uzavřená F_ν taková, že $G = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu$. Klademe-li $\Phi_\nu = S \,.\, F_\nu$, jest $Z = \sum_{\nu=1}^{\infty} \Phi_\nu$ a množství Φ_ν jsou uzavřená v S. Tedy každé v S otevřené množství jest F_σ v R. Zbývá ukázati, že S jest normální prostor. Nechť tedy A, B jsou uzavřená v S a nechť $A \,.\, B = 0$. Máme ukázati, že existují v S otevřená U', V' taková, že $A \subset U'$, $B \subset V'$, $U' \,.\, V' = 0$. Ježto A, B jsou uzavřená v S, podle M, 6 jest $A = \bar{A} \,.\, S$, $B = \bar{B} \,.\, S$. Ježto $A \,.\, B = 0$, jest $\bar{A} \,.\, \bar{B} \,.\, S = 0$. Klademe-li $A_0 = \bar{A} - \bar{B}$, $B_0 = \bar{B} - \bar{A}$, vidíme lehko, že $A \subset A_0$, $B \subset B_0$. Ježto $A_0 \subset \bar{A}$, podle M, 4,2 jest $\bar{A}_0 \subset \bar{A}$, tedy $\bar{A}_0 B_0 = 0$; podobně $A_0 \bar{B}_0 = 0$. Ježto R jest dokonale normální, $R - \bar{B}$ jest F_σ v R; z toho následuje snadno, že také $A_0 = \bar{A}\,(R - \bar{B})$ jest F_σ v R; podobně B_0 jest F_σ v R. Ježto $A_0 \bar{B}_0 = \bar{A}_0 B_0 = 0$, podle 18 existují v R otevřená U, V taková, že $A_0 \subset U$, $B_0 \subset V$ (tedy $A \subset U$, $B \subset V \subset UV = 0$. Stačí položiti $U' = S \,.\, U$, $V' = S \,.\, V$.

28. *Nechť R jest dokonale normální prostor. Nechť* dim $R \leqq n$. *Nechť $S \subset R$. Pak* dim $S \leqq n$.

Důkaz. Nechť $\mathfrak{U}'$ jest konečný systém v S otevřených množství pokrývající S. Máme ukázati, že existuje konečný systém $\mathfrak{V}'$ v S otevřených množství takový, že 1° $\mathfrak{V}'$ pokrývá S; 2° každé $V' \varepsilon \mathfrak{V}'$ jest částí některého $U' \varepsilon \mathfrak{U}'$; 3° $\mathfrak{V}'$ má řád $\leqq n$. Nechť U'_i $(1 \leqq i \leqq m)$ jsou elementy $\mathfrak{U}'$. Pak existují v R otevřená U_i taková, že $U'_i = S \,.\, U_i$. Položme $A = \sum_{i=1}^{m} U_i$. Množství A jest otevřené v R; ježto R jest dokonale normální, A jest F_σ v R. Tedy existují v R uzavřená $A_\nu (\nu = 1, 2, 3 \ldots)$ taková, že $A = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu$. Ježto dim $R \leqq n$, podle 4 jest dim $A_\nu \leq n$. Tedy podle 24 jest dim $A \leqq n$. Ježto množství $U_1, U_2, \ldots, U_m$ pokrývají A, existuje konečný systém $\mathfrak{V}$ v A uzavřených množství takový, že 1° $\mathfrak{V}$ pokrývá A; 2° každé $V \varepsilon \mathfrak{V}$ jest částí některého U_i; 3° $\mathfrak{V}$ má řád $\leqq n$. Žádaný systém $\mathfrak{V}'$ obdržíme, když každé $V \varepsilon \mathfrak{V}$ nahradíme množstvím $V' = S \,.\, V$.

*

Contribution à la théorie de la dimension.

(Extrait de l'article précédent.)

Définition. R étant un espace topologique, dim $R \leqq n$ $(= -1, 0, 1, 2, \ldots)$ signifie: A chaque famille finie $\mathfrak{U}$ d'ensembles ouverts recouvrant R on peut attacher une famille finie $\mathfrak{V}$ d'ensembles ouverts telle que: 1° $\mathfrak{V}$ recouvre R; 2° chaque $V \varepsilon \mathfrak{V}$ fait partie d'un $U \varepsilon \mathfrak{U}$; 3° l'ordre[1]) de $\mathfrak{V}$ est $\leqq n$.

[1]) $\mathfrak{V}$ étant une famille de sous-ensembles de R, l'ordre de $\mathfrak{V}$ est $\leqq n$, si la partie commune à $n + 2$ éléments quelconques de $\mathfrak{V}$ est vide.

Théorème I. Soit R un espace normal. Soit $R = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu$, $A_\nu = \overline{A}_\nu$, dim $A_\nu \leq n$. Alors dim $R \leq n$.

Démonstration. Soit $\mathfrak{U} = \{U_i\}$ $(1 \leqq i \leqq m)$ une famille finie d'ensembles ouverts recouvrant R. On construit par récurrence des familles $\mathfrak{V}^\nu = \{V_i^\nu\}$ $(1 \leqq i \leqq m;\ \nu = 1, 2, 3, \ldots)$ d'ensembles ouverts telles que: 1⁰ $\overline{V}_i^\nu \subset U_i$; 2⁰ $V_i^\nu \subset V_i^{\nu+1}$; 3⁰ $\mathfrak{V}^\nu$ recouvre A_ν; 4⁰ l'ordre de $\mathfrak{V}^\nu$ est $\leqq n$. Les ensembles $V_i = \sum_{\nu=1}^{\infty} V_i^\nu \subset U_i$ recouvrent R et on voit sans peine que l'ordre de $\{V_i\}$ est $\leqq n$. On peut supposer que $A_1 = 0$; alors $V_i^1 = 0$. En supposant la famille $\mathfrak{V}^\nu$ construite. on construit $\mathfrak{V}^{\nu+1}$ comme il suit: Soient W_i, P_i $(1 \leqq i \leqq m)$ des ensembles ouverts tels que: 1⁰ $\overline{V}_i^\nu \subset P_i \subset \overline{P}_i \subset$ $\subset W_i \subset \overline{W}_i \subset U_i$; 2⁰ l'ordre de $\mathfrak{W} = \{W_i\}$ est $\leqq n$. Soit $\mathfrak{Z} = \{Z_r\}$ une famille finie d'ordre $\leqq n$ d'ensembles ouverts recouvrant $A_{\nu+1}$ et telle que 1⁰ $Z_r \overline{V}_i^\nu \neq 0$ entraîne $Z_r \subset P_i$; 2⁰ $Z_r \overline{P}_i \neq 0$ entraîne $Z_r \subset W_i$. Z_r est *de première espèce* s'il existe un i tel que $Z_r \overline{V}_i^\nu \neq 0$; chaque Z_r de première espèce soit attaché à *chaque* i tel que $Z_r \overline{V}_i^\nu \neq 0$. Z_r est de *deuxième espèce* si $Z_r \overline{V}_i^\nu = 0$ pour chaque i; chaque Z_r de deuxième espèce soit attaché à *une seule valeur de i* choisie de manière que $\overline{Z}_r \subset U_i$ et, *si cella est possible*, aussi que $Z_r \overline{P}_i \neq 0$. Posons $V_i^{\nu+1} = V_i^\nu + \Sigma Z_r$, r parcourant toutes les valeurs telles que Z_r est attaché à l'indice i.

Théorème II. Soit R un espace parfaitement normal.[2]) Soit dim $R \leqq n$. Soit $S \subset R$. Alors dim $S \leqq n$.

Démonstration. Soient U_i $(1 \leqq i \leqq m)$ des ensembles ouverts recouvrant S. L'ensemble $A = \sum_{i=1}^{m} U_i$ étant un F_σ dans R, on déduit facilement du théorème I que dim $A \leqq n$. Il existe donc des ensembles ouverts V_i tels que: 1⁰ $V_i \subset U_i$; 2⁰ $\sum_{i=1}^{m} V_i = A \supset S$; 3⁰ l'ordre de $\{V_i\}$ est $\leqq n$.

Problème. La définition de la dimension ici adoptée est-elle équivalente, pour tous les espaces parfaitement normaux, à celle adoptée dans mon Mémoire *Sur la dimension des espaces parfaitement normaux* (Bull. intern. de l'Acad. des Sc. de Bohème, 1932)?[3])

---

[2]) Ceci signifie que 1⁰ R est normal; 2⁰ chaque ensemble ouvert est un F_σ. On sait que chaque espace métrisable est parfaitement normal.

[3]) V. aussi ma Note *Sur la théorie de la dimension* (C. R., t. 193, 1931, p. 976).