tau}{2}\right) \right| \mathrm{d}\xi_3.$$

Definuji-li

$$\mathrm{B}_i(t) = e^{2N} L \int_0^t \mathrm{B}_{i-1}(\xi_3) \, \mathrm{d}\xi_3 \quad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$(\mathrm{B}_0 = \text{konst.} > 0),$$

pak

$$\mathrm{B}_i(t) = \mathrm{B}_0 \frac{(e^{2N} L t)^i}{i!} .$$

Protože

$$|\mathrm{A}_0(t, \tau)| < \mathrm{B}_0,$$

snadno úplnou indukcí

$$|\mathrm{A}_i(t, \tau)| < \mathrm{B}_i(t),$$

což bylo dokázati.

Závěr pomocné věty 1: Jest

$$\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i |\mathrm{A}_i(t, \tau)| < \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \mathrm{B}_i(t) < \mathrm{B}_0 . \exp(e^{2N} L \lambda t).$$

Z toho plyne, že $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i \mathrm{A}_i(t, \tau)$ *absolutně a stejnoměrně konverguje pro každé konečné* λ *a pro každou dvojici* (t, τ) *v* $0 \leq \tau \leq t \leq 1$.

§ 6.

Konvergence řad derivovaných. — Jsou-li $l_0(t - \tau)$, $\eta(t, \tau)$, $\alpha(\xi, t, \tau)$ *hladké* funkce ve svých (uzavřených) definičních oborech, pak existují konstanty M, N, L, že platí

$$l_0(t - \tau), \ \left|\frac{\partial l_0}{\partial t}\right| \ \text{a} \ \left|\frac{\partial l_0}{\partial \tau}\right| < M,$$

$$|\eta(t, \tau)|, \ \left|\frac{\partial \eta}{\partial t}\right| \ \text{a} \ \left|\frac{\partial \eta}{\partial \tau}\right| < N,$$

$$|\alpha(\xi, t, \tau)|, \ \left|\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right| \ \text{a} \ \left|\frac{\partial \alpha}{\partial \tau}\right| < L.$$

Pomocná věta 2: Buďtež $l_0(t - \tau)$, $\eta(t, \tau)$, $\alpha(\xi, t, \tau)$ *ve svých definičních oborech hladké funkce. Pak*

$$\left|\frac{\partial A_i(t, \tau)}{\partial t}\right| < \frac{(Bt)^i}{i!} + C \int_0^1 d\xi_1 \int_0^t \left|\frac{\partial}{\partial t} A_{i-1}\left(\xi_3, \xi_1 - \frac{t - \tau}{2}\right)\right| d\xi_3,$$

$$(i = 1, 2, 3, \ldots),$$

kde positivní konstanty B a C nezávisí na i. Analogický odhad platí pro $\left|\frac{\partial A_i}{\partial \tau}\right|$.

Důkaz plyne přímo z výrazů pro $\frac{\partial A_i}{\partial t}$ resp. $\frac{\partial A_i}{\partial \tau}$, použijeme-li odhady uvedené v pomocné větě 1.

Pomocná věta 2': Kromě předpokladů v pomocné větě 2. budiž

$$\left|\frac{\partial A_0}{\partial t}\right| \ \text{a} \ \left|\frac{\partial A_0}{\partial \tau}\right| < K = \text{konst.} \ (K \geq 1).$$

Pak $(i = 1, 2, 3, \ldots)$

$$\left|\frac{\partial A_i(t, \tau)}{\partial t}\right| \ \text{a} \ \left|\frac{\partial A_i(t, \tau)}{\partial \tau}\right| < \frac{(Et)_i}{i!},$$

kde $E = B + CK$.

Důkaz plyne z pomocné věty 2 úplnou indukcí.

Závěr pomocné věty 2': Jest

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i \left|\frac{\partial A_i(t, \tau)}{\partial t}\right| \ \text{a} \ \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i \left|\frac{\partial A_i(t, \tau)}{\partial t}\right| < e^{E\lambda t},$$

z čehož následuje, že *řady* $\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \frac{\partial A_i}{\partial t}$ a $\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \frac{\partial A_i}{\partial \tau}$ *absolutně a stejnoměrně konvergují pro* $0 \leq \tau \leq t \leq 1$ *a pro každé konečné* λ.

§ 7.

Verifikace, že odvozená řada $\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i A_i$ vyhovuje dané parciální integrodiferenciální rovnici, jest pouhým závěrem předcházejících úvah. Důkaz unicity řešení při daných počátečních podmínkách provede se některou z obvyklých metod.

Z věty o řešení rovnice (+) plyne: *Popis časového rozpadu uvažovaného souboru jest dán funkcí* $\mathrm{l}(t, \tau; 1)$.

§ 8.

Hledejme *jiný tvar nekonečné řady pro* $\mathrm{l}(t, \tau; 1)$. V podstatě se jedná o různá seskupení členů v řadě $\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i A_i(t, \tau)$ v případě, že $\lambda = 1$.

Vyjděme z rovnice [s danou počáteční podmínkou $\mathrm{l}(t, 0) = \mathrm{l}_0(t)$]

$$\frac{\partial \mathrm{l}}{\partial t} + \frac{\partial \mathrm{l}}{\partial \tau} = \mu \left\{\mathrm{l}\eta + \int_{\tau}^{t} \mathrm{l}(\xi, \tau)\, \alpha(\xi, t, \tau)\, d\xi\right\},$$

kde μ = obecně komplexní parametr. Tato rovnice jest ekvivalentní integrální rovnici

$$\mathrm{l}(t, \tau) = \mathrm{l}_0(t - \tau) + \mu \int_{\frac{t-\tau}{2}}^{\frac{t+\tau}{2}} \mathrm{F}\left(\xi, \frac{t-\tau}{2}; 1\right) d\xi,$$

kde

$$\mathrm{F}\left(\xi, \frac{t-\tau}{2}; 1\right) \equiv \mathrm{l}\left(\xi + \frac{t-\tau}{2}, \xi - \frac{t-\tau}{2}\right) \eta\left(\xi + \frac{t-\tau}{2}, \xi - \frac{t-\tau}{2}\right) +$$

$$+ \int_{\xi - \frac{t-\tau}{2}}^{\xi + \frac{t-\tau}{2}} \mathrm{l}\left(\xi_1, \xi - \frac{t-\tau}{2}\right) \alpha\left(\xi_1, \xi + \frac{t-\tau}{2}, \xi - \frac{t-\tau}{2}\right) d\xi_1.$$

Použijeme-li známých vět z teorie Volterrových integrálních rovnic, ihned plyne nový tvar řešení

$$\mathrm{l}(t, \tau; 1) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{F}_i(t, \tau)$$

se členy

$$\mathrm{F}_0(t, \tau) = \mathrm{l}_0(t - \tau),$$

$$\mathrm{F}_i(t, \tau) =$$

$$= \int_{\frac{t-\tau}{2}}^{\frac{t+\tau}{2}} \mathrm{d}\xi \left[\mathrm{F}_{i-1}\left(\xi + \frac{t-\tau}{2}, \xi - \frac{t-\tau}{2}\right) \eta\left(\xi + \frac{t-\tau}{2}, \xi - \frac{t-\tau}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \int_{\xi - \frac{t-\tau}{2}}^{\xi + \frac{t-\tau}{2}} \mathrm{F}_{i-1}\left(\xi_1, \xi - \frac{t-\tau}{2}\right) \alpha\left(\xi_1, \xi + \frac{t-\tau}{2}, \xi - \frac{t-\tau}{2}\right) \mathrm{d}\xi_1 \right]$$

$$(i = 1, 2, 3, \ldots).$$

§ 9.

Do formulí pro koeficienty $\mathrm{A}_i(t, \tau)$ můžeme zavésti následující *pomocnou pravděpodobnost*. Předpokládejme, že vystouplá individua se nevracejí a uvažujme středy částečných intervalů, které vzniknou vložením hodnoty τ do časového úseku $< 0, t >$. Pak integrál rovnice

$$\frac{1}{\mathrm{l}\left(\xi + \frac{t-\tau}{2}, \xi - \frac{t-\tau}{2}\right)} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathrm{l}\left(\xi + \frac{t-\tau}{2}, \xi - \frac{t-\tau}{2}\right)}{\mathrm{d}\xi} =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \eta_i\left(\xi + \frac{t-\tau}{2}, \xi - \frac{t-\tau}{2}\right) = \bar{\eta}$$

v mezích $< \frac{t-\tau}{2}, \frac{t+\tau}{2} >$ jest

$$\mathrm{l}(t, \tau) = \mathrm{l}(t - \tau, 0) \exp\left(\int_{\frac{t-\tau}{2}}^{\frac{t+\tau}{2}} \bar{\eta}\, \mathrm{d}\xi\right).$$

Smysl mají jen hodnoty $(t - \tau)$, pro které $\mathrm{l}(t - \tau, 0) \neq 0$, takže