Vzájemný vztah různých systémů dotykových kuželoseček obecné křivky čtvrtého stupně.

Dr. *L. Seifert* v Brně.

(Došlo 14. března 1933.)

Dvojné tečny křivky čtvrtého stupně tvoří zajímavou konfiguraci, jíž se zabýval Steiner a po něm četní jiní. Přehled výsledků podal Timerding.[1]) Mezi metodami, jimiž lze k uvedeným vlastnostem dospěti, jsou dvě čistě geometrické. Jest to především Geiserova stereografická projekce plochy třetího stupně, kde obrysová křivka jest obecná křivka čtvrtého stupně, a pak jiná cesta, které použil Ciani,[2]) ukázav, že tuto křivku lze považovati za průsek roviny s Kummerovou plochou a že ze známých vlastností konfigurace dvojných bodů a singulárních tečných rovin vycházejí vlastnosti konfigurace dvojných tečen křivky. Steiner podal své věty bez důkazu, ale jisto jest, že mu za východisko sloužily úvahy o kvadratických systémech kuželoseček, z nichž každá se křivky dotkne ve čtyřech bodech. O těchto systémech se mluví v dalších pracích, ale obyčejně se jen zjišťuje počet systémů a nejedná se o jejich vzájemných vztazích. Teprve Kohn[3]) našel četné zajímavé věty metodami, kterých někteří předchůdci a zejména Hesse používali.

V tomto článku chci ukázati, jak lze Geiserovy metody použíti k odvození vět o vzájemném vztahu různých systémů dotykových kuželoseček, omezuji se však jen na věty nejhlavnější. Tento problém jest ostatně u Kohna vyčerpán velmi důkladně. Poznamenávám, že k odvození vět o dvojných tečnách Geiserovy metody soustavně bylo použito Zachariasem v jedné disertaci z r. 1903 (Rostock).

1. Promítejme plochu třetího stupně Φ z jednoho bodu jejího O, jenž neleží na žádné přímce plochy, na rovinu π. Průsek Φ s první polárou Π_0 bodu O jest křivka K^6 šestého stupně s dvojným bodem O. Z bodu O se promítne jako křivka K stupně 4 a rodu 3, zdánlivý obrys plochy. Jest dobře známo, že takovou křivku čtvrtého stupně lze naopak považovati vždy za obrys obecné plochy

[1]) Crellův žurnal, sv. 122, 1901, str. 209.

[2]) Rendiconti del R. Inst. Lombardo 1895, 1898. Annali di Matematica, S. III, t. II., 1898.

[3]) Monatshefte der Math. u. Physik, r. I. 1890, str. 70, 129. Crellův žurnál sv. 107, str. 1.

třetího stupně. 27 přímek plochy jeví se jako dvojné tečny křivky K, stopa t tečné roviny τ bodu O jest další tečna dvojná a stopy obou přímek plochy Π_0 v τ ležící jsou dotyčné body tečny t.

Průsečík křivky K^6 s jinou křivkou na Φ jeví se v π jako dotyk, pokud tečna této křivky v průsečném bodě neprochází bodem O. Jest nyní otázka, které křivky na ploše se promítnou do π jako kuželosečky dotýkající se K ve čtyřech bodech. Je-li k kuželosečka v π, pak kužel $O(k)$ seče Φ obecně v křivce stupně 6 s dvojným bodem O, může se rozpadnouti na kuželosečku a křivku čtvrtého stupně s dvojným bodem O neb ve dvě křivky třetího stupně o společném bodě O. Nechť k se dotýká K ve 4 bodech. Zoveme takové kuželosečky prostě *dotykové*. Pak kužel $O(k)$ se dotýká Φ ve 4 bodech na K_6. Jsou-li tyto body v téže rovině, pak jejich rovina seče kužel $O(k)$ v kuželosečce, jež s průsekem roviny a plochy Φ má dotyk ve 4 bodech, t. j. tento průsek se rozpadá v kuželosečku a přímku. Kuželosečka v rovině jest tedy průmětem kuželosečky na ploše a ovšem současně i prostorové křivky čtvrtého stupně s dvojným bodem O. Nejsou-li body dotyku kužele s Φ v téže rovině, sestrojme na kuželu $O(k)$ křivku třetího stupně, která jde těmito body a v O se dotýká jedné přímky kuželu obsažené v tečné rovině τ. Tato má pak s Φ dotyk v pěti bodech, leží tedy celá na Φ a k jest průmět dvou kubických křivek o společném bodě O. *Vidíme tedy, že dotyková kuželosečka* v π jest *obrazem kuželosečky* (současně křivky čtvrtého stupně s dvojným bodem O) *nebo kubické křivky jdoucí dvojným bodem O* (současně ještě jiné kubické křivky).

2. Na ploše třetího stupně je 27 systémů kuželoseček. Každá přímka plochy je osou svazku rovin, které obsahují kuželosečky jedné řady. Plocha má, jak známo, 36 přímkových dvojšestnin a ke každé patří dva systémy křivek třetího stupně (sdružené); křivky prvého mají přímky jedné šestniny za bisekanty a neprotínají přímek doplňkové šestniny, u druhého systému jest tomu naopak. Jedna křivka jednoho a jedna druhého systému jsou vždy na jedné ploše druhého stupně. Tak dostáváme všech $27 + 36 = 63$ řad dotykových kuželoseček v rovině. V každé řadě je šest kuželoseček zvrhlých ve dvojici přímek. Je-li p přímka plochy, jde jí pět tritangenciálních rovin, které mimo p obsahují ještě dvě různoběžné přímky. Průměty těchto dvojic a stopa tečné roviny t s p tvoří šest rozpadlých kuželoseček. Je-li k_3 kubická křivka bodem O, pak každá plocha druhého stupně křivkou k_3 jdoucí seče Φ ještě v jedné křivce l_3. Plochy, které se mimo to v O dotýkají roviny τ tvoří svazek a l_3 se promítají jako řada dotykových kuželoseček. Ve svazku křivek (l_3) jest šest křivek, jež se rozpadnou v přímku a kuželosečku bodem O a promítnou se do π jako dvojice přímek. To plyne ihned ze známého zobrazení plochy třetího stupně do roviny, kde přímky jedné šestniny se zobrazí jako základní body.

Přímky l_3 zobrazí se jako přímky svazku O, k_3 jako křivky stupně pět s dvojnými body v základních bodech a jdou bodem O. Zvrhlé křivky řady (l_3) jsou zobrazeny ve spojnicích O se základními body.[4])

3. Buď a přímka plochy Φ, α, β dvě roviny svazku (a), k^α, k^β kuželosečky v nich ležící. Kužel $O(k_\alpha)$ seče Φ ještě v křivce stupně čtvrtého $K_\alpha{}^4$ s dvojným bodem O, jež s k_α má společné čtyři body, které se promítnou jako body dotyku. Jiná plocha křivkou $K_\alpha{}^4$ seče Φ v kuželosečce, jejíž rovina patří opět svazku (a). Také k_β leží v jedné takové ploše P. Ale P seče Π_0 opět v křivce čtvrtého stupně s dvojným bodem O a ta jde zřejmě body, ve kterých k_α, k_β sekou K^6. Projekce její je tedy kuželosečka, jež jde osmi body dotyku křivek k_α, k_β.

Buď k_3 kubika na Φ bodem O, l_3 sdružená na $O(k_3)$. Plochy druhého stupně, které jdou křivkou l_3 a v O se dotýkají roviny τ, tvoří svazek, který z Φ vytíná kubiky systému k_3. Každá z nich seče Π_0 v křivce stupně čtvrtého s dvojným bodem O, jež opět jde osmi body, ve kterých k_3 (současně l_3) a druhá křivka sekou K^6. V projekci se jeví jako kuželosečka jdoucí osmi body dotyku dvou kuželoseček.

Osm bodů dotyku dvou kuželoseček téže řady jest vždy na nové kuželosečce.

4. Všimněme si, jak se k jedné dotykové kuželosečce chovají kuželosečky ostatních řad.

Buď jako v předešlém a přímka na Φ, k_α kuželosečka v rovině α a $K_\alpha{}^4$ křivka na kuželi $O(k_\alpha)$. Buď b přímka s první různoběžná, β libovolná rovina přímkou b, k_β kuželosečka v ní. b neseče k_α, seče $K_\alpha{}^4$ ve dvou bodech. Otáčí-li se β kolem b, dostáváme na k_α kvadratickou involuci o středu (a, b), na $K_\alpha{}^4$ rovněž involuci. Přímky spojující přidružené body jsou bisekanty křivky $K_\alpha{}^4$ sekoucí b a ty tvoří plochu druhého stupně. Jedna přímka systému, kterému patří i b, leží v τ a promítne se jako bod (c_{12}, t) neboť třetí přímka c_{12} v rovině (a, b) patří také uvedené ploše. Máme tedy v projekci dvě kvadratické involuce na k_α o středech v průsečících dvojných tečen (a, b), (c_{12}, t).

Je-li b různoběžné s a, seče v jednom bodě k_α, v jednom $K_\alpha{}^4$, tedy dostáváme v projekci na k_α řadu bodovou a projektivní s ní kubickou involuci.

Buď (k_3) systém kubik bodem O, (l_3) systém sdružený. Pak a jest pro všechny k_3 současně bisekantou a neseče l_3 (anebo obráceně),

[4]) Základní body označme $A_1, A_2, A_3 \ldots A_6$ nebo případně kratčeji 1, 2, 3 . . . 6. Literatura o ploše třetího stupně jest nejúplněji uvedena v Pascalově Repetitorium der höheren Matematik, II nebo v Encyklopädie der Math. W., sv. III_2, sešit 10.

Nejdůležitější věty o konfiguraci přímek a křivkách na ploše jsou ve spisu J. Vojtěch, Geometrie projektivní.

nebo jest současně unisekantou pro k_3 i l_3. V prvém případě dostaneme v projekci na k_a řadu bodovou a projektivní involuci, v druhém dvě kvadratické involuce.

K pevné kuželosečce jedné řady chovají se kuželosečky ostatních řad dvojím způsobem:

1. *Vytínají řadu bodovou a kubickou involuci, které jsou projektivní. Bodu řady odpovídá trojina involuce, jež s ní leží na téže kuželosečce.*

2. *Vytínají dvě kvadratické involuce, při čemž si odpovídají páry ležící na téže kuželosečce.*

Stejným způsobem jako k vytčené jedné kuželosečce chovají se ke všem kuželosečkám řady, ke které tato patří. Říkáme, že dvě řady dotykových kuželoseček *jsou ve vztahu prvého neb druhého druhu.*

5. Nyní můžeme zodpověděti otázku, kolik řad je s jednou řadou ve vztahu prvého neb druhého druhu.

Je-li řada zobrazena na roviny svazku (a), pak se otázka převádí na otázku, kolik přímek plochy seče neb neseče a, a kolik řad kubických křivek má a za bisekantu neb unisekantu, jinak, v kolika dvojšestninách je a obsaženo. Jest však známo, že přímku a seče 10 jiných, neseče 16 přímek plochy a je obsažena v šestnácti šestninách (dvojšestninách) a nevyskytuje se ve dvaceti. Podle toho je k řadě dotykových kuželoseček zobrazených na (a) 30 řad ve vztahu druhého a 32 ve vztahu prvého druhu.

Docela podobně lze souditi, je-li obrazem dotykové křivky kubika k_3. Nejlépe vzíti na pomoc zobrazení. Nechť k_3 se zobrazí jako přímka bodem O. Vidíme hned, že šest přímek ji seče ve dvou, šest ji neseče, 15 v jednom bodě. Uvažované kubické křivky bodem O se zobrazují: a) jako přímky bodem O a křivky pátého stupně s dvojnými body v základních bodech A_i, které jdou bodem O; b) jako křivky stupně čtvrtého s dvojnými v základních bodech A_i, A_k, A_l a jednoduchými v ostatních a bodem O, doplňkový systém jsou kuželosečky jdoucí ostatními základními body a bodem O (20 systémů); c) dvě řady křivek třetího stupně, které obsahují čtyři základní body jako jednoduché, pátý neb šestý jako dvojný a jdou bodem O (15 systémů).[5] Vidíme tedy opět, že k řadě zobrazené do přímek svazku (O) je $12 + 20 = 32$ ve vztahu prvého druhu a $15 + 15 = 30$ ve vztahu druhého druhu. *Ke každému systému jest tedy 32 ve vztahu prvého a 30 ve vztahu druhého druhu.*

6. Všimněme si nyní vztahu druhého druhu. V každém systému dotykových kuželoseček jest šest kuželoseček rozpadlých, sestávajících ze dvou dvojných tečen křivky K. Tažme se nyní, kolik těchto přímek patří současně oběma systémům. Dvě přímky na Φ,

[5]) Srovnej na př. Diekmann, Mathem. Annalen, sv. 4, str. 442.

které se sekou, a, b ukazují hned, že jsou to přímky a, b, c_{12}, t, jež nutno jako části zvrhlé kuželosečky přičísti svazku (a) i (b). Podobně i v případech, kdy jeden neb oba systémy se zobrazí do svazku (k_3), shledáme, že jsou čtyři dvojné tečny společné a právě oněmi jdou středy obou involucí.

Mnohem zajímavější jest vztah první. Buď opět jako v odst. 4 a přímka plochy, α rovina svazku (a), k_a kuželosečka v ní a K_a^4 příslušná křivka čtvrtého stupně. Přímka b mimoběžná s a seče v jednom bodě k_a, v jednom K_a^4. Roviny β svazku (b) dávají na K_a^4 kubickou involuci. Bisekanty křivky K_a^4 sekoucí b tvoří přímkovou plochu pátého stupně, na níž b a K_a^4 jsou dvojnásobné křivky. Průsek její s Φ sestává mimo b a K_a^4 ještě z pěti přímek, které sekou b a dvakrát K_a^4, tedy sekou a i b. O je na této přímkové ploše trojnásobný, neboť bisekanty křivky K_a^4 sekoucí libovolnou přímku p bodem O tvoří plochu třetího stupně s dvojnásobnou p, jež b seče mimo K_a^4 ještě ve dvou bodech. Tedy dvě bisekanty sekou b, p, K_a^4. Kužel tečen naší přímkové plochy pátého stupně z bodu O jest druhého stupně. Stopa na π jest kuželosečka, jíž jsou opsány trojúhelníky tvořené trojinami involuce na dotykové kuželosečce k_a. Kužel dotýká se uvedených pěti přímek, které sekou a, b, a roviny τ. To jsou v projekci právě dvojné tečny společné oběma řadám. Kužel je tedy týž, ať k_a je jakákoli kuželosečka prvé řady, a můžeme mluviti právem o *involučním kuželu* a *involuční kuželosečce* společné dvěma řadám ve vztahu druhu prvého.

Na Φ jest 216 dvojic mimoběžných přímek, tolik involučních kuželoseček jim v rovině odpovídá.

Buď (k_3) svazek kubik bodem O, a přímka, která neseče k^3. Bisekanty křivky k_3 sekoucí a tvoří přímkovou plochu čtvrtého stupně s jednoduchou přímkou a a dvojnásobnou křivkou k_3. Kužel tečen z bodu O je kvadratický a stopa jeho involuční kuželosečka řad (a), (k_3). Tato přímková plocha má s Φ mimo k_3, a ještě pět přímek, které právě jako rovina (Oa) se dotknou kuželu. V projekci máme zase šest dvojných tečen, které se dotknou involuční kuželosečky. Poněvadž k řadě (k_3) jest na Φ šest mimoběžek, vznikne tímto způsobem $6 \,.\, 72 = 432$ involučních kuželoseček.

Buď (k_3) systém kubik bodem O, (l_3) systém sdružený, (m_3) jiný, (n_3) s ním sdružený, takže m^3 seče k_3 mimo O vždy ve třech bodech. Jest známo, že roviny určené trojinami involuce na kubické křivce tvoří svazek. V průmětu dostáváme kuželosečku a trojúhelníky tvořené trojinami involuce jsou opsány kuželosečce. Všimněme si rozpadlých křivek a vezměme opět na pomoc zobrazení. k_3 ať se zobrazí jako křivka čtvrtého stupně s dvojnými A_1, A_2, A_3, jednoduchými A_4, A_5, A_6, O, (m_3) ať tvoří svazek O. Pak OA_1, OA_2, OA_3 představují křivky rozpadlé v kuželosečku bodem O a bisekantu křivky k_3. OA_4, OA_5, OA_6 jsou obrazy kuželoseček, které sekou k_3

dvakrát a jsou v téže rovině s přímkami zobrazenými v kuželosečky *(12356)*, *(12346)*, *(12345)*. Poslední tři přímky jsou opět části systému (k_3), neboť kuželosečky na př. *(12356)* a *(12340)* jsou obrazem vždy jedné k_3 zvrhlé v přímku a kuželosečku. Involuční kužel se dotkne přímek zobrazených do *1, 2, 3* a *(12356)*, *(12364)*, *(12356)*, to jest přímek, jež na ploše tvoří dvě sdružené trojiny a jsou úplný průsek hyperboloidu s Φ. Takových hyperboloidů jest 360 a zdánlivý obrys v π každého jest involuční kuželosečka dvou řad. Je tedy celkem $216 + 432 + 360 = 1008$ invol. kuželoseček, jež se vždy dotýkají šesti dvojných tečen křivky K.

7. Všimněme si tečné roviny σ involučního kuželu v prvém případu odst. 6. Přímky a, b sekou σ v A, B na křivce k_σ, průsečné roviny s Φ. Body A, B jdou přímky p_a, p_β, průsečnice s a, β a sekou k_σ v bodech M, N, resp. R, S, takže MR, NS jdou bodem O. Je-li T průsečík $q \equiv AB$ s τ, pak podle známé věty o rovinné kubice TO se dotýká v O křivky k_σ, leží tedy v rovině τ. Přímka q, jež seče mimoběžky a, b a křivku v τ s dvojným bodem O tvoří plochu stupně 4, na které a, b jsou dvojnásobné řídicí, jejich transversála bodem O dvojnásobnou tvořicí přímkou. Kužel tečen z bodu O jest kvadratický, dotýká se zřejmě pěti přímek, jež sekou současně a, b, a roviny τ. Tak jsme znovu dospěli k involučnímu kuželu. Mimoto vidíme, že v tečné rovině σ svazky (A), (B) vytínají na k_σ kvadratické involuce perspektivní podle středu O. V projekci: *na tečně involuční kuželosečky vytínají oba systémy dotykových kuželoseček tentýž kvadratický bodový systém.* Totéž vychází ještě jednodušeji v ostatních případech projednaných v odst. 6.

8. Právě tak snadno lze odvoditi větu: *Tři involuční kuželosečky dané třemi různými řadami mají vždy čtyři společné tečny.*

Jak snadno ze zobrazení vychází, mohou na Φ nastati tyto případy: *a*) Tři mimoběžné přímky a, b, c; trojina přidružená d, e, f a t jsou v projekci společné tečny involučních kuželoseček řad (a), (b), (c). *b*) Dvě mimoběžné přímky a, b a řada (k_3), jež neseče a ani b. Je-li a, b zobrazeno do *1, 2*, k_3 jako přímka bodem O, vidíme hned, že kuželosečky *(12345)*, *(12346)*, *(12356)*, *(12456)* představují přímky sekoucí a, b a dvakrát k_3, tedy projekce v π jsou dvojné tečny společné třem involučním kuželosečkám.

9. Všimněme si křivky, jíž vytvořují dvě řady dotykových kuželoseček vztažené na sebe projektivně.

Dvě řady ve vztahu prvého druhu buďte zobrazeny na svazky (a), (b), při čem a, b se neprotínají. Jsou-li svazky (a), (b) projektivní, vytvořují hyperboloid a ten seče Φ mimo a, b ještě v křivce racionální čtvrtého stupně, která se z O promítá jako racionální křivka o třech dvojných bodech, jež se křivky K dotýká v osmi bodech, neb z dvanácti průsečíků hyperboloidu s K jsou čtyři na a, b. Ke každému k_a patří $K_a{}^4$ na kuželu $O(k_a)$. Poněvadž svazek ploch určený křivkou K_a^4 seče Φ v kuželosečkách svazku a, vidíme, že všechny uvažované K_a^4 lze dostati svazkem ploch druhého stupně, jež jdou křivkou k_a a dotýkají se v O roviny τ. Tento svazek ploch a svazek (b) jsou projektivní a vytvoří plochu třetího stupně, jež s Φ má k_a, b a ještě křivku stupně šestého. Obě plochy mají v O dotyk, O je tedy dvojný bod a křivka se promítne jako křivka stupně čtvrtého. Rod této křivky jest dvě, neboť zobrazí-li se a jako základní bod *1*, b jako *2*, zobrazí se k_a jako kubika s dvojným *1*, jednoduchými *3*, *4*, *5*, *6*, zbývající část průseku jako křivka stupně 6 s trojným *2*, dvojnými *3*, *4*, *5*, *6*, *0*, tedy rodu $\frac{1}{2}.\ 5.4 - 8 = 2$. Projekce je kvartika s jedním dvojným. Poněvadž k_a s příslušným K_a^4 se sekou na K, vidíme, že obě křivky vytvořené sekou K v týchž bodech a v projekci se dotýkají v týchž osmi bodech křivky K.

Je-li jeden systém na ploše (k_3), pak svazek ploch jednou sdruženou křivkou l_3, které se dotýkají v O roviny τ, vytíná systém k_3 a jest projektivně vztažen ke svazku rovin neb jinému svazku ploch druhého stupně. Podobnou úvahou dospějeme k stejnému výsledku: *Jsou-li dva systémy dotykových kuželoseček, jež jsou ve vztahu prvého druhu, projektivní, vytvoří dvě křivky stupně čtvrtého, z nichž jedna má jeden, druhá tři dvojné body a dotýkají se K v týchž osmi bodech.*

Uvažujme systémy projektivní ve vztahu druhého druhu. Buďte a, b dvě přímky různoběžné, S jejich průsečík. Svazek (a) je projektivní s (b) a výtvor je kužel o vrcholu S, který mimo a, b má s Φ společnou křivku rodu jedna a v projekci tedy dva dvojné body. Svazek ploch druhého stupně křivkou k_a s dotykem v O je projektivně vztažen na (b) a dává mimo k_a, b křivku šestého stupně a rodu jedna, jak podobné zobrazení ukazuje. Tedy: *Jsou-li na sebe projektivně vztaženy dva systémy ve vztahu druhého způsobu, vytvořují dvě křivky stupně čtvrtého, každou se dvěma dvojnými body, které mají s K dotyk v týchž osmi bodech.*

10. Studujme geom. místo bodů, v nichž se dotýkají kuželosečky dvou různých řad, jež jsou ve vztahu prvého druhu. Tomuto místu patří K a šest dvojných tečen křivky K, jež jako části zvrhlých kuželoseček patří oběma řadám, a pak vlastní křivka R, o níž chceme uvažovati.

Buďte a, b mimoběžky na Φ. k_a, k_β se nemohou dotknouti, neboť společná tečna by proťala a, b, ležela by tedy celá na ploše, ale dotkne se K_a^4 a k_β. Tečna v bodě dotyku r jest bisekanta K_a^4, jež seče b, (rO) je tečná rovina involučního kuželu. V ní z bodu B vycházejí čtyři tečny k Φ a tedy lze říci: *Dotyčné body tečen křivky k_a jedné řady společných s involuční kuželosečkou náleží křivce R.*

Abychom určili *stupeň* křivky R na Φ, užijme zobrazení: a nechť se zobrazí do kuželosečky *(12345)*, k^a tedy jako svazek přímek (*6*), b ať se zobrazí do (*12346*), k^β jako svazek (*5*). $K_\beta{}^4$ jest pak zobrazeno do křivky pátého stupně s dvojnými *0, 1, 2, 3, 4, 6* a jednoduchým *5*; tyto křivky tvoří svazek a my hledáme dotyčné body tečen vycházejících z bodu *6* ke křivkám tohoto svazku. První poláry bodu *6* ke křivkám svazku tvoří opět svazek a mají *6* za dvojný bod s týmiž tečnami jako původní křivka, a jednoduché body *0, 1, 2, 3, 4*. Oba svazky vytvořují křivku stupně devátého a lze snadno poznati, že *6* jest jejím pětinásobným, *0, 1, 2, 3, 4* trojnásobnými, *5* jednoduchým bodem. Tato křivka je obrazem křivky na ploše stupně 3.9 — 5 — 4.3 — 1 = 9, rodu 3. O je trojnásobný, promítne se tedy jako křivka *stupně šestého*. Je-li jedna řada neb obě dvě zobrazeny do svazků kubik, lze docela podobnou úvahou dospěti k témuž výsledku.

Buďte a, b různoběžné přímky na Φ, P jejich průsečík. Dotýkají-li se k_α, k_β, tečna bodu dotyku prochází bodem P. Ale tyto body dotyku jsou na průsečné křivce Φ s Π_P (první polára P). Π_P má s Φ mimo a, b ještě křivku čtvrtého stupně R rodu 1. R jde též body dotyku rovin vedených přímkou OR ku ploše a těch je osm, nečítáme-li body na a, b. Také jde osmi body dotyku tritangenciálních rovin vedených přímkami a, b. V projekci máme tedy křivku čtvrtého stupně se dvěma dvojnými body, která se dotkne K v osmi bodech, dotyčných bodech tečen z P ke K. Snadno lze určiti přímku, na které jsou oba dvojné body. V rovině ϱ svazku (OP) vycházejí z P čtyři tečny k průsečné křivce. Označme dotyčné body X, Y, Z, T. Mají-li na př. X, Y, O býti na přímce, musí tečna v bodě P a tečna v O se protínati na křivce. Tečná rovina v P jest (a, b), v ní leží c_{12}, tedy ϱ musí procházeti bodem, v němž τ seče c_{12}. Pak jest ovšem i Z, T, O na přímce a v projekci oba dvojné body jsou na přímce, jež spojuje body (a, b), (c_{12}, t).

Ale k_β může se dotýkati též křivky $K_\alpha{}^4$; buď u příslušná tečna. V rovině (uO) máme křivku třetího stupně a z bodů A, B jdou k ní tečny, jež mají dotyčné body v téže přímce s O, t. j. AB seče křivku v témž bodě jako tečna bodu O. Tento bod C_{12} je průsečík τ s c_{12}, všechny ϱ jdou přímkou OC_{12}. Hledáme tedy křivku dotyčných bodů tečen plochy Φ, které sekou OC_{12}, b. V rovině přímkou b jest k^β a bod M na OC_{12}. Polára m bodu M ke k^β dává dva body křivky. Ale m jest též ve druhé poláře bodu M. Druhé poláry obalují kužel a jeho tečné roviny jsou projektivně vztaženy na roviny svazku (b). Plocha přímek m jest třetího stupně, má b za dvojnásobnou a obsahuje celou c_{12} a dotýká se v O plochy Φ. Má tedy s Φ mimo b a c_{12} ještě křivku R' šestého stupně s dvojným bodem O, jež jde také osmi body dotyku teč. rovin z a, b. V projekci máme opět křivku čtvrtého stupně, která je k tečnám dvojným c_{12}, t v témž vztahu jako R k a, b. Oba dvojné body jsou, jak snadno lze viděti, na spojnici (ab), (tc_{12}) a identické s dvojnými body prvé křivky. K týmž